

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра «Инженерная графика строительного профиля»

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

*В 2 частях*

Часть 2

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ.  
ОДНОКАРТИННЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

М и н с к  
Б Н Т У  
2 0 1 1

УДК 515.18(075.8)  
ББК 22.151.3я7  
Н 36

Авторы:

*Л.С. Корытко* – лекции 9–10,  
*Ю.И. Садовский* – лекция 11,  
*М.К. Протасова* – лекции 12,  
*И.М. Шуберт* – лекции 13, 16–17,  
*М.В. Кравченко* – лекции 14–15, 18,  
*В.В. Тарасов* – лекции 9, 15  
*Е.А. Телеш* – графическое оформление

Под редакцией *В.В. Тарасова*

Рецензенты:

*В.А. Столяр, П.В. Зелёный*

Н 36 Начертательная геометрия: конспект лекций: в 2 ч. / Л.С. Корытко [и др.]; под ред. В.В. Тарасова. – Минск: БНТУ, 2011. – Ч. 2: Метрические задачи. Однокартинные изображения. – 118 с.

ISBN 978-985-525-535-3 (Ч.2).

Настоящий конспект лекций разработан коллективом авторов кафедры «Инженерная графика строительного профиля» Белорусского национального технического университета и предназначен для студентов строительных специальностей.

Конспект состоит из двух частей:

часть 1 «Метод Монжа. Позиционные задачи»,

часть 2 «Метрические задачи. Однокартинные изображения».

Рассмотрены основные теоретические вопросы курса начертательной геометрии в соответствии с многолетней практикой работы кафедры и увязкой с методикой проведения практических занятий, решены многие типовые задачи, вызывающие у студентов наибольшие трудности.

Часть 1: Метод Монжа. Позиционные задачи, авторы: Ю.И. Садовский, М.Н. Петрович, В. В. Тарасов, Е.А. Телеш, издана в БНТУ в 2010 г.

УДК 515.18(075.8)  
ББК 22.151.3я7

ISBN 978-985-525-535-3 (Ч.2)  
ISBN 978-985-525-317-5

© БНТУ, 2011

## ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Точки в пространстве обозначаются прописными буквами латинского алфавита  $A, B, C$  или цифрами  $1, 2, 3 \dots$

Произвольные линии в пространстве – строчными буквами латинского алфавита  $a, b, c \dots$

Прямые, параллельные плоскостям проекций:

горизонтали –  $h$ ;

фронталы –  $f$ ;

профильные прямые –  $p$ .

Плоскости общего положения, поверхности обозначаются заглавными буквами греческого алфавита  $\Psi, \Omega, \Sigma \dots$

Плоскости проекций – буквой греческого алфавита  $\Pi$  с добавлением нижнего индекса  $1, 2, 3 \dots$

Основные плоскости проекций:

горизонтальная –  $\Pi_1$ ;

фронтальная –  $\Pi_2$ ;

профильная –  $\Pi_3$ .

Проекции точек, прямых и плоскостей на чертеже обозначаются теми же буквами, что и в пространстве, с добавлением подстрочного индекса  $1, 2, 3$ , соответствующего плоскости проекций, на которой они получены.

Обозначение основных операций:

совпадение отмечается знаком  $\equiv$  ;

взаимная принадлежность – знаком  $\subset$  ;

пересечение отмечается знаком  $\cap$ ;

результат построения (логическое следствие) – знаком  $\Rightarrow$  .

## СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

*Общие понятия. Способ замены плоскостей проекций*

### 9.1. Общие понятия

Решение многих пространственных задач (позиционных и метрических) на эюре часто усложняется из-за того, что заданные геометрические объекты (оригиналы) расположены произвольно относительно плоскостей проекций и, следовательно, проецируются на эти плоскости в искаженном виде. Задание на эюре прямых и плоскостей частного положения значительно упрощает решение задач и делает его выполнимым при помощи простейших графических построений. Например, проекции отрезка, расположенного наклонно ко всем плоскостям проекций, не дают непосредственно его натуральную величину и величину углов наклона его к плоскостям проекций (рис. 9.1, а).

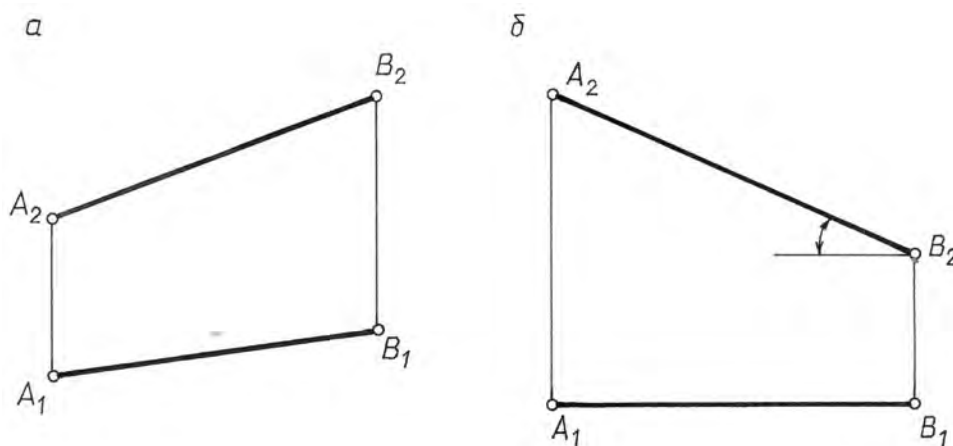


Рис. 9.1

На рис 9.1, б отрезок расположен параллельно фронтальной плоскости проекций, поэтому он проецируется на эту плоскость без искажения, т. е.  $|A_2B_2| = |AB|$ .

По данному чертежу определяется также и угол наклона прямой  $AB$  к горизонтальной плоскости проекций  $AB \wedge \Pi_1$ . При таком положении отрезка  $AB$  его проекции можно считать удобно расположенными для решения поставленных задач.

Если на эюре изображена плоская фигура общего положения (рис. 9.2, а), то без специальных построений нельзя сказать, какой угол она образует с плоскостью проекций, например, с  $\Pi_1$ . Между тем, если плоскость фронтально проецирующая (рис. 9.2, б), то наклон ее фронтальной проекции (фронтальная проекция треугольника) к оси проекций  $X$  непосредственно дает величину угла, образованного плоскостью треугольника  $ABC$  с плоскостью  $\Pi_1$ .

