МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра инженерной математики

Н. Н. Роговцов
А. Н. Мелешко

БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ И КОНСТРУКЦИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ И ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие

М и н с к
Б Н Т У
2 0 1 7

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра инженерной математики

Н. Н. Роговцов
А. Н. Мелешко

БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ И КОНСТРУКЦИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ И ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие
для студентов приборостроительного факультета

Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области приборостроения

Минск
БНТУ
2017

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я7
Р59

Рецензенты :
кафедра информатики БГУИР
(зав. кафедрой, канд. техн. наук, доцент *Н. А. Волорова*);
доктор физ.-мат. наук, зав. лабораторией РГД ИТМО им. А. В. Лыкова
А. С. Сметанников

Роговцов, Н. Н.

Р59 Базовые понятия и конструкции элементарной и высшей математики : учебно-методическое пособие для студентов приборостроительного факультета / Н. Н. Роговцов, А. Н. Мелешко. – Минск : БНТУ, 2017. – 131 с.

ISBN 978-985-550-878-7.

Пособие предназначено для студентов инженерных специальностей приборостроительного факультета БНТУ, изучающих курсы «Математика» и «Прикладная математика». В нем изложены сведения о базовых понятиях и конструкциях, широко используемых в элементарной, высшей и прикладной математике; разъяснен смысл ряда математических понятий и конструкций. Особое внимание уделено аналитическим свойствам действительных элементарных функций действительного аргумента и описанию геометрических свойств их графиков. Цель издания состоит в том, чтобы повысить математическую грамотность студентов, компенсировать их недостаточную подготовку в области элементарной математики.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-550-878-7

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие посвящено подробному изложению ряда базовых понятий и конструкций, которые широко используются во многих областях математики и ее разнообразных приложениях. Следует отметить, что без глубокого разъяснения смысла этих понятий и конструкций практически невозможно грамотно изложить содержание многих разделов математики, которые входят в учебные программы по курсам «Высшая математика» («Математика») и «Прикладная математика» и читаются студентам вузов технического профиля. Математика, являясь «царицей наук», имеет ряд особенностей, которые оказывают значительное влияние на процесс ее изучения, восприятия, а также на формирование навыков оперирования математическими объектами и на овладение элементами эвристического мышления. Объем накопленных в математике знаний огромен. Ведь она возникла более четырех тысяч лет назад, и с тех пор ее идеи, понятия, конструкции «рождались», развивались, обобщались, интерпретировались, обосновывались и эффективно применялись в различных областях человеческой деятельности. Среди уникальных черт, которые присущи различным ветвям математики, следует особо выделить свойства универсальности и абстрактности ее идей, понятий, конструкций и представлений, а также отметить систематическое употребление в математике строгих умозаключений дедуктивного и индуктивного типов. Уникальные черты математики могут в определенной степени препятствовать усвоению ее результатов значительной частью студентов, которые не имеют достаточной подготовки по элементарной математике. По указанным выше причинам в издание включена только наиболее важная часть совокупности математических идей, понятий и конструкций, которая лежит в основе как элементарной, так и высшей математики. В пособии достаточно подробно изложены следующие разделы элементарной и высшей математики:

1) элементы общей теории множеств;

2) числовые множества, их классификация и основные свойства;

3) отображения (функции) и их классификация;

4) бинарные отношения и их классификация (отношение эквивалентности);

5) внутренние и внешние бинарные алгебраические операции, их классификация;

6) элементы исчислений высказываний, предикатов и теории вывода (необходимые и достаточные условия);

7) простейшие понятия комбинаторики;

8) метод координат (простейшие задачи аналитической геометрии).

Во второй и третьей главах учебно-методического пособия с использованием многочисленных графических и табличных иллюстраций подробно описаны простейшие свойства неравенств, дробей и операций над действительными и комплексными числами. Более того, в этих главах изложен справочный материал, относящийся к описанию широко используемых тригонометрических тождеств и общих свойств действительных функций действительной переменной. Особое внимание в данном издании уделено изложению конкретных фактов, относящихся к теории элементарных (и некоторых простейших специальных) функций и преобразованиям их графиков. Следует отметить, что изучение свойств таких функций и их графиков позволит обучающемуся лучше понять суть математики и ее возможностей для описания разнообразных реальных процессов, движений, изменений и зависимостей между различными переменными величинами.

Цель данного учебно-методического пособия состоит в том, чтобы не только разъяснить обучающимся (в частности, студентам инженерных специальностей БНТУ) суть базовых понятий и конструкций математики, но также подготовить их к освоению более сложных разделов курсов «Высшая математика» («Математика») и «Прикладная математика» и хотя бы частично компенсировать у них значительные пробелы в знаниях по элементарной математике.

При написании пособия использовались различные литературные источники [1–21], конкретные математические сведения из которых компоновались, преобразовывались и определенным образом дополнялись. Так как изложенный материал не охватывает все базовые понятия и конструкции, то в пособии даются отдельные ссылки на публикации, в которых представлены более подробные определения или разъяснения смысла некоторых понятий и формул.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И КОМБИНАТОРИКИ

1.1. Множества. Операции над множествами

В математике некоторые понятия являются первичными (исходными) и, по сути, частично неопределяемыми. К ним относятся понятия множества, натурального числа, отображения, отношения, точки, прямой и т. д.

Под *множеством* понимают совокупность определенных и отличных друг от друга объектов (предметов), объединенных общим характерным признаком (или признаками) в единое целое. Объекты (предметы), из которых состоит множество, называют *элементами множества*. При этом говорят, что эти элементы принадлежат этому множеству.

Множества обычно обозначают прописными буквами $A, B, ..., X, ...,$ а их элементы – строчными буквами $a, b, ..., x, ...$ Множества, состоящие из конечного (бесконечного) числа элементов называются *соответственно конечными* (*бесконечными*). Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым множеством* и обозначают символом $\varnothing$.

Если A – конечное множество, то число его элементов обозначают через $|A|$ и называют *мощностью множества* A.

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$, если же элемент b не принадлежит множеству A, то пишут $b \notin A$ (или $b \overline{\in} A$).

Множество считают заданным, если о любом объекте можно сказать, что он принадлежит или не принадлежит этому множеству. Множество задается с помощью перечисления всех его элементов или посредством указания свойств, которыми обладают все элементы этого множества. Если множество A состоит из элементов $a_1, a_2, ..., a_n$, то пишут $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Если X – множество всех элементов x таких, что только они обладают некоторым(и) характеристическим(и) свойством(ами) $P(x)$, то используют обозначение $X = \{x \mid P(x)\}$. При этом x – элемент множества X, если для x имеет(ют) место свойство(а) $P(x)$.

Между множествами могут существовать различные отношения. В частности, между ними могут иметь место отношения равенства и включения.

Определение 1.1. Множества A и B называются равными, если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A.

Для обозначения отношения равенства используют знак «=» и пишут $A = B$. Если множество A не равно B, то пишут $A \neq B$.

Определение 1.2. Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.

Если B – подмножество множества A, то используется обозначение $B \subseteq A$. Непустое подмножество B непустого множества A называется собственным, если B не совпадает с A. При этом пишут $B \subset A$. Само множество A и пустое множество $\varnothing$ называют несобственными подмножествами множества A. Символы $\subseteq$ и $\subset$ имеют смысл соответственно отношения включения и отношения строгого включения между множествами. Если все данные множества являются подмножествами одного и того же множества U, то такое множество U называют универсальным множеством (универсумом).

Для пояснения смысла понятий множества, отношения между множествами и операций, которые можно производить над ними, широко используются диаграммы Эйлера–Венна, в которых множествам сопоставляются плоские фигуры, Например, некоторому множеству A можно сопоставить фигуру (рис. 1.1).

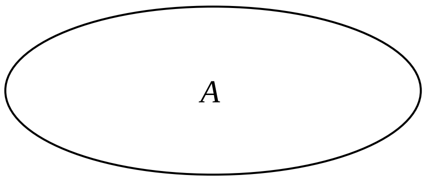


Рис. 1.1. Символическое сопоставление множеству A плоской фигуры

Если множество A есть совокупность точек на плоскости, то оно реально будет идентично некоторой плоской фигуре.

Тот факт, что множества A и B не имеют общих элементов, можно изобразить так, как показано на рис. 1.2. Если A и B имеют некоторое количество общих элементов, то это изображается так, как показано на рис. 1.3. Проиллюстрировать факт того, что множество B является собственным подмножеством множества A можно так, как это изображено на рис. 1.4. Если $A = B,$ то это можно изобразить полным наложением соответствующих этим множествам диаграмм (фигур) одну на другую.

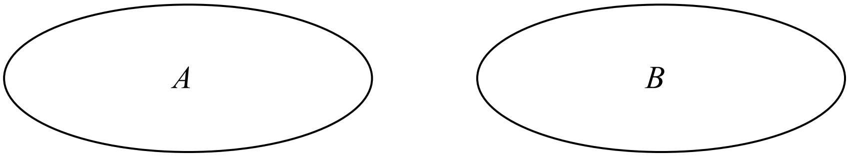


Рис. 1.2. Множества A и B не имеют общих элементов

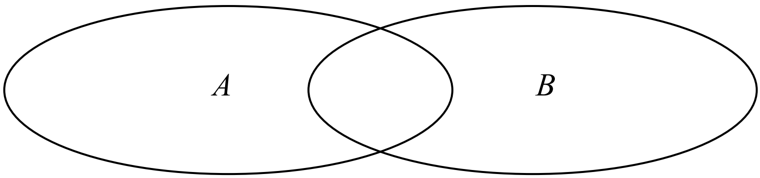


Рис. 1.3. Множества A и B имеют общие элементы

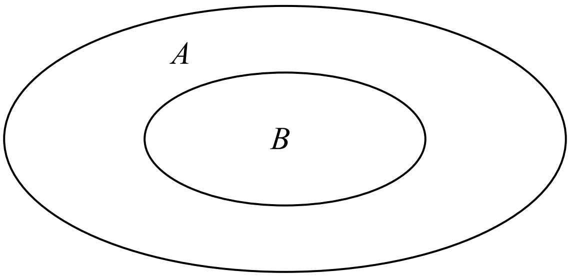


Рис. 1.4. Множество B есть собственное подмножество множества A

Определим простейшие операции над множествами, а также дадим их геометрическую интерпретацию посредством использования диаграмм Эйлера–Венна.

Определение 1.3. Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $C = A \bigcup B,$ содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B: $C = A \bigcup B = \left\{ x \middle| x \in A \text{ или } x \in B \text{ или } \left(x \in A \text{ и } x \in B \right) \right\}.$

Геометрически объединение множеств A и B можно изобразить в виде заштрихованных фигур, как это показано на рис. 1.5 или рис. 1.6.

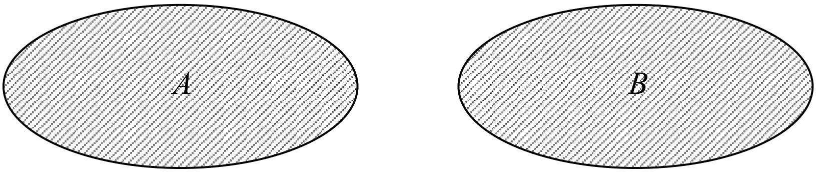


Рис. 1.5. Объединение множеств A и B, не имеющих общих элементов

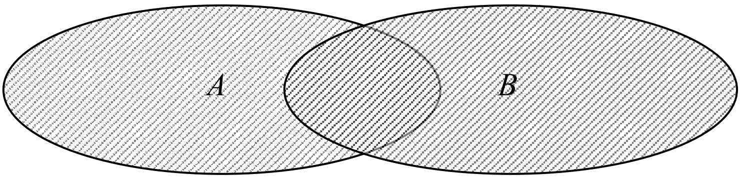


Рис. 1.6. Объединение множеств A и B, имеющих общие элементы

Используя данные выше определения, можно установить, что верны такие равенства: $A \bigcup A = A,$ $A \bigcup \varnothing = A,$ $A \bigcup U = U,$ если $B \subset A,$ то $A \bigcup B = A.$

Определение 1.4. Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество $C = A \bigcap B,$ состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам одновременно: $C = A \bigcap B = \left\{ x \middle| x \in A \text{ и } x \in B \right\}.$

Геометрическая интерпретация пересечения множеств A и B дана на рис. 1.7 (элементы, принадлежащие $A \bigcap B$ изображены заштрихованной частью фигур A и B).

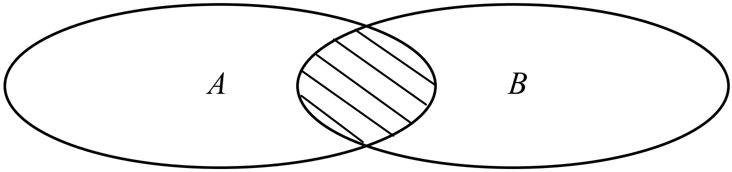


Рис. 1.7. Пересечение множеств A и B, имеющих общие элементы

Если множества A и B не имеют общих элементов, то $A \bigcap B = \varnothing$ (рис. 1.8).

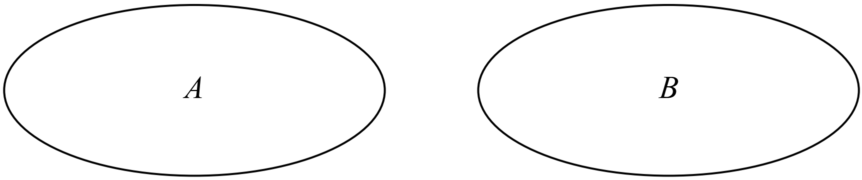


Рис. 1.8. Пересечение множеств A и B, не имеющих общих элементов

Заштрихованная часть отсутствует.

Очевидно, что имеют место следующие равенства: $A \bigcap A = A,$ $A \bigcap \varnothing = \varnothing,$ $A \bigcap U = A,$ если $B \subset A,$ то $A \bigcap B = B.$

Определение 1.5. Разностью двух множеств A и B называется множество $C = A \setminus B,$ состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат A, но не принадлежат B: $C = A \setminus B = \left\{ x \middle| x \in A \text{ и } x \notin B \right\}.$

Разности множеств $A \setminus B$ изображены на рис. 1.9 и 1.10 заштрихованной областью фигуры A.

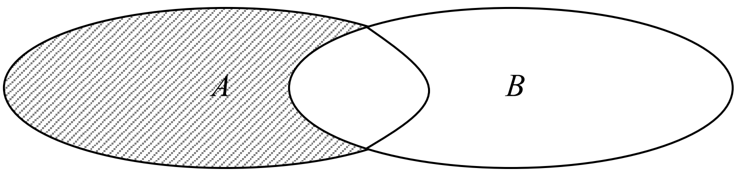


Рис. 1.9. Разность множеств A и B

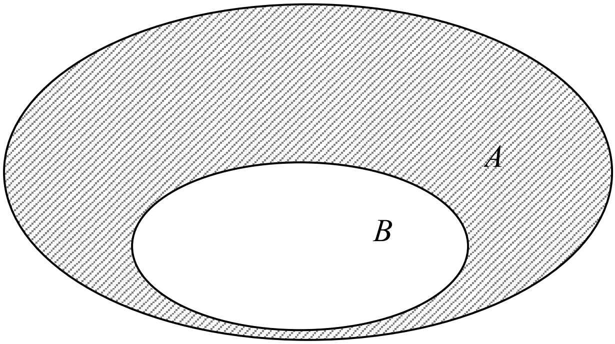


Рис. 1.10. Дополнение множества *B* до множества *A*

Если $B \subset A$ (см. рис. 1.10), то разность $A \setminus B$ называют дополнением множества *B* до множества *A*.

Определение 1.6. Дополнением множества *A* до универсального множества *U* называется разность $U \setminus A$ и обозначается символом $\overline{A}$: $\overline{A} = U \setminus A = \left\{ x \middle| x \notin A \right\}$.

С помощью диаграмм Эйлера–Венна данную операцию можно проиллюстрировать (рис. 1.11).

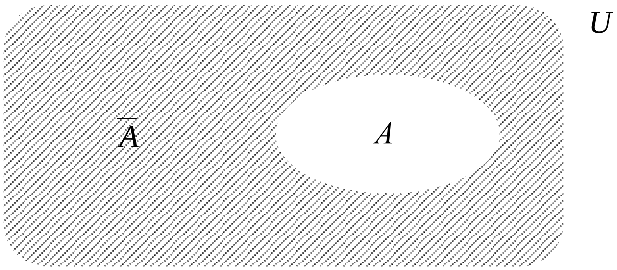


Рис. 1.11. Дополнение множества *A* до универсального множества *U*

Символы $\cup, \cap, \setminus$ имеют смысл операций объединения, пересечения и разности множеств соответственно.

1.2. Общие сведения о числовых множествах

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми.

Для основных числовых множеств приняты следующие стандартные обозначения:

N – множество всех натуральных чисел:

$N = \{1, 2, 3, ...\}$;

Z_0 (или N_0) – множество всех целых неотрицательных чисел:

$Z_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$;

Z – множество всех целых чисел:

$Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$;

Q – множество всех рациональных чисел:

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \, m \in Z, \; n \in Z \setminus \{0\} \right\}$,

где $\{0\}$ – множество, которое содержит только одно число нуль;

I – множество всех иррациональных чисел;

R_0 – множество всех неотрицательных действительных чисел;

R – множество всех действительных чисел (числовая прямая): $R = Q \cup I$;

C – множество всех комплексных чисел.

Указанные множества связаны между собой посредством следующих отношений:

$$N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R \subset C.$$

Более подробно числовые множества будут описаны далее.

1.3. Соответствия между множествами и отображения множеств. Общее понятие отношения. Отношение эквивалентности

Иногда между двумя множествами можно установить *соответствие*, т. е. можно ввести правило, по которому для каждого элемента одного множества указывается вполне определенный элемент или подмножество элементов другого множества. При этом допускается, что некоторым элементам первого множества может соответствовать пустое множество.

На основе понятия соответствия между множествами вводится понятие отображения множеств.

Определение 1.7. Соответствие, при котором каждому элементу множества A отвечает единственный элемент множества B, называется *отображением множества A в множество B.*

Определение 1.8. Соответствие, для которого каждому элементу множества A отвечает единственный элемент множества B, и, кроме того, каждому элементу множества B отвечает хотя бы один элемент множества A, называется отображением *множества A на множество B.*

Отображения множеств обычно обозначают буквами $f, g, h, \ldots$ и пишут $A \xrightarrow{f} B$ или $f : A \to B.$

Определение 1.9. Если при отображении f элементу $a \in A$ соответствует элемент $b \in B,$ то элемент b называется *образом* элемента $a.$ В свою очередь элемент a называется *прообразом* элемента b и этот факт записывается так: $b = f(a).$

При этом факт отображения всего множества A на множество B записывается так: $B = f(A).$

Определение 1.10. Множество $f(A)$ образов всех элементов $a \in A$ при отображении f называют образом множества $A.$

Определение 1.11. Отображение $f : A \to B$ множества A на множество $B,$ при котором каждому элементу множества B соответствует только единственный элемент множества $A,$ называется *взаимно однозначным отображением (биективным или биекцией)* множества A на множество $B.$

Если отображение $f : A \to B$ биективно, то отображение $f^{-1} : B \to A,$ ставящее в соответствие каждому элементу $b \in B$

его прообраз $a \in A$, называют *обратным* отображением для отображения f. Обратным для отображения f^{-1} будет исходное отображение f.

Определение 1.12. Если множество A взаимно однозначно отображается на множество B, то множества A и B называются *равномощными*.

Равномощность множеств обычно записывается с помощью знака ~: $A \sim B$.

О равномощных множествах A и B также говорят, что между ними установлено *отношение эквивалентности*.

Кроме понятий множества и отображения в математике используется еще целый ряд базовых понятий. К ним относится понятие отношения. Выше были приведены примеры отношений. К ним, в частности, относятся отношения равенства, включения и отношения равномощности множеств. К отношениям относятся также понятия «больше» и «меньше» для вещественных чисел и понятие подобия для геометрических фигур. Введем общее понятие бинарного отношения и дадим краткую классификацию отношений.

Определение 1.13. Декартовым произведением двух непустых множеств A и B называется множество $C = A \times B = \{(a, b) \mid a \in A$ и $b \in B\}$. При этом в упорядоченной паре (a, b) элемент a считается первым, а элемент b – вторым.

Определение 1.14. Бинарным отношением σ называется множество упорядоченных пар (a, b) ($a \in A$ и $b \in B$), которые образуют некоторое непустое множество декартового произведения $A \times B$. При этом выражения $(a, b) \in \sigma$ и $a \sigma b$ считаются равноценными.

Замечание 1.1. В рамках определения 1.14 говорят, что элемент a находится в отношении σ к элементу b в том и только в том случае, когда имеет место $a \sigma b$.

Замечание 1.2. Если $A = B$, то отношение $\sigma \subset A \times A$ называется бинарным отношением, заданным на множестве A.

Определение 1.15. Бинарное отношение σ называется менее общим, чем отношение τ, а τ – более общим, чем σ, если для любых элементов a и b из подмножества $a\sigma b \subset A \times B$ следует, что имеет место $a\tau b$.

Например, отношение равенства геометрических фигур является менее общим, чем отношение подобия таких фигур.

Определение 1.16. Бинарное отношение σ, заданное на множестве A (это отношение есть подмножество множества $A \times A$), называется *рефлексивным*, если для любого элемента $a \in A$ имеет место $a\sigma a$.

Примерами рефлексивных отношений являются равенство отрезков, подобие фигур и отношение включения $\subset$ множеств.

Определение 1.17. Отношение σ называется *симметричным*, если для любых элементов $a, b \in A$ из истинности $a\sigma b$ следует истинность $b\sigma a$.

Примерами симметричных отношений являются отношения перпендикулярности, параллельности прямых и подобие фигур.

Определение 1.18. Отношение σ называется *транзитивным*, если для любых элементов $a, b, c \in A$ из истинности $a\sigma b$ и $b\sigma c$ следует истинность $a\sigma c$.

В качестве транзитивных отношений можно назвать отношения равенства отрезков, подобия фигур, отношение «меньше» для вещественных чисел.

Определение 1.19. Отношение σ называется *связным*, если для любых различных элементов $a, b \in A$ имеет место, по крайней мере, одно из отношений $a\sigma b$, $b\sigma a$. Если данные условия не выполняются, то отношение σ называется *несвязным*.

Примером несвязного отношения является отношение равенства отрезков. Отношение «правее» является связным.

Определение 1.20. Отношение ρ, заданное на множестве A (т. е. $\rho \subset A \times A$), называется отношением эквивалентности, если оно одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Отметим, что отношение *эквивалентности* зачастую обозначают символом ~. Отношениями эквивалентности являются, в частности, отношения равенства, подобия и равномощности множеств.

Замечание 1.3. Тождество (отношение тождества) является предельным случаем отношения эквивалентности, так как единственным элементом, равным какому-либо данному элементу, является этот же элемент.

Замечание 1.4. Произвольное отношение эквивалентности ρ на множестве A задает на A *обобщенную формулу равенства*, так как все элементы этого множества, которые находятся друг с другом в отношении ρ, могут считаться равными в обобщенном смысле (им присуще одно и то же свойство).

Замечание 1.5. Важной областью применения отношений эквивалентности является *формализация* математических и иных понятий.

1.4. Простейшие понятия математической логики

В математической логике в отличие от лингвистики рассматриваются только те понятия, на основе которых можно сформулировать разнообразные истинные или ложные утверждения (высказывания). Фактически высказывания представляют собой осмысленные утвердительные предложения. В данной логике выделяют постоянные и переменные высказывания. О первых высказываниях в рамках определенного контекста можно сказать, что они либо истинны, либо ложны. Переменные высказывания не являются, вообще говоря, либо только истинными, либо только ложными. Эти высказывания содержат элемент(ы) (переменную(ые)) из некоторой предметной области и их истинность, ложность зависит от конкретных значений переменной(ых). Данного рода высказывания называются *предикатами*. В математической логике постоянные высказывания обозначаются обычно прописными буквами какого-либо алфавита (например, A, B, C, D).

Определение 1.21. Говорят, что на множестве, элементами которого являются упорядоченные n-ки $(x_1, x_2, ..., x_n)$, задан *предикат* $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, если каждой такой фиксированной n-ке соответствует определенное значение истинности: T (истина), F (ложь). При этом предикат называют *одноместным*, если $n=1$, и *многоместным*, если $n\in\{2, 3, 4, ...\}$.

В математической логике выделяют *исчисления высказываний* и *предикатов*. В исчислении высказываний рассматриваются самые разнообразные комбинации постоянных высказываний, которые могут быть простыми высказываниями (они не допускают расчленения) или являются *сложными высказываниями*. В свою очередь под сложными высказываниями понимаются высказывания, которые получены из простых высказываний посредством сентенциональных (логических) связок. Фактически данные связи определяют (задают) логические операции.

Определение 1.22. В рамках русского языка под сентенциональными связками понимают следующие пять слов или комбинаций слов: «не», «и», «или», «если…, то», «тогда и только тогда, когда».

Теперь можно уточнить понятие простого высказывания.

Замечание 1.6. В исчислении высказываний под *простыми высказываниями* понимают такие высказывания, которые не содержат сентенциональных связок или сами по себе рассматриваются в качестве нерасчленяемых (неразложимых) высказываний.

Определение 1.23. *Отрицанием* высказывания A называется высказывание $\overline{A}$ (не A), которое является ложным, если A истинно, и истинным, если A ложно (символ $\overline{}$ обозначает логическую операцию отрицания).

Определение 1.24. *Дизъюнкцией* высказываний A, B называется высказывание $C=(A\,\text{или}\,B)$, которое является истинным, если истинно хотя бы одно из высказываний $A, B,$ и ложным, когда A и B ложны одновременно. При этом дизъюнкция обозначается символом $A\vee B$ ($\vee$ – знак логической операции дизъюнкции).

Определение 1.25. *Конъюнкцией* высказываний A, B называется высказывание $C=(A\ \text{и}\ B)$, которое является истинным, если истинны оба высказывания A, B одновременно, и ложным, когда хотя бы одно из высказываний A, B ложно. Конъюнкция обозначается символом $A \wedge B$ ($\wedge$ – знак логической операции конъюнкции).

Определение 1.26. *Импликацией* от высказывания A к высказыванию B называется высказывание $C = (\text{если } A, \text{ то } B)$, которое ложно, когда A истинно, а B ложно, и истинно во всех других ситуациях. При этом высказывание A называется *посылкой*, а B – *заключением* импликации. Импликация обозначается символом $A \Rightarrow B$ ($\Rightarrow$ – знак логической операции импликации).

Определение 1.27. *Эквиваленцией* высказываний A, B называется высказывание $C = (A \text{ тогда и только тогда, когда } B)$, которое истинно, когда A, B истинны или ложны одновременно. Эквиваленция обозначается символом $A \Leftrightarrow B$ ($\Leftrightarrow$ – знак логической операции эквиваленции).

