

## К расчету местной устойчивости составных балок постоянного сечения

Вовна Е.Е., Шкловский Д.А.

(Научный руководитель – Давыдов Е.Ю.)

Белорусский национальный технический университет,  
Минск, Беларусь

### Введение

Целью данной работы является найти оптимум выражения под знаком радикала в формуле для проверки устойчивости стенок балок постоянного симметричного сечения с постоянным шагом ребер жесткости.

**Расчет на устойчивость стенок балок при действии равномерно распределенной нагрузки.**

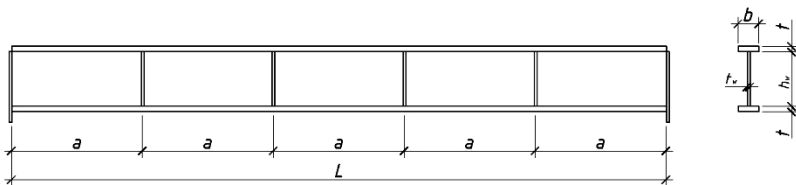


Рисунок 1 – Общий вид исследуемой балки

Исследуемый радикал:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}} + \frac{\sigma_{loc}}{\sigma_{loc,cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2} \leq \frac{\gamma_c}{\gamma_n};$$

При проверке на устойчивость стенок металлических балок постоянного сечения существует неопределенность при выборе отсечков, для которых необходимо производить расчет. В то же время рассматриваемые балки (в том числе и подкрановые) являются ответственными элементами и их некачественный расчет может повлечь за собой значительные материальные затраты и подвергнуть опасности жизни людей и целостность дорогостоящего оборудования.

Следствием этого является необходимость исследования каждого отсека. В данной работе систематизирован и упрощен расчет местной устойчивости данных конструкций, выведен критерий, сокращающий количество проверяемых отсеков.

Исследуемая функция:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2 = \left(\frac{M}{W \cdot \sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{Q}{A_w \cdot \tau_{cr}}\right)^2 = \\ &= \left[\left(\frac{q \cdot l \cdot x}{2} - \frac{q \cdot x^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{W \cdot \sigma_{cr}}\right]^2 + \\ &+ \left[\left(\frac{q \cdot l}{2} - \frac{q \cdot x}{2}\right) \cdot \frac{1}{A_w \cdot \tau_{cr}}\right]^2 = \\ &= \left(\frac{q^2}{4W^2 \cdot \sigma_{cr}^2}\right) \cdot (l^2 \cdot x^2 - 2 \cdot l \cdot x^3 + x^4) \\ &+ \left(\frac{q^2}{A_w^2 \cdot \tau_{cr}^2}\right) \cdot \left(\frac{l^2}{4} - l \cdot x + x^2\right); \end{aligned}$$

Нормальные и касательные критические напряжения потери устойчивости:

$$\begin{aligned} \tau_{cr} &= 10,3 \left(1 + \frac{0,76}{\mu^2}\right) \frac{R_s}{\bar{\lambda}_{ef}^2}; \\ \sigma_{cr} &= \frac{c \cdot R_y}{\bar{\lambda}_w^2} \\ \delta &= \beta \cdot \frac{b_f}{h_{ef}} \cdot \left(\frac{t_f}{t}\right)^3 \rightarrow c_{cr}; \quad \bar{\lambda}_{ef} = \frac{d}{t} \cdot \sqrt{R_y/E} \end{aligned}$$

Нормальные и касательные напряжения, действующие в сечении:

$$\sigma = \frac{M \cdot h_{ef}}{W \cdot h}; \quad \tau = \frac{Q}{t \cdot h_{ef}}$$

Для нахождения экстремума функции находим её производную первой степени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y(x) &= \left( \frac{q^2}{4W^2 \cdot \sigma_{cr}^2} \right) \cdot (2l^2 \cdot x - 6 \cdot l \cdot x^2 + 4x^3) \\ &+ \left( \frac{q^2}{A_w^2 \cdot \tau_{cr}^2} \right) \cdot (-l \cdot x + 2x) = \\ &= (2x - l) \cdot \left( \frac{q^2}{2A} \cdot (x^2 - xl) + \frac{q^2}{B} \right) \end{aligned}$$

где для упрощения принято:

$$A = W^2 \cdot \sigma_{cr}^2; \quad B = A_w^2 \cdot \tau_{cr}^2.$$

Первую производную подкоренной функции приравняем к нулю и решаем полученное уравнение:

$$\begin{aligned} y(x) = q^2 \cdot (2x - l) \cdot \left( \frac{1}{2A} \cdot (x^2 - xl) + \frac{1}{B} \right) &= 0 \\ 1) \quad (2x - l) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 &= \frac{l}{2} \\ 2) \quad \left( \frac{1}{2A} \cdot (x^2 - xl) + \frac{1}{B} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - xl + \frac{2A}{B} &= 0 \\ x_{2,3} &= \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 8A/B}}{2} \end{aligned}$$

