

5. Объективность и оперативность педагогической оценки результатов деятельности малых контактных групп и отдельных обучаемых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев, В.И. Педагогика: учебный курс для творческого саморазвития / В.И. Андреев. – 2-е изд. – Казань: Центр инновационных технологий, 2000. – 608с.

2. Плевко, А.А. Групповое обучение как средство формирования когнитивных умений будущих инженеров-педагогов / А.А. Плевко // Теория и практика подготовки педагогов-инженеров: сборник научных трудов: Вып. 2 / Мозырский гос. пед. ун-т. – Минск: УП «Технопринт», 2002. – С. 201-207.

УДК 681.3(075.8)

Пчельник В.К.

ОБ ОДНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА QR-РАЗЛОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ В MS EXCEL

*Гродненский государственный университет имени
Янки Купалы», Гродно*

В курсе «Вычислительные методы алгебры» изучается алгоритм QR-разложения квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Найти матрицы Q и R можно в соответствии с формулами [1].

$$H_i = E - 2w_i w_i^T, w_i = \mu_i (0; \dots; a_{ii}^{(i-1)} - \beta_i; a_{i+1,i}^{(i-1)}; \dots; a_{ni}^{(i-1)})^T,$$

$$\beta_i = \operatorname{sgn}_+(-a_{ii}^{(i-1)}) \sqrt{\sum_{k=i}^n (a_{ki}^{(i-1)})^2}, \mu_i = \frac{1}{\sqrt{2\beta_i^2 - 2\beta_i a_{ii}^{(i-1)}}}, i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (1)$$

$$R = A_{n-1} = H_{n-1} \dots H_2 H_1 A = Q^T A, Q = H_1 H_2 \dots H_{n-1}.$$

Приведем один из вариантов реализации разложения матрицы A на основе преобразований Хаусхолдера для матрицы переменного размера $2 \leq n \leq 10$. Это дает возможность

преподавателю подготовить достаточно много вариантов заданий для самостоятельной работы студентов, имея полностью решенные задачи с промежуточными вычислениями.

Порядок матрицы расположен в ячейке A1. Матрица может располагаться в диапазоне B2:K11. В ячейки B1 и A2 помещены 1. Нумерация столбцов осуществляется формулой. Для нумерации строк используется аналогичная формула. В ячейках O2 и P2 фиксируются диагональный элемент матрицы A и число 1 (подсчет количества итераций) соответственно (рисунок 2). Элементы исходной матрицы переносятся в диапазон A12:K22 (формула вводится в ячейку B13 и распространяется на диапазон B13:K22).

$$=ЕСЛИ(ЕОШИБКА(B1+1);""; ЕСЛИ(B1+1<= \$A\$1;B1+1;""))=$$

$$ЕСЛИ(ЕОШИБКА(СМЕЩ(B13;P13-1;P13-1;1;1));"";СМЕЩ(B13;P13-1;P13-1;1;1))$$

$$=ЕСЛИ(И(\$A13<>"";B\$12<>"");B2;"")$$

В соответствии с (1) формируем β и μ с помощью формул вводимых в ячейки Q13 и Y13 (рисунок 1):

$$=ЕСЛИ(A13<>"";ЕСЛИ(P13<>"";ЕСЛИ(O13>0;-1;1)*$$

$$КОРЕНЬ(СУММКВ(СМЕЩ(B13;P13-1;P13-1; \$A\$12-P13+1;1)));"";"")$$

$$=ЕСЛИ(Q13<>"";1/КОРЕНЬ(2*Q13^2-2*Q13*O13);"")$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	O	P	Q	Y
12	7														
13	1	-2,363571	3,034354	0,284103	6,514032	7,403291	1,185613	0,501871				-2,363571	1	17,046325	0,038874
14	2	-6,104985	9,118917	-3,794581	-2,055964	-9,784797	-8,358833	4,140254							
15	3	-8,264772	8,214316	1,829580	-5,277951	-8,532369	2,855488	-2,255388							
16	4	1,582033	6,114027	3,937009	-4,091434	-7,294753	2,412406	3,454632							
17	5	-7,662331	-2,425838	5,951254	-2,686078	-2,194508	-9,000045	-0,813833							
18	6	6,924207	-8,332996	5,039577	3,066883	-5,354610	-8,906324	0,582420							
19	7	8,381805	8,476707	-7,288236	6,533222	1,134110	6,356843	-7,626523							
20															
21															
22															

Рисунок 1 – Формирование β и μ

Матрица H_1 формируется в диапазоне AB13:AK22 вводом в ячейку AB13 формулы и дальнейшим распространением ее на весь диапазон AB13:AK22.

$$\begin{aligned}
 &=ЕСЛИ(И(\$Z13<>"";АВ\$12<>"")); \\
 &ЕСЛИ(\$Z13=АВ\$12;1;0)-2*СМЕЩ(\$АА\$13; \\
 &\$Z13-1;0;1;1)*СМЕЩ(\$АА\$13;АВ\$12-1;0;1;1);""))
 \end{aligned} \quad (6)$$