Определение 1.28. Множество всех высказываний, содержащее в рамках определенного контекста все простые и сложные высказывания, полученные из простых с помощью логических операций: $\bar{\ }, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ – называется *алгеброй высказываний*.

Определение 1.29. Выражения, составленные из высказываний (простых и сложных), знаков логических операций и скобок (скобки определяют субординацию выполняемых операций) называются *формулами алгебры высказываний*.

Замечание 1.7. Любая формула высказываний $f(A_1, ..., A_n)$, составленная из высказываний $A_1, ..., A_n$, представляет собой функцию, область определения которой является конечным множеством, содержащим 2^n элементов. Область значений этой функции представляет собой множество $\{T, F\}$.

При рассмотрении высказываний весьма полезно использовать истинностные таблицы. Для иллюстрации на примере табл. 1.1 приведем истинностные значения простейших формул высказываний, каковыми являются $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$.

Таблица 1.1

Операции над высказываниями и их истинностные значения

A	B	$\overline{A}$	$A\vee B$	$A\wedge B$	$A\Rightarrow B$	$A\Leftrightarrow B$
T T F F	T F T F	F – T –	T T T F	T F F F	T F T T	T F F T

Определение 1.30. Две формулы алгебры высказываний называются *эквивалентными*, если их истинностные таблицы одинаковы.

Обозначим через U высказывание, которое всегда истинно. Тогда отрицание этого высказывания (т. е. $\overline{U}$) будет всегда ложным. Приведем классические эквивалентные формулы (тождества) математической логики. Они имеют следующий вид:

$$\overline{\overline{A}}=A,\ \ A\vee B=B\vee A,\ \ A\wedge B=B\wedge A,\ \ (A\vee B)\vee C=A\vee(B\vee C),$$

$$(A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C),\ \ A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C),$$

$$A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C),\ \ A\vee A=A,\ \ A\wedge A=A,\ \ A\vee\overline{U}=A,$$

$$A\vee U=U,\quad A\wedge U=A,\quad A\wedge\overline{U}=\overline{U},\quad A\vee\overline{A}=U,\quad A\wedge\overline{A}=\overline{U},$$
$$\overline{A\wedge B}=\overline{A}\vee\overline{B},$$

$$\overline{A\vee B}=\overline{A}\wedge\overline{B},\qquad A\Rightarrow B=\overline{A}\vee B,\qquad A\Leftrightarrow B=(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A),$$
$$A\Rightarrow B=\overline{B}\Rightarrow\overline{A},$$

$$B\Rightarrow A=\overline{A}\Rightarrow\overline{B}.$$

Важную роль в математической логике играют тождественно истинные формулы. К ним относятся, например, такие формулы:

$\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$ (закон двойного отрицания);

$A \wedge A \Leftrightarrow A,\ \ A \vee A \Leftrightarrow A$ (законы идемпотентности);

$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B},\ \ \overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$ (законы Де Моргана).

Замечание 1.8. При записи формул алгебры высказываний используется такая субординация для выполнения действий, порождаемых логическими связками: $\overline{}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ (эта субординация нарушается, если есть скобки).

При проведении различного рода рассуждений, доказательств в математике кроме исчисления высказываний применяется исчисление предикатов. В этом исчислении вводится еще ряд важных дополнительных понятий.

Определение 1.31. Пусть $P(x)$ – предикат, заданный на множестве M. Тогда под символом $\exists\, xP(x)$ понимается такое утверждение: существует такое $x \in M$, что $P(x)$ истинно, если область истинности не является пустой, и $P(x)$ ложно, если область истинности является пустой. При этом символ $\exists$ называется *квантором существования*.

Определение 1.32. Пусть $P(x)$ – предикат, заданный на множестве M. Тогда под символом $\forall\, xP(x)$ понимается *истинное высказывание*, когда $P(x)$ истинно для любых $x \in M$, и *ложное высказывание* в противном случае. При этом символ $\forall$ называется *квантором всеобщности*.

Замечание 1.9. При отсутствии скобок в формулах символы $\exists$ и $\forall$ действуют как операция $\overline{}$ (отрицание) на ближайший объект этой формулы.

Следует особо подчеркнуть, что кроме исчислений высказываний и предикатов в математической логике при построении аксиоматических теорий используются процедуры вывода и доказательства. Допустим, что F_0 – совокупность аксиом некоторой математической теории, а F – некоторое утверждение данной теории. Тогда под символом $F \vdash A$ будем понимать такое утверждение: из утверждения F (посылки вывода) и аксиом F_0 выводимо (следует) утверждение A (т. е. из истинности F_0 и F *автоматически следует* истинность утверждения A). При этом символ $\vdash A$ означает выводимость утверждения A из аксиом F_0. Отметим, что смысл понятия выводимости отличается от высказывания $(F \wedge F_0) \Rightarrow A$ (см. далее).

Определение 1.33. Установление факта связи двух высказываний B и Q посредством отношения $\vdash$ называется *выводом*. В записи $B \vdash Q$ высказывание B называется *условием*, а высказывание Q – *следствием* (в рамках аксиоматических теорий символ F_0 обычно опускается).

Определение 1.34. Пусть имеет место высказывание (утверждение) $B \vdash Q$. Тогда B называют *необходимым условием* истинности Q (для того, чтобы имело место Q, *необходимо*, чтобы имело место также и B), а Q – *достаточным условием* истинности B (для того, чтобы имело место B, вполне *достаточно*, чтобы было истинным Q).

Определение 1.35. Если имеют место $B \vdash Q$ и $Q \vdash B$, то говорят, что истинность B представляет собой *необходимое* и *достаточное условие* того, что Q имеет место (и наоборот).

Введем еще ряд понятий, которые используются в математической логике и математике при формулировке утверждений и доказательстве теорем.

Определение 1.36. Высказывание (утверждение) $B \Rightarrow A$ называют *обратным* к высказыванию $A \Rightarrow B$. Высказывание (утверждение) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ называют *противоположным* для высказывания (утверждения) $A \Rightarrow B$, а высказывание (утверждение) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – *противоположным к обратному*.

Приведем для иллюстрации истинностные таблицы для всех высказываний: $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow A,\ \overline{A} \Rightarrow \overline{B},\ \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – в виде сводной табл. 1.2.

Таблица 1.2

Прямые, обратные и противоположные импликации высказываний A и B

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

Из данной таблицы следует, что высказывания (утверждения) $A \Rightarrow B$ и $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, а также $B \Rightarrow A$ и $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$, имеют одинаковые таблицы истинности. Следовательно, имеют место равенства (эквивалентности) $(A \Rightarrow B) = \left(\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\right)$, $(B \Rightarrow A) = \left(\overline{A} \Rightarrow \overline{B}\right)$. По этой причине утверждение (*прямая теорема*) $A \vdash B$ *равносильна противоположной к* обратному утверждению (*обратной теореме*) $\overline{B} \vdash \overline{A}$. Данный факт лежит в основе *метода доказательства от противного*. Его суть заключается в замене доказательства *прямой теоремы* $A \vdash B$ доказательством *обратной теоремы* $\overline{B} \vdash \overline{A}$.

Замечание 1.10. Если утверждение A является *необходимым* и *достаточным условием* для утверждения B, то будут одновременно справедливы все утверждения: $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow A,\ \overline{A} \Rightarrow \overline{B},\ \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (см. табл. 1.2).

Замечание 1.11. Все логические операции $\overline{}, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ допускают биективную и эффективную реализацию в рамках релейно-контактных схем и элементной базы современной компьютерной техники.

1.5. Простейшие сведения о комбинаторике

Определение 1.37. Пусть A – некоторое множество. Оно называется упорядоченным множеством, если на нем задано отношение порядка, которое обладает следующими свойствами: 1) рефлексивностью (любой элемент не превосходит самого себя); 2) антисимметричностью (если $a \le b$ и $b \le a,$ то элементы $a, b \in A$ совпадают; отношение $\le$ – меньше или равно); 3) транзитивностью (если $a \le b, b \le c,$ то $a \le c$).

Вместо символа $\le$ можно использовать также символ $\ge$ – больше или равно (т. е. записи $a \le b$ и $b \ge a$ равноценны). Отметим, что пустое множество зачастую принимается упорядоченным множеством.

Замечание 1.12. Одно и то же множество может быть упорядочено различными способами. При этом упорядоченные (конечные или счетные) множества часто записывают в виде элементов, расположенных в круглых скобках.

Пусть $M = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$ – конечное множество, которое по определению содержит только различные элементы и не является упорядоченным, т. е. изменение порядка расположения элементов $m_1, m_2, ..., m_n$ внутри фигурных скобок не изменяет множества M. Однако при решении многих научно-технических задач приходится рассматривать различные комбинации элементов (в том числе упорядоченные комбинации), извлеченных из множества $M,$ и находить число таких комбинаций. Решением такого рода задач занимаются в рамках комбинаторики, которая является одним из важных разделов математики.

Определение 1.38. Выборкой, содержащей k элементов ($k \in N = \{1, 2, 3, ...\},$ k – размерность выборки) из множества M, называется совокупность $S_k = [a_1, ..., a_k]$ такая, что любой элемент $a_j,$ где $j = \overline{1, k} = \{1, ..., k\},$ из совокупности S_k принадлежит множеству M. При этом натуральные числа $k, n \in N,$ и может реализовываться любое из неравенств $k \le n, k > n.$

Определение 1.39. Выборка S_k из множества M, содержащего n элементов, называется *выборкой без повторений*, если любые два элемента этой выборки различны между собой (т. е. $a_i \neq a_j$, если $i \neq j, k \leq n$). В противном случае выборка S_k называется *выборкой с повторениями*.

Определение 1.40. Выборка S_k из множества M называется *упорядоченной выборкой*, если в S_k задан порядок следования ее элементов. В противном случае выборка называется *неупорядоченной выборкой*.

Замечание 1.13. Упорядоченные выборки из одного и того же множества, содержащие одни и те же элементы, но расположенные в различном порядке, считаются различными.

Определение 1.41. Выборка S_k из множества M называется *упорядоченной выборкой без повторений*, если она – упорядоченная выборка, не имеющая повторений.

В рамках комбинаторики дается, в частности, ответ на следующий вопрос: «Какое число различных выборок определенных размерностей с заданными свойствами возможно сконструировать из элементов каких-либо конечных множеств?» При решении проблем комбинаторики используются некоторые процедуры, называемые правилами. К ним относятся обобщенное правило суммы и правило произведения [20].

Определение 1.42. Под *размещениями без повторений* из n элементов по k понимаются упорядоченные k – выборки без повторений из n элементов.

Утверждение 1.1. Число размещений без повторений из n элементов по k равно $A_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ для $n \geq 2$ и $A_1^1 = 1$.

Определение 1.43. Под *перестановками* из n элементов понимаются упорядоченные выборки без повторений из n элементов по n.

Утверждение 1.2. Число перестановок из n элементов равно $P_n = n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ для $n \geq 2$ и $P_1 = 1$. При этом под символом $0!$ понимают также единицу.

Определение 1.44. Под *сочетаниями из n элементов* по k понимают неупорядоченные (без повторений) выборки k элементов из n.

Утверждение 1.3. Число сочетаний из n элементов по k равно

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{k}{n} \ (n \geq 1, 1 \leq k \leq n).$$

Утверждение 1.4. Пусть a и b – любые действительные числа. Тогда для любого натурального числа n (т. е. $n \in N$) верна формула *бинома* Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{s=0}^{n} C_n^s a^s b^{n-s} = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \ldots +$$
$$+ C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^n a^n b^0 = b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} b + a^n,$$

причем в этих суммах $C_n^0 = 1$ и $C_n^n = 1$.

Следует отметить, что приведенные в данном параграфе формулы и понятия широко используются во многих областях математики и ее приложениях. В частности, понятия размещения, перестановки и сочетания играют важную роль в теории вероятностей и математической статистике.

1.6. Метод математической индукции

Некоторые математические утверждения доказываются *методом математической индукции*, в основе которого лежит *принцип математической индукции*.

Пусть $A(n)$ – некоторое утверждение, имеющее смысл для натуральных чисел n, и пусть оно истинно для $n = 1$. Тогда, если из истинности этого утверждения для $n = k$ $(k \in N, k > 1)$ следует истинность утверждения для $n = k + 1$, то утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n.

Доказательство методом математической индукции состоит в следующем:

1) доказывается, что утверждение $A(1)$ истинно;

2) предполагается, что утверждение $A(n)$ истинно для $n = k$, и доказывается его справедливость при $n = k + 1$.

После этого на основании принципа математической индукции делается вывод, что утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального n.

Методом математической индукции доказывается, например, *неравенство Бернулли*:

$$(1+a)^n \geq 1 + an.$$

Обобщение принципа математической индукции.

Если утверждение $A(n)$, в котором n – целое число, истинно при $n = m$ и если из истинности этого утверждения для числа $n = k$, где $k \in Z$, $k \geq m$, вытекает, что оно истинно для следующего числа $n = k + 1$, то утверждение $A(n)$ истинно и для любого целого значения $n \geq m$.

2. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. МЕТОД КООРДИНАТ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Число – это важнейшее математическое понятие.

И. Ньютон во «Всеобщей арифметике» дал следующее определение понятия числа: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу». Эта формулировка дает единое (хотя и не строгое в математическом смысле) определение действительного числа, как рационального, так и иррационального.

Рассмотрим основные числовые множества.

2.1. Натуральные числа. Целые числа

Числа, употребляемые при счете предметов, называют натуральными. В порядке возрастания можно записать ряд чисел: 1, 2, 3, 4... Наименьшим натуральным числом является число 1. Наибольшего натурального числа не существует. Множество всех натуральных чисел обозначается символом N.

Любое число в десятичной позиционной системе счисления можно записать с помощью десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Условились цифры 0, 2, 4, 6, 8 называть четными, а цифры 1, 3, 5, 7, 9 – нечетными. Соответственно, числа, заканчивающиеся четной цифрой, называют четными, а числа, заканчивающиеся нечетной цифрой, – нечетными. Значение цифры в записи числа зависит от ее позиции.

Любое натуральное число $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ можно представить в виде суммы разрядных слагаемых (единиц, десятков, сотен и т. д.)

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где каждое из $a_0, a_1, ..., a_n$ есть цифра.

Для натуральных чисел определены следующие действия (алгебраические операции): сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня. Действия сложения и умножения выполнимы всегда, т. е. в результате этих действий получаются также натуральные числа.

Разделить число a на число b, значит найти такое число x, что $a:b=x$, если $xb=a$. Число a называется делимым (или кратным) числа b, число b – делителем числа a, число x – частным чисел a и b.

Деление одного натурального числа a на другое натуральное число b нацело не всегда выполнимо. Более общим действием является деление с остатком. В этом случае всякое натуральное число a единственным образом представляется в виде $a=bq+r$, где q и r – неотрицательные целые числа, причем $0 \le r < b$. Число q называют неполным частным, а число r – остатком от деления a на b. Равенство $r=0$ будет верно тогда и только тогда, когда число b является делителем числа a.

Сформулируем *признаки делимости* чисел:

1) на 2 делятся числа, оканчивающиеся нулем или четной цифрой;

2) на 3 (9) делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3 (9);

3) на 4 (25) делятся те и только те числа, у которых две последние цифры – нули или выражают число, делящееся на 4 (25);

4) на 5 делятся числа, оканчивающиеся нулем или цифрой 5;

5) на 6 делятся числа, которые одновременно делятся на 2 и на 3;

6) На 10 делятся числа, оканчивающиеся нулем.

Определение 2.1. Число a называется простым, если его делителями являются только единица и само число a. К простым относятся, например, такие числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17…

Определение 2.2. Число a, имеющее более двух натуральных делителей (кроме 1 и a), называется составным.

Число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Теорема 2.1. (основная теорема арифметики). Всякое натуральное число a, кроме единицы, может быть единственным способом представлено в виде произведения простых чисел (если не учитывать порядок расположения множителей). При этом данное представление можно записать в виде

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}.$$

Здесь $p_1, p_2, ..., p_n$ – различные простые делители числа a; $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – некоторые натуральные числа, равные числу повторений простых делителей в разложении числа a. При этом данное представление называют каноническим разложением натурального числа a на простые множители.

Определение 2.3. Всякое натуральное число, на которое делятся одновременно несколько натуральных чисел, называют общим делителем этих чисел. Наибольший из общих делителей этих чисел называют их наибольшим общим делителем (НОД).

Определение 2.4. Всякое натуральное число, которое делится на каждое из данных натуральных чисел, называют общим кратным этих чисел. Наименьшее из общих кратных данных чисел называют их наименьшим общим кратным (НОК).

Чтобы найти НОД или НОК натуральных чисел надо выполнить следующие действия:

1) разложить данные числа на простые множители;

2) для нахождения НОД следует составить произведение из всех общих простых множителей, входящих в каждое из разложений, причем, если множитель входит в разложение с разными показателями, то берут его с наименьшим показателем; для нахождения НОК следует составить произведение из всех простых множителей разложения одного из данных чисел и недостающих простых множителей из разложений других чисел;

3) найти значение полученного произведения.

Определение 2.5. Два натуральных числа, НОД которых равен единице, называют взаимно простыми. НОК двух взаимно простых чисел равен их произведению.

Определение 2.6. Множество натуральных чисел, дополненное нулем, называется множеством неотрицательных чисел, и его можно обозначить символом N_0 (или Z_0). Всякое натуральное число, взятое со знаком «–», называют целым отрицательным числом. Два числа, отличающиеся друг от друга только знаком, называются противоположными числами.

Определение 2.7. Числа натуральные, число нуль и целые отрицательные числа составляют множество целых чисел. Оно обозначается символом Z.

2.2. Рациональные числа. Иррациональные числа

Возникновение положительных рациональных чисел во многом было связано с необходимостью производить измерения, т. е. сравнивать различные величины с другой величиной того же рода, выбираемой в качестве эталона (единицы измерения).

Определение 2.8. *Рациональной дробью* называют упорядоченную пару целых чисел $(a;b)$, где число b отлично от нуля. Рациональную дробь обозначают символом $\frac{a}{b}$ или a/b. Число a называется *числителем* дроби, а число b – ее *знаменателем*.

Определение 2.9. Рациональная дробь $\frac{a}{b}$, где a – целое число, а b – натуральное, называется *положительной*, если a положительно, и *отрицательной*, если a отрицательно.

Знаменатель положительной рациональной дроби показывает на сколько равных частей разделена единица, а числитель – сколько взято таких частей.

Определение 2.10. Положительная рациональная дробь $\frac{a}{b}$ называется *правильной*, если ее числитель меньше знаменателя $(a<b)$ и *неправильной*, если ее числитель больше или равен знаменателю $(a \geq b)$.

Если дробь неправильная, то ее числитель может быть представлен в виде $a=bq+r$, где q – натуральное число, r – целое число, удовлетворяющее условию $0 \leq r < b$. Тогда будет верно равенство

$$\frac{a}{b}=q+\frac{r}{b},$$

где число q – целая часть дроби, а $\frac{r}{b}$ – правильная дробь.

Если $r \neq 0$, то неправильную рациональную дробь $\frac{a}{b}$ записывают иногда в виде смешанной дроби $q\frac{r}{b}$.

Определение 2.11. Две рациональные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называют *равными* или *эквивалентными* тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

Рациональные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$, где k – любое целое число, отличное от нуля, эквивалентны. Переход от дроби $\frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ к эквивалентной дроби $\frac{a}{b}$ называют *сокращением* дроби на число k.

Определение 2.12. Дробь называется *несократимой*, если ее числитель и знаменатель взаимно простые числа.

Всякую рациональную дробь можно записать в виде несократимой дроби. Равенство $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ выражает основное свойство рациональной дроби: рациональная дробь не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить (или разделить) на одно и то же целое число, отличное от нуля. Это равенство позволяет привести две рациональные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ к общему знаменателю bd:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}, \qquad \frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b}.$$

Числа d и b называют *дополнительными множителями* соответственно первой и второй дроби.

Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, надо реализовать следующие действия:

1) найти НОК знаменателей данных дробей;

2) для каждой дроби найти дополнительный множитель;

3) числитель и знаменатель каждой дроби умножить на ее дополнительный множитель.

Положительная рациональная дробь $\frac{a}{b}$ считается больше (меньше) рациональной дроби $\frac{c}{d}$, если имеет место неравенство $ad > bc$ $(ad < bc)$.

Множество рациональных дробей есть упорядоченное множество: для любых двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ либо $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, либо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, либо $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. При этом выполняются свойства рефлексивности, антисимметричности и транзитивности, а также симметричности, если дроби равны (эквивалентны).

Из двух положительных рациональных дробей с равными знаменателями больше та, числитель которой больше, и меньше та, числитель которой меньше:

$$\left(\frac{a}{b} > \frac{c}{b}\right) \Leftrightarrow (a > c).$$

Из двух положительных рациональных дробей с равными числителями больше та, знаменатель которой меньше, и меньше та, знаменатель которой больше:

$$\left(\frac{a}{b} > \frac{a}{d}\right) \Leftrightarrow (b < d).$$

Сложение (вычитание) дробей производится следующим образом:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Умножение дробей выполняется таким образом:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Деление дробей выполняется по алгоритму

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Определение 2.13. Рациональные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называют *обратными*, если

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=1.$$

Отметим, что для того, чтобы разделить дробь $\frac{a}{b}$ на дробь $\frac{c}{d}$, достаточно умножить дробь $\frac{a}{b}$ на дробь $\frac{d}{c}$, обратную дроби $\frac{c}{d}$.

Замечание 2.1. Эквивалентные рациональные дроби являются различными представлениями одного и того же числа.

Определение 2.14. Рациональным числом называется множество всех эквивалентных между собой рациональных дробей.

Среди всех записей данного положительного рационального числа r эквивалентными рациональными дробями $\frac{a}{b}\in r$ выделяют его представление в виде единственной несократимой дроби из этого класса эквивалентных дробей.

Определение 2.15. Рациональное число, содержащее рациональную дробь вида $\frac{0}{b}$, называют нулем.

Определение 2.16. Если r – рациональное число и $\frac{a}{b}\in r,$ то рациональное число, содержащее рациональную дробь $\frac{-a}{b}$, называют рациональным числом, противоположным числу r, и обозначают $(-r)$.

Рациональное число $\frac{a}{b}$ называют положительным, если a и b одного знака, и отрицательным, если a и b имеют разные знаки.

Определение 2.17. Рациональное число a называется *целым*, если в множестве всех эквивалентных дробей, задающих это число, содержится дробь вида $\frac{a}{1}$.

Множество всех рациональных чисел обычно обозначают Q. Множество Z целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел, т. е. $Z \subset Q$. Таким образом, множество Q рациональных чисел может быть получено как естественное расширение множества целых чисел путем добавления новых элементов, так что расширенное множество представляет множество, замкнутое относительно операций сложения, умножения, вычитания и деления (кроме деления на нуль).

Определение 2.18. Дробь, знаменатель которой есть число, выраженное единицей с одним или несколькими нулями, т. е. дробь вида $\frac{a}{10^k}$, где a – целое, а k – натуральное, называют *десятичной*.

Десятичные дроби условились записывать без знаменателей: сначала пишут целую часть, а потом числитель дробной части. Целую часть отделяют точкой (или запятой) от числителя дробной части. С помощью деления числителя на знаменатель любое дробное неотрицательное число $\frac{a}{b}$ можно обратить в конечную или бесконечную десятичную дробь. Следовательно, любое неотрицательное рациональное число r можно представить в виде конечной или бесконечной десятичной дроби:

$$r = a_0 . a_1 a_2 ... a_k \quad \text{или} \quad r = a_0 . a_1 a_2 a_3 ...,$$

где a_0 – целая часть числа r, а $0. a_1 a_2 a_3 ...$ – его дробная часть.

В этом случае бесконечные десятичные дроби всегда оказываются *периодическими*. Такое представление возможно и для отрицательных рациональных чисел.

Определение 2.19. Бесконечную десятичную дробь $a_0.a_1a_2a_3...$ называют *периодической*, если у нее, начиная с некоторого места, одна цифра или группа цифр повторяется, непосредственно следуя одна за другой. Повторяющуюся группу цифр называют *периодом* и записывают в скобках.

Например, вместо 1.23457457457... пишут $1.23(457)$.

Любая периодическая дробь является представлением некоторого рационального числа.

Обращение периодической дроби в обыкновенную проводят по правилу, описанному ниже. Чтобы записать данную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и сделать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девятки дописать столько нулей, сколько цифр между точкой (запятой) и первым периодом.

Замечание 2.2. Рациональные числа допускают запись в виде двух различных десятичных дробей, например, $\frac{1}{4}$ записывается как $0,25$ и $0,24(9)$.

Рациональных чисел недостаточно для выражения результатов различных измерений (несоизмеримые отрезки, например, нельзя выразить рациональным числом; например, длины диагоналей квадрата и длины окружностей, вообще говоря, не являются рациональными числами). Множество рациональных чисел не замкнуто относительно операции извлечения корня из неотрицательного числа (например, не существует рационального числа, квадрат которого равен двум и т. п). Можно привести ряд других примеров чисел, которые не могут быть представлены в виде $\frac{a}{b}$ $(a, b \in Z, b \neq 0)$, т. е. не являются рациональными числами. Такие числа представляются бесконечными десятичными *непериодическими* дробями.

Определение 2.20. Бесконечную десятичную непериодическую дробь называют *иррациональным* числом.

Известные в математике число $\pi = 3{,}1415...$, число $e = 2{,}71828...$ являются иррациональными.

Часто индивидуально заданные иррациональные числа обозначают в зависимости от их происхождения и роли. Примерами таких чисел являются числа: $\sqrt{2}, \log_2 3, \sin 1$ и т. п.

2.3. Действительные числа

Множество всех действительных чисел образуется посредством пополнения множества рациональных чисел множеством иррациональных чисел. Точнее говоря, множество действительных чисел является объединением этих множеств. Множество всех действительных чисел обозначают буквой R, множество неотрицательных действительных чисел обозначают символом R_0, положительные и отрицательные действительные числа обозначают соответственно символами R_+ и R_-. Множество R, пополненное элементами $(-\infty)$ и $(+\infty)$, обозначают символом $\overline{R}$ и называют расширенным множеством действительных чисел.

Определение 2.21. Действительные корни алгебраических уравнений $\sum\limits_{s=0}^{n} a_s x^s = 0$ с целочисленными коэффициентами $a_0, a_1, ..., a_n$, где $n \in N$, называются действительными *алгебраическими* числами. Остальные действительные числа называют действительными *трансцендентными* числами.

