

Анализ закона изменения жесткости элементов переменного сечения

Парахня Д.В.

(Научный руководитель – Мартынов Ю.С.)

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

В данной статье приведена аналитическая оценка распределения усилий и напряжений по длине элементов переменного сечения, подверженных чистому изгибу в зависимости от закона изменения жесткости последних, выполненная при помощи аппарата метода сил строительной механики [2] и программного комплекса MathCAD [3].

Рассмотрим, к примеру, один раз статически неопределимую металлическую двутавровую балку переменной жесткости, изменение жесткости которой происходит за счет изменения высоты стенки (рисунок 1).

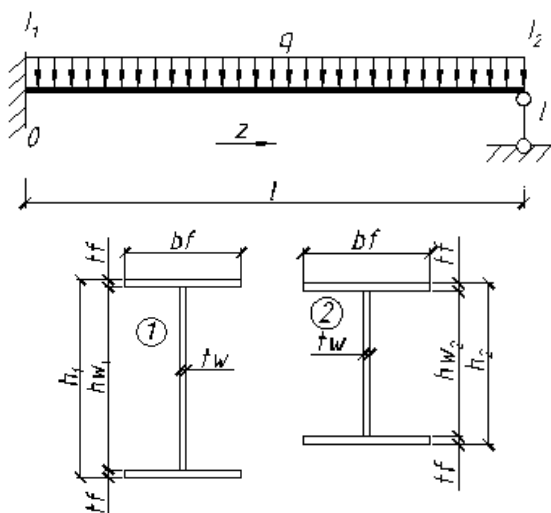


Рисунок 1 – Расчетная схема рассматриваемой балки

Для такой балки выведем закон изменения момента инерции, принимая во внимание линейное изменение высоты стенки двутаврового элемента в зависимости от ординаты рассматриваемого сечения:

$$I(z) = \frac{tw \cdot \left(\frac{(hw_1 - hw_2) \cdot (l - z)}{l} + hw_2 \right)^3}{12} + 2 \cdot \left(\frac{bf \cdot tf^3}{12} + \frac{bf \cdot tf}{4} \cdot \left(\frac{(hw_1 - hw_2) \cdot (l - z)}{l} + hw_2 + tf \right)^2 \right)$$

Как видно, данная зависимость представляет собой кубическую гиперболу и графически представлена на рисунке 2 сплошной линией $I(z)$.

Подставляя в основное каноническое уравнение метода сил вместо момента инерции сечения закон его изменения, при помощи интегрирования находим коэффициенты и свободные члены уравнения метода сил, определяем закон распределения изгибающего момента по длине балки. Иными словами, определяем аналитическую зависимость для описания эпюры изгибающих моментов, представленной на рисунке 3 сплошной тонкой линией $M(z)$.

Полученная при помощи программного комплекса MathCAD эпюра изгибающих моментов и аналитическая зависимость как нельзя более точно описывают распределение усилий по длине балки со сложным законом изменения жесткости. Однако результаты вычисления коэффициентов и свободных членов канонического уравнения не могут быть представлены в общем виде, ввиду большой сложности производимых при интегрировании операций. Иными словами MathCAD может выдать только частные численные значения данных коэффициентов, но не может дать самой формулы, позволяющей, зная изначальные геометрические характеристики балки, получить значения коэффициентов без выполнения операции интегрирования. Операция же интегрирования, ввиду сложности подынтегральной функции, не может быть выполнена ручным счетом, без использования программного комплекса MathCAD.