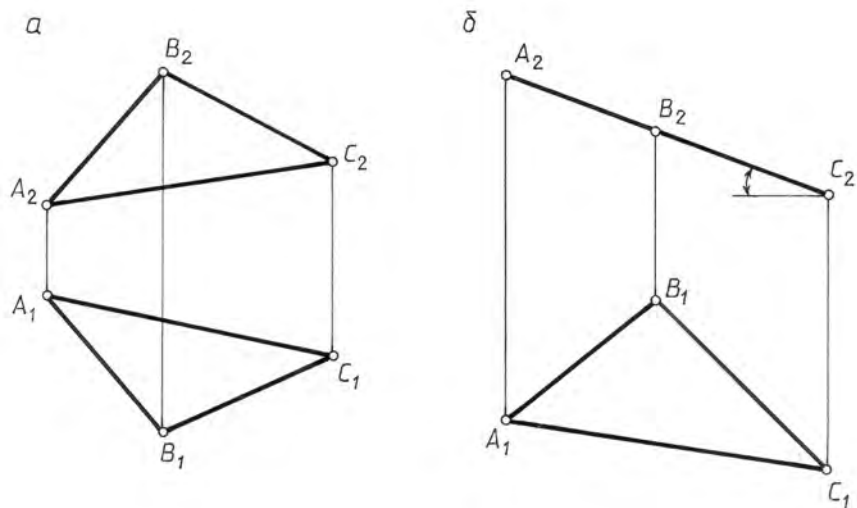


Рис. 9.2

Для построения перпендикуляра из точки  $A(A_1, A_2)$  к горизонтальной прямой  $h(h_1, h_2)$  достаточно провести горизонтальную проекцию прямой  $A_1B_1 \perp h_1$  (рис. 9.3), по линии связи найти точку  $B_2$  и соединить ее с точкой  $A_2$ .

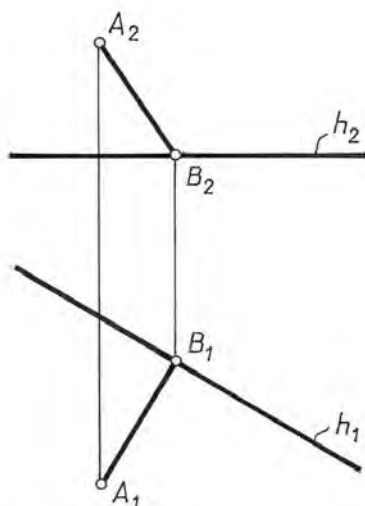


Рис. 9.3

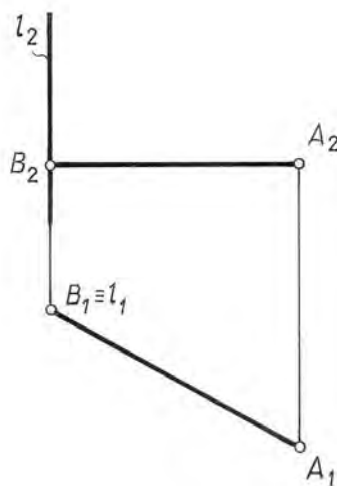


Рис. 9.4

Если прямая  $l(l_1, l_2)$  – горизонтально проецирующая (рис. 9.4), то легко не только построить перпендикуляр  $AB$  ( $A_1B_1, A_2B_2$ ) из точки  $A$  к прямой  $l(l_1, l_2)$ , но и определить натуральную величину расстояния  $|AB| = |A_1B_1|$  от точки до прямой.

Возникает вопрос, как же следует поступить в том случае, если заданные фигуры неудобно расположены относительно плоскостей проекций и затрудняют решение какой-либо задачи. В таких случаях прибегают к преобразованию проекций, т. е. замене исходных проекций изображаемой фигуры новыми (частного положения) с таким расчетом, чтобы последние позволили проще решать поставленную задачу.

В начертательной геометрии в качестве основных применяются следующие способы преобразования проекций:

- 1) способ замены плоскостей проекций;
- 2) способ плоскопараллельного перемещения;
- 3) способ вращения.

Основными задачами преобразования комплексного чертежа являются следующие:

- 1) преобразование прямой общего положения в прямую уровня;
- 2) преобразование прямой общего положения в проецирующую прямую;
- 3) преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость;
- 4) преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня.

## 9.2. Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа состоит в том, что положение изображаемой фигуры в пространстве остается неизменным, а исходная система плоскостей проекций, относительно которой задана фигура, заменяется новой.

При выборе новой плоскости проекций должен быть выполнен основной принцип ортогонального проецирования (метода Монжа) – взаимной перпендикулярности плоскостей проекций, т. е. новую плоскость проекций необходимо обязательно располагать перпендикулярно одной из основных исходных плоскостей проекций.

Пусть задана система плоскостей проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (в дальнейшем будем обозначать сокращенно  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ ). Спроецируем точку  $A$  на эти плоскости и найдем ее проекции  $A_2$  и  $A_1$  (рис. 9.5).

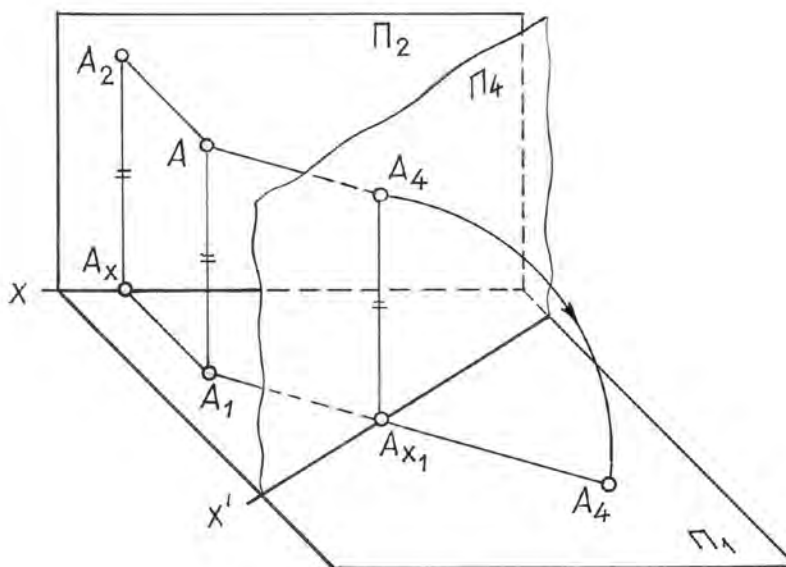


Рис. 9.5

Предположим, что при решении какой-либо задачи целесообразно заменить плоскость  $\Pi_2$  другой фронтальной плоскостью  $\Pi_4$ , перпендикулярной к плоскости  $\Pi_1$ . Линия пересечения плоскостей проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_4$  называется новой осью проекций и обозначается  $X'$ . Построим ортогональные проекции точки  $A$  в системе  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$ . Так как плоскость  $\Pi_1$  осталась прежней, то и проекция точки  $A$  на эту плоскость не изменит своего положения.

Для получения новой фронтальной проекции точки на плоскость  $\Pi_4$  опускаем перпендикуляр из точки  $A$  на плоскость  $\Pi_4$ . Основание  $A_4$  этого перпендикуляра определяет искомую фронтальную проекцию точки  $A$ .

Установим, какая связь существует между проекциями  $A(A_1, A_2)$  и  $A(A_1, A_4)$  одной и той же точки в обеих системах.