Множество всех действительных (вещественных) чисел R может быть описано как множество, элементы которого удовлетворяют следующим перечисленным ниже свойствам:

1) для любых двух вещественных чисел a и b определено отношение порядка, т. е. либо $a = b$, либо $a < b$, либо $b < a$, причем если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (свойство транзитивности);

2) во множестве действительных чисел R определена внутренняя бинарная (общее определение таких операций будет дано в п. 2.5) алгебраическая операция сложения (+), т. е. любой упорядоченной паре действительных чисел (a, b) ставится в соответствие

единственное вещественное число, называемое суммой чисел a и b и обозначаемое выражением $a+b.$ При этом данная операция обладает следующими свойствами:

а) для любой пары чисел $a,b \in R$ имеет место равенство

$$a+b=b+a$$

(свойство коммутативности операции сложения);

б) для любой тройки чисел $a,b,c \in R$ имеет место равенство

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

(свойство ассоциативности операции сложения);

в) существует действительное число, обозначаемое символом 0 и называемое нулем, такое, что для любого числа $a \in R$ имеет место равенство

$$a+0=a,$$

при этом действительное число $a,$ удовлетворяющее условию $a>0,$ называется положительным, а действительное число, удовлетворяющее неравенству $a<0,$ называется отрицательным числом;

г) для любого числа $a \in R$ существует действительное число, обозначаемое $(-a),$ такое, что

$$a+(-a)=0,$$

при этом число $(-a)$ называется противоположным числу $a;$

д) если выполнено условие $a<b,$ то для любого числа $c \in R$ имеет место неравенство

$$a+c<b+c;$$

е) сумма $a+(-b),$ где a, b – любые вещественные числа, является вещественным числом и обозначается символом $a-b$ (знак «–» имеет смысл операции вычитания, которая является обратной операцией к операции «+», причем действительное число $(a-b)$ называется разностью чисел a и $b;$

3) во множестве действительных чисел R определена внутренняя бинарная алгебраическая операция, называемая умножением, т. е. любой упорядоченной паре действительных чисел (a, b) ставится в соответствие единственное действительное число, называемое их произведением и обозначаемое выражением $a \cdot b$, причем имеют место следующие свойства:

а) для любой пары действительных чисел $a, b \in R$ имеет место равенство

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(свойство коммутативности);

б) для любой тройки действительных чисел a, b, c верно равенство

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(свойство ассоциативности);

в) существует действительное число, обозначаемое символом 1 и называемое единицей, такое, что для любого числа $a \in R$ истинны равенства:

$$a \cdot 1 = a, \quad (-1) \cdot a = (-a) = -a;$$

г) для любого действительного числа a, отличного от нуля, существует действительное число, обозначаемое выражением $\frac{1}{a}$, такое, что истинно равенство

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1,$$

причем число $\frac{1}{a}$ называют обратным числу a, при этом для любых $a, b \in R$ (но $b \neq 0$) число $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ называется частным от деления числа a на число b;

д) если верны неравенства $a < b$ и $c > 0,$ то $a \cdot c < b \cdot c;$ если $a < b,$ $c < 0,$ то $a \cdot c > b \cdot c;$

4) для любой тройки действительных чисел a, b и c верно равенство

$$(a+b) \cdot c = ac + bc$$

(свойство дистрибутивности операции умножения относительно операции сложения);

5) для любого действительного числа a существует такое целое число $n,$ что $n > a$ (аксиома Архимеда);

6) если непустые множества $X \subset R,$ $Y \subset R$ таковы, что для любых $x \in X$ и любых $y \in Y$ выполняется неравенство $x \le y,$ то существует число $c \in R,$ такое, что $x \le c \le y$ (аксиома полноты (непрерывности)).

Замечание 2.3. Перечисленные выше свойства (1–5) присущи и рассмотренным ранее числовым множествам натуральных, целых, рациональных и иррациональных чисел (но только в рамках условий, при выполнении которых алгебраические операции не приводят в результате к числам, не принадлежащим указанным подмножествам действительных чисел).

Замечание 2.4. Аксиома непрерывности справедлива только в $R.$

Для действительного числа x в рамках десятичной позиционной системы исчисления верно представление $x = a_0.a_1a_2...a_n...$ Для числа x определяются приближения с точностью до 10^{-n} по недостатку $x_n = a_0.a_1a_2...a_n$ и по избытку $x_n' = a_0.a_1a_2...a_n + 10^{-n}.$ Очевидно, верны отношения $x_n' = x_n + 10^{-n},$ $x_n \le x < x_n'.$ Каждое из десятичных приближений x_n и x_n' действительного числа x является рациональным числом.

Определение 2.22. Абсолютной величиной (модулем) действительного числа a называется число $a,$ если $a \ge 0,$ и число $(-a),$ если $a < 0.$

Модуль числа a обозначают символом $|a|$ и записывают

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0 \\ 0, & \text{если } a = 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}.$$

Абсолютное значение числа a положительно как для положительных, так и для отрицательных чисел a и равно нулю только при $a = 0$.

Основные свойства абсолютной величины любого действительного числа следуют из определения. Свойства представлены ниже:

1) $|a| \geq 0$;

2) $|a| = |-a|$;

3) $-|a| \leq a \leq |-a|$;

4) $|a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq a \leq \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$;

5) $|a+b| \leq |a| + |b|$;

6) $|a-b| \geq |a| - |b|$;

7) $|ab| = |a| \cdot |b|$;

8) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ при $b \neq 0$.

Определение 2.23. Для любого действительного числа a степень с натуральным показателем n определяется как произведение n чисел, равных a, т. е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

При этом число a – основание степени, n – показатель степени. Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, символ 0^0 не определен.

Определение 2.24. Корнем n-й степени, где $n \in N$, $n \neq 1$, из действительного числа a называется такое действительное число b, n-я степень которого равна a.

Корень n-й степени из числа a обозначается символом $\sqrt[n]{a}$ или $a^{1/n}$. Согласно определению $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Нахождение корня n-й степени из числа a называется извлечением корня. Число n называют показателем корня, число a – подкоренным выражением.

Замечание 2.5. Корень четной степени $\sqrt[2n]{a}$, где $n \in N$, $a < 0$, во множестве действительных чисел не существует. Корень нечетной степени извлекается и из отрицательного числа.

Чтобы устранить двузначность корня n-й степени из числа a, вводится понятие арифметического корня.

Определение 2.25. Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b, n-я степень которого равна a, где $n > 0$ – натуральное число.

Арифметический корень $\sqrt[n]{a}$ $\left(\text{или } +\sqrt[n]{a}\right)$ имеет смысл лишь при $a \geq 0$ и принимает только неотрицательные значения. При $a = 0$ $\sqrt[n]{0} = 0$ или $0^{\frac{1}{n}} = 0$.

Для арифметического квадратного корня из числа a принято обозначение $\sqrt{a}$ (или $+\sqrt{a}$).

Символ $\sqrt[n]{a}$ также называют радикалом n-й степени.

Замечание 2.6. Если n – нечетное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любом $a \in R$; если n – четное, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при $a \geq 0$ и не существует во множестве R при $a < 0$, так как четная степень любого действительного числа неотрицательна.

Замечание 2.7. Арифметический корень из неотрицательного числа всегда существует и единственен.

Если $a < 0$, то корень n-й степени из a определяется лишь при нечетном $n = 2k + 1$. В этом случае корень n-й степени из a есть единственное действительное отрицательное решение уравнения $x^n = a\ (a<0)$.

Замечание 2.8. Корень нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметический корень той же степени из числа, противоположного данному, т. е. если $a<0$ и $n=2m-1$ – нечетное число, $m \in N$, то $\sqrt[2m-1]{a} = -\sqrt[2m-1]{-a}$.

Замечание 2.9. Пусть $a \geq 0$ и $b \geq 0$, а n, k, m – натуральные числа. Тогда арифметические корни обладают следующими свойствами:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ \ b \neq 0$;

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;

4) $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$ (основное свойство корня);

5) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$;

6) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ (внесение множителя под знак корня);

7) $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ (вынесение множителя из-под знака корня);

При любом значении a верно тождество:

8) $\sqrt[2m]{a^{2m}} = |a|,\ \sqrt{a^2} = |a|$, где $a \in R$ и m – натуральное число.

Определение 2.26. *Рациональной степенью* $\dfrac{m}{n}$ (m – целое, n – натуральное) положительного действительного числа a называется число $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. При этом рациональную степень числа a также записывают в виде

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Следует отметить, что степень числа 0 определена только для показателей $\frac{m}{n} > 0,$ в этом случае $0^{\frac{m}{n}} = 0.$

Замечание 2.10. Степень действительного числа с действительным показателем в рамках множества действительных чисел определяется только для положительных чисел.

Если $a > 0,\ \ b > 0$ – действительные положительные числа, а α, β – действительные числа, то справедливы следующие равенства:

1) $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta};$

2) $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha\beta};$

3) $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta};$

4) $a^{\alpha} \cdot b^{\alpha} = \left(ab\right)^{\alpha};$

5) $\frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha};$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha}.$

При этом полагают, что $1^{\alpha} = 1$ для любого α и $0^{\alpha} = 0$ для любого $\alpha > 0.$

2.4. Метод координат

Определение 2.27. *Координатами точки* называются величины, которые определяют положение этой точки на прямой или кривой линии, на плоской или на кривой поверхности, в пространстве и т. д.

Определение 2.28. *Координатной числовой осью* X *(осью координат)* называется прямая, на которой выбраны направление, принимаемое за положительное, точка – начало отсчета и единица измерения – масштабный отрезок, длина которого принимается равной единице (рис. 2.1).

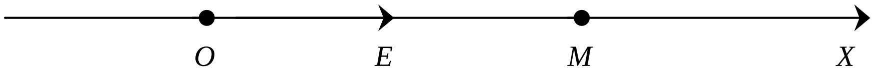


Рис. 2.1. Координатная числовая ось X

Определение 2.29. Начало отсчета (точка O) называется *началом координат*. Масштабный отрезок $\overrightarrow{OE}$ называют *единичным направленным отрезком* или *единичным вектором* (ортом) и обычно обозначают символом $\vec{e}$ или $\vec{i}$ (стрелка над символом OE имеет символический смысл и указывает направление).

Определение 2.30. Отрезок, ограниченный точками A и B (они лежат на оси X), называют *направленным отрезком* или *вектором*, если указано, какая из данных точек является началом (точка A), а какая – концом (точка B), и обозначают символом $\overrightarrow{AB}$. При этом *положительным* направлением оси координат считается направление луча, выходящего из точки O и содержащего точку E, противоположное направление называется *отрицательным*.

Определение 2.31. *Величиной* направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, лежащего на некоторой координатной оси X, называют его длину $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, взятую со знаком плюс, когда направление этого отрезка совпадает с положительным направлением данной оси, и со знаком минус, когда оно совпадает с отрицательным направлением оси.

Величину направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ обозначают символом AB.

Определение 2.32. *Координатой* точки M, лежащей на координатной оси X, называют действительное число x, определяемое равенством $x = \pm \dfrac{\left|\overrightarrow{OM}\right|}{\left|\overrightarrow{OE}\right|}$, причем перед дробью берется знак плюс, когда точки E и M лежат по одну сторону от точки O, и знак минус, когда точки E и M расположены по разные стороны относительно точки O. Если точка M совпадает с точкой O, то $x = 0$.

Запись $M(x)$ означает, что точка M имеет координату x. Координатную ось X зачастую обозначают символами Ox или OX.

Между множеством действительных чисел и множеством точек выбранной координатной оси установлено взаимно однозначное соответствие. Все действительные числа изображаются точками этой координатной оси, и обратно, каждой точке M координатной прямой соответствует определенное действительное число x – ее координата. При рассмотрении числовых множеств вместо слов «элемент», «число» употребляется также слово «точка».

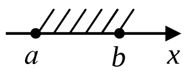
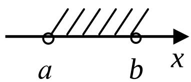
Множество действительных чисел R обозначается также символом $(-\infty, +\infty)$ и называется *числовой прямой*. Всякая координатная прямая является изображением числовой прямой.

Неравенства между действительными числами на координатной прямой получают простое истолкование. Если $x_1 < x_2$, то точка с координатой x_1 лежит левее точки с координатой x_2.

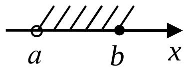
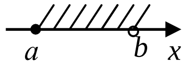
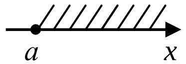
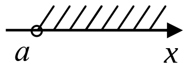
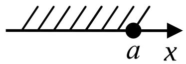
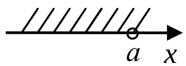
Пусть a и b – действительные числа и $a < b$. В табл. 2.1 приведены названия, определения и обозначения числовых множеств, называемых *числовыми промежутками*, и их изображения на координатной прямой. Каждый из числовых промежутков определяется как множество действительных чисел x, удовлетворяющих определенным неравенствам.

Таблица 2.1

Числовые промежутки

Название	Неравенство, определяющее множество	Обозначение	Изображение
1	*2*	*3*	*4*
Отрезок от a до b (замкнутый промежуток)	$a \le x \le b$	$[a; b]$	
Интервал от a до b (открытый промежуток)	$a < x < b$	$(a; b)$	

Окончание табл. 2.1

1	*2*	*3*	*4*
Открытый слева промежуток от a до b (полуинтервал)	$a < x \le b$	$(a; b]$	
Открытый справа промежуток от a до b (полуинтервал)	$a \le x < b$	$[a; b)$	
Числовой луч от a до $+\infty$	$a \le x$	$[a; +\infty)$	
Открытый числовой луч от a до $+\infty$	$a < x$	$(a; +\infty)$	
Числовой луч от $-\infty$ до a	$x \le a$	$(-\infty; a]$	
Открытый числовой луч от $-\infty$ до a	$x < a$	$(-\infty; a)$	

Определение 2.33. Открытые либо слева, либо справа промежутки называются также полуоткрытыми промежутками, а числовые лучи – бесконечными промежутками.

Если даны две точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$, то величина направленного отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$ вычисляется по формуле

$$M_1M_2 = x_2 - x_1,$$

а расстояние между точками M_1 и M_2 по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = |x_2 - x_1|.$$

Определение 2.34. Простым отношением точек $M_1, M_2, M,$ лежащих на одной прямой и взятых в указанном порядке, называют число

$$l = \frac{M_1M}{MM_2},$$

где M_1M и MM_2 – величины направленных отрезков $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$.

Если точка M лежит между точками M_1, M_2, то $l > 0$. В этом случае говорят, что точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ внутренним образом. Если точка M лежит вне отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$, то $l < 0$, а точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ внешним образом. Если точки M_1 и M совпадают, то $l = 0$.

Пусть $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M(x)$ – точки координатной оси Ox. Тогда

$$l = \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x},$$

откуда следует, что

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}.$$

Эта формула определяет координату точки M, делящей направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ в данном отношении l.

Если точка M совпадает с серединой отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$, то $l = 1$ и координата точки M равна

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Понятие о системе координат является достаточно общим и может использоваться для задания положения точек, геометрических фигур на плоскости и в пространстве.

Определение 2.35. *Прямоугольной правой декартовой системой координат OXY на плоскости* называется упорядоченная пара двух выбранных взаимно перпендикулярных координатных осей OX и OY, причем началом координат для каждой из осей служит точка их пересечения O, а оси OX и OY упорядочены следующим образом: если ось OX повернуть вокруг точки O на угол $\frac{\pi}{2}$ (общее определение угла дано в п. 3.3) против движения часовой стрелки, то она совпадет с осью OY. При этом масштабные направленные отрезки $\overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OE_2}$ координатных осей OX и OY выбираются таким образом, чтобы их длины были равны, т. е.

$$\left|\overrightarrow{OE_1}\right| = \left|\overrightarrow{OE_2}\right|.$$

Из данного определения следует, что при повороте оси OX вокруг точки O на угол $\frac{\pi}{2}$ против движения часовой стрелки точки E_1 и E_2 совместятся.

Замечание 2.11. В общем случае можно рассматривать системы координат, для которых масштабные отрезки $\overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OE_2}$ могут выбираться не равными по длине.

Ось OX называется *осью абсцисс*, а ось OY – *осью ординат*, определенной выше системы OXY.

Определение 2.36. Единичные векторы $\vec{e_1} = \overrightarrow{OE_1}$ и $\vec{e_2} = \overrightarrow{OE_2}$, определяющие положительные направления координатных осей OX и OY, называются *базисными векторами* прямоугольной правой декартовой системы координат OXY (или *ортами*) и обычно обозначаются символами $\vec{i}$ *и* $\vec{j}$, т. е. $\vec{e_1} = \vec{i}$ и $\vec{e_2} = \vec{j}$.

Таким образом, можно считать, что прямоугольная правая декартова система координат OXY на плоскости задается однозначно некоторой точкой O (началом координат) и упорядоченной парой взаимно перпендикулярных единичных векторов $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$. Множество $\left\{O, \vec{i}, \vec{j}\right\}$ обычно называют репером системы OXY.

Координатные оси OX и OY разбивают плоскость на четыре четверти (*квадранты*). Часть плоскости, лежащая выше оси OX и правее оси OY, считается первым квадрантом. Далее по аналогии в направлении против движения часовой стрелки определяются второй, третий и четвертый квадранты. Отметим, что плоскость с построенной системой координат называется обычно *координатной плоскостью*.

При изложенном выше способе упорядоченности координатных осей систему координат, как уже было отмечено выше, называют *правой* прямоугольной декартовой системой координат. В *левой* прямоугольной декартовой системе координат оси упорядочены так, что первая ось (ось OX) совмещается со второй осью (осью OY) с помощью поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ по движению часовой стрелки.

В приложениях также употребляются *косоугольные* (правые и левые) декартовы системы координат (например, [18]), в которых совмещение осей происходит при повороте на угол, отличный от прямого.

Пусть OXY – прямоугольная правая декартова система координат на плоскости с началом O (рис. 2.2), а M – некоторая точка на этой плоскости.

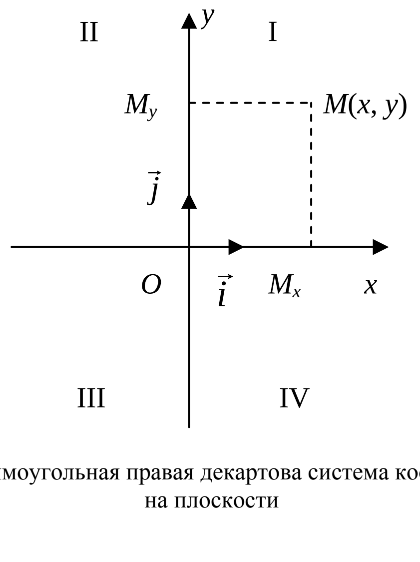


Рис. 2.2. Прямоугольная правая декартова система координат OXY на плоскости

Опустим из точки M перпендикуляры на оси OX и OY, которые пересекут указанные координатные оси в точках M_x и M_y соответственно. Обозначим еще координату точки M_x, лежащей на оси OX, через x, а координату точки M_y, лежащей на оси OY, – через y.

Определение 2.37. *Координатами точки М* в прямоугольной правой декартовой системе координат OXY называется упорядоченная пара действительных чисел (x, y), которые имеют смысл координат точек M_x, M_y на координатных осях OX и OY соответственно.

Число x называют *абсциссой* точки M, а число y – *ординатой* точки M. При этом используют запись $M(x, y)$.

Каждой упорядоченной паре чисел (x, y) на заданной координатной плоскости соответствует единственная точка M, для которой эти числа являются координатами. Таким образом, между точками заданной координатной плоскости и упорядоченными парами действительных чисел (x, y) устанавливается взаимно однозначное (биективное) соответствие. Множество пар действительных чисел иногда называют *числовой плоскостью*.

Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ в прямоугольной правой декартовой системе координат выражается через их координаты по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пусть даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на числовой плоскости. Координаты точки $M(x, y)$, которая лежит на прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, и делит отрезок этой прямой, ограниченный данными точками, в отношении l, определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}, \qquad y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}.$$

Координаты точки M, которая делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ в отношении $l=1$, вычисляются по формулам:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Эти формулы позволяют найти координаты точки M, которая определяет середину отрезка M_1M_2.

Кроме декартовых систем координат на плоскости $R^2=R\times R$ используется также *полярная система координат*.

Полярная система координат задается точкой O, называемой *полюсом*, лучом OP, называемым *полярной осью*, и выбранной на полярной оси единицей масштаба (рис. 2.3).

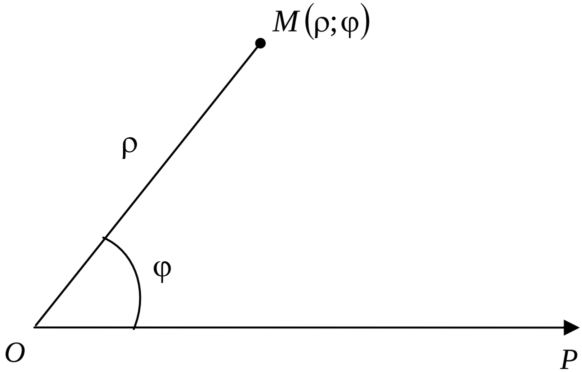


Рис. 2.3. Полярная система координат на плоскости

Отметим, что вышепредставленные формулы дают решение простейших задач аналитической геометрии [18], основная идея которой состоит в изучении геометрических свойств фигур с помощью средств алгебры [17] и анализа [4].

Определение 2.38. *Полярными координатами точки* $M\in R^2$ (не совпадающей с полюсом) называют *полярный радиус* $\rho(M)=\left|\overrightarrow{OM}\right|$

точки M и *полярный угол* $\varphi(M)$, т. е. угол, на который надо повернуть луч OP до совпадения с направлением вектора $\overrightarrow{OM}$ ($\varphi(M) > 0$, если поворот совершается против хода часовой стрелки, и $\varphi(M) < 0$ – в противном случае).

Запись $M(\rho; \varphi)$ означает, что точка M имеет полярные координаты ρ и φ.

Полярный угол $\varphi(M)$ принимает бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на $2k\pi$, где $k \in Z$. Значение полярного угла $0 \le \varphi < 2\pi$ называют *главным* (иногда в качестве главного значения принимают значение φ, удовлетворяющее неравенствам $-\pi < \varphi \le \pi$).

Положение любой точки M на заданной плоскости, которая не совпадает с точкой O, однозначно определяется координатами ρ и φ, причем $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Если точка M совпадает с полюсом O, то $\rho(M) = 0$, а полярный угол можно выбирать любым.

Иногда пользуются *обобщенными полярными координатами точки* $M(\rho, \varphi)$, где $-\infty < \rho < +\infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$.

Совместим правую прямоугольную декартову систему координат и полярную систему координат так, чтобы полярная ось OP совпадала с осью абсцисс OX и оси OX, OY, OP имели бы общее начало координат (т. е. точка O являлась и полюсом) и общую единицу масштаба. Тогда зависимости между декартовыми координатами x и y точки M и ее полярными координатами ρ и φ будут выражаться следующими формулами (рис. 2.4):

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi; \quad \rho = +\sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

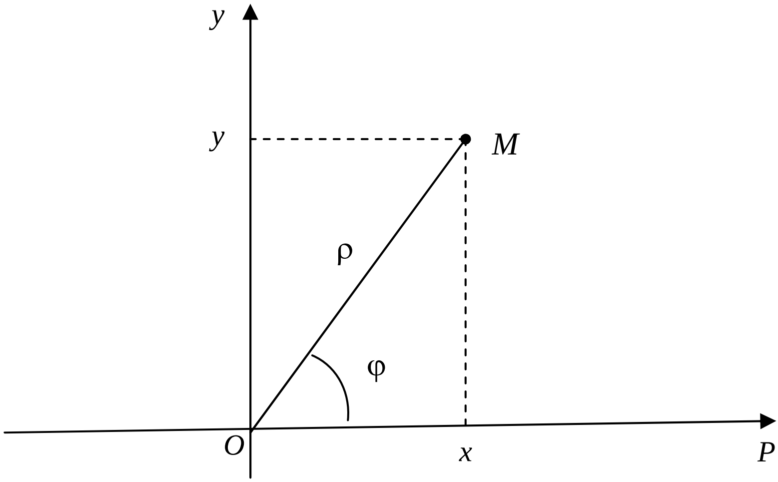


Рис. 2.4. Прямоугольные декартовы и полярные координаты точки M на плоскости

Свойства тригонометрических функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ будут подробно описаны в п. 3.

Системы координат, определенные выше для прямой и плоскости, допускают соответствующие обобщения на случай трехмерного пространства.

Пусть П – некоторая плоскость в трехмерном пространстве R^3 с выбранной на ней прямоугольной правой декартовой системой координат OXY. Проведем через начало координат (т. е. через точку O) прямую, перпендикулярную плоскости П. Выберем на этой прямой направление и масштабный отрезок $\overrightarrow{OE_3}$, равный по длине масштабным отрезкам $\overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OE_2}$. Полученную таким образом координатную ось обозначим OZ.

Определение 2.39. *Прямоугольной декартовой системой координат* $OXYZ$ в пространстве называется упорядоченная тройка взаимно перпендикулярных осей OX, OY и OZ. Прямоугольная декартова система координат $OXYZ$ называется правой, если OXY – правая прямоугольная декартова система координат, а ось OY совмещается с осью OZ поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$ против движения часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси OX. В иных случаях система координат называется левой. При этом ось OX называется *осью абсцисс*, ось OY – *осью ординат*, а ось OZ – *осью аппликат*. Плоскости, проходящие через каждые две координатные оси, называются *координатными плоскостями*. Пространство, в котором выбрана система координат, называют *координатным пространством*.

Рассмотренная выше полярная система координат является криволинейной системой координат, поскольку геометрическим местом точек, для которых $\rho = \text{const},$ является окружность.

В трехмерном пространстве R^3 также используются ортогональные криволинейные системы координат [19, 21]. Ниже введены в рассмотрение только простейшие из них.

Определение 2.40. Цилиндрическими координатами точки M в координатном пространстве называются числа $\rho, \varphi, z,$ где ρ, φ – полярные координаты точки M' $(\rho \geq 0;\ 0 \leq \varphi < 2\pi);$ (M' – проекция точки M на плоскость OXY правой прямоугольной декартовой системы координат $OXYZ$), $z = OM_z$ – величина направленного отрезка $\overrightarrow{OM_z}$ оси OZ (M_z – проекция точки M на ось OZ).

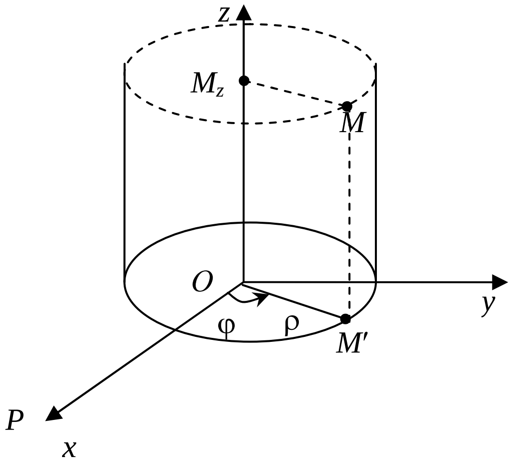
Запись $M(\rho, \varphi, z)$ обозначает, что точка M имеет цилиндрические координаты $\rho, \varphi, z.$ Наименование «цилиндрические координаты» объясняется тем, что координатная поверхность $\rho = \text{const}$ является поверхностью бесконечного кругового цилиндра (рис. 2.5).

