

УДК 685.659.1+536.48

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ИСКУССТВЕННЫХ ЛЕДОВЫХ ПОКРЫТИЙ

Д.Г. Ливанский, А.Э. Захаревич

Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Республика Беларусь

dertygon@gmail.com

При математическом моделировании температурного поля искусственных ледовых пластин исследуется взаимное влияния процессов теплообмена в основании ледового поля (рис. 1) и в воздушном пространстве (рис. 2) крытых искусственных катков. Для этого используются следующие дифференциальные уравнения.

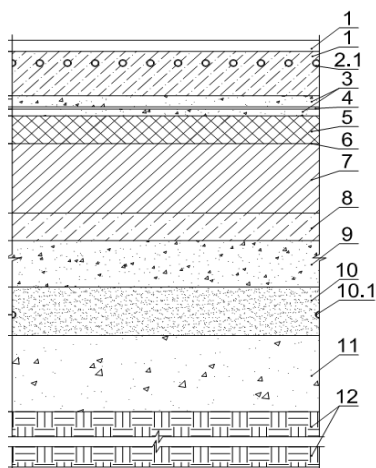


Рис. 1. Конструкция основания ледового поля: 1 - слой льда; 2 - плита технологическая с трубопроводами холодоснабжения; 2.1 - трубопроводы холодоснабжения; 3 - выравнивающая стяжка; 4 - гидроизоляционные слои (2 слоя); 5 - утеплитель; 6 - гидроизоляционный слой (1 слой); 7 - плита несущая; 8 - подготовка из бетона; 9 - слой щебня; 10 - песок с трубопроводами защиты грунта от промерзания; 10.1 - трубопровод защиты грунта от промерзания; 11 - грунт уплотненный щебнем; 12 - материковый грунт.

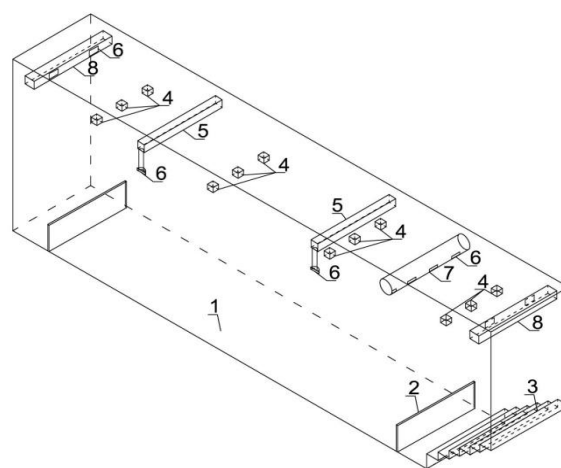


Рис. 2. Расчетная область воздушного пространства крытого искусственного катка: 1 – ледовое поле; 2 – борт с защитным стеклом; 3 – места для зрителей; 4 – приборы освещения; 5 – приточный воздуховод, обслуживающий зону льда; 6 – воздухораспределитель; 7 - приточный воздуховод, обслуживающий зону зрителей; 8 – вытяжной воздуховод.

Уравнение теплопроводности:

$$\rho(x, y, z, T) \cdot c(x, y, z, T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x, y, z, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(x, y, z, T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(x, y, z, T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] + q_v \quad (1)$$

где $\lambda(x, y, z, T)$ – коэффициент теплопроводности материала; $\rho(x, y, z, T)$ – плотность материала; $c(x, y, z, T)$ – удельная теплоемкость материала; τ – время; x, y, z – координаты; T – температура; q_v – теплота, выделившаяся при замерзании воды в единице объема.

Теплофизические характеристики материалов $\lambda(x, y, z, T)$, $\rho(x, y, z, T)$, $c(x, y, z, T)$ принимаются при следующих допущениях:

- при строительстве крытых катков используются строительные материалы соответствующие действующим нормативным документам;
- не учитывается конвективный перенос в слое воды для намораживания ледового поля;
- увлажнение материалов извне и от внутренних источников отсутствует и не изменяется с течением времени.

Теплофизические характеристики для воды (льда) с учетом их изменения при фазовом переходе:

$$\lambda = \lambda_l + (\lambda_g - \lambda_l) \cdot H \quad (2)$$

где λ_l – коэффициент теплопроводности льда; λ_g – коэффициент теплопроводности воды; H – сглаженный шаг функции Хевисайда:

$$H(T) = \begin{cases} 0, & T < (T_3 - 0.1) \\ 5(T - T_3 - 0.1) & (T_3 - 0.1) < T < (T_3 + 0.1) \\ 1 & T > (T_3 + 0.1) \end{cases}, \quad (3)$$

где T_3 – температура замерзания воды 0°C ; величина 0.1 – ширина сглаженного шага функции.

$$\rho = \rho_l + (\rho_g - \rho_l) \cdot H, \quad (4)$$

где ρ_l и ρ_g – соответственно плотности льда и воды;

$$c = c_l + (c_g - c_l) \cdot H, \quad (5)$$

где c_l и c_g – соответственно удельные теплоемкости льда и воды.

$$q_v = l \cdot \gamma \cdot \frac{\partial i}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (6)$$

где q_v – теплота, выделившаяся при замерзании воды в единице объема; l – скрытая теплота фазового перехода (вода–лед); γ – удельный вес влаги в единице объема; l – льдистость – это отношение содержания замерзшей влаги к общему влагосодержанию грунта или слоя воды (для случая намораживания слоя льда).