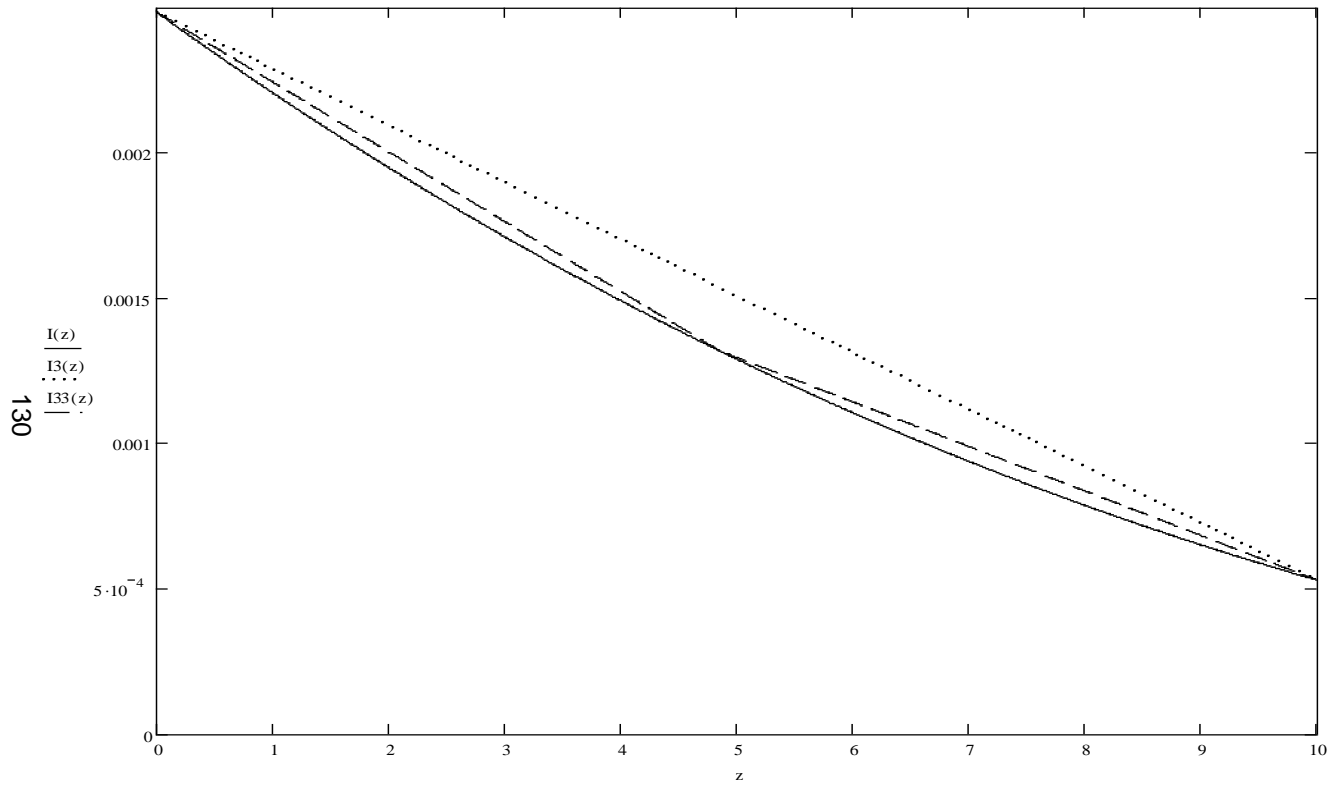


Рисунок 2 – Графики законов изменения момента инерции балки: точного $I(z)$, приближенного $I_3(z)$ и уточненного $I_{33}(z)$