Если начало координат правой прямоугольной декартовой системы координат совместить с точкой $O,$ ось OX – с полярной осью, а также совместить оси $OZ,$ то декартовы координаты x, y, z точки M будут связаны с ее цилиндрическими координатами ρ, φ, z следующими формулами:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z.$$

На плоскости П зафиксируем точку O и исходящий из нее луч OP (рис. 2.5). Через точку O проведем прямую, перпендикулярную плоскости П, и укажем на ней положительное направление.

Полученную ось обозначим через OZ. Выберем масштаб для измерения длин. Пусть M – произвольная точка пространства, а M' – ее проекция на плоскость П, M_z – проекция на ось OZ. Обозначим через ρ и φ полярные координаты точки M' на плоскости П относительно полюса O и полярной оси OP.



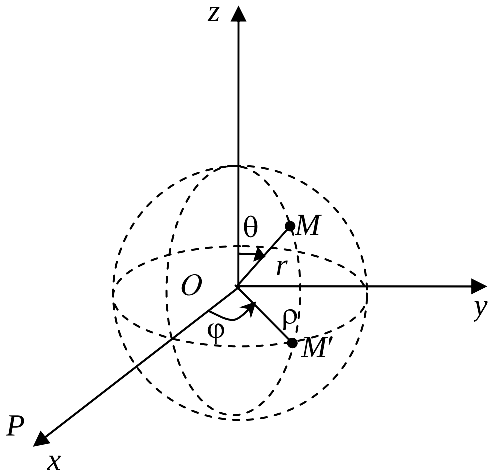


Рис. 2.5. Прямоугольная декартова, цилиндрическая и сферическая системы координат в пространстве

Дадим теперь определение второй ортогональной криволинейной системы координат в пространстве, каковой является сферическая система (см. рис. 2.5).

Определение 2.41. Сферическими координатами точки M называются числа $r, \theta, \varphi,$ где r – расстояние от точки M до начала координат $O,$ θ – угол, который образует радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки M с осью $OZ,$ правой прямоугольной декартовой системы координат, φ – азимутальный угол в полярной системе координат на плоскости $OXY.$ При этом имеют место неравенства: $0 \le r < +\infty;$ $0 \le \theta \le \pi;$ $0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$).

Прямоугольные декартовы координаты связаны со сферическими соотношениями:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta.$$

2.5. Алгебраические операции и их классификация

Определение 2.42. Пусть $X \times X \times ... \times X = X^n$ – декартово произведение всех n-ок $(x_1, x_2, ..., x_n),$ где $\forall s = \overline{1,n}$ элемент $x_s \in X$ (X – некоторое непустое множество). Тогда под *n-арной внутренней алгебраической операцией* в X понимается однозначная функция n переменных $x_1, x_2, ..., x_n,$ областью определения которой является множество $X^n,$ а областью значений – множество $X.$

Если n = 2, то алгебраическая операция называется внутренней *бинарной*. Для обозначения таких операций используются различные символы. В частности, бинарные операции обозначают символами: $\circ$, $+$, $-$, $\cdot$, $*$, $\times$.

Определение 2.43. Бинарная внутренняя алгебраическая операция $*,$ заданная на множестве $M,$ называется *ассоциативной*, если $\forall a, b, c \in M$ имеет место равенство $a * (b * c) = (a * b) * c.$

Сложение и умножение вещественных чисел являются простейшими примерами ассоциативных бинарных внутренних алгебраических операций. Однако бинарная алгебраическая операция возведения вещественных чисел в степень не является ассоциативной.

Определение 2.44. Бинарная алгебраическая операция $*$ называется *коммутативной*, если $\forall a, b \in M$ имеет место равенство $a * b = b * a$.

Определение 2.45. Пусть на множестве M заданы две бинарные внутренние алгебраические операции $*$ и $\circ$. Тогда говорят, что операция $\circ$ *дистрибутивна* относительно операции $*$, если $\forall a, b, c \in M$ имеют место равенства: $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$, $(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$.

В математике используют различные формы записи алгебраических операций. В частности, используются аддитивная и мультипликативная формы записи. В рамках аддитивной формы записи зачастую используют знак «+». При этом ассоциативность и коммутативность внутренних алгебраических операций выглядят таким образом: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a + b = b + a$ для любых $a, b, c \in M$. Когда используется мультипликативная форма записи, то знаки операций вовсе опускаются. В этом случае ассоциативность и коммутативность операций отражается в виде: $(ab)c = a(bc), ab = ba$ для любых $a, b, c \in M$.

Кроме бинарных алгебраических операций рассматриваются обратные алгебраические операции.

Допустим, что на множестве M задана внутренняя алгебраическая операция $\circ$, т. е. для любых элементов $u, r \in M$ поставлен в соответствие единственный элемент $(u, r) = b \in M$. Однако может иметь место равенство $(u_1 \circ r_1) = b$, где u_1 и r_1 не обязаны, вообще говоря, совпадать соответственно с элементами u и r. Поставим следующую задачу: найти все такие $u, r \in M$, для которых $u \circ r = b$, где b – некоторый фиксированный элемент из M. Эта задача сводится к решению следующих уравнений: $a \circ x = b$, $y \circ a = b$, где x, y – неизвестные элементы из M, а элементы a, b – произвольные фиксированные элементы из M. Если данные уравнения имеют единственные решения для любых $a, b \in M$, то тогда можно любой паре $(a, b) \in M \times M = M^2$ поставить в соответствие однозначно определенные элементы $x, y \in M$. В такой ситуации исходная внутренняя бинарная алгебраическая операция $\circ$ порождает две внутренние бинарные операции, которые называются соответственно *правой и левой обратными алгебраическими операциями* по отношению к исходной операции $\circ$.

Замечание 2.12. Если исходная внутренняя алгебраическая операция $\circ$ коммутативна, то обе обратные операции (левая и правая) совпадают друг с другом.

В математике и ее приложениях широко используются и *внешние алгебраические операции* (законы композиции).

Определение 2.46. Рассмотрим два непустых множества M и A. Пусть любому элементу $m \in M$ и произвольному элементу $\alpha \in A$ поставлен в соответствие по некоторому закону (правилу, алгоритму и т. д.) элемент $b \in M$. Тогда множество A называется множеством операторов на множестве M. При этом *внешний закон композиции* $\otimes$ (внешняя алгебраическая операция) определяется как отображение множества $A \times M$ во множество M. Для любых выбранных $\alpha \in A$ и $m \in M$ результат внешней алгебраической операции $\otimes$ можно формально записать в виде $\alpha \otimes m = m_1$, где m_1 – некоторый элемент множества M.

Простейшим примером внешней алгебраической операции является операция умножения вещественных чисел на векторы силы, скорости и ускорения.

2.6. Поле комплексных чисел

Потребность в расширении понятия вещественных чисел естественным образом возникла при попытках аналитического решения квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, где $a, b, c \in R$ и кубических уравнений вида $x^3 = px + q$ $(p, q \in R)$. Следует также отметить, что обычная операция возведения в натуральную степень вещественного числа не всегда имеет обратную операцию (операцию извлечения корня), если оставаться в рамках использования только вещественных чисел. Поскольку множество вещественных чисел обладает рядом замечательных свойств, которые широко используются как в самой математике, так и ее приложениях, то было бы весьма желательно, чтобы указанное расширение было произведено с сохранением общих алгебраических свойств, присущих множеству R. Оказалось, что такого рода обобщение можно произвести корректным образом.

Следует особо отметить, что обобщениями множества вещественных чисел являются множество (поле) комплексных чисел и множество кватернионов. Данные обобщения, являющиеся продуктом интеллектуальной деятельности, связанной с решением сугубо абстрактных математических задач, нашли глубокие и содержательные приложения при исследовании ряда проблем математики, физики (в частности, квантовой механики) и иных областей науки и техники.

Перейдем к построению множества комплексных чисел C.

Определение 2.47. Пусть C – множество, элементами которого являются все пары $(x, y) \in R \times R$ и на котором заданы две *внутренние бинарные алгебраические операции* «+» (сложение) и «$\cdot$» (умножение), определяемые для любых пар (a, b), $(c, d) \in C$ с помощью равенств:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \tag{2.1}$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c - b \cdot d,\ a \cdot d + b \cdot c), \tag{2.2}$$

где знаки «+», «–» и «$\cdot$» внутри круглых скобок имеют смысл обычных операций сложения, вычитания и умножения вещественных чисел. Тогда множество C называется полем комплексных чисел, а пара $z = (x, y)$ – *комплексным числом*.

Замечание 2.13. Бинарные алгебраические операции «+» и «$\cdot$», определенные равенствами (2.1), (2.2), обладают всеми основными свойствами, которые присущи операциям сложения и умножения действительных чисел. Данные операции коммутативны и ассоциативны. Кроме этого, операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения, и существуют обратные операции вычитания «–» и деления. При этом деление на комплексное число (0, 0), которое является *нулем* относительно операции сложения «+», не допускается.

Определение 2.48. Операции вычитания и деления комплексных чисел в C для любых $a, b, c, d \in R$ задаются соответственно посредством равенств:

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d), \tag{2.3}$$

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = ((a, b) / (c, d)) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \ \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right), \tag{2.4}$$

где для упрощения записи опущен знак умножения « $\cdot$ » вещественных чисел.

Из определений операций сложения «+» и умножения « $\cdot$ » комплексных чисел (формулы (2.1), (2.2)) следует, что комплексное число (0, 0) играет роль нуля по отношению к операции сложения, и комплексное число (1, 0) играет роль единицы по отношению к операции умножения. С формальной точки зрения сказанное выше означает, что для любого комплексного числа (a, b) имеют место равенства:

$$(0, 0) + (a, b) = (a, b) + (0, 0) = (a, b), \tag{2.5}$$

$$(1, 0) \cdot (a, b) = (a, b) \cdot (1, 0) = (a, b). \tag{2.6}$$

Если рассмотреть подмножество множества комплексных чисел, которое содержит только все элементы вида $(a, 0)$, где $a \in R$, то можно с учетом равенств (2.1), (2.2) убедиться в справедливости равенств:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) = (b, 0) + (a, 0), \tag{2.7}$$

$$(b, 0)(a, 0) = (a, 0)(b, 0) = (ab, 0). \tag{2.8}$$

Из (2.7), (2.8) следует, что любую пару вида $(a, 0)$, где $a \in R$, можно интерпретировать как вещественное число. Следовательно, комплексное число вида $(a, 0)$ только формой записи отличается от вещественного числа. Кроме этого, операции сложения и умножения комплексных чисел вида $(a, 0)$ также отличаются только формой записи от такого же рода операций во множестве вещественных чисел.

Тем не менее множество комплексных чисел C обладает целым рядом дополнительных свойств, которые существенно расширяют возможности использования таких чисел для решения чисто математических и прикладных проблем. В качестве простейшего примера наличия такого рода свойств рассмотрим символическое квадратное уравнение $x^2 + q = 0$, где число $q \in R_+ = R \setminus (-\infty, 0]$ и является заданным вещественным числом, а x – некоторое число, квадрат которого равен вещественному отрицательному числу $(-q)$. Очевидно, что число x не может быть вещественным числом, поскольку квадрат либо положительного, либо отрицательного числа является положительным вещественным числом (это число не может равняться числу $(-q)$). Перепишем теперь уравнение $x^2 + q = 0$ в общей форме с использованием понятия комплексных чисел. Такое уравнение тогда примет вид

$$(a,b) \cdot (a,b) + (q,0) = (0,0), \tag{2.9}$$

где a, b – неизвестные вещественные числа, а знак «$\cdot$» имеет смысл операции умножения комплексных чисел.

Используя равенство (2.2), преобразуем (2.9) к виду

$$\left(a^2 - b^2, 2ab\right) + (q, 0) = (0, 0). \tag{2.10}$$

Из (2.1) и (2.10) в свою очередь получим, что имеет место равенство

$$\left(a^2 - b^2 + q, 2ab\right) = (0, 0). \tag{2.11}$$

Равенство (2.11) означает, что действительные числа a и b должны быть такими, чтобы удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{Bmatrix} a^2 - b^2 + q = 0 \\ 2ab = 0 \end{Bmatrix}. \tag{2.12}$$

При получении (2.12) было учтено также то, что комплексные числа (x_1, y_1), (x_2, y_2) равны друг другу тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Из второго уравнения в (2.12) следует, что хотя бы одно из чисел a, b должно равняться нулю. Допустим, что $b = 0.$ Тогда второе уравнение системы (2.12) будет выполняться автоматически, а первое примет вид $a^2 + q = 0.$ Так как q – положительное вещественное число, а квадрат любого вещественного числа является неотрицательным числом, то равенство $a^2 + q = 0$ не может иметь места для любого $a \in R.$ Следовательно, допущение $b = 0$ приводит к противоречию. Поэтому теперь допустим, что $a = 0.$ Тогда второе уравнение в (2.12) будет выполняться автоматически, а первое уравнение в (2.12) примет вид $-b^2 + q = 0$ или $b^2 = q,$ где q – положительное вещественное число. Из равенства $b^2 = q$ следует, что вещественное число b может принимать два значения: $b = \pm\sqrt{q}.$ При этом число $\sqrt{q}$ имеет смысл вещественного положительного числа. Итак, доказано, что уравнение (2.9) имеет два следующих решения:

$$\left(0, \pm\sqrt{q}\right). \tag{2.13}$$

Однако решения (2.13) уравнения (2.9) являются элементами множества комплексных чисел C и *не принадлежат* множеству вещественных чисел $R.$ Отметим, что если $q = 1,$ то решения (2.13) уравнения (2.9) примут вид $\left(0, \pm 1\right),$ и, естественно, будут выполняться равенства

$$\left(0, \pm 1\right) \cdot \left(0, \pm 1\right) + \left(1, 0\right) = \left(0, \pm 1\right)^2 + \left(1, 0\right) = \left(0, 0\right).$$

При этом, если переписать формально символическое квадратное уравнение $x^2 + q = 0$ в виде $x^2 = -q$ и формально же извлечь квадратный корень, то получим $x = \pm\sqrt{-q}$. В данной формальной записи присутствует квадратный корень из отрицательного числа $(-q)$. Поэтому числа $x = \pm\sqrt{-q}$ первоначально в математике называли воображаемыми (мнимыми) числами. Так как выше было строго доказано, что уравнение (2.9), которое было получено из символического уравнения $x^2 + q = 0,\ (q \in R_+),$ имеет два решения во множестве комплексных чисел, то уже можно дать определения ряда важных понятий, используемых при описании свойств комплексных чисел.

Определение 2.49. Комплексное число $(0,1)$ называется мнимой единицей и обычно обозначается символом $i = (0,1)$. При этом $i \cdot i = (0,-1)$.

Определение 2.50. Действительные числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа $z = (x,\, y) \in C$. При этом используются обозначения $x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z$. Комплексные числа вида $(0,\, y)$, где $y \in R$, называются чисто мнимыми комплексными числами.

Замечание 2.14. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части.

Определение 2.51. Комплексное число $\overline{z}$ называется комплексно сопряженным к комплексному числу z, если выполнены равенства $\operatorname{Re}\overline{z} = \operatorname{Re} z,\ \operatorname{Im}\overline{z} = -\operatorname{Im} z$.

Замечание 2.15. Произведение действительного числа $(a,0)$ на чисто мнимое число $(0,b)$ представляет собой чисто мнимое число $(0,ab)$.

Определение 2.52. Представление комплексного числа $z=(x,\, y)$ в виде

$$z=(x,\, y)=(x,0)+(0,\, y)=(x,0)+(y,0)\cdot(0,1)=(x,0)+(y,0)i$$

называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Замечание 2.16. В силу биективного соответствия между элементами множества вещественных чисел R и множеством $R\times\{0\}$ строгую алгебраическую форму записи комплексного числа z можно упростить и записать число в виде $z=x+iy$.

Используя упрощенную алгебраическую форму записи комплексного числа $z=x+iy$ и равенства $i\cdot i=i^2=-1$ (под символом (–1) следует, строго говоря, понимать комплексное число (–1, 0)), можно в достаточно простой форме записать результаты алгебраических операций сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел, смысл которых был дан в определениях 2.47, 2.48. Имеют место следующие равенства:

$$z_1\pm z_2=(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)i, \tag{2.14}$$

$$\begin{gathered} z_1\cdot z_2=z_1z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)= \\ =x_1x_2+ix_1y_2+ix_2y_1+i^2y_1y_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1), \end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2}&=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)\cdot(x_2-iy_2)}= \\ &=\frac{x_1x_2-ix_1y_2+ix_2y_1-i^2y_1y_2}{x_2^2-i^2y_2^2}= \\ &=\frac{x_1x_2+y_1y_2+(x_2y_1-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2}= \\ &=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad x_2^2+y_2^2\neq 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Определение 2.53. Под модулем $|z|$ комплексного числа $z = x + iy$ понимают неотрицательное число $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Перечислим ряд свойств операции комплексного сопряжения и модулей комплексных чисел. Из определений 2.51 и 2.53 следует справедливость следующих равенств и неравенств:

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad (2.17)$$

$(z_2 \neq 0;\ 0$ – комплексное число $(0, 0))$,

$$\overline{\left(\overline{z}\right)} = z, \quad x = \operatorname{Re} z = \frac{\overline{z} + z}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i};$$

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|,\ |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|,\ |z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \ (z_2 \neq 0),$$

$$(2.18)$$

$$|z^n| = |z|^n = |\overline{z}|^n \quad n \in \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}, \quad z \cdot \overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2.$$

Наиболее широкое использование множества комплексных чисел началось тогда, когда удалось дать геометрическую интерпретацию этому множеству и операциям над комплексными числами. Подобно тому, как действительным числам можно биективно сопоставить точки числовой оси, комплексным числам можно биективно сопоставить точки плоскости, на которой введена прямоугольная правая декартова система координат.

Будем сопоставлять комплексному числу $z = x + iy$ точку P на плоскости, которая имеет координаты (x, y) в указанной выше системе координат OXY (рис. 2.6).

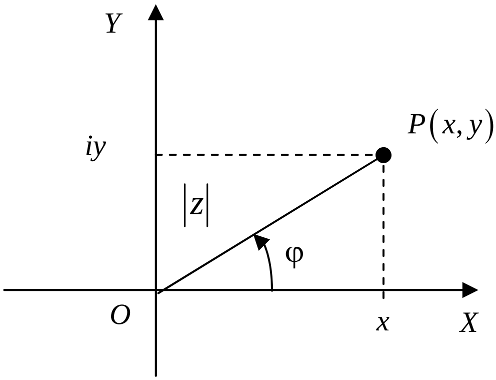


Рис. 2.6. Изображение комплексного числа на плоскости

Точки, лежащие на оси X, изображают вещественные числа, которые в рамках множества комплексных чисел C задаются парами $(x, 0)$. Точки, лежащие на оси Y, изображают чисто мнимые числа, которые в свою очередь задаются парами $(0, y)$. Символ i перед ординатой y точки P имеет символический смысл. Он отображает тот факт, что точке с координатами $(0, y)$ сопоставляется чисто мнимое число iy. Абсцисса x и ордината y каждой точки $P(x, y)$ изображают соответственно действительную часть $\operatorname{Re} z$ и мнимую часть $\operatorname{Im} z$ комплексного числа $z = x + iy$. Плоскость, являющаяся геометрической моделью множества комплексных чисел C, называется комплексной плоскостью. При этом ось OX является действительной осью, а ось OY – мнимой.

Определение 2.54. Угол φ, который образует радиус-вектор $\overrightarrow{OP}$ точки $P(x, y)$ с положительным направлением оси OX, называется аргументом комплексного числа $z = x + iy$. Для $z \neq 0$ аргумент z определяется равенствами:

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (2.19)$$

Модуль комплексного числа определяется однозначно, а аргумент – с точностью до слагаемого $2k\pi$, где $k \in \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$. Модуль комплексного числа $z = 0$ равен нулю, а аргумент не определен.

Определение 2.55. Значение аргумента, удовлетворяющее условиям $-\pi < \varphi \le \pi$, называется *главным* и обозначается символом $\arg z$, а множество всех возможных значений аргумента – $\operatorname{Arg} z$. При этом $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in Z$.

Если комплексные числа равны друг другу, то их модули также равны, а аргументы либо равны, либо отличаются на $2k\pi$, где $k \in Z$. Имеют место равенства $|\bar{z}| = |z|$ и $\arg \bar{z} = -\arg z$.

Для главного значения аргумента справедливы следующие соотношения:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \forall x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, \forall x < 0, \forall y \ge 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, \forall x < 0, \forall y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \qquad x = 0, \forall y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \qquad x = 0, \forall y < 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Подробное описание свойств обратной тригонометрической функции $\operatorname{arctg} x$, использованной в (2.20) будет произведено в п. 3.

Кроме алгебраической формы представления комплексных чисел используются также тригонометрическая и показательная формы представления комплексных чисел. Из (2.19) следует, что $x = |z|\cos\varphi$, $y = |z|\sin\varphi$. Следовательно, $z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Именно данное представление называется *тригонометрической формой записи* *комплексного числа* z. В свою очередь, представление комплексного числа $z = x + iy$ с помощью использования формулы Эйлера [17, 19]:

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \ \varphi \in \mathrm{R}, \tag{2.21}$$

где число e – основание натуральных логарифмов (e = 2,7182818… – иррациональное число), называется *показательной формой* числа z.

Из тригонометрической формы комплексного числа и формулы (2.21) получим общую формулу:

$$z = |z|\mathrm{e}^{i\varphi},\ \varphi \in R,\ \varphi = \arg z + 2k\pi,\ k \in Z. \tag{2.22}$$

Это и есть общая *показательная форма* комплексного числа $z = x + iy$. Использование тригонометрической и показательной форм комплексных чисел позволяет легко выполнять операции умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения корней.

Пусть

$$z_1 = |z_1|\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) = |z_1|\mathrm{e}^{i\varphi_1},\ z_2 = |z_2|\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = |z_2|\mathrm{e}^{i\varphi_2}.$$

Тогда посредством использования формул (2.15), (2.16), (2.22) и тригонометрических тождеств можно показать, что справедливы следующие равенства:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right) = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{i\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}, \tag{2.23}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right) = \frac{|z_1|}{|z_2|}\mathrm{e}^{i\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}. \tag{2.24}$$

Если $z_1 = z_2$, то из (2.23) получим, что $z^2 = |z|^2\left(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi\right) = |z|^2\,\mathrm{e}^{2i\varphi}$. Обобщением данной формулы является *формула Муавра* [17, 19]:

$$z^n = |z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) = |z|^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}. \tag{2.25}$$

В частности, при $|z|=1$ получим

$$\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi. \qquad (2.26)$$

Определение 2.56. Под корнем n-й степени $\sqrt[n]{z}$, где $n\in N=\{1, 2, 3...\}$, из комплексного числа понимается любое комплексное число w, для которого выполняется равенство $w^n=z$.

Используя формулу Муавра, несложно найти все числа w, которые удовлетворяют равенству $w^n=z$. Пусть

$$z=|z|\mathrm{e}^{i\varphi},\quad w=|w|\mathrm{e}^{i\psi}.$$

Тогда

$$w^n=|w|^n\,\mathrm{e}^{in\psi}=|w|^n\left(\cos n\psi+i\sin n\psi\right).$$

Следовательно,

$$|z|\mathrm{e}^{i\varphi}=|z|\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)=|w|^n\left(\cos n\psi+i\sin n\psi\right).$$

Так как два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, то будут справедливы равенства:

$$\begin{aligned}|z|\cos\varphi&=|w|^n\cos n\psi,\\ |z|\sin\varphi&=|w|^n\sin n\psi.\end{aligned} \qquad (2.27)$$

Возведем оба равенства (2.27) в квадрат и результаты сложим. Получим в итоге

$$|z|^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=|z|^2=|w|^{2n}\left(\cos^2 n\psi+\sin^2 n\psi\right)=|w|^{2n}.$$

Следовательно, верны равенства:

$$|z| = |w|^n, \quad |w| = \sqrt[n]{|z|}. \tag{2.28}$$

В (2.28) под корнем $\sqrt[n]{|z|}$ понимается обычный действительный и неотрицательный корень n-й степени из действительного числа. Итак, модуль комплексного числа определяется однозначно формулой (2.28), из которой следует, что равенства (2.27) примут вид $\cos\varphi = \cos n\psi$, $\sin\varphi = \sin n\psi$. В силу того, что синус и косинус (общие свойства тригонометрических функций описаны в п. 3) являются периодическими функциями с периодами $2k\pi$, где $k \in Z$, должно иметь место любое из равенств $\varphi + 2k\pi = n\psi$. Следовательно, аргумент $\psi = \arg w$ должен удовлетворять одному из равенств:

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \;\; k \in Z. \tag{2.29}$$

С учетом описанных выше формул получаем, что все корни n-й степени из комплексного числа z должны иметь вид

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \tag{2.30}$$

где $n \in N$ и $k \in Z$.

Так как синус и косинус являются периодическими функциями, то будут существовать только n различных корней $w_1, \ldots, w_n$ из комплексного числа z. При этом для получения корней достаточно положить в (2.30) $k = 0, \ldots, n-1$.

Следует отметить, что точки на комплексной плоскости, соответствующие различным значениям корня n-й степени из комплексного числа z, располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в точке O и радиусом, равным $\sqrt[n]{|z|}$.

Замечание 2.17. Корень n-й степени из действительного числа также имеет n корней. Корень n-й степени из нуля имеет только одно значение, равное нулю.

3. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Общие сведения о действительных функциях одной действительной переменной

В естествознании используются разнообразные величины, например, время, длина, масса, давление, температура и т. п., которые принимают либо различные численные значения, либо одинаковые значения. Величина, которая может принимать разные значения, называется *переменной*. Величина, численные значения которой не меняются, называется *постоянной*. Величины, которые сохраняют значения при любых условиях, называются *абсолютными постоянными*. Такими величинами являются, например, число π и основание натуральных логарифмов.

В математике отвлекаются от физического или иного смысла рассматриваемой величины и интересуются лишь числом, которым она выражается, т. е. изучают числовую переменную. Ее обозначают каким-либо символом или буквой (например, $x, y,...$), которым приписываются числовые значения. Однако физический или иной характер величины имеют смысл в рамках разнообразных приложений математики.

Переменная x считается заданной, если указана ее *область изменения*, т. е. множество $X = \{x\}$ ее значений, которые она может принимать. Постоянную величину удобно рассматривать как частный случай переменной, множество значений которой состоит из одного элемента. Различают дискретные и непрерывные переменные.