Уравнения движения, записанные для каждой из координатных осей:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + s \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (7)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + s \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] g. \quad (8)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + s \frac{\partial s}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right). \quad (9)$$

Здесь

$$w = \sqrt{u^2 + v^2 + s^2}. \quad (10)$$

Уравнение сплошности воздушной среды:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

Уравнение переноса тепловой энергии:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + s \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_{v,T}. \quad (12)$$

Уравнение переноса водяных паров:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + s \frac{\partial \omega}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) + q_{v,\omega}, \quad (13)$$

В представленных уравнениях: u, v, s – проекции вектора скорости на оси x, y и z соответственно; w – скорость; x, y, z – пространственные координаты; c – теплоемкость; D – коэффициент диффузии водяных паров; g – ускорение свободного падения; p – давление; $q_{v,T}$ – удельная объемная интенсивность источников теплоты; $q_{v,\omega}$ – удельная объемная интенсивность источников водяных паров; t – время; T – температура; β – коэффициент объемного термического расширения; λ – теплопроводность; μ – динамическая вязкость; ρ_0 – значение плотности для характерной температуры T_0 , взятой из интервала изменения температуры в воздушной среде помещения; ω – концентрация водяных паров.

В условиях работы механической вентиляции движение воздуха является турбулентным. Для учета турбулентного характера движения воздуха использована k - ε модель турбулентности. Ключевыми характеристиками в данной модели являются кинетическая энергия (k) и скорость диссипации энергии турбулентности (ε).

Суть k - ε модели заключается в том, что дифференциальные уравнения переноса, составленные для условий ламинарного течения, применяются также и в случае турбулентного движения среды. При этом в них вводятся осредненные по времени физические величины и используются эффективные коэффициенты переноса, которые характеризуют суммарную интенсивность молекулярного и турбулентного переноса. Например,

$$\mu_{\text{эф}} = \mu + \mu_T, \quad \lambda_{\text{эф}} = \lambda + \lambda_T, \quad (14)$$

где μ_T и λ_T – турбулентные коэффициенты переноса, являющиеся турбулентными аналогами соответствующих молекулярных коэффициентов. Для определения μ_T и λ_T используют следующие выражения:

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad \lambda_T = c \frac{\mu_T}{Pr_T}. \quad (15)$$

Поля кинетической энергии турбулентности k и скорости ее диссипации ε определяются из следующих уравнений переноса, записанных в тензорном виде для декартовых координат:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + G_b - \rho \varepsilon, \quad (16)$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} (P_k + G_b) - \rho C_{\varepsilon 2} \varepsilon). \quad (17)$$

Здесь

$$P_k = \mu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad G_b = \beta g_i \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (18)$$

В уравнениях (15)-(18) приняты следующие значения модельных констант:

$$C_\mu = 0,09; \quad Pr_T = 0,85; \quad \sigma_k = 1; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3; \quad C_{\varepsilon 1} = 1,44; \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92. \quad (19)$$

При решении представленной системы дифференциальных уравнений необходимо задать начальные и граничные условия.

Начальные условия, по возможности, выбираются максимально близкими к реальным полям распределения параметров микроклимата, чтобы сократить время счета.

Граничные условия определяются физикой задачи. Например, на поверхностях омываемых потоком твердых тел задается условие прилипания. Для уравнения переноса теплоты используют граничные условия первого, второго, третьего или четвертого рода.

Список литературы:

1. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса / В.И. Полежаев [и др.]; под ред. В.С. Авдеевского. – М. : Наука, 1987. – 274 с.
2. Себиси, Т. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы / Т. Себиси, П. Брэдшоу. – М. : Мир, 1987. – 592 с.
3. Юдаев, Б.Н. Теплопередача : учеб. для вузов / Б.Н. Юдаев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. школа, 1972. – 368 с.
4. Ferziger J.H. Computational Methods for Fluid Dynamics / J.H. Ferziger, M. Peric. – 3rd rev. ed. – Berlin ; Heidelberg ; New York ; Barcelona ; Hong Kong ; London ; Milan ; Paris ; Tokyo : Springer, 2002. – 423 p.