Горизонтальная проекция у них общая и так как расстояние точки  $A$  от плоскости  $\Pi_1$  не изменилось, то  $|AA_1| = |A_2A_x| = |A_4A_x'|$ , т. е. расстояние новой фронтальной проекции до новой оси равно расстоянию заменяемой проекции до предыдущей оси.

Чтобы перейти к эпюру, повернем плоскость  $\Pi_4$  вокруг оси  $X'$  и совместим с плоскостью  $\Pi_1$ . Тогда и новая фронтальная проекция  $A_4$  совместится с плоскостью  $\Pi_1$  и при этом окажется на одном перпендикуляре к оси  $X_1'$  с проекцией  $A_1$ .

На рис. 9.6 показаны те построения, которые надо произвести на эпюре.

Чтобы от проекций  $(A_1, A_2)$  точки  $A$  в системе  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$  перейти к проекциям  $A_1, A_4)$

той же точки в системе  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$ , необходимо провести новую ось проекций  $X'$ , ко-

торая определяет положение горизонтально-проецирующей плоскости  $\Pi_4$ , затем из горизонтальной проекции точки  $A_1$  опустить перпендикуляр на новую ось  $X'$ . На построенном перпендикуляре отложить (от новой оси) отрезок  $A_x A_4 = A_x A_2$ . Полученная таким образом точка  $A_4$  является проекцией точки  $A$  на плоскость  $\Pi_4$ .

Замена горизонтальной плоскости  $\Pi_1$  новой плоскостью  $\Pi_4$  и построение новых проекций точки  $A$  в системе  $\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$  осуществляется аналогично рассмотренному случаю с той лишь разницей, что теперь остается без изменения фронтальная проекция точки, а для нахождения новой горизонтальной проекции  $A_5$  точки  $A$  необходимо из фронтальной проекции точки  $A_2$  опустить перпендикуляр на новую ось  $X'$  и отложить на нем от точки пересечения с осью  $X'$  отрезок  $A_5 A_x'$ , равный расстоянию старой горизонтальной проекции от старой оси  $A_1 A_x$  (рис. 9.7).

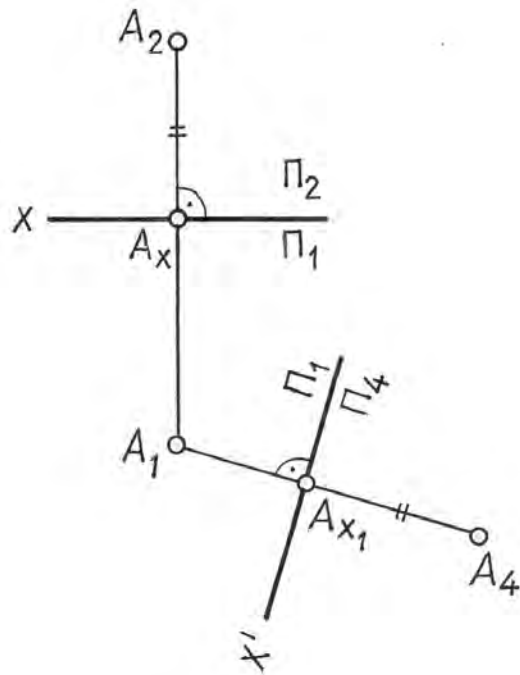


Рис 9.6

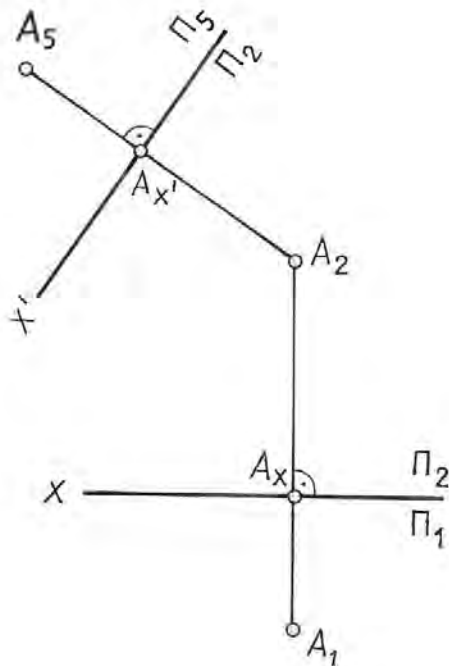


Рис. 9.7

Рассмотренные примеры позволяют установить следующее общее правило: для того чтобы построить проекцию точки в новой системе плоскостей проекций, необходимо из неизменяемой проекции точки опустить перпендикуляр на новую ось проекций и отложить на нем от новой оси до новой проекции расстояние, равное расстоянию от заменяемой проекции до предыдущей оси.



### 9.2.1. Замена двух плоскостей проекций

Некоторые задачи не могут быть решены заменой только одной плоскости проекций. Так, при определении действительной величины какой-либо геометрической фигуры или для получения более полного (наглядного) ее изображения замены одной плоскости проекций бывает недостаточно.

На рис. 9.8 показан пример замены двух плоскостей проекций. Проекция заданной точки  $A$  на плоскость  $\Pi_4$  построена известным способом (см. рис. 9.6). Для построения проекции точки  $A_5$  на плоскость  $\Pi_5$  из точки  $A_4$  опущен перпендикуляр на новую ось  $X''$  и на этом перпендикуляре отложен отрезок  $A_2A_5 = A_X A_1$ .

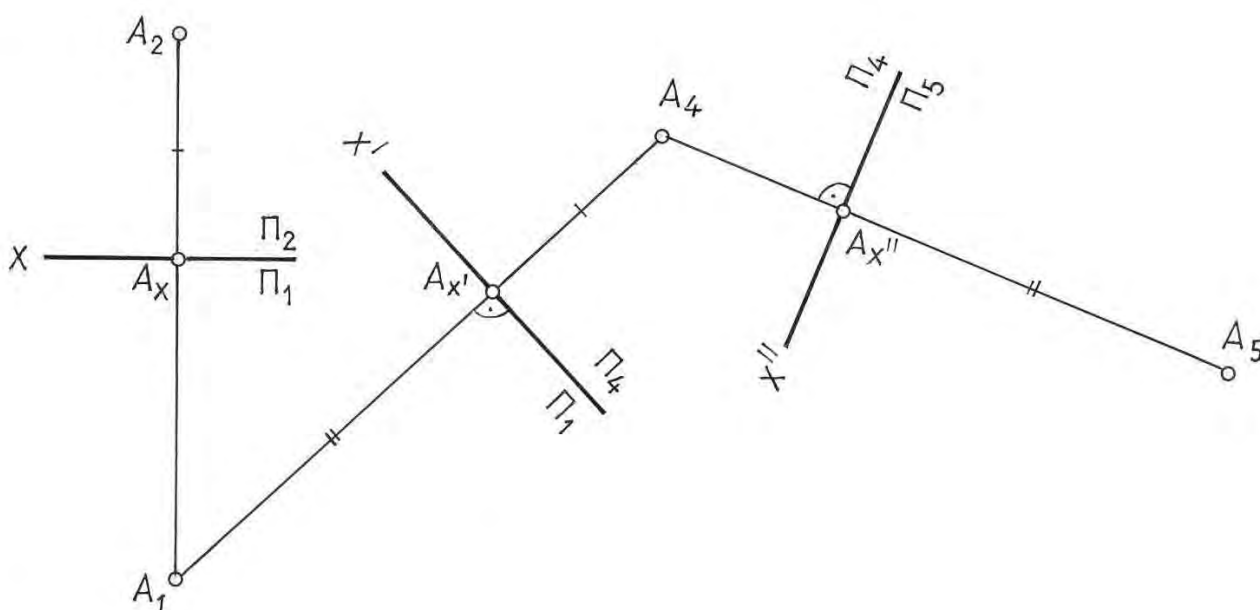


Рис. 9.8

Следует следить за тем, чтобы не происходило накладывания новых проекций на старые.