Пусть даны две действительные переменные x и y с областями изменения X и Y, где X и Y – произвольные непустые подмножества множества действительных чисел $(X \subseteq R,\ Y \subseteq R)$. Хотя ранее уже было дано общее определение понятия соответствия (отображения, функции), конкретизируем его для случая действительных переменных.

Определение 3.1. Действительная переменная y называется действительной функцией от действительной переменной x в области ее изменения X, если по некоторому правилу, алгоритму или закону каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие одно определенное значение y (из $Y \subset R$).

Замечание 3.1. Определенную выше функцию одной действительной переменной называют *однозначной*. Если же каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие не одно, а несколько или бесконечное множество значений y, то функцию называют *многозначной*.

Для указания того факта, что y есть функция от x, используют следующую запись: $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = y(x)$ и т. п. Символы $f, \varphi, \ldots$ характеризуют именно то правило, по которому определяется значение y, отвечающее заданному x. Переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом* функции, а переменную y – зависимой переменной.

Определение 3.2. Все значения $x \in X$, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции, которую принято обозначать символом $D(f)$ или $D(y)$. Все те значения $f(X) = \{ y \in Y \mid y = f(x),\ x \in X \}$, которые принимает зависимая переменная, образуют множество значений функции, для которого принято обозначение $E(f)$ или $E(y)$. Очевидно, что $f(X) \subseteq Y$. Запись $f(x_0)$ или $y(x_0)$ определяет значение функции в точке x_0.

Для действительных функций одной действительной переменной имеют место отношения $D(f) \subseteq R, E(f) \subseteq R$.

Чтобы определить (задать) действительную функцию $y = f(x)$ действительного аргумента, необходимо указать множество X значений аргумента и соответствие f, переводящее (отображающее) элементы x множества X в элементы y некоторого множества Y $(X \subseteq R, Y \subseteq R)$.

Наиболее распространенными способами задания функции являются аналитический, табличный и графический.

Аналитический способ задания функции состоит в том, что с помощью формул(ы) устанавливается алгоритм вычисления значений функции $f(x)$ для каждого из значений $x \in D(f)$. При этом область определения $D(f)$ либо указывают, либо под $D(f)$ понимают множество значений аргумента x, при которых выражения, входящие в формулы, имеют смысл. В последнем случае говорят о *естественной области определения* функции. Аналитическое задание функции связано с выбранной системой координат. Представление функции в виде $y = f(x)$ в декартовых координатах или $r = r(\varphi)$ в полярных координатах называют *явным* заданием функции. Функция $y = f(x)$ может быть задана *неявно* уравнением $F(x, y) = 0,$ если для любого $x \in D(f)$ $F(x, f(x)) \equiv 0.$ Иногда удобно функциональную зависимость от x задавать в параметрическом виде, где $x = \varphi(t),$ $y = \psi(t)$ – две функции одной независимой переменной $t \subseteq T \subseteq R,$ которую называют *параметром* (например, параметр t может иметь смысл времени или угла поворота).

Табличный способ задания функции осуществляется табличным перечислением n значений аргумента $x_1, x_2, ..., x_n$ и соответствующих им значений функции $y_1, y_2, ..., y_n$.

Графический способ задания функции состоит в представлении функции $y = f(x)$ графиком в некоторой системе координат.

Определение 3.3. Графиком Г функции $y = f(x)$ называется множество точек $M(x, y)$ плоскости $R^2,$ координаты которых связаны данной функциональной зависимостью, т. е. $\Gamma = \left\{ M(x, y) \in R^2 \mid y = f(x) \right\}.$

Чаще всего график функции есть некоторая линия. Множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции, если любая прямая, параллельная оси $OY,$ пересекает указанное множество точек не более чем в одной точке.

Опишем основные свойства и характеристики поведения функций.

Определение 3.4. Значение $x \in D(f),$ при котором функция $f(x)$ обращается в нуль, называется *нулем этой функции*.

Нули функции являются корнями уравнения $f(x) = 0.$ В нуле функции ее график имеет общую точку с осью OX. В интервале, на котором функция положительна, график ее расположен над осью OX, а в интервале, где она отрицательна – под осью OX. Указанные интервалы называют *интервалами знакопостоянства функции*.

Определение 3.5. Функция называется *четной* (*нечетной*):

1) если область определения функции симметрична относительно точки O – начала координат (если точка $x_0 \in D(f)$, то существует $(-x_0) \in D(f)$);

2) для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ для четной (($f(-x) = -f(x)$ для нечетной) функции.

Определение 3.6. Если хотя бы одно из условий определения 3.5 не выполняется, то функцию $y = f(x)$ называют функцией общего вида (рис. 3.1, *в*).

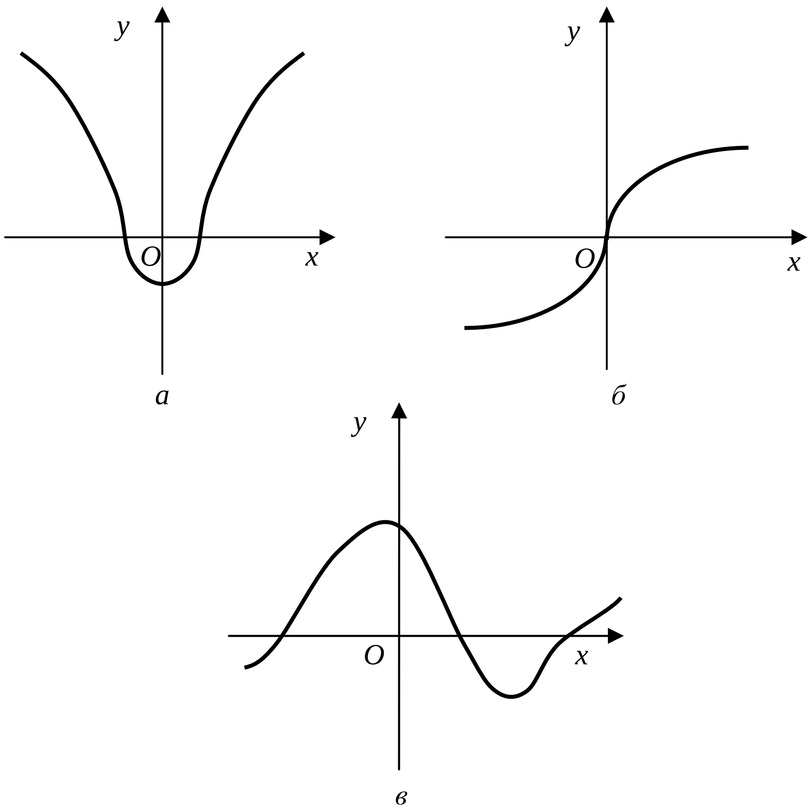


Рис. 3.1. Графики функций $y = f(x)$:
а – четной; *б* – нечетной; *в* – общего вида

График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 3.1, *а*), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 3.1, *б*). При изучении поведения четной или нечетной функции достаточно изучить ее при любом $x \geq 0 \, (x > 0)$, $x \in D(f)$ и продолжить это изучение с учетом ее симметрии на любые $x < 0$ из области определения.

Замечание 3.2. Сумма, разность, произведение и частное двух четных функций есть четная функция. Сумма и разность нечетных функций – нечетная функция, а произведение и частное – четная функция. Произведение и частное четной и нечетной функций есть нечетная функция.

Определение 3.7. Функция $f(x)$ называется периодической с периодом $T, T \in R, T \neq 0$:

1) если для любого значения аргумента x из области определения функции существует такое число T, что значения $x - T$ и $x + T$ также принадлежат области определения функции;

2) при любом x из области определения функции $f(x) = f(x - T) =$ $= f(x + T)$ (рис 3.2).

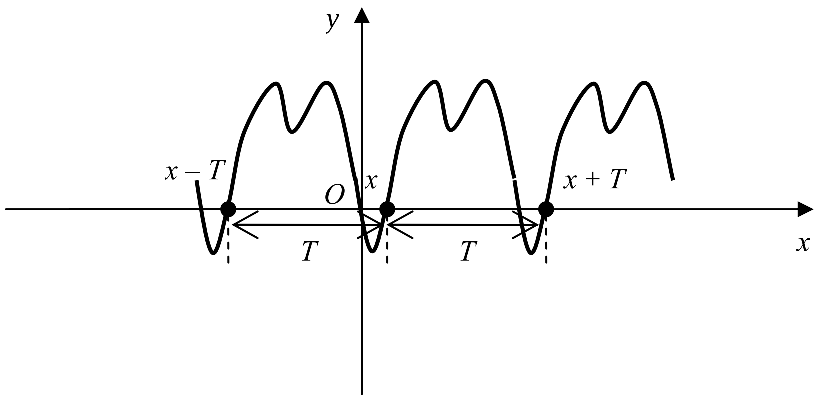


Рис. 3.2. График периодической функции

Замечание 3.3. Если число T является периодом функции $f(x)$, то и число nT для любого $n \in Z$ также период этой функции. Если существует наименьший положительный период функции, то его называют *основным периодом*. Если T – период функции $y = f(x)$, то достаточно построить ее график на одном из интервалов длиной T, а затем произвести параллельный перенос его вдоль оси Ox на $\pm Tk$, $k \in Z$.

Замечание 3.4. Если функция $f(x)$ периодическая и ее период равен T, то функция $f(\omega x)$ тоже периодическая с периодом $\frac{T}{\omega}$ $\left(\omega \in R \setminus \{0\}\right)$.

Определение 3.8. Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на множестве X $(X \subseteq R)$, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции (рис. 3.3, *а*, *б*). Функция $f(x)$ называется неубывающей (невозрастающей) на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует не меньшее (не большее) значение функции (рис. 3.3, *в*, *г*).

Таким образом, имеют место следующие эквиваленции: $f(x)$ возрастает (убывает) на $X \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in X$ $(X \subseteq R;\, x_2 > x_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$; $f(x)$ не убывает (не возрастает) на $X \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in X$ $(X \subseteq R;\, x_2 > x_1) \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ $(f(x_2) \leq f(x_1))$.

Определение 3.9. Возрастающие и убывающие на множестве функции называют монотонными (или строго монотонными) на этом множестве, а неубывающие и невозрастающие – монотонными в широком смысле.

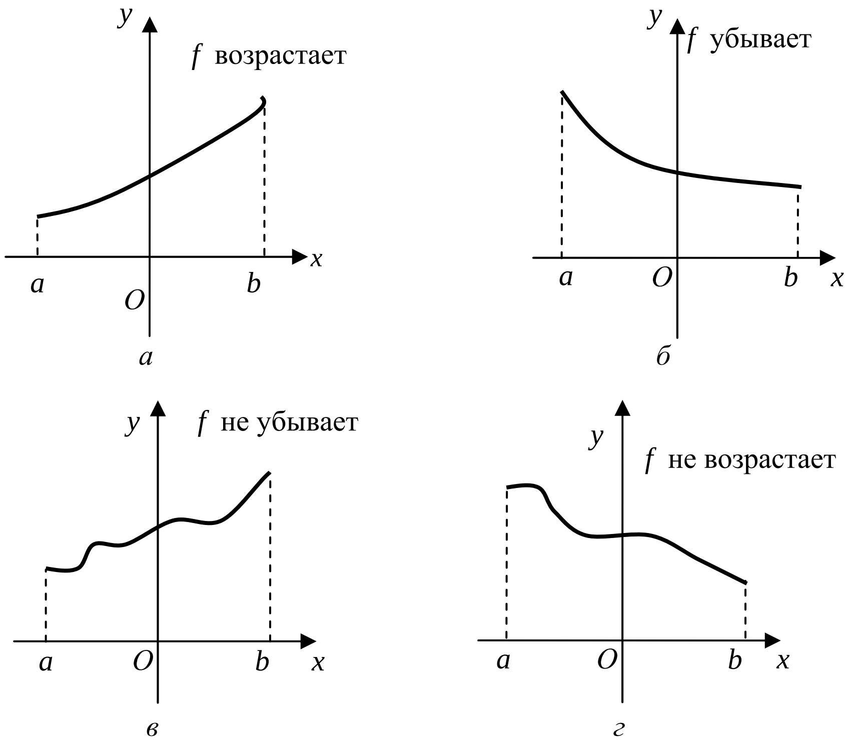


Рис. 3.3. Графики монотонных функций:
а – возрастающей; *б* – убывающей; *в* – неубывающей; *г* – невозрастающей

Определение 3.10. Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве $X \subseteq D(f) \subseteq R,$ если существует такое конечное число $M \in R\ (m \in R),$ что при любых $x \in X$ выполняется условие $f(x) \le M$ $(f(x) \ge m)$ (рис. 3.4, *а*, *б*).

Определение 3.11. Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве $X \subseteq D(f) \subseteq R,$ если существует такое конечное положительное число $M^* = \max(|M|, |m|),$ что для любых $x \in D(f)$ выполняется условие $|f(x)| \le M^*.$

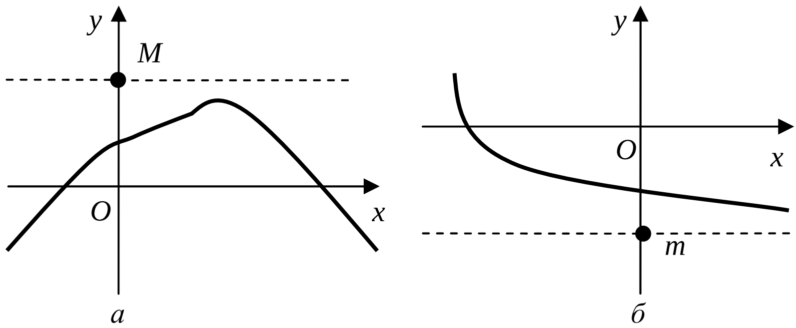


Рис. 3.4. Графики функций:
а – ограниченной сверху; *б* – ограниченной снизу

Определение 3.12. Функция $f(x)$ называется неограниченной сверху (снизу) на множестве $X \subseteq D(f) \subseteq R,$ если для любого числа M существует $x \in D(f)$ такое, что $f(x) \geq M$ ($f(x) \leq M$).

Дадим определение и разъясним понятие сложной функции. Пусть на некотором множестве $D\,(D \subseteq R)$ определена вещественная функция $u = \varphi(x)$ и $E(u)$ – множество значений этой функции. Допустим еще, что на множестве $E(u)$ задана функция $y = f(u)$ $(D(f) \subseteq E(u))$. Итак, функция φ отображает (ставит в соответствие) элементы x в элементы u, а функция f отображает элементы u в элементы y. Таким образом, в конечном итоге каждому значению $x \in D(f)$ ставится в соответствие (посредством промежуточной переменной u) одно вполне определенное значение (для однозначных функций φ и u) $y \in E(f)$, где $E(f)$ – множество значений функции $y = f(u)$. Саму функцию y тогда называют *сложной функцией* аргумента x или *функцией от функции* (ее записывают $y = f(\varphi(x))$. Сложную функцию иначе называют *композицией* или *суперпозицией* функций f и φ и иногда записывают в виде $f \circ \varphi$. При этом функцию $u = \varphi(x)$ называют промежуточным аргументом (зависимой переменной), а x – независимой переменной.

Следует отметить, что весьма существенным является условие, что значения функции $\varphi(x)$ в суперпозиции функций $f \circ \varphi$ не выходят за пределы той области, в которой определена функция $f(u)$.

Сложную функцию $y = f(\varphi(x))$ можно записать в виде «цепочки» равенств $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. Сложными функциями называют также функции, которые содержат два и более промежуточных аргументов. Например, сложная функция $y = f(\varphi(\psi(x)))$ двух промежуточных аргументов $t = \varphi(u)$ и $u = \psi(x)$ понимается как «цепочка» равенств (вложений функций) $y = f(t)$, $t = \varphi(u)$, $u = \psi(x)$. При этом область значений функции u должна полностью (или частично) совпадать с областью определения функции t, а область значений функции $t = \varphi(\psi(x))$ – с областью определения функции y.

Кроме сложных функций в математике важную роль играет понятие обратной функции. Пусть функция $y = f(x)$ является отображением множества $D(f) \to E(f)$, где $D(f)$ и $E(f)$ – область определения и множество значений функции. Допустим, что отображение f биективное, т. е. взаимно однозначное. При взаимно однозначном отображении множества D на множество E каждый элемент $y \in E(f)$ является образом одного и только одного элемента $x \in D$ и наоборот. Так как каждому элементу $y \in E(f)$ ставится в соответствие единственный элемент $x \in D(f)$, то говорят, что на множестве E определена *функция, обратная к функции* $y = f(x)$, которую обозначают выражением $x = \varphi(y)$ (или $x = f^{-1}(y)$).

Заметим, что если функция f^{-1} является обратной для функции f, то функция f является обратной к f^{-1}, т. е. верно равенство $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Функции f и f^{-1} называют взаимно обратными. Функция, имеющая обратную, называется *обратимой*. Не всякая функция $y = f(x)$ имеет обратную функцию.

Теорема 3.1. Если числовая функция $y = f(x)$ монотонна, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. При этом, если f – возрастающая функция, то и f^{-1} – возрастающая, а если f – убывающая функция, то и f^{-1} – убывающая.

Монотонность функции является лишь достаточным условием ее обратимости.

Замечание 3.5. Функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ по существу выражают одну и ту же зависимость между переменными x и y. Только при функциональной зависимости $y = f(x)$ x есть аргумент, а y – функция. При функциональной зависимости $x = f^{-1}(y)$ аргументом служит y, а x является функцией. Поэтому графики прямой и обратной функций совпадают. Если же у обратной функции, так же как и у исходной функции, аргумент обозначить через x, а зависимую переменную через y (как обычно принято), то обратная функция будет иметь вид $y = f^{-1}(x)$. График обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы $y = x$ первого координатного угла.

Для того чтобы найти обратную функцию для взаимно однозначной функции $y = f(x)$, следует решить уравнение $y = f(x)$ относительно переменной x, т. е. найти функцию $x = f^{-1}(y)$, а затем поменять обозначения переменной x на y, а y на x и тем самым получить функцию $y = f^{-1}(x)$, обратную к данной.

Замечание 3.6. В общем случае обратную функцию для функции $y = f(x)$ определяют как многозначную, если значению $y \in E(f)$ соответствует несколько или бесконечное множество значений $x \in D(f)$.

На графике, если любая прямая, параллельная оси Ox, пересекает график функции $y = f(x)$ лишь в одной точке, то обратная для нее функция будет однозначной. Если же некоторые из таких прямых пересекают график в нескольких точках, то обратная функция будет многозначной. В подобных случаях выбирают такие промежутки изменения x, которым отвечают однозначные «ветви» многозначной обратной функции.

3.2. Геометрические преобразования графиков функций

Если график функции $y = f(x)$ известен, то с помощью некоторых преобразований плоскости (параллельного переноса, осевой и центральной симметрии, растяжения и т. п.) можно построить графики более сложных функций.

Замечание 3.7. График функции $f(\omega x)$, где $\omega \in (0, +\infty)$, получается сжатием графика функции $f(x)$ вдоль оси Ox в ω раз к оси Oy при $\omega > 1$ или растяжением графика функции $f(x)$ вдоль оси Ox в $\dfrac{1}{\omega}$ раз от оси Oy при $0 < \omega < 1$ (рис. 3.5).

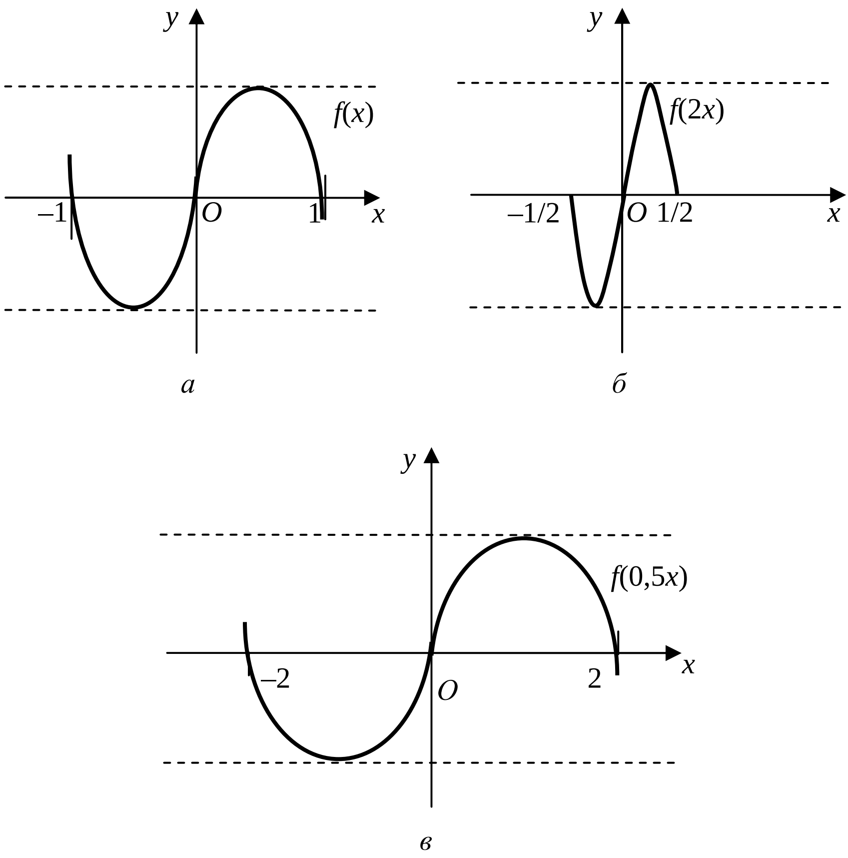


Рис. 3.5. Графики функций:
а – $y = f(x)$; *б* – $y = f(2x)$; *в* – $y = f(0,5x)$

Замечание 3.8. График функции $Af(x)$, где $A \in (0, +\infty)$, получается растяжением графика функции $f(x)$ вдоль оси Oy в A раз при $A > 1$ и сжатием вдоль этой оси в $\frac{1}{A}$ раз при $0 < A < 1$ (рис. 3.6).

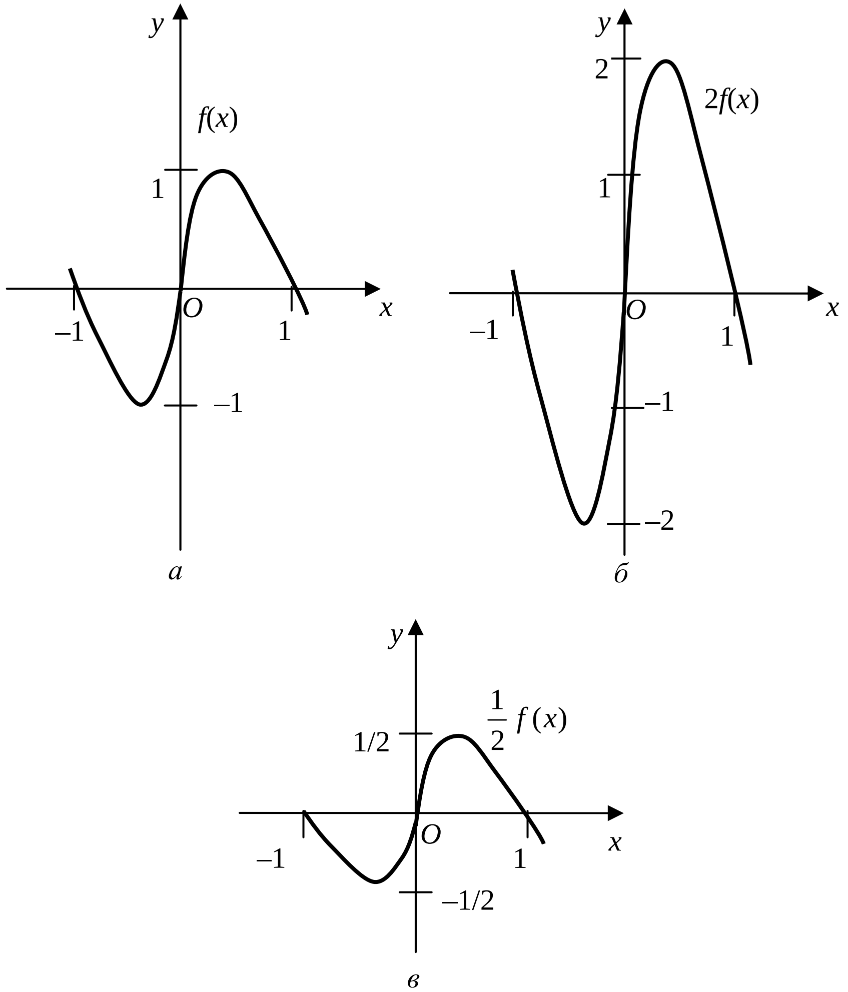


Рис. 3.6. Графики функций:
а – $y = f(x)$; *б* – $y = f(2x)$; *в* – $y = \frac{1}{2} f(x)$

Замечание 3.9. График функции $f(x+a)$ получается параллельным переносом графика функции $f(x)$ в отрицательном направлении оси Ox на $|a|$ при $a>0$ и в положительном направлении при $a<0$ (рис. 3.7).

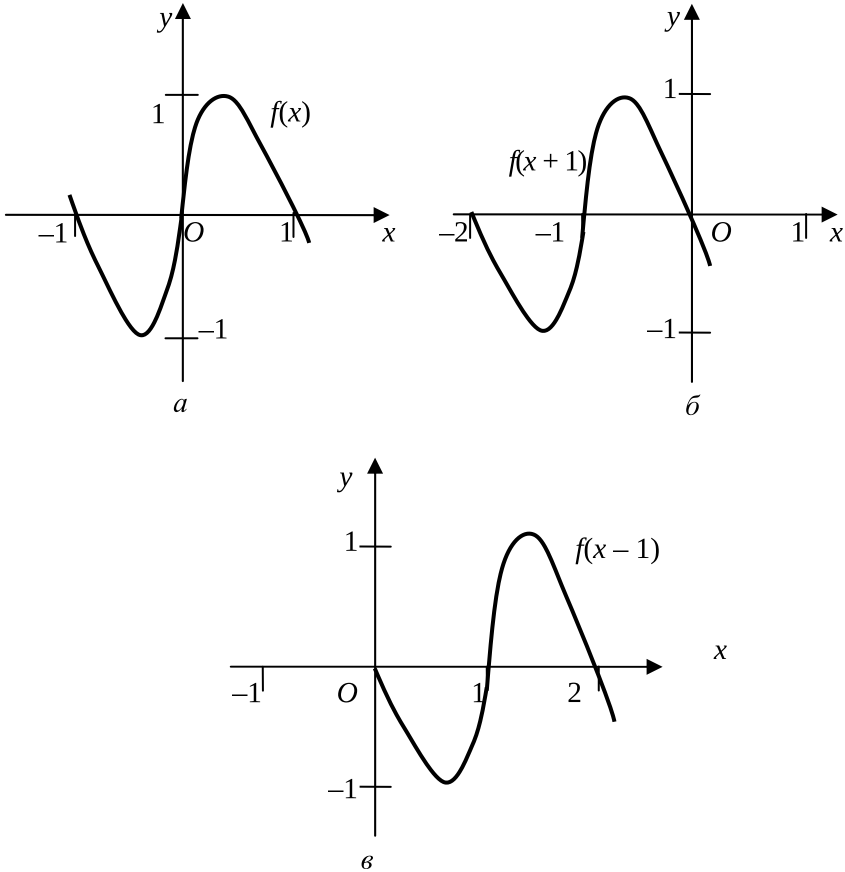


Рис. 3.7. Графики функций:
$a-\ y=f(x)$; $б-\ y=f(x+1)$; $в-\ y=f(x-1)$

Замечание 3.10. График функции $f(x)+b$ получается параллельным переносом графика функции $f(x)$ в положительном направлении оси Oy на величину b при $b > 0$ и в отрицательном направлении этой оси на величину $|b|$ при $b < 0$ (рис. 3.8).