Решением функции является координата  $x$ . По этой абсциссе находится отсек, который необходимо проверить на местную устойчивость (проверяемый отсек – это отсек, внутрь которого попадает найденный корень). Однако решением функции может стать как действительный корень (соблюдается условие  $(l^2 - 8A/B) \geq 0$ ), так и комплексный ( $(l^2 - 8A/B) < 0$ ). Практическое представление действительных корней не составляет труда, иначе обстоит дело с мнимыми корнями, поэтому одной из задач нашей работы было их исследование. Получив комплексный корень, мы не сможем применить его на практике, т.к. решение является мнимым и отсека с такой координатой не существует, поэтому в данной работе мы решили проверить, будет ли являться решением приведенный корень: комплексный корень с мнимой частью, взятой по модулю. Для исследования была взята балка, состоящая из пяти отсеков, напряжения находились для каждого сечения.

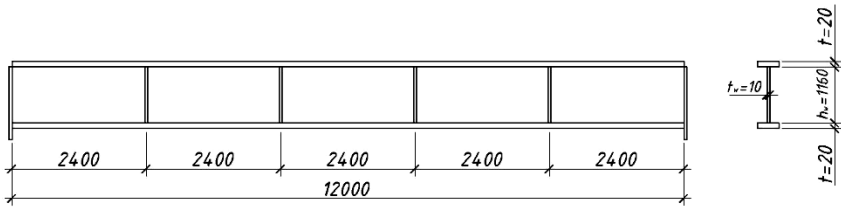


Рисунок 2 – Рассчитанная балка

Приведенные комплексные корни (мнимая часть условно берется по модулю):

$$x_2 = 3,912 \text{ м}$$

$$x_3 = 8,088 \text{ м}$$

Легко заметить, что приведенные корни не являются экстремумами.

График, отображающий значения радикала в зависимости от расстояния между рассматриваемым сечением и торцом балки:

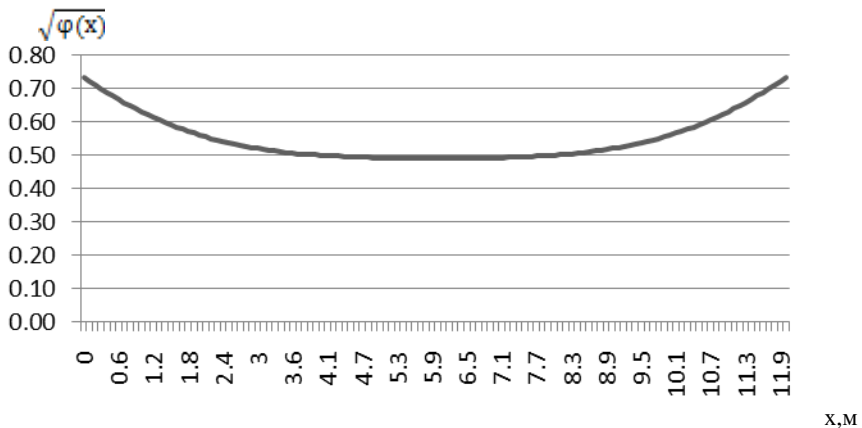


Рисунок 3 – График распределения значений корня исследуемой функции по длине балки

Дальнейшие исследования показали, что для всех балок, имеющих мнимый корень, график изменения значения радикала по длине имеет тот же вид.

Варьируя геометрическими размерами сечения (высотой, шириной, толщиной полка и стенки балки), а также шагами ребер жесткости и величиной пролета, получили кроме вышеуказанной ещё

2 типовые схемы распределения значений исследуемого радикала по длине балки, но уже для случая действительных корней.