Вектор w_1 формируется в диапазоне АА13:АА22 вводом в ячейку АА13 формулы и дальнейшим распространением ее на весь диапазон АА13:АА22. Параллельно формируется матрица Q^T . Вначале полагаем $Q^T = H_1$ (формула вводится в ячейку АН13 и распространяется на диапазон АН13:АВ22).

$$\begin{aligned}
 &=ЕСЛИ(А13<>"";ЕСЛИ(А13<\$P\$13;0; \$Y\$13* \\
 &ЕСЛИ(\$А13=\$P\$13; \\
 &(СМЕЩ(\$B\$13;\$P\$13-1;\$P\$13-1;1;1)- \\
 &\$Q\$13);СМЕЩ(\$B\$13;\$А13-1;\$P\$13-1;1;1)));"")) \\
 &=ЕСЛИ(АВ13<>"";АВ13;""))
 \end{aligned} \quad (7)$$

Для формирования матрицы R выполняем копирование диапазонов А1:К1 на диапазон А23:К23 и А2:А11 на А24:А33 соответственно. В ячейку В24 вводим табличную формулу и распространяем ее на диапазон В24:К33 (рисунок 2).

$$\begin{aligned}
 &\{=ЕСЛИ(\$А24<>"";ЕСЛИ(В\$23<>""; \\
 &СУММПРОИЗВ(СМЕЩ(\$АВ\$13;\$Z13-1;0;1; \$А\$12); \\
 &ТРАНСП(СМЕЩ(\$B\$13;0;B\$12-1; \$А\$12;1)));"";""))\}
 \end{aligned} \quad (9)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
23	7	1	2	3	4	5	6	7			
24	1	17,04632505	-5,228183766	-3,41376805	8,490363345	5,306709622	5,222165503	-3,285879053			
25	2	0	6,520104731	-4,95767123	-1,434349691	-10,4442337	-7,089217861	2,94889498			
26	3	1,33227E-15	4,696110909	0,255019145	-4,436425195	-9,42509781	4,574260365	-3,868219774			
27	4	5,55112E-17	6,787477611	4,238409191	-4,252517622	-7,12386829	2,083400537	3,763357913			
28	5	-2,22045E-16	-5,687591479	4,491466443	-1,90589382	-3,02216305	-7,406558904	-2,309100406			
29	6	1,11022E-15	-5,385451856	6,358740148	4,361855025	-4,60668384	-10,34630708	1,933646338			
30	7	0	12,04473199	-5,69137881	5,679779965	2,03948041	4,613732894	-5,990852827			
31											
32											
33											

Рисунок 2 – Формирование матрицы R

В Р13 поместим 1. В ячейку Р24 поместим формулу (10) (подсчет количества итераций).

$$\begin{aligned}
 &=ЕСЛИ(ЕОШИБКА(Р13+1);""; \\
 &ЕСЛИ(Р13<А12;Р13+1;""))
 \end{aligned} \quad (10)$$

Формулы ячеек О13, Q13 и Y13 копируются в О24, Q24 и Y24 соответственно. Удаляем знаки «\$» из диапазона

Z12:AK22, копируем его и вставляем в диапазон Z23:AK33. (рисунок 3).

В диапазоне AN23:AW33 продолжаем формировать матрицу $Q^T = H_2 \cdot H_1$. Для этого в ячейку AN24 вводим табличную формулу [2] и распространяем ее на весь диапазон AN24:AW33.

$$\{=ЕСЛИ(\$Z24<>"";ЕСЛИ(АВ\$23<>"";ЕСЛИ(\$P\$24<\$A\$1;СУММПРОИЗВ(СМЕЩ(\$АВ\$24;\$Z24-1;0;1;\$A\$1);ТРАНСП(СМЕЩ(\$АN\$13;0;АВ\$23-1;\$A\$1;1)));"";"";""))\} \quad (11)$$

	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK
12		w		1	2	3	4	5	6	7		
13	1	-0,754538	-0,138656	-0,358141	-0,484842	0,092808	-0,449500	0,406199	0,491707			
14	2	-0,237325	-0,358141	0,887354	-0,152497	0,029191	-0,141381	0,127762	0,154657			
15	3	-0,321284	-0,484842	-0,152497	0,793553	0,039518	-0,191398	0,172960	0,209370			
16	4	0,061500	0,092808	0,029191	0,039518	0,992436	0,036637	-0,033108	-0,040077			
17	5	-0,297865	-0,449500	-0,141381	-0,191398	0,036637	0,822553	0,160353	0,194108			
18	6	0,269171	0,406199	0,127762	0,172960	-0,033108	0,160353	0,855094	-0,175410			
19	7	0,325833	0,491707	0,154657	0,209370	-0,040077	0,194108	-0,175410	0,787665			
20												
21												
22												
23		w		1	2	3	4	5	6	7		
24	1	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000		
25	2	0,826489	0,000000	-0,366170	-0,263734	-0,381185	0,319416	0,302447	-0,676433			
26	3	0,159551	0,000000	-0,263734	0,949087	-0,073586	0,061662	0,058386	-0,130583			
27	4	0,230605	0,000000	-0,381185	-0,073586	0,893643	0,089123	0,084388	-0,188737			
28	5	-0,193236	0,000000	0,319416	0,061662	0,089123	0,925319	-0,070713	0,158153			
29	6	-0,182971	0,000000	0,302447	0,058386	0,084388	-0,070713	0,933043	0,149751			
30	7	0,409221	0,000000	-0,676433	-0,130583	-0,188737	0,158153	0,149751	0,665077			
31												
32												
33												