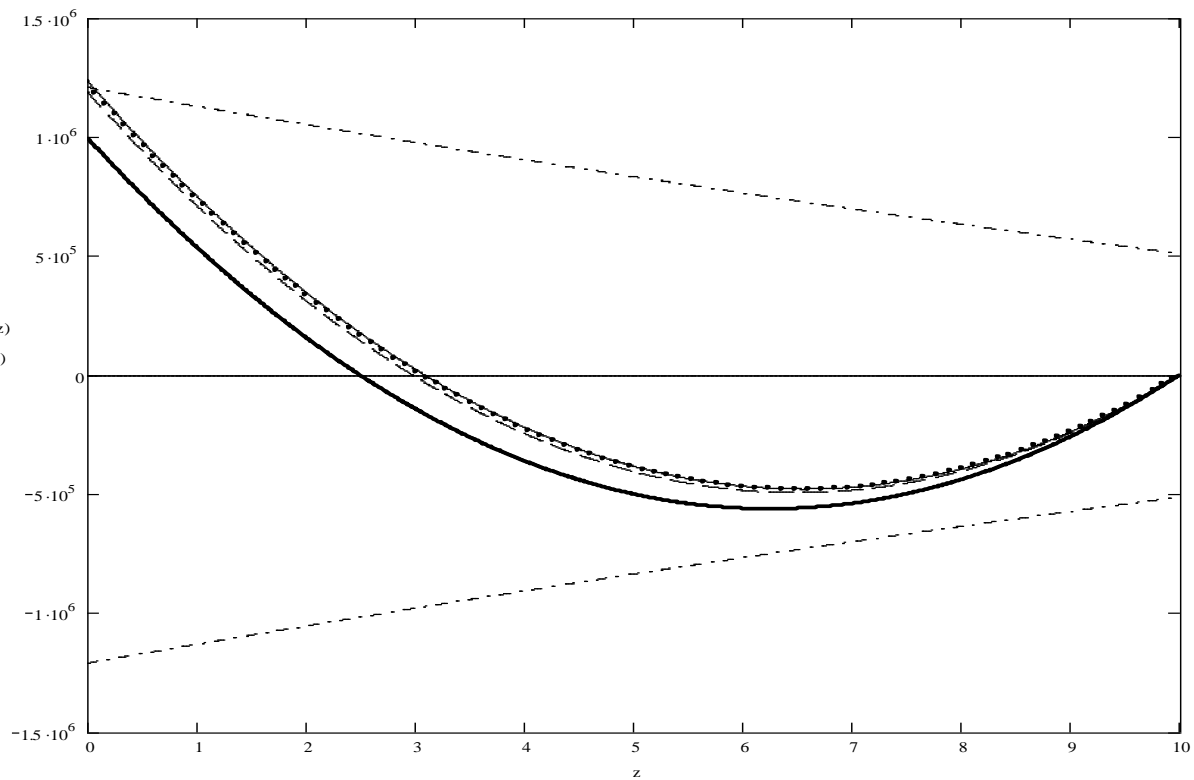


Рисунок 3 – Графики функций $M(z)$, $M_{\max}(z)$, $M_{\text{const}}(z)$, $M_1(z)$, $M_2(z)$

Для того чтобы решить эту проблему изучим более детально закон изменения момента инерции по длине балки (рисунок 2)

Заменим точный кубический закон изменения момента инерции приближенным линейным. Так, линией из точек на рисунке 2 изображен приближенный закон $I3(z)$, представляющий собой прямую, проведенную через две опорные точки балки. Штрихпунктирной линией изображен уточненный закон изменения момента инерции $I33(z)$, состоящий из двух участков с линейным законом на каждом. Как видно из рисунке 2 данное описание является более приближенным к самому закону изменения момента инерции.

Следует отметить, что точка, в которой происходит разбиение элемента на два участка с различными линейными законами изменения жесткости, есть абсцисса сечения, в котором расхождение между точным и приближенным законами изменения момента инерции максимально (определяется путем приравнивания к нулю производной разницы обеих функций). Данная точка смещена от середины балки в сторону сечений с большей жесткостью на 1-2% от общей длины всей балки, однако для приближенных расчетов можно использовать точку с абсциссой равной 1/2 общей длины.

Подставляя в основное каноническое уравнение метода сил, вместо момента инерции сечения его приближенный $I3(z)$ и уточненный $I33(z)$ законы изменения, при помощи интегрирования находим коэффициенты и свободные члены уравнения метода сил для обоих случаев, определяем законы распределения изгибающих моментов по длине балки, строим функции эпюр моментов.

На рисунке 3 сплошной тонкой линией изображена истинная эпюра моментов $M(z)$, полученная путем подстановки в уравнение метода сил точного закона изменения жесткости. Штрихпунктиром с точками – функция эпюры материала, определяющаяся зависимостью

$$\pm M_{\max}(z) = W(z) \cdot f_y,$$

и графически представляющая собой несущую способность каждого из сечений, в зависимости от его координаты вдоль оси балки.

Так, для обеспечения несущей способности элемента, эпюра моментов на участке $[0, l]$ должна находиться в пределах $[-M_{\max}(z), +M_{\min}(z)]$, т.е. значения изгибающего момента не должны превышать несущей способности ни в одном из сечений балки.

Штрихпунктирной линией на графике изображена эпюра моментов $M1(z)$ при приближенном линейном задании закона изменения момента инерции. Максимальное расхождение в абсолютных значениях изгибающих моментов для точной $M(z)$ и приближенной $M1(z)$ эпюр моментов наблюдается в точке с абсциссой равной 0 (в жестком защемлении) и составляет 3,6%. Но, как видно из рисеurf 3, данной погрешности вполне достаточно для того, чтобы сделать неверные выводы о несущей способности конструкции: несущая способность приближенных к левому, жестко защемленному краю сечений балки по такому способу расчета является обеспеченной, и в то же время, точный интегральный расчет дает основание говорить о том, что внутренние усилия в данных сечениях превышают их несущую способность.

Обратимся к уточненному закону изменения момента инерции $I33(z)$, представляющему собой 2 участка с линейной приближенной зависимостью на каждом из них. Эпюра моментов при таком описании функции момента инерции изображена на рис.3 линией из точек $M2(z)$, и практически сливается с точной эпюрой моментов. Идентичность двух графиков говорит о большой точности примененного способа задания функции изменения жесткостных параметров балки. Максимальное расхождение в абсолютных значениях изгибающих моментов для точной $M(z)$ и рассматриваемой $M2(z)$ эпюр моментов составило всего 0,6%.

