УДК 517.925, 530.145

Применение симметрийных свойств нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка

Самодуров А.А., Федорако Е.И.
Белорусский государственный университет
Белорусский национальный технический университет

В работе [1] исследовано физическое явление – сверхизлучательная лавина. При этом была получена система

$$\begin{cases} \dfrac{dR_z}{dt} = \left[-\dfrac{2}{\tau} R_- R_+ - \dfrac{N}{2}\left(\dfrac{1}{\tau} + \dfrac{1}{T_1}\right)\right] - \dfrac{R_z}{T_1}, \\ \dfrac{d\ln R_-}{dt} = \left(\dfrac{2}{\tau} - i\omega_0 - \dfrac{1}{T_2}\right) + \dfrac{2}{\tau} R_z, \\ \dfrac{d\ln R_+}{dt} = \left(-\dfrac{2}{\tau} + i\omega_0 - \dfrac{1}{T_2}\right) + \dfrac{2}{\tau} R_z \end{cases}$$

Используя конкретно заданные начальные условия и несколько замен переменных, придем к уравнению

$$y'' + \frac{\tau}{T_1} y' + 8e^y = -\left[2N\left(1 + \frac{\tau}{T_1}\right) + \frac{2\tau^2}{T_1 T_2} \right] \qquad (1)$$

Проведенный в [2] групповой анализ уравнения показывает, что уравнение (1) допускает двухпараметрическую группу преобразований

$$\begin{aligned} x^* &= -\frac{1}{\alpha}\ln\left|C_1 + \exp(-\alpha(x + C_2))\right| \\ y^* &= y + 2\alpha(x + C_2) + 2\ln\left|C_1 + \exp(-\alpha(x + C_2))\right| \end{aligned},$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Если $y_1(x)$ – частное решение уравнения (1), то его общее решение имеет вид

$$y = -2\alpha(x + C_2) - 2\ln\left|C_1 + \exp(-\alpha(x - C_2))\right| + y_1\left(-\frac{1}{\alpha}\ln\left|C_1 + \exp(-\alpha(x + C_2))\right|\right).$$

Литература

1. Самодуров А.А., Чудновский В.М. О решениях одного уравнения нелинейной оптики. //Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. №5. С. 911–913.
2. Федорако Е.И. Непрерывные преобразования дифференциальных уравнений второго порядка с заданной нелинейностью//Весцi Беларускага дзяржаўнага педагагiчнага ўнiверсiтэта. 2014. - Серыя 3. – с. 14-20.