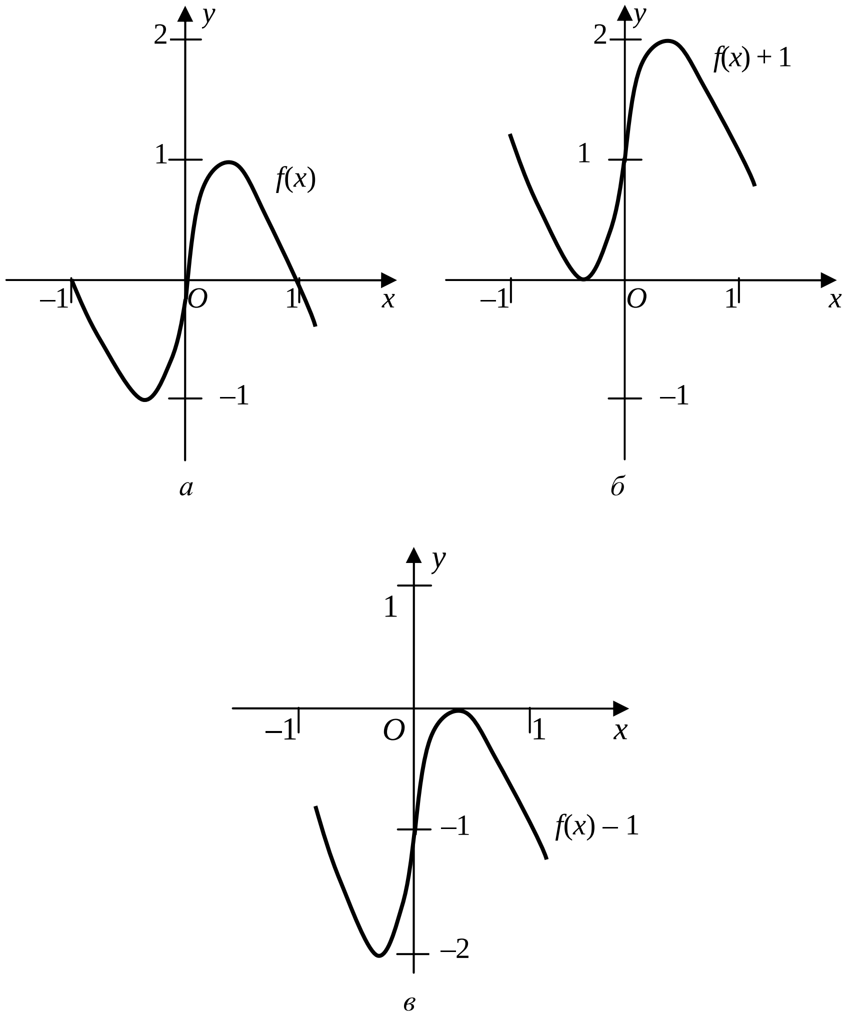


Рис. 3.8. Графики функций:
а – $y = f(x)$; *б* – $y = f(x) + 1$; *в* – $y = f(x) - 1$

Замечание 3.11. График функции $f(-x)$ получается симметричным отображением графика функции $f(x)$ относительно оси Oy (рис. 3.9, *а*).

Замечание 3.12. График функции $-f(x)$ получается симметричным отображением графика функции $f(x)$ относительно оси Ox (рис. 3.9, *б*).

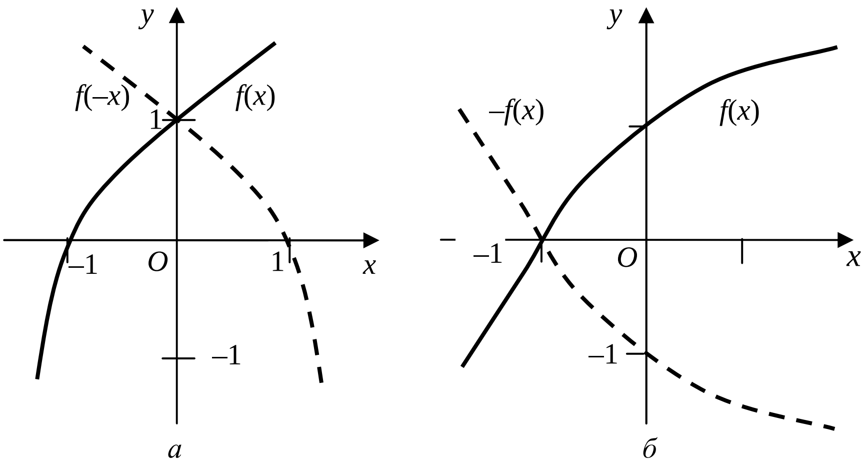


Рис. 3.9. Графики функций:
а – $y = f(x)$ и $y = f(-x)$; *б* – $y = f(x)$ и $y = -f(x)$

Замечание 3.13. График функции $\left|f(x)\right|$ получается из графика функции $f(x)$ следующим образом: часть графика $f(x)$, лежащая над осью OX, сохраняется, часть его, лежащая под осью OX, отображается симметрично относительно оси OX (рис. 3.10). Указанное правило преобразования графика функции $f(x)$ следует из формулы

$$y = \left|f(x)\right| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

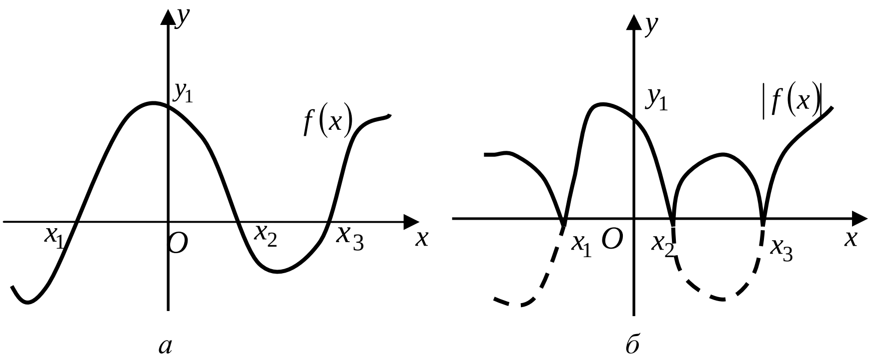


Рис. 3.10. Графики функций:
$a -\ y = f(x)$; $б -\ y = \left|f(x)\right|$

Замечание 3.14. График функции $f\left(|x|\right)$ получается из графика функции $f(x)$ следующим образом: часть графика $f(x)$ при $x \geq 0$ сохраняется, а при $x < 0$ полученная для $x > 0$ часть графика отображается симметрично относительно оси OY (рис. 3.11). Данное преобразование выполняется согласно формуле

$$y = f\left(|x|\right) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \geq 0, \\ f(-x), \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

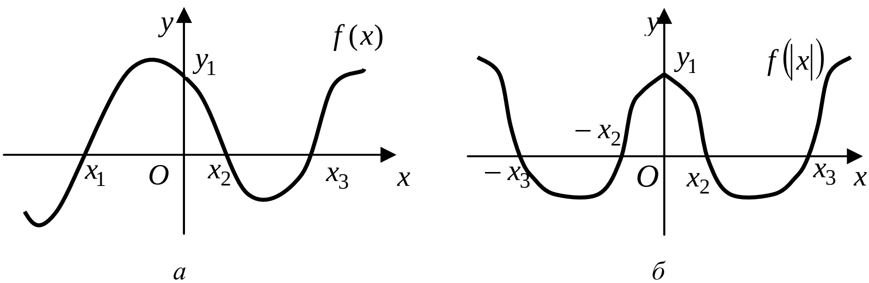


Рис. 3.11. Графики функций:
$a -\ y = f(x)$; $б -\ y = f\left(|x|\right)$

3.3. Действительные элементарные функции

Линейная функция. Прямая пропорциональная зависимость

Линейной функцией называется функция $y = f(x)$, определяемая равенством $y = ax + b$, где a и b – некоторые действительные числа.

Областью определения линейной функции является множество всех действительных чисел R. Областью изменения (множеством значений) этой функции при $a \neq 0$ является множество всех действительных чисел R. При $a = 0$ множество значений состоит из одного числа b.

Если $b = 0$, то линейная функция будет нечетной.

Линейная функция является непрерывной на всей числовой оси (определение непрерывной функции дано, например, в учебниках [4, 8]).

При $a > 0$ $(a < 0)$ линейная функция возрастает (убывает) при всех $x \in R$, а при $a = 0$ линейная функция является постоянной величиной $y = b$.

Равенство $ax + b = 0$ имеет место при $x = -\dfrac{b}{a}$; при $x = 0$ $y = b$. Если $a > 0$, $ax + b > 0$ при $x > -\dfrac{b}{a}$; $ax + b < 0$ при $x < -\dfrac{b}{a}$; если $a < 0$, $ax + b > 0$ при $x < -\dfrac{b}{a}$; $ax + b < 0$ при $x > -\dfrac{b}{a}$.

График линейной функции $y = ax + b$ есть прямая линия. Коэффициент a характеризует угол α, который образует прямая с положительным направлением оси OX (рис. 3.12). При этом величина $a = \operatorname{tg}\alpha$ называется угловым коэффициентом. Если $a > 0$, то это угол острый, если $a < 0$ – тупой, если $a = 0$, то прямая $y = b$ параллельна оси OX.

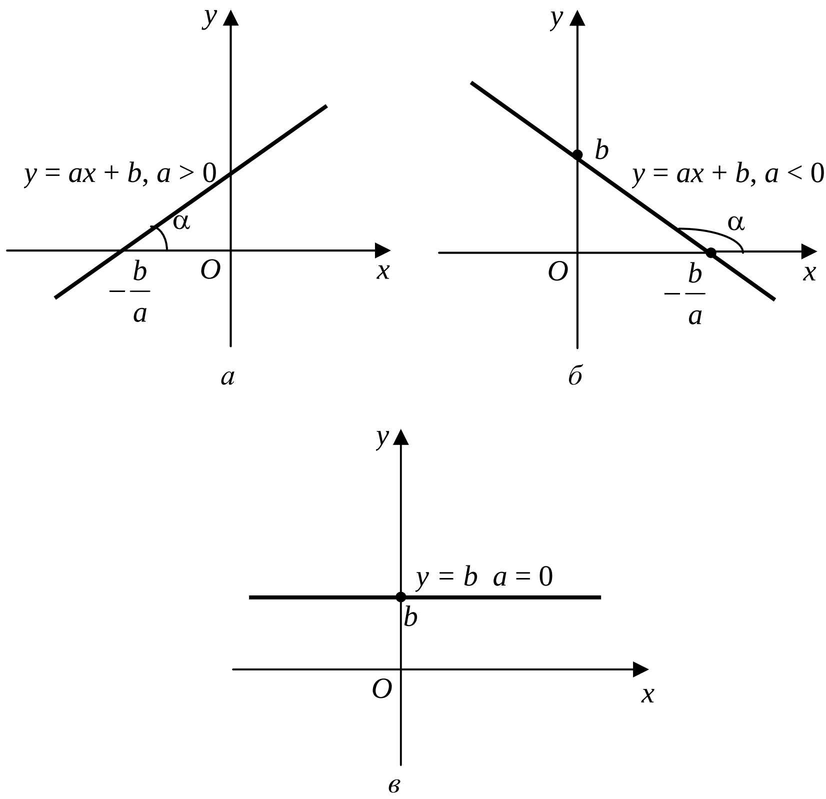


Рис. 3.12. Графики функции $y = ax + b$:
а – $a > 0$; б – $a < 0$; в – $a = 0$

Если $b = 0,$ то прямая $y = ax$ проходит через начало координат.

Переменную y называют *прямо пропорциональной* переменной x с коэффициентом пропорциональности $k = a,$ если эти переменные связаны соотношением $y = ax,\ a \neq 0.$ Прямая пропорциональная зависимость является частным случаем линейной функции.

Квадратичная функция

Квадратичной функцией называется функция $y = f(x)$ вида $y = ax^2 + bx + c,$ где a, b, c – некоторые действительные числа, $a \neq 0.$

Квадратичная функция может быть приведена к виду

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \qquad (3.1)$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Представление $ax^2 + bx + c$ в виде (3.1) называется *выделением полного квадрата*.

Опишем основные свойства квадратичной функции и ее график.

Область определения квадратичной функции – множество всех действительных чисел R.

При $b \neq 0$ квадратичная функция имеет общий вид, а при $b = 0$ квадратичная функция является четной функцией.

Рассматриваемая функция непрерывна [4, 8] на всей числовой оси. При $a > 0$ функция убывает от $+\infty$ до $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ для всех $x \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ и возрастает от значения y_0 до $+\infty$ для всех $x \in \left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$; множество значений функции: $y \in \left[\dfrac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right)$. При $a < 0$ функция возрастает от $-\infty$ до y_0 для всех $x \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ и убывает от значения y_0 до $-\infty$ для всех $x \in \left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$; функция принимает значения, принадлежащие множеству $\left(-\infty, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right]$.

Квадратичная функция удовлетворяет равенству $ax^2 + bx + c = 0$ при $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ или $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, если дискриминант $D = b^2 - 4ac \geq 0.$ Если же $a > 0$ и $D > 0,$ то имеет место неравенство

$ax^2+bx+c>0$ при $x<x_1$ или $x>x_2$; $ax^2+bx+c<0$ при $x_1<x<x_2$; если $D=0$, то $ax^2+bx+c>0$ для всех $x\neq-\dfrac{b}{2a}$; если $D<0$, то $ax^2+bx+c>0$ для всех $x\in R$. Если $a<0$ и $D>0$, то $ax^2+bx+c>0$ при $x_1<x<x_2$; $ax^2+bx+c<0$ при $x<x_1$ или $x>x_2$; если $D=0$, то $ax^2+bx+c<0$ для всех $x\neq-\dfrac{b}{2a}$; если $D<0$, то $ax^2+bx+c<0$ для всех $x\in R$ (рис. 3.13–3.16). При $x=0$ $y=c$.

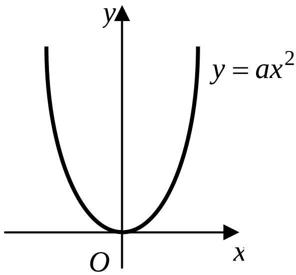


Рис. 3.13. Парабола $y = ax^2$, $a > 0$

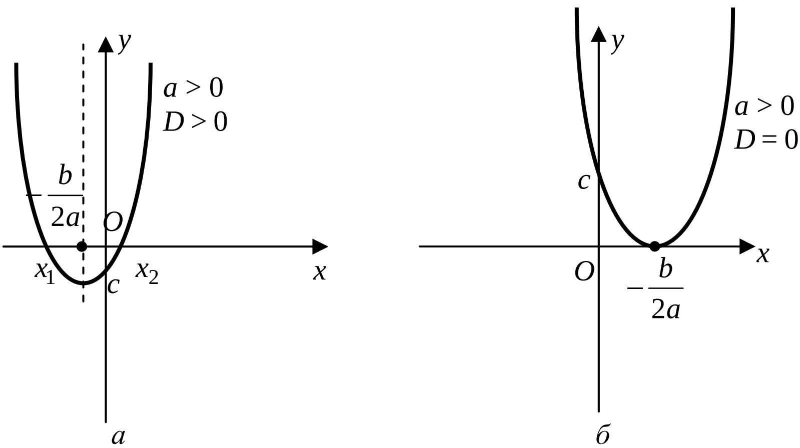


Рис. 3.14. Парабола $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$:
а – $D > 0$; *б* – $D = 0$

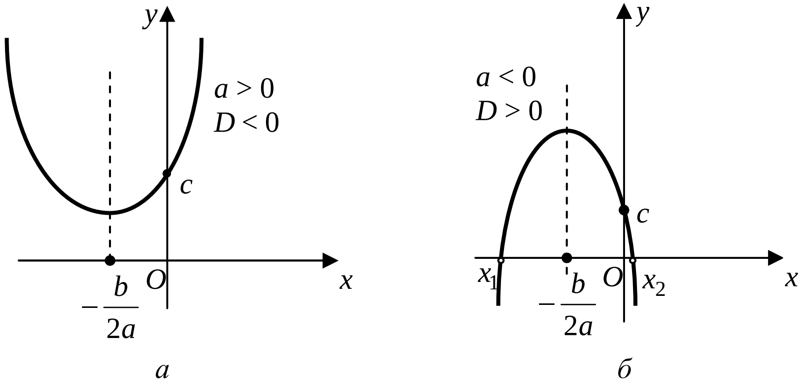


Рис. 3.15. Парабола $y = ax^2 + bx + c$:
а – $a > 0, D < 0$; *б* – $a < 0, D > 0$

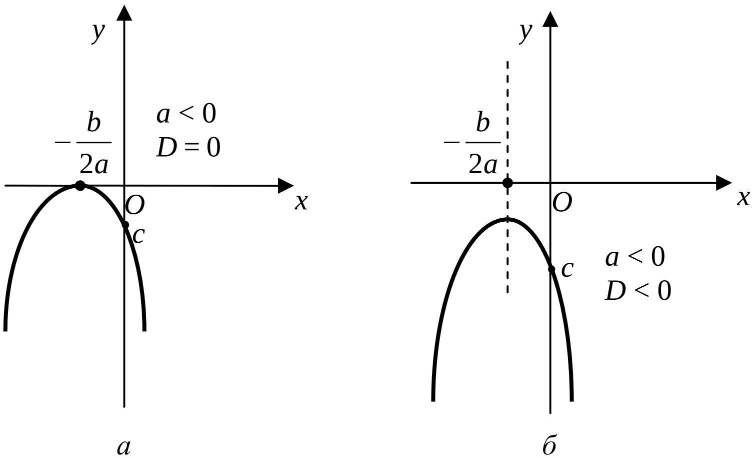


Рис. 3.16. Парабола $y = ax^2 + bx + c$:
а – $a < 0, D = 0$; *б* – $a < 0, D < 0$

График квадратичной функции называется параболой. Если $a > 0$ $(a < 0)$, то ветви параболы направлены вверх (вниз). Осью симметрии параболы служит прямая $x = -\dfrac{b}{2a}$. Точка графика функции с абсциссой $x_0 = -\frac{b}{2a}$ и ординатой $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$ называется *вершиной параболы*. Если $b = 0$, $c = 0$, вершина параболы $y = ax^2$ находится в начале координат (см. рис. 3.13). Графики функции $y = ax^2 + bx + c$ изображены на рис. 3.14–3.16.

Функция $y = \frac{k}{x}$. Обратно пропорциональная зависимость. Дробно-линейная функция

Функция $y = \frac{k}{x}$ выражает *обратно пропорциональную* зависимость переменной *y* от переменной *x*. Здесь *k* – действительное число, отличное от нуля, которое называют коэффициентом обратной пропорциональности.

Область определения данной функции $D(y) = R \setminus \{0\}$, а область изменения $E(y) = R \setminus \{0\}$. Эта функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. При $k > 0$ $y < 0$ при $x < 0$ и $y > 0$ при $x > 0$. При $k < 0$ $y > 0$ при $x < 0$ и $y < 0$ при $x > 0$. При $k > 0$ данная функция монотонно убывает в $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, а при $k < 0$ монотонно возрастает в тех же промежутках. Функцию $y = \frac{k}{x}$ можно рассматривать как частный случай степенной функции $y = x^{\alpha}$ при $\alpha = -1$. График функции называется *гиперболой* (рис. 3.17).

Оси координат *OX* и *OY* являются соответственно горизонтальной и вертикальной асимптотами графика функции $y = \frac{k}{x}$.

Дробно-линейной функцией называется функция $y = f(x)$ вида

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

где a, b, c, d – некоторые действительные числа, $c \neq 0$ и $ad \neq bc$.

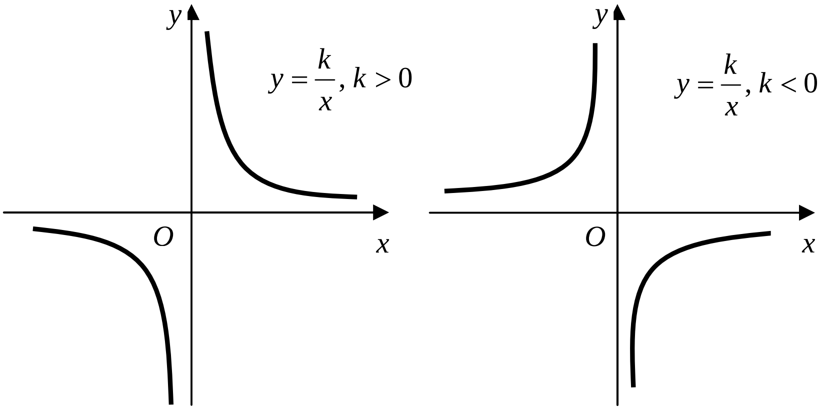


Рис. 3.17. Гипербола $y = \frac{k}{x}$:

а – $k > 0$; *б* – $k < 0$

При $c = 0$ эта функция становится линейной, а при $ad = bc$ $y = \text{const}$.

Для исследования свойств и построения графика дробно-линейной функции удобно представить ее в виде

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = n + \frac{k}{x + m},$$

где $n = \frac{a}{c}$, $k = \frac{bc - ad}{c^2}$, $m = \frac{d}{c}$.

Тогда график функции можно получить из графика функции $y = \frac{1}{x}$ с помощью геометрических преобразований (параллельных переносов и сжатий (растяжений) вдоль координатных осей).

Дробно-линейная функция $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ определена всюду, кроме точки $x = -\frac{d}{c}$, и принимает значения в области

$E(y)=\left(-\infty, \dfrac{a}{c}\right)\cup\left(\dfrac{a}{c}, +\infty\right)$. При $a\neq 0$ и $d\neq 0$ она является функцией общего вида, а при $a=0$ и $d=0$ – нечетной функцией. Свойства данной функции следуют из свойств функции $y=\dfrac{k}{x}$ согласно приведенным выше преобразованиям функции и ее графика. Прямые $y=\dfrac{a}{c}$ и $x=-\dfrac{d}{c}$ являются горизонтальной и вертикальной асимптотами графика этой функции.

Степенная функция

Степенной функцией называется функция $y=x^{\alpha}$, где α – любое действительное число. Если α – число рациональное, то функция $y=x^{\alpha}$ называется алгебраической, если же α – иррациональное, то функция $y=x^{\alpha}$ называется трансцендентной.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся ситуации.

Пусть $\alpha=2n,\ n\in N,\ y=x^{2n}$, тогда $D(y)=R$; $E(y)=[0,+\infty)$; $y=0$ при $x=0$. Функция $y=x^{2n}$ – четная; она на промежутке $(-\infty, 0)$ убывает, а на промежутке $(0,+\infty)$ возрастает. График – парабола порядка $2n$ (рис. 3.18, *а*). При $n=1$ имеем $y=x^{2}$ – квадратичную функцию.

Пусть $\alpha=2n+1$, $n\in N$, т. е. $y=x^{2n+1}$. Тогда $D(y)=R$; $E(y)=R$ и $y=0$ при $x=0$. Функция $y=x^{2n+1}$ – нечетная, возрастает на R от $-\infty$ до $+\infty$. График этой функции – парабола порядка $2n+1$ (рис. 3.18, *б*).

Отметим, что при $\alpha=0$ и $\alpha=1$ функция $y=x^{\alpha}$ совпадает с частными случаями $y=1$ и $y=x$ линейной функции.

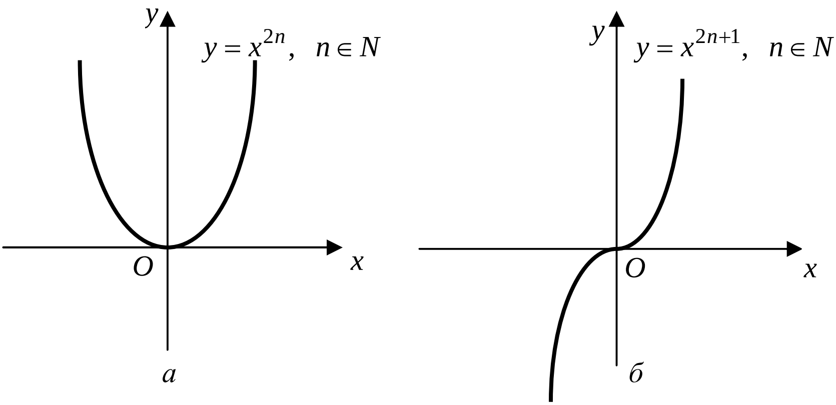
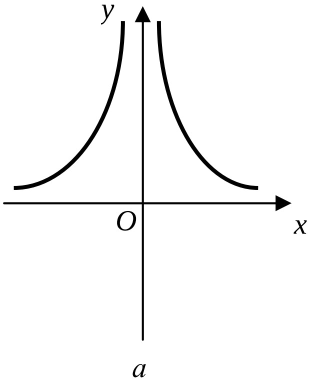


Рис. 3.18. Графики функций:
а – $y = x^{2n}$; *б* – $y = x^{2n+1}$

Пусть $\alpha = -2n$, $n \in N$, $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$. Тогда $D(y) = R \setminus \{0\}$, $E(y) = (0, +\infty)$. Данная функция – знакоположительная, четная, возрастает на промежутке $(-\infty, 0)$ и убывает на промежутке $(0, +\infty)$. Ось OX является горизонтальной, а ось OY – вертикальной асимптотой для этой функции. График функции $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$ имеет вид, приведенный на рис. 3.19, *а*.

Пусть $\alpha = -2n + 1$, $n \in N$, $y = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$. Тогда $D(y) = R \setminus \{0\}$, $E(y) = R \setminus \{0\}$. При $x < 0$ эта функция принимает отрицательные значения, а при $x > 0$ – положительные. Функция – нечетная, убывает на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Координатные оси OX и OY являются соответственно горизонтальной и вертикальной асимптотами графиков функции (определение и смысл понятия асимптоты изложены, например, в [4, 8, 18, 20]). График функции $y = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$

имеет вид, приведенный на рис. 3.19, *б*. Частный случай $y=\dfrac{1}{x}$, соответствующий значению $n=1$, рассмотрен выше.