### 9.2.2. Основные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций

**Задача 9.1.** Преобразовать эюр, изображенный на рис. 9.9, *a*, так, чтобы прямая общего положения оказалась параллельной одной из плоскостей проекций новой системы.

Для решения задачи необходимо расположить новую плоскость проекций параллельно заданному отрезку ( $\Pi_4 \parallel AB$ ). Тогда на эту плоскость проекций отрезок проецируется без изменений.

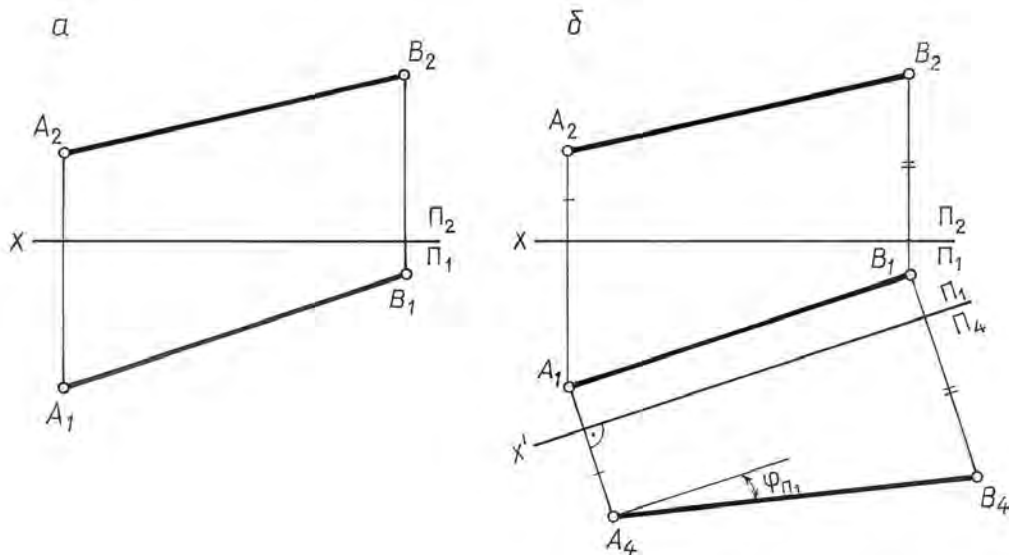


Рис. 9.9

Решение этой задачи показано на рис. 9.9, б. Параллельно  $A_1B_1$  проведена ось  $X'$ , и в системе плоскостей проекций  $\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$  построена новая фронтальная проекция отрезка  $A_4B_4$ . Очевидно, что  $|A_4B_4| = |AB|$  и угол  $\varphi$ , образованный проекцией  $A_4B_4$  с осью  $X'$ , равен углу наклона прямой  $AB$  к плоскости  $\Pi_1$ .

**Задача 9.2.** Преобразовать эюр, изображенный на рис. 9.10, так, чтобы отрезок  $AB$  прямой линии общего положения оказался перпендикулярным одной из плоскостей проекций.

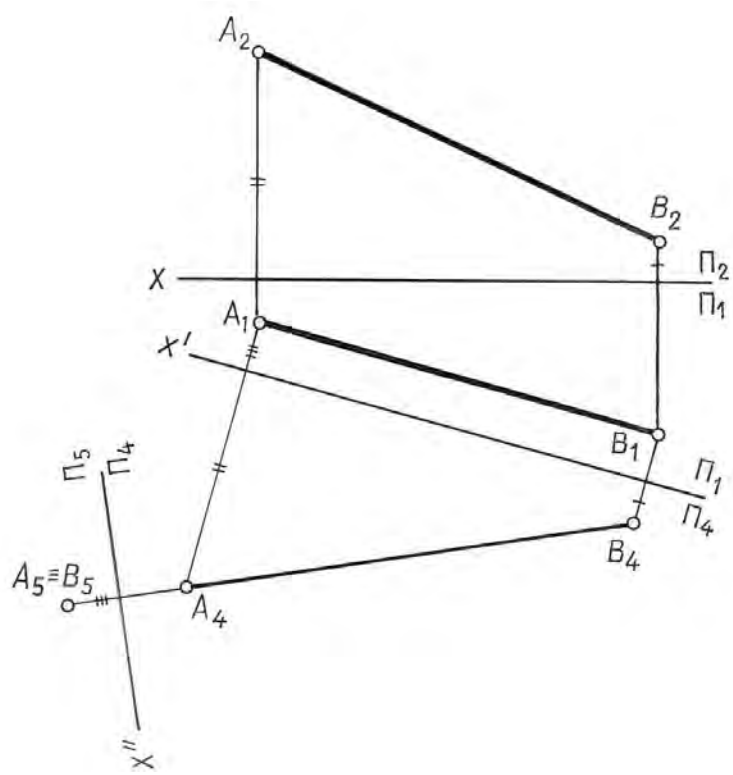


Рис. 9.10

Для решения задачи нужно последовательно произвести две замены плоскостей проекций:

- 1) систему  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$  заменить системой  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$ , расположив плоскость  $\Pi_4$  параллельно  $AB$ ;
- 2) от системы  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$  перейти к  $\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ , расположив плоскость  $\Pi_5$  перпендикулярно прямой  $AB$ . Выполненные построения приведены на рис. 9.10.

**Задача 9.3.** Преобразовать плоскость общего положения в проецирующую.

Для решения данной задачи необходимо ввести новую плоскость проекций так, чтобы она была перпендикулярна заданной плоскости  $\Gamma(ABC)$  и одной из плоскостей проекций, т. е. перпендикулярна линии их пересечения. Линией пересечения плоскости  $\Gamma$  с плоскостью проекций является соответствующий след плоскости  $\Gamma$ . Поэтому новая плоскость проекций должна быть перпендикулярна одному из следов данной плоскости или одной из ее линий уровня, которая параллельна соответствующему следу.

На рис. 9.11 показано преобразование плоскости  $\Gamma(ABC)$  в проецирующую.