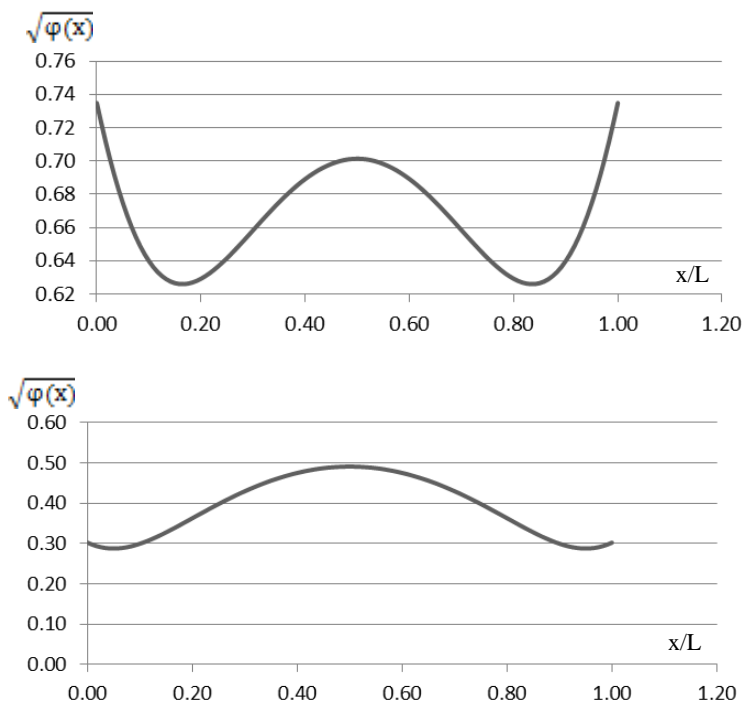


Рисунок 4 – Случаи распределения значений корня исследуемой функции по длине балки

Легко заметить, что для случая с комплексными корнями (первый график) имеется максимум только в начале пролета, других пиков по длине балки нет, поэтому необходимо проверять именно первый отсек. В случае же с действительными корнями (второй и третий графики) существует неопределенность: выбрать средний отсек или первый отсек, в которых значение функции максимальны, действительные же корни также являются экстремумами, однако проверять отсеки, на которые попадают эти координаты не надо, т.к. функция в них имеет минимальные значения, а при проверке местной устойчивости нас интересуют только максимальные значения. Следовательно, для случая действительных корней необходимо проверять как первый, так и средний отсеки.

Таким образом, вид корня (комплексный либо действительный) определяет количество и расположение отсеков, требующих проверки местной устойчивости.

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{l^2 - 8A/B}}{2}$$

$$l^2 - 8A/B \geq 0; \quad l^2 - 8 \frac{W^2 \cdot \sigma_{cr}^2}{A_w^2 \cdot \tau_{cr}^2} \geq 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{l^2}{8} \geq \left( \frac{W \cdot \sigma_{cr}}{A_w \cdot \tau_{cr}} \right) \quad \text{— действительные корни,}$$

проверяются первый и средний отсеки;

$$l^2 - 8A/B < 0; \quad l^2 - 8 \frac{W^2 \cdot \sigma_{cr}^2}{A_w^2 \cdot \tau_{cr}^2} < 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{l^2}{8} < \left( \frac{W \cdot \sigma_{cr}}{A_w \cdot \tau_{cr}} \right)$$

— комплексные корни, следовательно проверяется только первый отсек.

### Расчет на устойчивость стенок балок при действии локальных напряжений.

Исследуемая функция:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \left( \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} + \frac{\sigma_{loc}}{\sigma_{loc,cr}} \right)^2 + \left( \frac{\tau}{\tau_{cr}} \right)^2 = \left( \frac{M(x)}{W \cdot \sigma_{cr}} + \frac{F}{t \cdot l_{ef} \cdot \sigma_{loc,cr}} \right)^2 + \left( \frac{Q}{A_w \cdot \tau_{cr}} \right)^2 = \\ &= \frac{M^2(x)}{W^2 \cdot \sigma_{cr}^2} + 2 \cdot \frac{F \cdot M(x)}{t \cdot l_{ef} \cdot \sigma_{loc,cr} \cdot W \cdot \sigma_{cr}} + \frac{F^2}{t^2 \cdot l_{ef}^2 \cdot \sigma_{loc,cr}^2} + \frac{Q^2}{A_w^2 \cdot \tau_{cr}^2} \end{aligned}$$

Для упрощения принимаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{W^2 \cdot \sigma_{cr}^2} &= A; \quad 2 \cdot \frac{F}{t \cdot l_{ef} \cdot \sigma_{loc,cr} \cdot W \cdot \sigma_{cr}} = B; \\ \frac{F^2}{t^2 \cdot l_{ef}^2 \cdot \sigma_{loc,cr}^2} &= C; \quad \frac{1}{A_w^2 \cdot \tau_{cr}^2} = D \end{aligned}$$