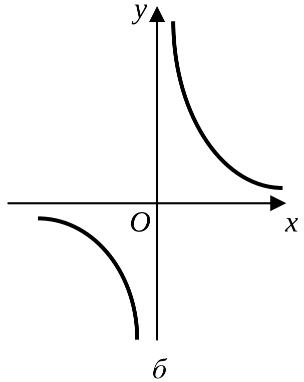


Рис. 3.19. Графики функций:

а – $y=\dfrac{1}{x^{2n}}$, $n\in N$; *б* – $y=\dfrac{1}{x^{2n-1}}$, $n\in N$

Пусть $\alpha=r$ – рациональное число. Если $r=\dfrac{1}{2n}$, где $n\in N$, то $y=\sqrt[2n]{x}$. Тогда $D(y)=[0,+\infty)$, $E(y)=[0,+\infty)$ и $y=0$ при $x=0$. Функция возрастает при всех $x\geq 0$. График функции $y=\sqrt[2n]{x}$ получается как график обратной функции с помощью симметричного отображения относительно прямой $y=x$ правой ветви графика функции $y=x^{2n}$ (рис. 3.20, *а*). Если $r=\dfrac{1}{2n+1}$, $n\in N$, то $y=\sqrt[2n+1]{x}$. Тогда $D(y)=R$, $E(y)=R$, $y=0$ при $x=0$, $y<0$ при $x<0$ и $y>0$ при $x>0$. Такая функция – нечетная, возрастает при всех $x\in R$. График функции $y=\sqrt[2n+1]{x}$ получается как график обратной функции, симметричный графику функции $y=x^{2n+1}$ относительно биссектрисы $y=x$ первого и третьего координатных углов (рис. 3.20, *б*).

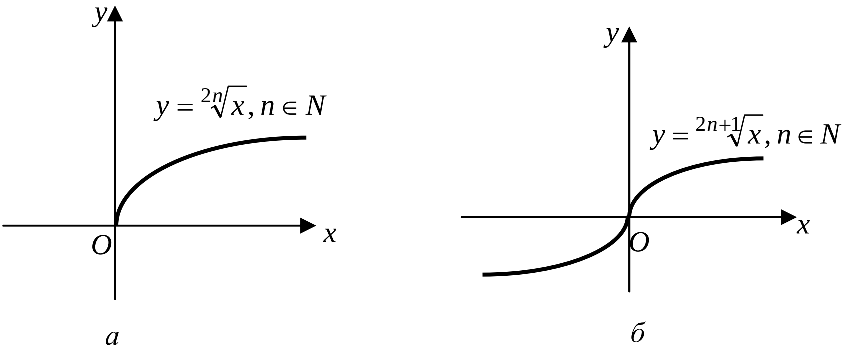


Рис. 3.20. Графики функций:
$a -\ y = \sqrt[2n]{x}$; $б -\ y = \sqrt[2n+1]{x}$

Пусть $r = \dfrac{p}{q}$, где p и q – натуральные и взаимно простые числа. График функции $y = \sqrt[q]{x^p}$ зависит от чисел p и q. Если p – четное, q – нечетное, то функция $y = \sqrt[q]{x^p}$ определена на R, является неотрицательной и $y = 0$ при $x = 0$. При $x < 0$ она убывает, а при $x > 0$ – возрастает. График функции имеет вид, изображенный на рис. 3.21.

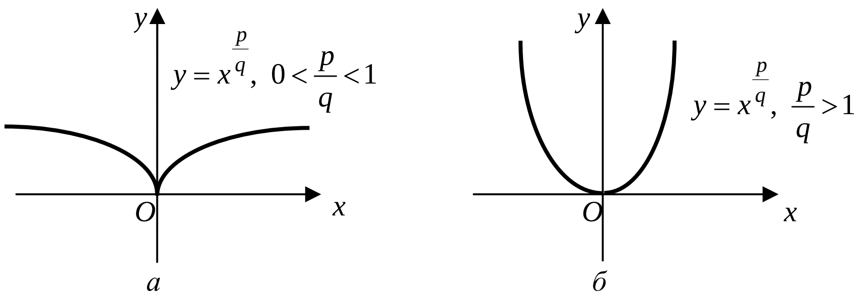


Рис. 3.21. Графики функций $y = x^{\frac{p}{q}}$, p – четное, q – нечетное:

$a -\ 0 < \dfrac{p}{q} < 1$; $б -\ \dfrac{p}{q} > 1$

Если p и q – нечетные числа, то функция $y=\sqrt[q]{x^p}$ определена при $x\in R$, $E(y)=R$; $y=0$ при $x=0$, $y<0$ при $x<0$, $y>0$ при $x>0$. Функция y – нечетная, возрастающая при всех x.

График функции имеет вид, приведенный на рис. 3.22.

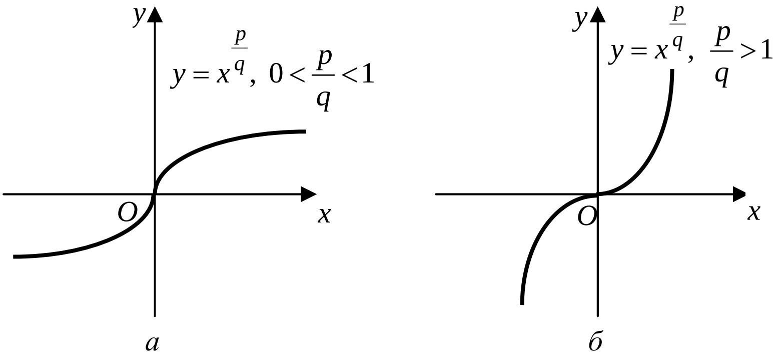


Рис. 3.22. Графики функций $y=x^{\frac{p}{q}}$, p и q – нечетные:

$а-\ 0<\frac{p}{q}<1$; $б-\ \frac{p}{q}>1$

Если p – нечетное число, q – четное, то функция $y=x^{\frac{p}{q}}=\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$ определена на промежутке $[0,+\infty)$ и $y=0$ при $x=0$. Функция y возрастает при $x>0$ от 0 до $+\infty$. График функции имеет вид, приведенный на рис. 3.23.

В частности, при $\frac{p}{q}=\frac{3}{2}$ имеем $y=x^{\frac{3}{2}}$ (или $y^2=x^3$) – ветвь полукубической параболы.

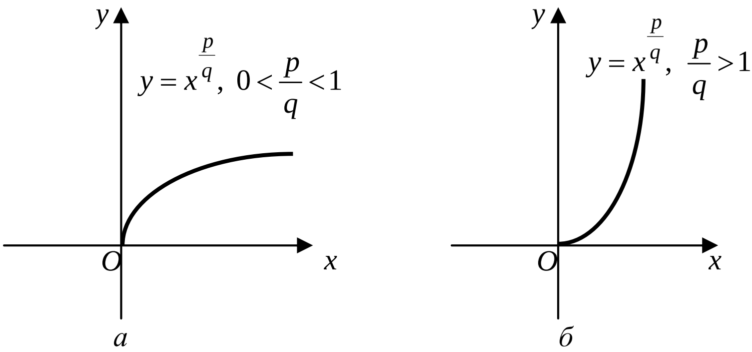


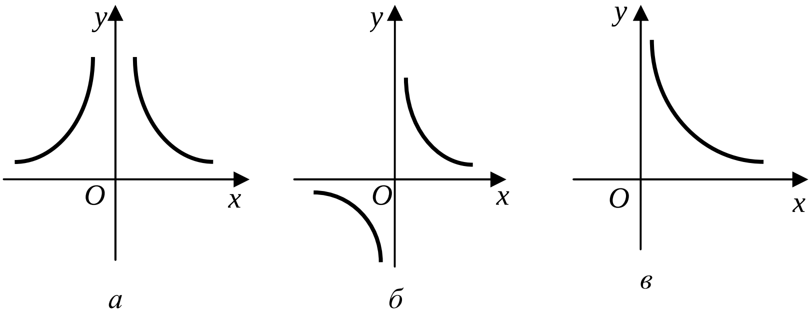
Рис. 3.23. Графики функций $y=x^{\frac{p}{q}}$, p – нечетное, q – четное:

$а$ – $0<\frac{p}{q}<1$; $б$ – $\frac{p}{q}>1$

Пусть $r=-\dfrac{p}{q}$, где p и q – натуральные и взаимно простые числа. Тогда $y=x^{-\frac{p}{q}}=\dfrac{1}{x^{\frac{p}{q}}}=\dfrac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$. Если p – четное, q – нечетное, то $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. При этом функция y – четная, знакоположительная, возрастающая при $x<0$ и убывающая при $x>0$. Координатные оси являются горизонтальной и вертикальной асимптотами графика данной функции. График изображен на рис. 3.24, *а*.

Если p и q – нечетные числа, то $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $E(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $y<0$ при $x<0$, $y>0$ при $x>0$. Функция y – нечетная, убывающая на промежутках $x\in(-\infty,0)$ и $x\in(0,+\infty)$. Оси координат являются асимптотами графика функций (рис. 3.24, *б*).

Если p – нечетное, q – четное, то $D(y)=(0,+\infty)$, $E(y)=(0,+\infty)$. Функция убывающая, а координатные оси являются асимптотами ее графика (рис. 3.24, *в*).



3.24. Графики функций $y=\dfrac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$:

а – p – четное, q – нечетное; *б* – p и q – нечетные;
в – p – нечетное, q – четное

Определение 3.13. Под функцией $y=x^{\alpha}$, где x – положительное число, а α – иррациональный показатель, понимается предел (понятие предела является одним из базовых понятий математического анализа; смысл этого понятия подробно разъяснен в [4]) $\lim\limits_{\frac{p}{q}\to\alpha} x^{\frac{p}{q}}=x^{\alpha}$, к которому стремится последовательность чисел $x^{\frac{p}{q}}$, когда последовательность рациональных степеней $\dfrac{p}{q}$ стремится к числу α.

Функция $y=x^{\alpha}$ при $\alpha>0$ определена для любых $x\geq 0$; $y=0$, если $x=0$; она знакоположительна и возрастает при $x>0$. Графики функции имеют вид, приведенный на рис. 3.25, *а*, *б*.

При $\alpha<0$ для функции $y=x^{\alpha}$ верны равенства: $D(y)=(0,\infty)$, $E(y)=(0,\infty)$. Эта функция убывающая и знакоположительная. График данной функции имеет вид, изображенный на рис. 3.25, *в*.

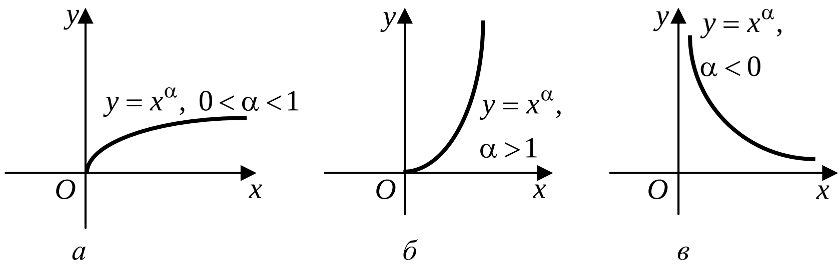


Рис. 3.25. Графики функций $y = x^{\alpha}$, α – иррациональное число:
а – $0 < \alpha < 1$; *б* – $\alpha > 1$; *в* – $\alpha < 0$

Важно подчеркнуть, что всюду выше в случаях, когда степенная функция многозначная, рассматривались только их главные ветви.

Показательная и логарифмическая функции. Преобразование показательных и логарифмических выражений

Определение 3.14. *Показательной функцией* называется функция, заданная формулой $y = a^x$, где a – некоторое положительное число, не равное единице, x – независимая переменная. Данная функция обладает следующими свойствами:

1) $D(y) = R$ – область определения функции;

2) $E(y) = (0, +\infty)$ – область значений функции;

3) функция является непериодической;

4) $a^x > 0$ для всех $x \in R$, причем при $x = 0$ $a^0 = 1$;

5) при $a > 1$ функция возрастает от 0 до $+\infty$ (значения, равного нулю, она не принимает) для всех $x \in R$; если $x > 0$, то $a^x > 1$, если же $x < 0$, то $0 < a^x < 1$; при $0 < a < 1$ функция убывает от $+\infty$ до 0, не достигая 0, для всех конечных $x \in R$; если же $x > 0$, то $0 < a^x < 1$, если $x < 0$, то $a^x > 1$;

6) функция не имеет минимумов и максимумов (экстремумов).

Частным случаем показательной функции является функция $y = \mathrm{e}^x$, где число e = 2,718281828… имеет смысл основания натуральных логарифмов.

Графики функции $y = a^x$ изображены на рис. 3.26.

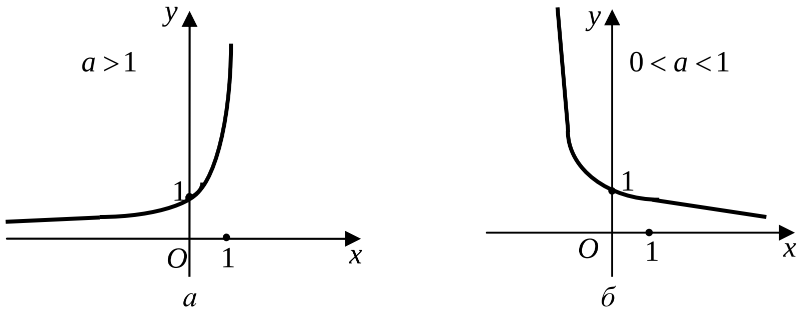


Рис. 3.26. Графики функции $y = a^x$:
$а$ – $a > 1$; $б$ – $0 < a < 1$

Определение 3.15. *Логарифмом* $\log_a b$ числа b по основанию a, где $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$ называется показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b.

Имеет место основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b,$$

где $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$.

Это тождество равносильно равенствам $a^c = b$ и $\log_a b = c$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$.

Логарифм $\lg b = \log_{10} b$ числа b по основанию 10 называют десятичным. Логарифм по основанию e называют натуральным и обозначают $\ln b$, т. е. $\log_{\mathrm{e}} b = \ln b$.

Логарифмы обладают следующими свойствами (при условии, что $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0$):

$$\log_a 1 = 0; \qquad \log_a a = 1;$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c;$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$$

$$\log_a b^p = p \log_a b; \qquad \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b;$$

$$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b; \qquad a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \ \ b \neq 1; \ \ c \neq 1;$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \ \ c \neq 1; \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \ \ b \neq 1.$$

Определение 3.16. *Логарифмической функцией* называется функция, заданная формулой $y = \log_a x$, где a – некоторое положительное число, не равное единице, x – независимая переменная.

Логарифмическая и показательная функции при одном и том же основании являются взаимно обратными.

При преобразовании выражений, содержащих логарифмические функции, используются следующие соотношения:

$$\log_a \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \log_a \left| f(x) \right| + \log_a \left| g(x) \right|,$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a \left| f(x) \right| - \log_a \left| g(x) \right|,$$

$$\log_a \left(f(x) \right)^{2k} = 2k \cdot \log_a \left| f(x) \right|,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) \cdot g(x) > 0$, $k \in Z$.

Имеют место следующие свойства логарифмических функций:

1) $D(y) = (0, +\infty)$;

2) $E(y) = R$;

3) логарифмическая функция является функцией общего вида, непериодическая;

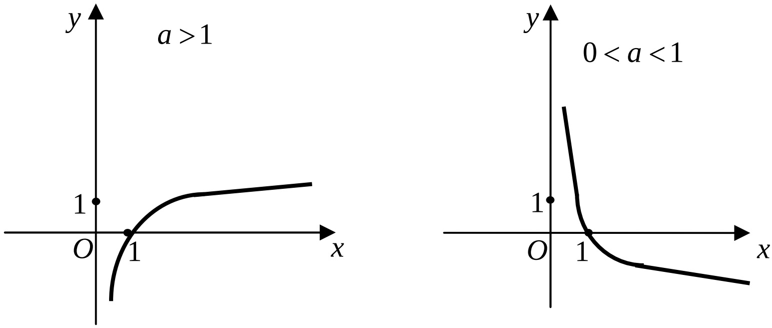
4) число $x=1$ является нулем функции; при $a>1$ $\log_a x>0$ для всех $x>1$ и $\log_a x<0$ для $0<x<1$; при $0<a<1$ $\log_a x>0$ для $0<x<1$ и $\log_a x<0$ для $x>1$;

5) при $a>1$ логарифмическая функция возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ для всех $x>0$; при $0<a<1$ эта функция убывает от $+\infty$ до $-\infty$ для всех $x>0$;

6) данная функция не имеет экстремумов.

Важным частным случаем логарифмической функции является функция $y=\ln x$.

Графики функции $y=\log_a x$ изображены на рис. 3.27.



а *б*

Рис. 3.27. Графики функции $y=\log_a x$:

a – $a>1$; $б$ – $0<a<1$

Тригонометрические функции

Тригонометрические функции угла α

Плоская фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости, называется углом.

Отметим на оси OX справа от точки O (начало координат) точку A и проведем через нее окружность с центром в точке O (рис. 3.28).

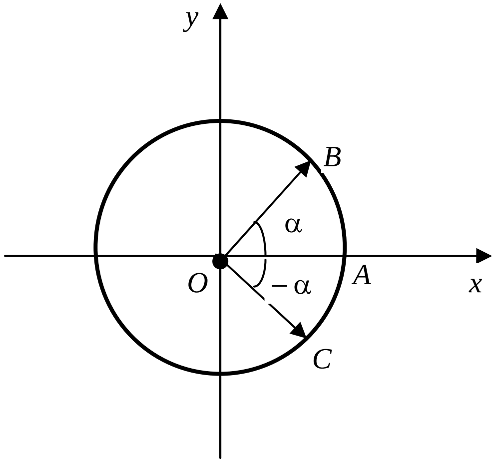


Рис. 3.28. Изображение углов α и $-\alpha$
в системе координат OXY на плоскости

Если повернуть радиус OA около точки O против часовой стрелки, то угол поворота считают положительным, а если по часовой стрелке – отрицательным.

За единицу измерения углов и дуг принимают соответственно угол в 1 градус и дугу в 1 градус (обозначают 1°). Угол в 1° – это угол, который опишет радиус OA, совершив $\frac{1}{360}$ часть полного оборота вокруг своей начальной точки O против часовой стрелки.

Напомним, что $\frac{1}{60}$ часть градуса называется минутой (обозначают $1'$), а $\frac{1}{60}$ часть минуты – секундой (обозначают $1''$).

Величину угла также измеряют в радианах.

Угол в 1 радиан есть по определению угол, опирающийся на дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности.

Если радиус OA совершит один полный оборот, то получится угол, равный 360° или 2π радиан.

Радианная мера 1° равна $\dfrac{\pi}{180}$. Если угол содержит n°, то его радианная мера равна $\alpha = \dfrac{\pi n}{180}$. Угол, равный α радианам, содержит число градусов, которое равно $n^{\circ} = \dfrac{180\alpha}{\pi}$.

Рассмотрим единичную окружность, т. е. окружность с центром в начале координат и радиусом R, равным 1 (рис. 3.29).

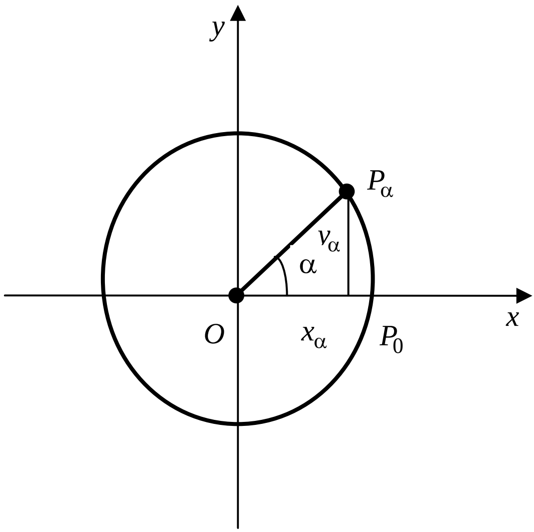


Рис. 3.29. Тригонометрические функции угла α

На окружности отметим точку $P_0(1;\,0)$. При повороте радиуса OP_0 около центра O на угол α радиан точка $P_0(1;\,0)$ перейдет в некоторую точку $P_\alpha(x_\alpha;\, y_\alpha)$.

Синусом угла α называется отношение ординаты точки P_α к радиусу. Таким образом,

$$\sin\alpha = \frac{y_\alpha}{R} = y_\alpha, \text{ если } R = 1.$$

Косинусом угла α называется отношение абсциссы точки P_α к радиусу. Таким образом,

$$\cos\alpha = \frac{x_\alpha}{R} = x_\alpha, \text{ если } R = 1.$$

Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки P_α к ее абсциссе:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}, \quad \alpha \neq 90^\circ + 180^\circ n \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in Z.$$

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки P_α к ее ординате:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha}, \quad \alpha \neq 180^\circ n \quad (\alpha \neq \pi n), \quad n \in Z.$$

Секансом угла α называется величина, обратная $\cos\alpha$, т. е.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \ \cos\alpha \neq 0.$$

Косекансом угла α называется величина, обратная $\cos\alpha$, т. е.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \ \sin\alpha \neq 0.$$

Отметим, что определенные выше величины называют тригонометрическими функциями угловой величины α.

Знаки, которые принимают значения тригонометрических функций в координатных четвертях, изображены на рис. 3.30.

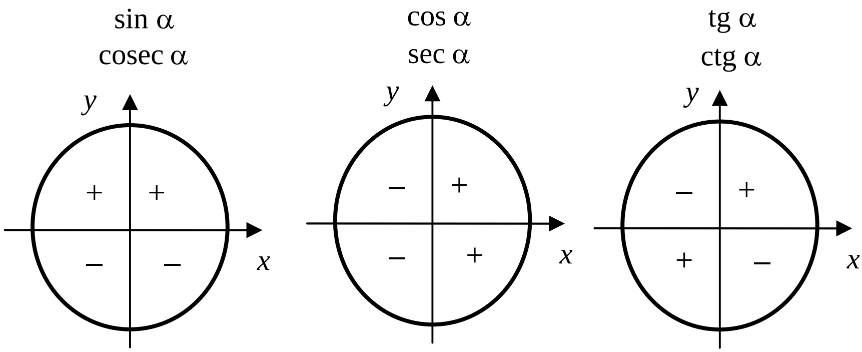


Рис. 3.30. Знаки тригонометрических функций
в четвертях координатной плоскости

Основные тригонометрические тождества

Тригонометрические функции удовлетворяют следующим основным тригонометрическим тождествам:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \alpha \in R;$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \alpha \neq \pi n, \qquad n \in Z;$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} n, \qquad n \in Z;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} n, \qquad n \in Z;$$

$$1+\mathrm{tg}^2\,\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha,\qquad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\qquad n\in Z;$$

$$1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\mathrm{cosec}^2\,\alpha,\qquad \alpha\neq\pi n,\qquad n\in Z.$$

Ряд значений тригонометрических функций можно представить в явной форме (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Значения тригонометрических функций

Аргумент α		Функции			
Градусы	Радианы	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
0^o	0	0	1	0	Не существует
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Не существует	0
120^o	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135^o	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1	–1
150^o	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

Аргумент α		Функции			
Градусы	Радианы	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
180^{o}	π	0	–1	0	Не существует
210^{o}	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
225^{o}	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
240^{o}	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
270^{o}	$\frac{3\pi}{2}$	–1	0	Не существует	0
300^{o}	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
315^{o}	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1	–1
330^{o}	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
360^{o}	2π	0	1	0	Не существует

Формулы приведения

Формулами приведения называют соотношения, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ выражаются через значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

Все формулы приведения можно свести в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Формулы приведения

Функция α	Аргумент α							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$

При преобразовании тригонометрических выражений полезно использовать следующие правила приведения:

а) при переходе от функций углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ к функциям угла α название функции изменяют: синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот; при переходе от функций углов $\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ к функциям угла α название функции сохраняют;

б) считая α острым углом (т. е. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$), перед функцией угла α ставят такой знак, какой имеет приводимая функция углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$.

Формулы сложения

Имеют место следующие равенства:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta},\qquad \mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}.$$

Формулы двойного и половинного угла

Справедливы такие соотношения:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \qquad n \in Z.$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

Формулы преобразования суммы функций в произведение и произведения функций в сумму

Эти формулы сводятся к следующим тождествам:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \qquad \begin{array}{ll} \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, & k \in Z, \\ \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, & n \in Z; \end{array}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}, \qquad \begin{matrix} \alpha \neq \pi k, & k \in Z, \\ \beta \neq \pi n, & n \in Z; \end{matrix}$$

$$a \cdot \sin\alpha + b \cdot \cos\alpha = r \cdot \sin(\alpha + \varphi),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, аргумент φ определяется из условий:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2},$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2},$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2},$$

$$\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}, \qquad \mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta = \frac{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}.$$

Формулы универсальной тригонометрической подстановки

Формулами универсальной тригонометрической подстановки называют следующие соотношения:

$$\sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

Графики и некоторые общие свойства тригонометрических функций

Функция $y=\sin x$ характеризуется следующими общими свойствами:

1) $D(y)=R;$

2) $E(y)=[-1;1],$ следовательно, синус – функция ограниченная;

3) функция нечетная, т. е. $\sin(-x)=-\sin x;$

4) функция периодическая с наименьшим положительным периодом $2\pi,$ т. е. $\sin(x+2\pi)=\sin x;$

5) $\sin x=0$ при $x=\pi n,$ $n\in Z;$

6) $\sin x>0$ для всех $x\in(2\pi n, \pi+2\pi n);$

$\sin x<0$ для всех $x\in(\pi+2\pi n, 2\pi+2\pi n),$ $n\in Z;$

7) функция возрастает от –1 до 1 на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$ и убывает от 1 до –1 на промежутках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right],$ $n\in Z;$

8) функция принимает наибольшее значение, равное 1, в точках $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ и наименьшее значение, равное –1, в точках $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n,$ $n\in Z.$

График функции $y = \sin x$ представлен на рис. 3.31.