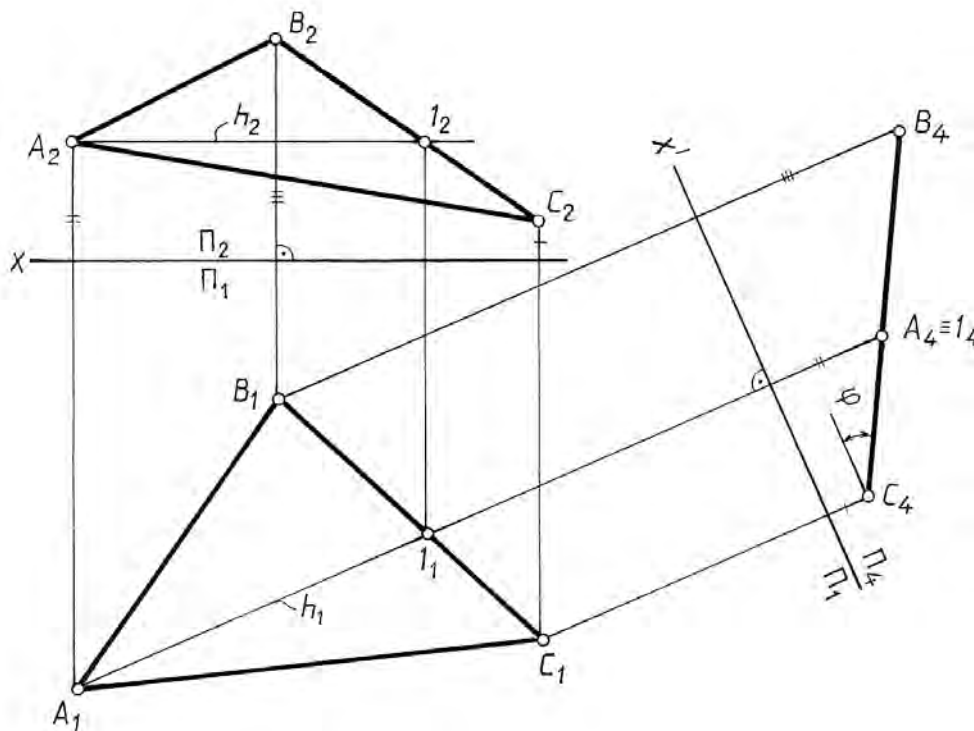


Рис. 9.11

Для этого в плоскости  $\Gamma$  проведена горизонталь  $h(h_2h_1)$  и перпендикулярно к ней, а следовательно, и ко всей плоскости  $\Gamma$  введена новая плоскость  $\Pi_4$ , для чего ось  $X'$  новой системы плоскостей проекций  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$  проведена перпендику-

лярно горизонтальной проекции горизонтали  $X' \perp h_1$ , и в соответствии с известным правилом построена новая проекция  $A_4B_4C_4$  треугольника  $ABC$ , представляющая собой отрезок прямой линии. После проведенных построений плоскость  $\Gamma(ABC)$  оказалась перпендикулярной плоскости проекций  $\Pi_4$  и с плоскостью  $\Pi_1$  составляет угол  $\varphi$ .

**Задача 9.4.** Преобразовать плоскость общего положения  $\Gamma(ABC)$  в плоскость уровня.

Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня производится последовательно двумя заменами плоскостей проекций: вначале плоскость общего положения преобразуется в проецирующую, затем полученная проецирующая плоскость преобразуется в плоскость уровня.

На рис. 9.12 для преобразования плоскости  $\Gamma$  в проецирующую введена новая плоскость проекций  $\Pi_4$ , перпендикулярная плоскости  $\Gamma$ . Ось новой системы плоскостей  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$  проведена перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали.

Полученная проекция  $A_4B_4C_4$  является вырожденной проекцией плоскости  $\Gamma$ , так как плоскость  $\Gamma$  является проецирующей по отношению к плоскости  $\Pi_4$ .

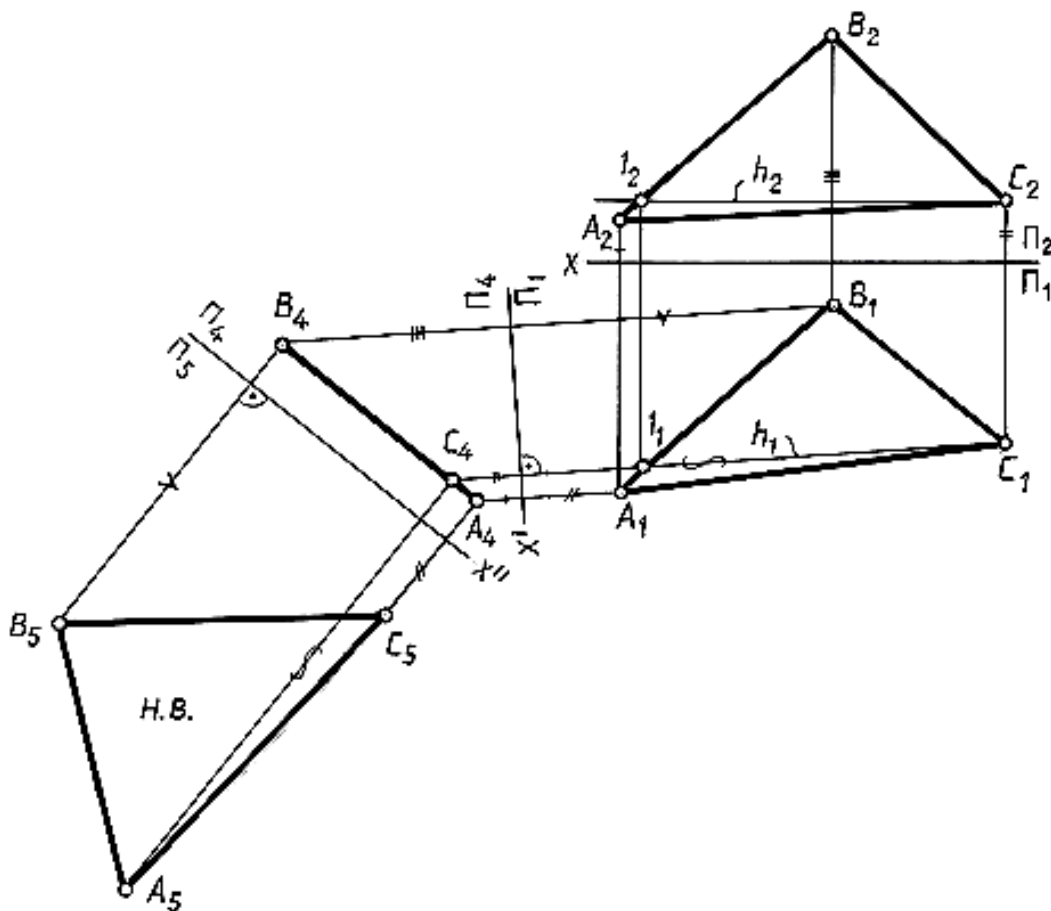


Рис. 9.12

Для преобразования проецирующей плоскости в плоскость уровня введена новая плоскость проекций  $\Pi_5$ , параллельная плоскости  $\Gamma$ . Ось  $X''$  новой системы плоскостей проекций  $\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$  параллельна вырожденной проекции  $A_4B_4C_4$  плоскости  $\Gamma$ . При построении новой проекции  $A_5B_5C_5$  использованы расстояния от заменяемых проекций  $A_1B_1C_1$  до оси  $X_1'$ . Так как в новой системе плоскостей проекций  $\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$  плоскость  $\Gamma(ABC)$  является параллельной плоскости  $\Pi_5$ , то на эту плоскость проекций она проецируется в натуральную величину.