Тогда исследуемая функция в упрощенном виде:

$$\varphi(x) = A \cdot M(x)^2 + B \cdot M(x) + C + D \cdot Q^2$$

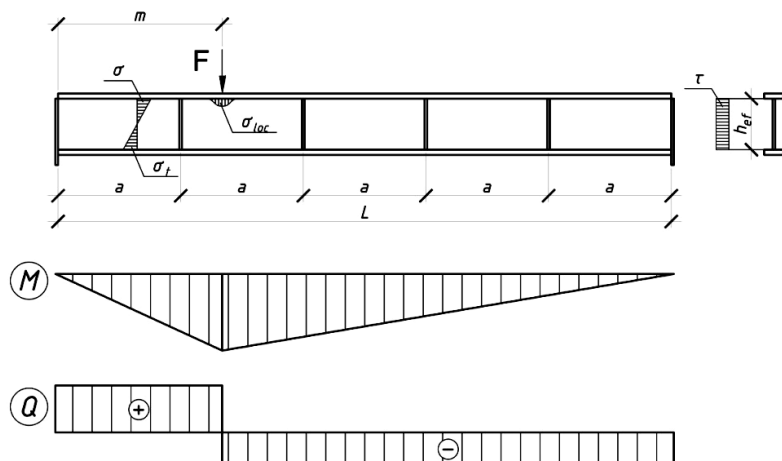


Рисунок 5 – Общий вид исследуемой балки со сосредоточенной нагрузкой

Напряжения, действующие в сечении:

$$\sigma = \frac{M \cdot h_{ef}}{W \cdot h}; \quad \tau = \frac{Q}{t \cdot h_{ef}}; \quad \sigma_{loc} = \frac{F}{t \cdot l_{ef}} \quad \text{или} \quad \sigma_{loc,cr} = \frac{c_2 \cdot R_y}{\bar{\lambda}_{ef}^2}$$

Для нахождения экстремума функции находим её производную первой степени:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y(x) = A \cdot (M(x)^2)' + B \cdot (M(x))' + D(Q^2)'$$

Поскольку \$Q\$ не является алгебраической функцией от аргумента \$x\$, то производная поперечной силы по координате равняется нулю при действии вертикальной силы (\$\sigma\_{loc} \neq 0\$). Сл., координата экстремума подкоренного выражения не зависит от касательных напряжений (\$a\$ равно и от действия поперечной силы). Т.о., проверке местной устойчивости подлежат отсеки с наибольшим значением функции, то при действии одиночной поперечной силы необходимо проверить отсек, в котором изгибающий момент будет максимальным, т.к. значение функции в большей степени зависят от нормальных напряжений, а они в свою очередь зависят от значений изгибающего момента.

Изгибающий момент принимает максимальное значение в месте приложения сосредоточенной силы.

В случае действия на балку нескольких сосредоточенных нагрузок:

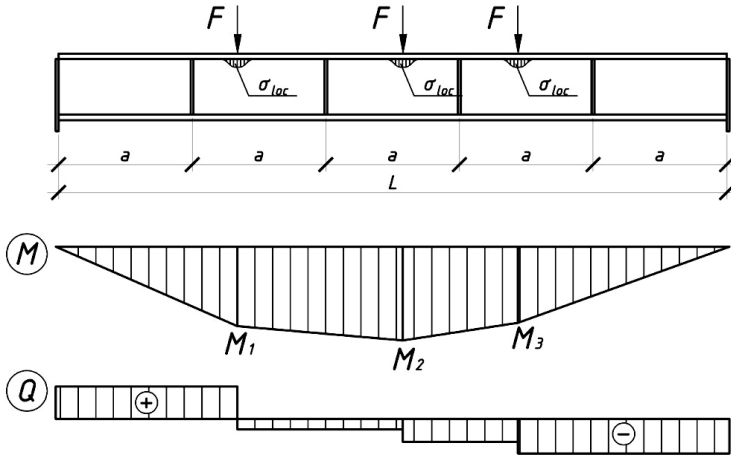


Рисунок 6 – Общий вид исследуемой балки с группой сосредоточенных сил

Как видно, существует неопределенность, в каком именно отсеке производить проверку местной устойчивости стенки балки.

Таким образом, проверку местной устойчивости стенки балки, на которую действует внеузловая сосредоточенная нагрузка, необходимо производить для отсеков, в которых данная нагрузка приложена.

### Выводы

При проверке стенки балки на местную устойчивость нет необходимости в проверке каждого отсека, что весьма трудоемко. Достаточно соотнести неравенство  $\frac{l^2}{b} \geq \left( \frac{W \cdot \sigma_{cr}}{A_w \cdot \tau_{cr}} \right)$ , и при его выполнении будут проверяться первый и средний отсек (два отсека, а не все), а при невыполнении – только первый (лишь один отсек).

При действии сосредоточенных сил (учете локальных напряжений) проверке подлежат отсеки, в которых данная нагрузка приложена.