Рисунок 3 – Формирование матрицы H_2

Для получения результатов остальных итераций следует выполнить копирование диапазонов B24:K33, AN24:AW33 и содержимого ячейки P24 с последующей вставкой в диапазоны B13:K22, AN13:AW22 и ячейку P13 соответственно. Выполняется специальная вставка с опцией «Значения». Для этих операций удобно применить макрос с использованием соответствующей кнопки (рисунок 4).

Кнопка «Очистка» предназначена для повторного просмотра вычислений, смены варианта или изменения размерности исходной матрицы.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z		
1	7	1	2	3	4	5	6	7																				
2	1	-2,363571	3,034354	0,284103	6,514032	7,403291	1,185613	0,501871																				
3	2	-6,104985	9,118917	-3,794581	-2,055964	-9,784797	-8,358833	4,140254																				
4	3	-8,264772	8,214316	1,829580	-5,277951	-8,532369	2,855488	-2,255388																				
5	4	1,582033	6,114027	3,937009	-4,091434	-7,294753	2,412406	3,454632																				
6	5	-7,662331	-2,425838	5,951254	-2,686078	-2,194508	-9,000045	-0,813833																				
7	6	6,924207	-8,332996	5,039577	5,066583	-5,354610	-8,906324	0,582420																				
8	7	8,381805	8,476707	-7,288236	6,533222	1,134110	6,356843	-7,626523																				
9																												
10																												
11																												
12	7	1	2	3	4	5	6	7																				
13	1	17,046325	-5,228184	-3,413768	8,490363	5,306710	5,222166	-3,285879																				
14	2	0,000000	-17,806247	7,340136	0,184717	5,287414	-8,020557	2,405523																				
15	3	0,000000	0,000000	-9,040392	2,936845	8,196859	2,356034	-2,069400																				
16	4	0,000000	0,000000	0,000000	-9,278042	-6,390277	3,150493	2,008053																				
17	5	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	12,132502	11,437937	-1,501926																				
18	6	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	5,728683	0,933648																				
19	7	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	3,906544	-8,096574																				
20																												
21																												
22																												
23	7	1	2	3	4	5	6	7																				
24	1	17,04632505	-5,228183766	-3,41376905	8,490363345	5,306709922	5,222165503	-3,285879053																				
25	2	-1,07665E-16	-17,80624702	7,340136161	0,18471666	5,287414053	-8,020557146	2,40552282																				
26	3	-8,21604E-16	-1,1565E-15	-9,04039226	2,936844819	8,196858532	2,356033795	-2,069399616																				
27	4	-1,67284E-16	-2,55699E-15	-4,98039E-16	-9,278042191	-6,39027704	3,150493125	2,008052957																				
28	5	-9,19905E-16	4,9239E-15	-4,4179E-16	-1,37522E-15	12,13250153	11,43793736	-1,501925679																				
29	6	-1,22423E-15	-3,25242E-15	3,80522E-16	-1,92738E-15	-2,6391E-15	-6,933894406	3,790228381																				
30	7	1,82831E-17	1,23565E-15	2,52652E-17	9,49781E-16	-2,3372E-15	-8,88178E-16	-7,215287634																				
31																												
32																												
33																												

Рисунок 4 – Макросы для продолжения вычислений

После выполнения всех вычислений в диапазоне B24:K33 располагается матрица R. Транспонирование матрицы Q^T осуществляется формулой (12), введенной в ячейку AN35 и распространенной далее на оставшуюся часть диапазона AN35:AW44.

$$=ЕСЛИ(И($A24<>"";AN$12<>""); СМЕЩ(AN13;AN$12-1;$A24-1;1;1);"") \quad (12)$$

Для проверки правильности полученного решения A=QR использована формула типа формулы (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вержбицкий, В.М. Вычислительная линейная алгебра / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2009. – 351 с.
2. Пчельник, В.К. К вопросу использования табличных функций в пакете MS EXCEL / В.К. Пчельник, И.Н. Ревчук // Проблемы инженерно-педагогического образования в республике Беларусь: материалы VII международной научно-практической конференции, Минск. – БНТУ, 2013. – Ч.1. – С. 157-160.