Для сравнения на рисунке 3 сплошной жирной линией приведена эпюра изгибающих моментов для балки, обладающей постоянной жесткостью при всех прочих равных условиях, $Mconst(z)$. Максимальное расхождение в абсолютных значениях изгибающих моментов для балки с постоянной и переменной жесткостями составило 19%, что в очередной раз подчеркивает сложность характера перераспределения усилий, вызванного изменением жесткостных характеристик сечений элемента по его длине.

Здесь также следует обратить внимание на получивший наибольшее распространение метод расчета элементов переменной жесткости, при котором закон изменения жесткости задается путем разбиения элемента переменного сечения на участки постоянной жесткости, взятой по среднему сечению для каждого из таких участков. Графически данный способ задания функции жесткости представляет собой ломаную линию, изображенную на рисунке 4

штрихпунктирно линией (точками) $I5(z)$. Здесь же сплошной линией изображен реальный закон изменения жесткости $I(z)$ и штрихпунктирном – рассматриваемая нами приближенная зависимость $I33(z)$. Как видно из рисунка 4, и линейное задание функции жесткости, и ступенчатое являются одинаково приближенными к реальному закону изменения жесткости, однако в первом случае для такого приближения требуется в разы меньше количество участков, на которые разбивается элемент.

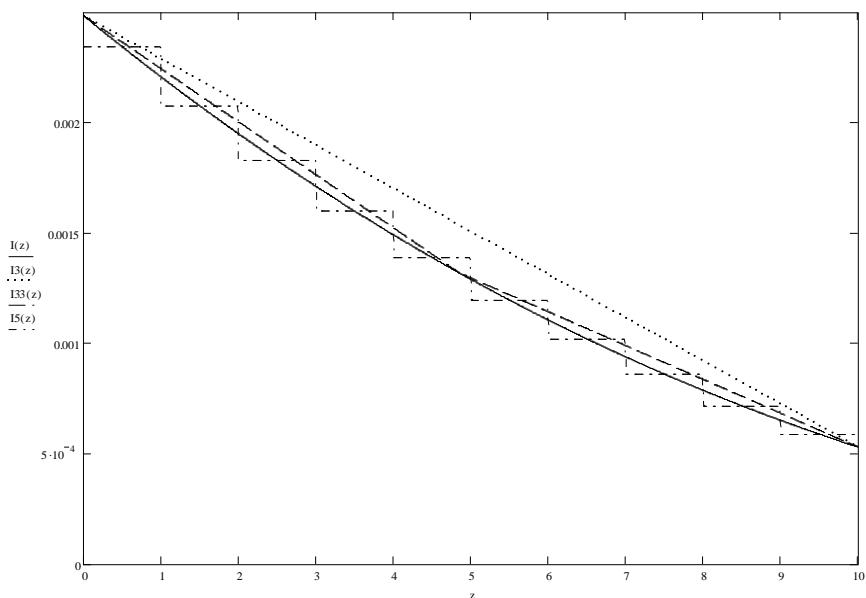


Рисунок 4 – Графическое сравнение методик описания функции жесткости

С этой точки зрения есть смысл продолжить рассмотрение данного аналитического метода, сделав его основой численной компьютерной программы. В результате данная программа, при такой же точности, будет производить меньшее количество вычислительных операций, а, соответственно, и сам расчет будет занимать меньшее количество времени. При увеличении же числа участков, до такого же количества, которое применяется для вычислений численным методом, значительно возрастет точность расчета.

Подытоживая все вышесказанное, хочется отметить, что описанные в данной статье зависимости очень хорошо зарекомендовали себя на практике при выполнении статического расчета однопролетной металлической рамы переменной жесткости с элементами двутаврового сечения. Полученная по результатам расчета эпюра изгибающих моментов практически идентична эпюре моментов, полученной при расчете рамы численным методом с использованием программного комплекса Lira и разбиением элементов рамы на множество участков постоянной жесткости. Однако при расчетах согласно описанной методике количество требуемых для расчета участков в десятки меньше, а сам расчетный процесс значительно проще, и может быть выполнен без использования ЭВМ.

Литература

1. СНиП II-23-81* Стальные конструкции/Госстрой СССР, - М.:ЦИТП Госстроя СССР, 1990. – 96с.
2. Строительная механика / А.В.Дарков, В.И.Кузнецов / Высшая школа 1962. – 745 с.
3. Высшая математика на базе MathCAD. Общий курс. /Черняк А.А., Черняк Ж.А., Доманова Ю.А./ Спб.:БХВ-Петербург, 2004.- 608 с.