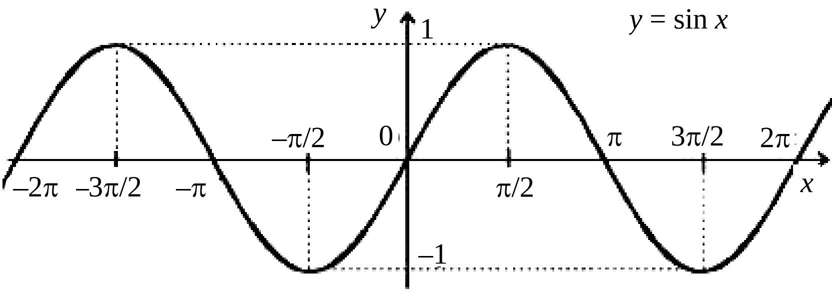


Рис. 3.31. График функции $y = \sin x$

Функция $y = \cos x$ обладает следующими общими свойствами:

1) $D(y) = R$;

2) $E(y) = [-1; 1]$, значит, косинус – функция ограниченная;

3) функция четная: $\cos(-x) = \cos x$;

4) функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π, т. е. $\cos(x + 2\pi) = \cos x$;

5) $\cos x = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$;

6) $\cos x > 0$ для всех $x \in (-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n)$;

$\cos x < 0$ для всех $x \in (\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n), \ n \in Z$;

7) функция возрастает от –1 до 1 на промежутках $\left[-\pi + 2\pi n; 2\pi n\right]$ и убывает от 1 до –1 на промежутках $\left[2\pi n; \pi + 2\pi n\right], \ n \in Z$;

8) функция принимает наибольшее значение, равное 1, в точках $x = 2\pi n$ и наименьшее значение, равное –1, в точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

График функции $y = \cos x$ представлен на рис. 3.32.

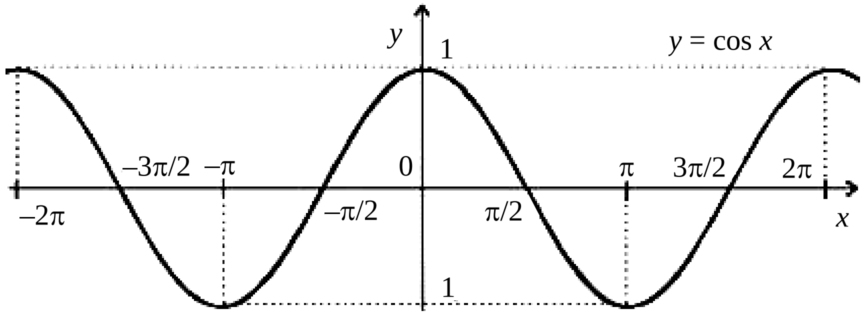


Рис. 3.32. График функции $y = \cos x$

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при всех x, кроме чисел вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$. Область значений $E(y) = R$, т. е. функция неограниченная. Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная, т. е. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ для $x \in D(y)$. Она является периодической с наименьшим положительным периодом $T = \pi$, т. е. $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ для $x \in D(y)$. Кроме этого $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = \pi n$, $n \in Z$; $\operatorname{tg} x > 0$ для всех $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$; $\operatorname{tg} x < 0$ для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in Z$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in Z$. Прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ являются вертикальными асимптотами графика функции $y = \operatorname{tg} x$. График функции $y = \operatorname{tg} x$ изображен на рис. 3.33.

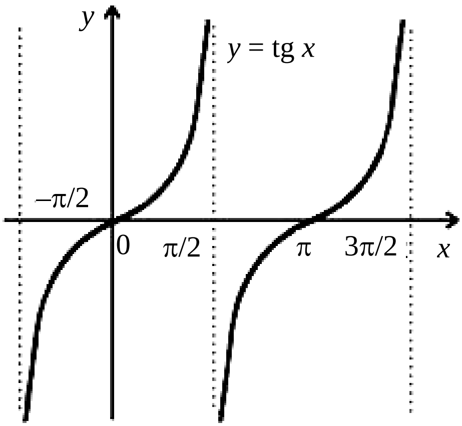


Рис. 3.33. График функции $y = \mathrm{tg}\, x$

Функция $y = \mathrm{ctg}\, x$ определена при всех x, кроме чисел вида $x = \pi n$, где $n \in Z$. Область значений $E(y) = R$, т. е. функция неограниченная. Функция $y = \mathrm{ctg}\, x$ нечетная, т. е. $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$ для любых $x \in D(y)$, периодическая с наименьшим положительным периодом $T = \pi$, т. е. $\mathrm{ctg}(x + \pi) = \mathrm{ctg}\, x$ для всех $x \in D(y)$. Имеют место соотношения $\mathrm{ctg}\, x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; $\mathrm{ctg} x > 0$ для всех $x \in \left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$; $\mathrm{ctg}\, x < 0$ для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right)$, $n \in Z$. Функция $y = \mathrm{ctg}\, x$ убывает на каждом из промежутков $[\pi n; \pi + \pi n]$, $n \in Z$. Прямые $x = \pi n$, $n \in Z$ являются вертикальными асимптотами графика этой функции. График функции $y = \mathrm{ctg}\, x$ изображен на рис. 3.34.

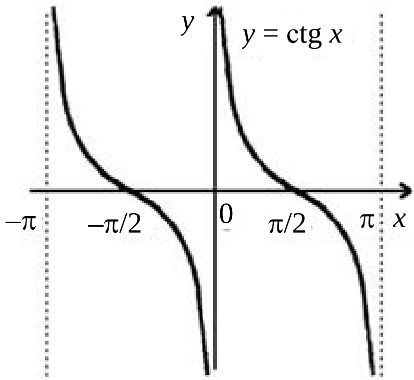


Рис. 3.34. График функции $y = \mathrm{ctg}x$

Обратные тригонометрические функции

Функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}\,x$, $y=\mathrm{ctg}\,x$ в областях их определения являются периодическими функциями. В силу этого обратные им функции $y=\mathrm{Arcsin}\,x$, $y=\mathrm{Arccos}\,x$, $y=\mathrm{Arctg}\,x$, $y=\mathrm{Arcctg}\,x$ являются многозначными функциями.

Дадим определения и опишем соответствующие им главные ветви указанных обратных тригонометрических функций.

По определению *арксинусом* $(\arcsin a)$ *числа а* называется такое число α из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, для которого $\sin\alpha = a$. В соответствии с этим определением под обратной тригонометрической функцией $y=\arcsin x$ понимается однозначная функция с областью определения $D(y)=[-1,1]$ и областью значений $E(y)=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Данная функция является нечетной и возрастающей на $D(y)$ от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. При этом $\arcsin 0 = 0$; при $x\in[-1,0)$ $y<0$, а при $x\in(-1,0]$ $y>0$. График функции $y=\arcsin x$ изображен на рис. 3.35.

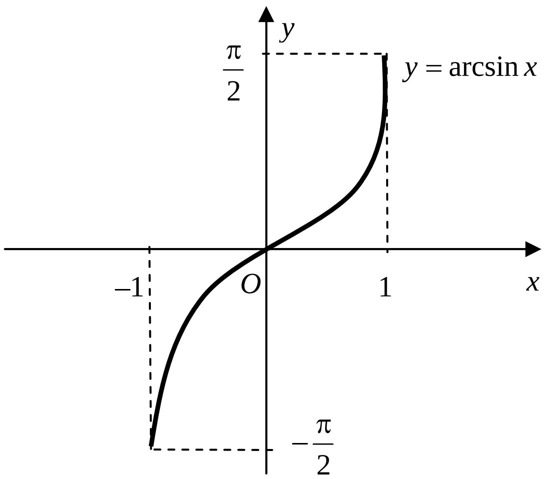


Рис. 3.35. График функции $y = \arcsin x$

Другие значения ветвей многозначной функции $y = \operatorname{Arc}\sin x$ выражаются через главное его значение формулой $\operatorname{Arc}\sin x = = \arcsin x + 2\pi k,\ \ k \in Z.$

Аналогичным образом вводятся другие обратные тригонометрические функции. По определению *арккосинусом* $(\arccos a)$ *числа* a называется такое число α из отрезка $[0, \pi]$, для которого $\cos\alpha = a$. Из данного определения следует, что для функции $y = \arccos x$ имеют место отношения $D(y) = [-1, 1]$, $E(y) = [0, \pi]$. Функция $y = \arccos x$ является монотонно убывающей и убывает от π до 0 на отрезке $[-1, 1]$. При этом $\arccos 1 = 0$, $\arccos(-1) = \pi$ и $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$. График функции $y = \arccos x$ изображен на рис. 3.36.

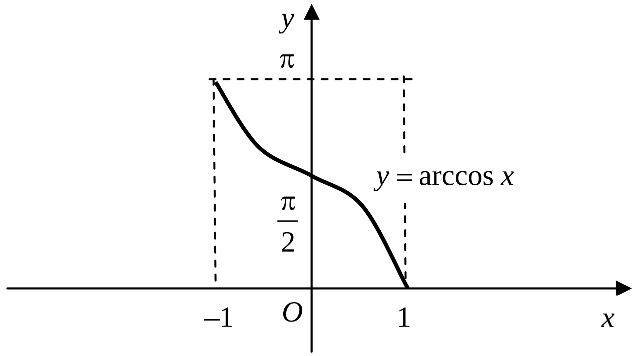


Рис. 3.36. График функции $y = \arccos x$

Другие значения ветвей многозначной функции $y = \operatorname{Arccos} x$ выражаются через главное его значения посредством формулы $\operatorname{Arc}\cos x = \arccos x + 2\pi k, \quad k \in Z.$

По определению *арктангенсом числа a* $(\operatorname{arctg} a)$ называется такое число α из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, для которого имеет место равенство $\operatorname{tg} \alpha = a.$ В соответствии с этим определением для функции $y = \operatorname{arctg} x$ справедливы отношения $D(y) = R, \quad E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$ Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является нечетной и возрастающей от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ на интервале $(-\infty, +\infty)$. При этом $y = 0$ при $x = 0;$ $y < 0,$ если $x < 0,$ $y > 0,$ если $x > 0.$ График функции, изображенный на рис. 3.37, имеет две горизонтальные асимптоты: $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}.$

Другие значения ветвей многозначной функции $y = \operatorname{Arctg} x$ выражаются через главное его значение посредством формулы $\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + k\pi, \quad k \in Z.$

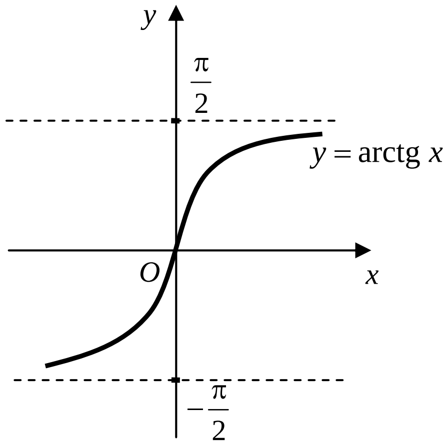


Рис. 3.37. График функции $y = \operatorname{arctg} x$

По определению *арккотангенсом* $(\operatorname{arcctg} a)$ *числа a* называется такое число α из интервала $(0, \pi)$, для которого $\operatorname{ctg} \alpha = a$. В соответствии с этим определением для функции $y = \operatorname{arcctg} x$ имеют место соотношения $D(y) = R$, $E(y) = (0, \pi)$. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ убывает от π до 0 на всей области определения. При этом верно равенство $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$. Прямые $y = 0$ и $y = \pi$ являются горизонтальными асимптотами [4] графика функции. График изображен на рис. 3.38.

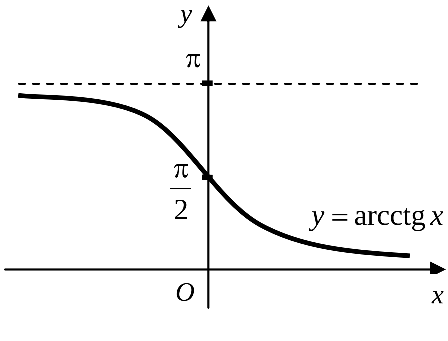


Рис. 3.38. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

Другие значения ветвей многозначной функции $y = \mathrm{Arcctg}\, x$ выражают через главное значение посредством формулы $\mathrm{Arcctg}\, x = \mathrm{arcctg}\, x + k\pi, \ \ k \in Z.$

Для обратных тригонометрических функций при всех допустимых значениях аргумента x справедливы следующие тождества:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \text{ если } |x| \le 1;$$

$$\sin(\arcsin x) = x, \text{ если } -1 \le x \le 1;$$

$$\cos(\arccos x) = x, \text{ если } -1 \le x \le 1;$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \text{ при } |x| \le \frac{\pi}{2};$$

$$\arccos(\cos x) = x, \text{ при } 0 \le x \le \pi;$$

$$\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2};$$

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x, \ \ x \in R;$$

$$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, x) = x, \ \ x \in R;$$

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x, \text{ если } |x| < \frac{\pi}{2};$$

$$\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, x) = x, \text{ если } 0 < x < \pi.$$

Гиперболические функции. Обратные гиперболические функции

Гиперболический синус является функцией, которая задается аналитическим выражением $y = \mathrm{sh}\, x = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, в котором $D(y) = R$ и $E(y) = R.$ Функция $y = \mathrm{sh}\, x$ – нечетная, монотонно возрастающая от $-\infty$ до $+\infty$. При этом $\mathrm{sh}\, x = 0$ при $x = 0$, $\mathrm{sh}\, x < 0$ при $x < 0$, $\mathrm{sh}\, x > 0$ при $x > 0$. График функции (рис. 3.39) центрально симметричен относительно начала координат. Точка $(0, 0)$ является точкой перегиба кривой.

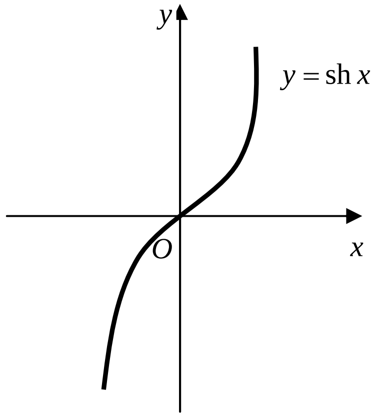


Рис. 3.39. График функции $y = \mathrm{sh}x$

Гиперболический косинус определяется посредством формулы $y = \mathrm{ch}\, x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, в которой $D(y) = R$ и $E(y) = [1, +\infty)$. Функция $y = \mathrm{ch}\, x$ – четная. Она в промежутке $(-\infty, 0]$ монотонно убывает от $+\infty$ до 1, а при $x \in [0, +\infty)$ монотонно возрастает от 1 до $+\infty$. Кроме этого $\mathrm{ch}\, x > 0$ для любых $x \in (-\infty, +\infty)$. График функции симметричен относительно оси *OY* (рис. 3.40).

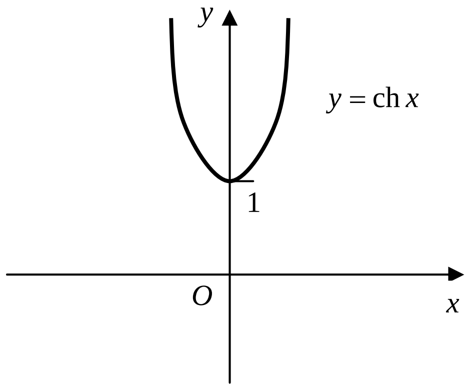


Рис. 3.40. График функции $y = \mathrm{ch}x$

Гиперболический тангенс задается следующим образом: $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, где $D(y) = R$ и $E(y) = (-1, 1)$. Функция $y = \operatorname{th} x$ – нечетная, возрастает на $D(y)$ и $\operatorname{th} 0 = 0$. Прямые $y = \pm 1$ являются горизонтальными асимптотами графика функции (рис. 3.41).

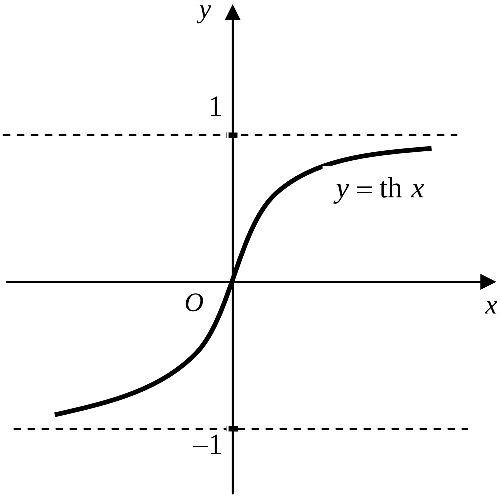


Рис. 3.41 График функции $y = \operatorname{th} x$

Гиперболический котангенс определяется с помощью таких соотношений: $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $D(y) = R \setminus \{0\}$, $E(y) = R \setminus [-1, 1]$. Функция $y = \operatorname{cth} x$ – нечетная, убывает на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. При этом $y < -1$ при $x < 0$ и $y > 1$ при $x > 0$. Прямые $y = \pm 1$, $x = 0$ – асимптоты графика функции (рис. 3.42).

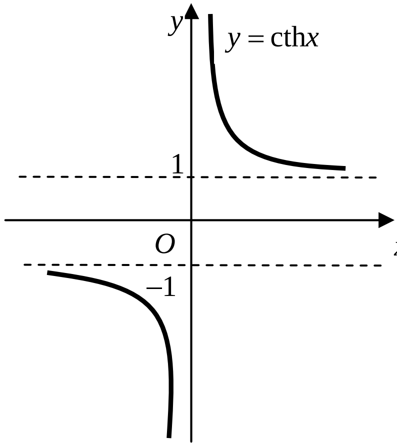


Рис. 3.42. График функции $y = \operatorname{cth} x$

Перейдем к определению обратных гиперболических функций.

Обратной функцией к гиперболическому синусу является функция $y = \operatorname{arsh} x$ (ареа-синус), для которой $D(y) = R$, $E(y) = R$. Функция $y = \operatorname{arsh} x$ – нечетная и возрастает на $D(y)$. Она определяется как функция, для которой значение функции *y* связано со значением ее аргумента *y* равенством $x = \operatorname{sh} y$. Используя это равенство, определение гиперболического синуса и неравенства $\mathrm{e}^{\pm y} > 0$ (*y* – любое конечное вещественное число), можно доказать, что $y = \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$. График изображен на рис. 3.43.

Для функции $y = \operatorname{arch} x$ (ареа-косинус) имеют место отношения $D(y) = [1, +\infty)$, $E(y) = [0, +\infty)$. Данная функция возрастает на $D(y)$. Она определяется как функция, для которой значение функции *y* связано со значением ее аргумента *x* равенством $x = \operatorname{ch} y$. По сути, посредством использования этого равенства и определения функций $\operatorname{ch} y$ и $\mathrm{e}^{\pm y}$ можно показать, что имеет место равенство $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \operatorname{arch} x$.

График функции $y = \operatorname{arch} x$ изображен на рис. 3.44.

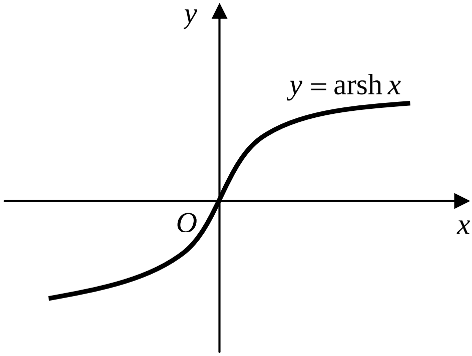


Рис. 3.43. График функции $y = \operatorname{arsh} x$

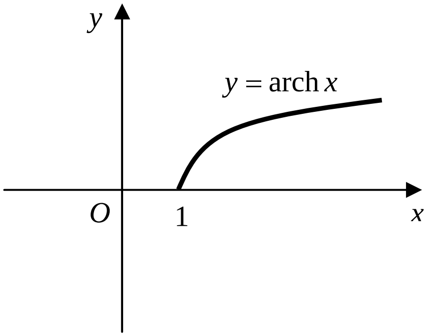


Рис. 3.44. График функции $y = \operatorname{arch} x$

Функция $y = \operatorname{arth} x$ (ареа-тангенс) характеризуется отношениями $D(y) = (-1, 1)$, $E(y) = R$. Эта функция – нечетная, возрастает на $D(y)$. При этом $y = 0$ при $x = 0$, $y < 0$ при $x < 0$, $y > 0$ при $x > 0$. Данная функция определяется как функция, для которой ее значение y связано со значением аргумента x равенством $x = \operatorname{th} y$. Из равенства следует справедливость формулы $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} = \operatorname{arth} x$. График функции $y = \operatorname{arth} x$ изображен на рис. 3.45.

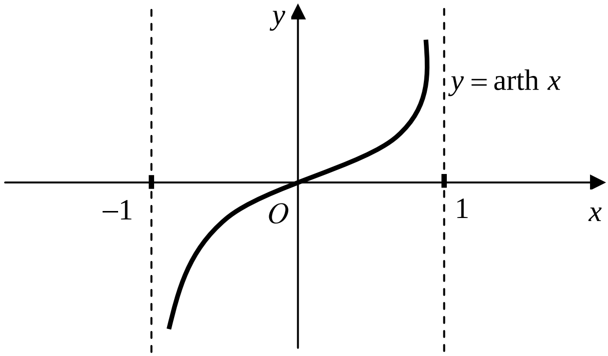


Рис. 3.45. График функции $y = \operatorname{arth} x$

Функция $y = \operatorname{arcth} x$ (ареа-котангенс) в свою очередь характеризуется отношениями $D(y) = R \setminus [-1, 1]$, $E(y) = R \setminus \{0\}$. Эта функция является нечетной, убывает на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. При этом $y < 0$ при $x < -1$, $y > 0$ при $x > 1$. Функция $y = \operatorname{arcth} x$ определяется как функция, для которой ее значение y и ее аргумент x связаны равенством $x = \operatorname{cth} y$. Из данного равенства следует истинность аналитического представления этой функции: $y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = \operatorname{arcth} x$. График функции $y = \operatorname{arcth} x$ изображен на рис. 3.46.

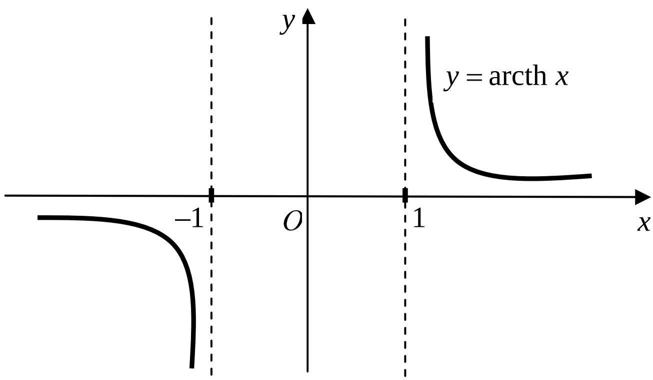


Рис. 3.46. График функции $y = \operatorname{arcth} x$

Функции знака, Хевисайда, Дирихле и антье

В математике при решении различных задач и записи аналитических представлений, формул, неравенств, условий и т. п. зачастую используют ряд достаточно простых и одновременно полезных функций. Дадим определения только некоторым функциям.

Под функцией сигнум $y = \operatorname{sgn} x$ (функция знака) понимают функцию, которая определяется следующим образом:

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

График функции $y = \operatorname{sgn} x$ приведен на рис. 3.47.

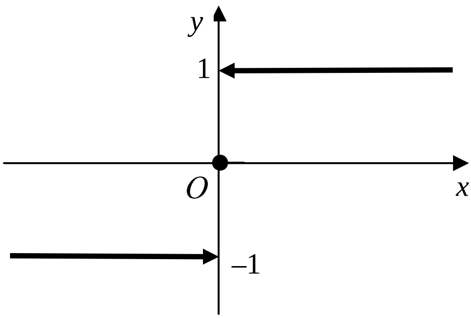


Рис. 3.47. График функции знака

Единичная функция Хевисайда определяется формулой

$$y = \eta(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0, \\ 1, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$$

График приведен на рис. 3.48.

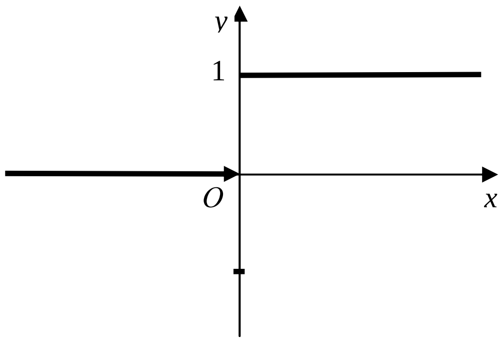


Рис. 3.48. График функции Хевисайда

Существенно более сложной функцией является функция Дирихле. Она определяется следующим образом:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \text{рациональное число}, \\ 0, \text{ если } x - \text{иррациональное число}. \end{cases}$$

Под функцией «антье от *x*» понимается наибольшее целое число, не превосходящее *x*. Для нее используется обозначение $y = E(x)$, и она определяется равенствами $E(x) = [x] = n$, если $x \in [n, n+1)$, $n \in Z$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1981.
2. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1981.
3. Анго, А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М. : Наука, 1965.
4. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматгиз, 1962.
5. Цыпкин, А. Г. Справочник по математике для средней школы / А. Г. Цыпкин. – М. : Наука, 1980.
6. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М. : Наука, 1969.
7. Виленкин, Н. Я. Математика / Н. Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1977.
8. Герасимович, А. И. Математический анализ : в 2 ч. Ч. 1 / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск : Вышэйшая школа, 1989.
9. Герасимович, А. И. Математический анализ : в 2 ч. Ч. 2 / А. И. Герасимович, Н. П. Кеда, М. Б. Сугак. – Минск : Вышэйшая школа, 1990.
10. Сачков, В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики / В. Н. Сачков. – М. : Наука, 1982.
11. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак. – Минск : Навука і тэхніка, 1991.
12. Гусак, Г. М. Математика для подготовительных отделений вузов / Г. М. Гусак, Д. А. Капуцкая. – Минск : Вышэйшая школа, 1989.
13. Вирченко, Н. А. Графики функций : справочник / Н. А. Вирченко, И. И. Ляшко, К. И. Швецов. – Киев : Наукова думка, 1979.
14. Пособие по математике для поступающих в вузы / Г. Н. Яковлев [и др.]. – М. : Наука, 1981.
15. Яремчук Г. Н. Алгебра и элементарные функции / Г. Н. Яремчук, П. А. Рудченко. – Киев : Наукова думка, 1987.
16. Крамор, В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В. С. Крамор. – М. : ОНИКС, 2008.

17. Роговцов, Н. Н. Курс лекций по высшей математике для студентов специальностей Т.06.01, Т.06,02, Т.23.03, … : в 2 ч. Ч. 1 / Н. Н. Роговцов. – Минск : БГПА, 2000.
18. Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов. – М. : Физматгиз, 1965.
19. Будак, Б. М. Кратные интегралы и ряды / Б. М. Будак, С. В. Фомин. – М. : Физматгиз, 1967.
20. Высшая математика : в 2 т. Т. 1 / С. А. Минюк [и др.]. – Минск : ООО «Элайда», 2004.
21. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Физматгиз, 1966.

Учебное издание

РОГОВЦОВ Николай Николаевич
МЕЛЕШКО Алексей Николаевич

БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ И КОНСТРУКЦИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ И ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие
для студентов приборостроительного факультета

Редактор *Т. В. Грищенкова*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 06.06.2017. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 7,67. Уч.-изд. л. 6,00. Тираж 200. Заказ 640.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.