Рассмотренные четыре основные задачи лежат в основе решения многих других задач способом замены плоскостей проекций. Рассмотрим примеры решения некоторых задач.

**Задача 9.5.** Преобразовать плоскость  $\Gamma$  общего положения, заданную следами, в проецирующую (рис. 9.13).

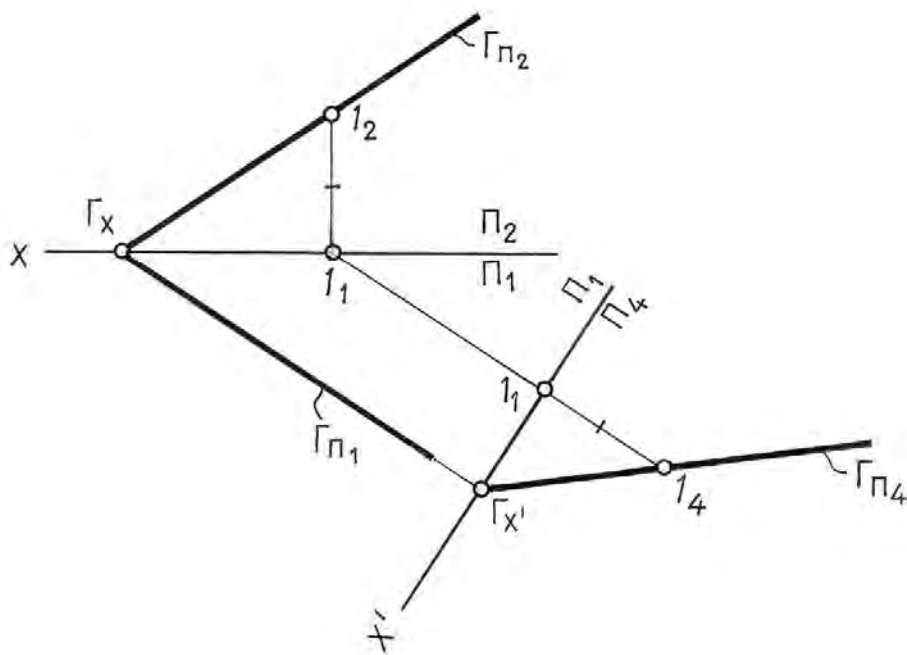


Рис. 9.13

Плоскость  $\Gamma$  преобразуем во фронтально проецирующую. Известно, что горизонтальный след фронтально проецирующей плоскости перпендикулярен оси  $X$ , следовательно, новую ось  $X_1'$  проводим перпендикулярно к  $\Gamma_{\Pi_1}$ . Через точку, в которой  $\Gamma_{\Pi_1} \cap X_1 = \Gamma_X$ , пройдет фронтальный след  $\Gamma_{\Pi_4}$ . Для определения его направления достаточно найти одну точку. В качестве такой точки можно взять произвольную точку  $I \in \Gamma$  и указать ее фронтальную проекцию  $I_4$  на новой плоскости  $\Pi_4$ . Через  $\Gamma_{X'}$  и  $I_4$  проводим  $\Gamma_{\Pi_4}$ .

**Задача 9.6.** Определить расстояние от точки  $T$  до плоскости  $\Sigma$  общего положения, заданной треугольником  $ABC$  (рис. 9.14).

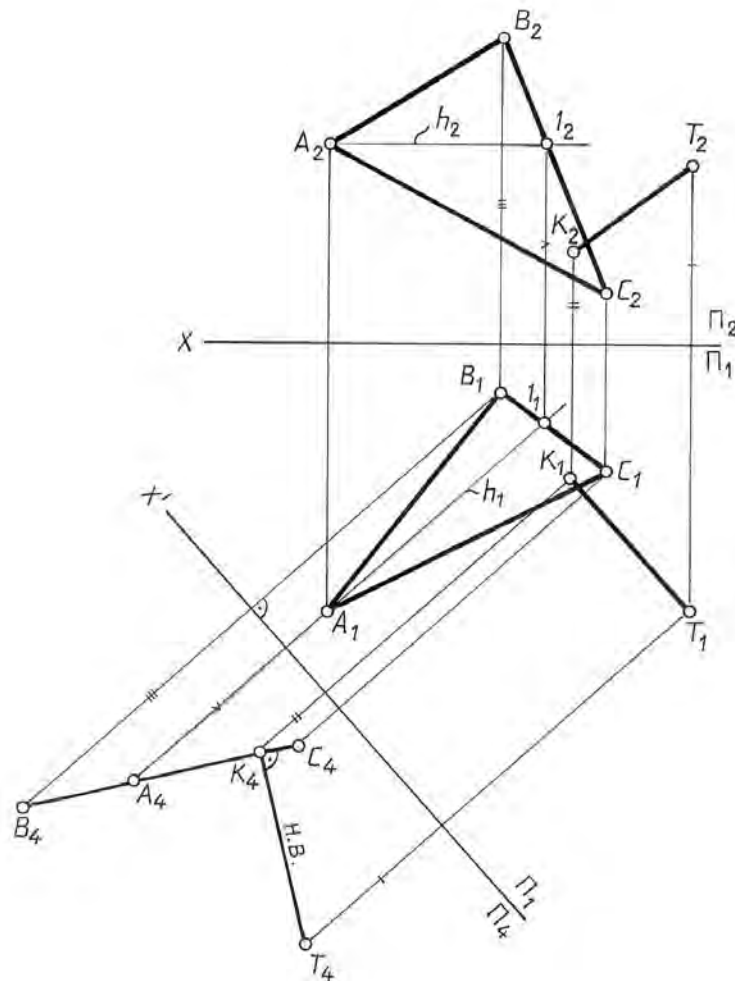


Рис. 9.14

Плоскость  $\Sigma(ABC)$  преобразуем в проецирующую, для чего в плоскости построим горизонталь  $h$  ( $h_2h_1$ ). Перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали проведем ось  $X_1$  новой системы плоскостей проекций  $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$ . Строим новые проекции точек  $A_4B_4C_4$ , откладывая расстояния от оси  $X'$ , равные расстояниям от заменяемых проекций  $A_2B_2C_2$  до оси  $X$ .

Плоскость  $\Sigma(ABC)$  оказалась перпендикулярной плоскости проекций  $\Pi_4$  и спроецировалась на эту плоскость в прямую линию. На плоскость  $\Pi_4$  переносим точку  $T(T_4)$  и опускаем перпендикуляр на плоскость треугольника  $ABC$ .  $T_4K_4 \perp (A_4B_4C_4)$ , где  $K$  – основание перпендикуляра. Расстояние от точки  $T$  до плоскости треугольника  $ABC$  на плоскости  $\Pi_4$  проецируется без искажения.

$|T_4K_4| = |TK|$ . Возвращаем проекции перпендикуляра на плоскость  $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ , для этого

из точки  $T_1$  проводим проекцию перпендикуляра  $T_1K_1$  параллельно оси  $X'$  и перпендикулярно  $h_1$ . Дальнейшие выполненные построения показаны на рис. 9.14.

## СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

*Плоскопараллельное перемещение. Способ вращения*

### 10.1. Плоскопараллельное перемещение

**Плоскопараллельное перемещение** – это такое перемещение геометрической фигуры в пространстве, когда все ее точки двигаются в плоскостях, параллельных какой-либо плоскости проекций.

На рис. 10.1 показано плоскопараллельное перемещение точки  $A$  в плоскости  $\Gamma$ , параллельной горизонтальной плоскости проекций. При таком перемещении точки траектория ее движения  $m$  проецируется на горизонтальную плоскость проекций без искажения ( $m_1 \cong m$ ), а на фронтальную плоскость – в прямую, параллельную оси  $OX$  ( $m_2 \parallel OX$ ).

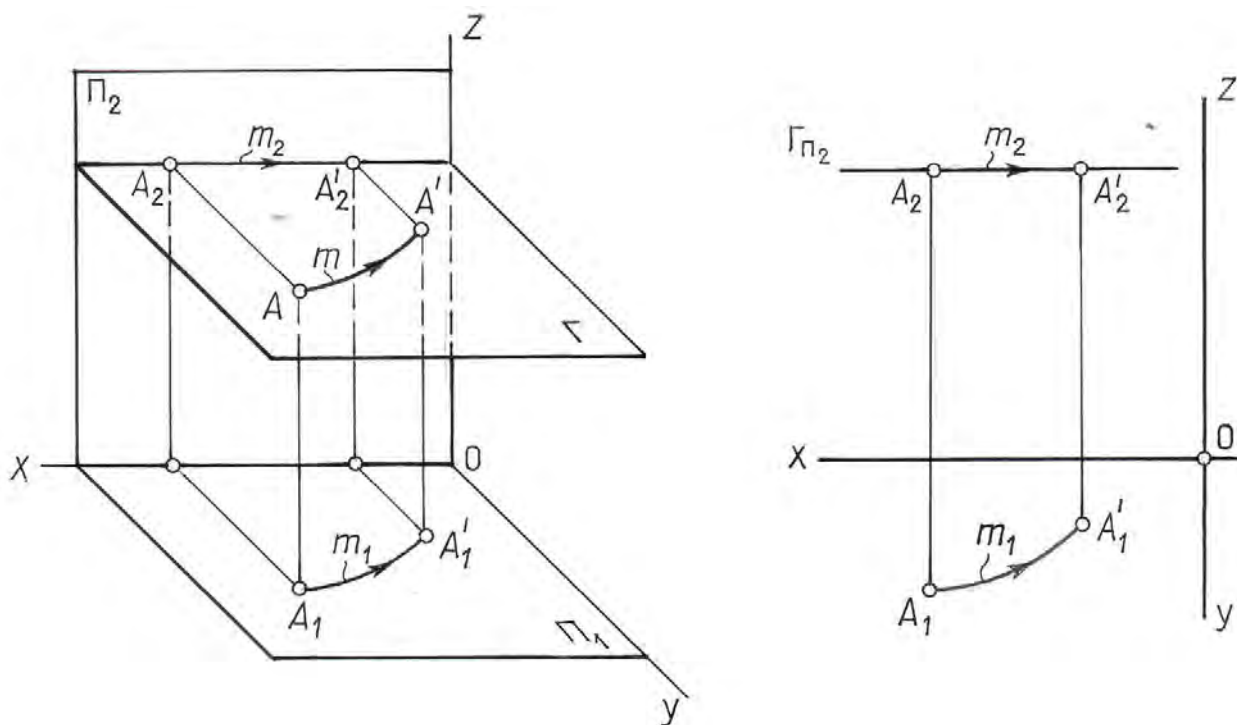


Рис. 10.1

При плоскопараллельном перемещении точки  $B$  во фронтальной плоскости ( $\Sigma \parallel \Pi_2$ ) ее траектория  $t$  на фронтальную плоскость проекций проецируется без искажения ( $l \cong l_2$ ), а на горизонтальную – в прямую, параллельную оси  $OX$  ( $t_1 \parallel X$ ) (рис. 10.2).

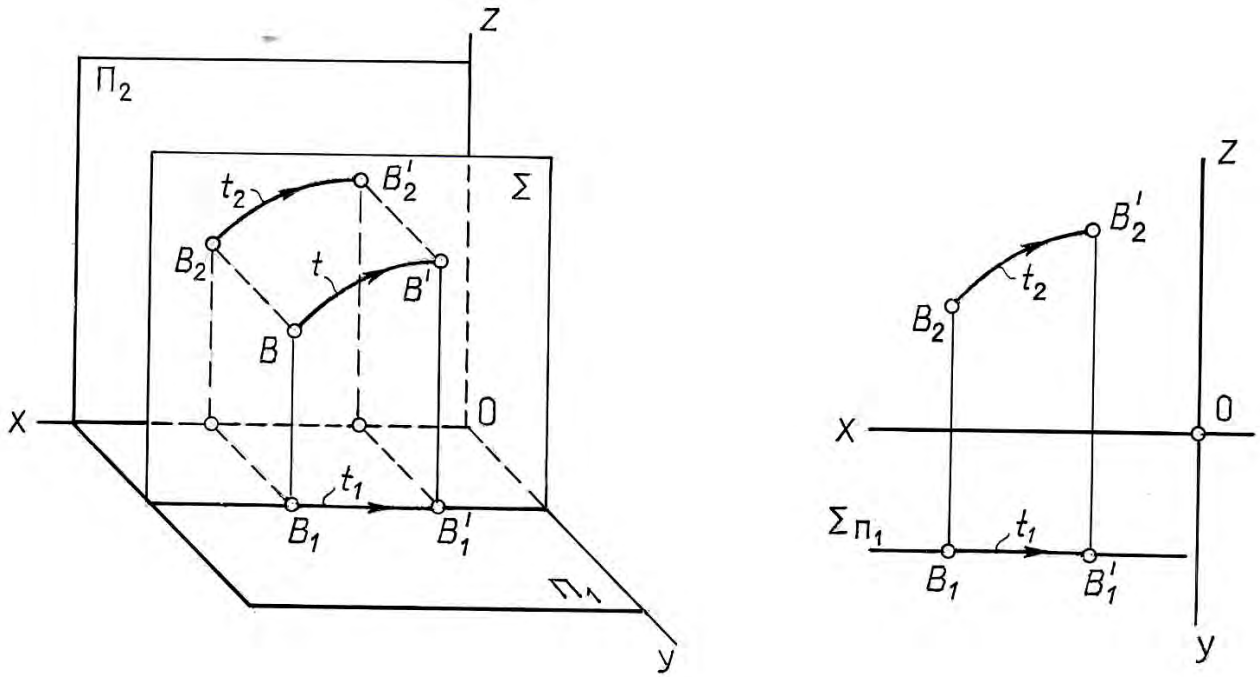


Рис. 10.2

Таким образом, можно сформулировать правило плоскопараллельного перемещения геометрических фигур.

1. При плоскопараллельном перемещении геометрической фигуры  $\Phi$ , все точки которой двигаются в плоскостях, параллельных плоскости проекций  $\Pi_1$ , горизонтальная проекция фигуры  $\Phi_1$  перемещается не меняя формы и размеров ( $\Phi_1 = \Phi'_1$ ), а фронтальные проекции всех точек фигуры перемещаются по прямым, параллельным оси  $OX$  (рис. 10.3).

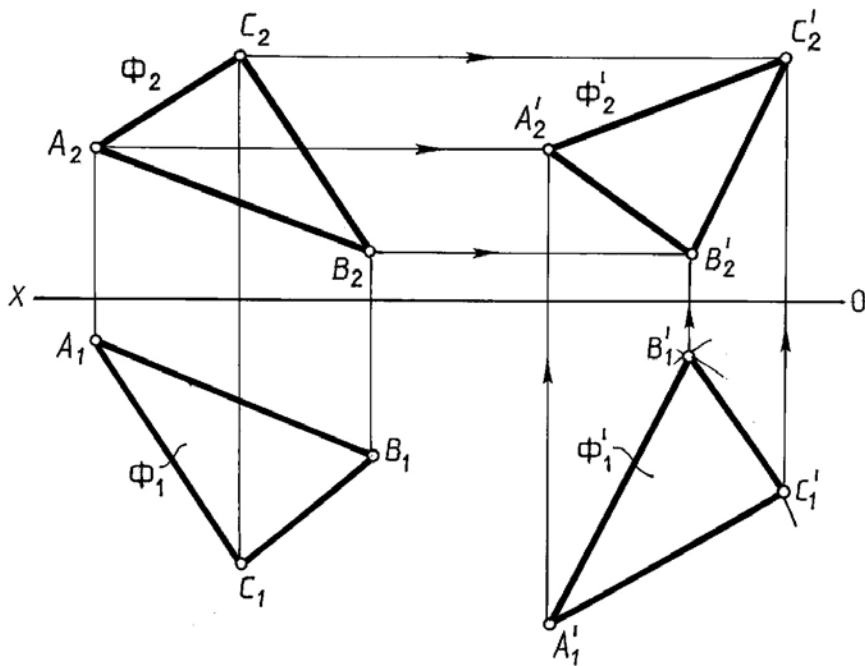


Рис. 10.3



2. При плоскопараллельном перемещении геометрической фигуры  $\Phi$ , все точки которой двигаются в плоскостях, параллельных плоскости проекций  $\Pi_2$ , фронтальная проекция этой фигуры перемещается не меняя формы и размеров ( $\Phi_2 = \Phi'_2$ ), а горизонтальная проекция всех точек фигуры перемещается по прямым, параллельным оси  $OX$  (рис. 10.4).

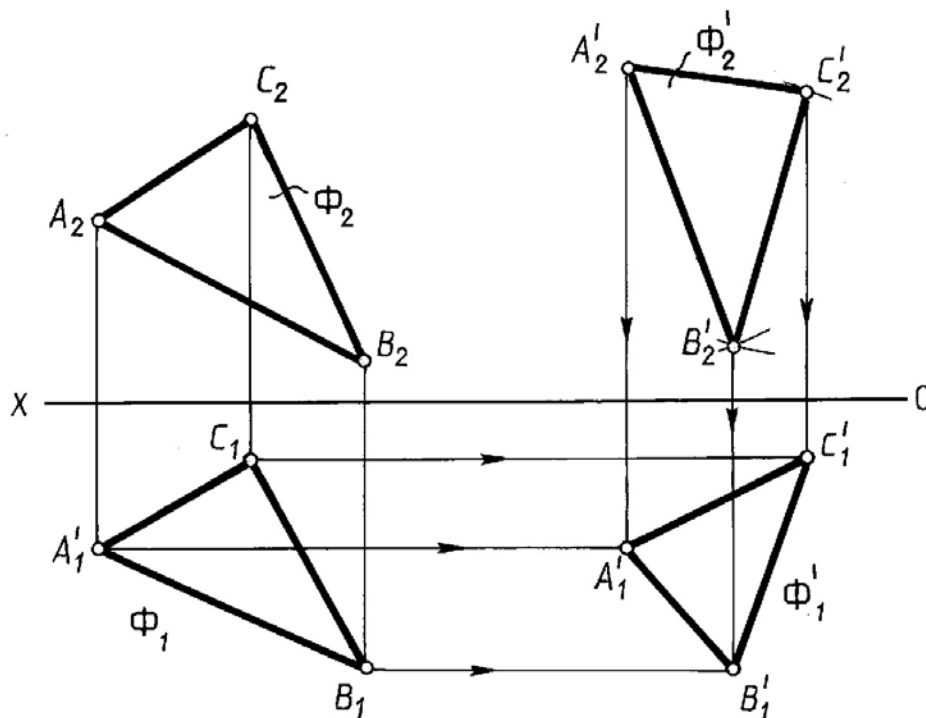


Рис. 10.4

Рассмотрим ряд практических задач применения изложенного метода.

**Задача 10.1.** Определить натуральную величину отрезка  $AB$  общего положения.

Отрезок проецируется в натуральную величину на плоскость проекций, если он параллелен этой плоскости проекций, поэтому отрезок  $AB$  расположим параллельно фронтальной плоскости проекций, т. е. его горизонтальная проекция должна быть параллельна оси  $X$ . Перемещение отрезка в новое положение осуществляем так, чтобы все его точки двигались в плоскостях, параллельных плоскости  $\Pi_1$ . При таком перемещении новая горизонтальная проекция конгруэнтна исходной. Фронтальные проекции точек отрезка ( $A_2B_2$ ) будут перемещаться по прямым, параллельным оси  $X$ .

На рис. 10.5 построения выполнены в следующей последовательности.

1. Через произвольную точку  $A_1'$  проводим прямую, параллельную оси  $OX$ .
2. От точки  $A_1'$  откладывают на ней отрезок  $A_1'B_1'$ , равный  $A_1B_1$ .
3. Из точек  $A_1$  и  $B_1$  проводим вертикальные линии связи до встречи с горизонтальными прямыми, проведенными соответственно через точки  $A_2$ ,  $B_2$ . Полученные точки  $A_2'$ ,  $B_2'$  являются фронтальной проекцией отрезка  $AB$ , параллельного плоскости  $\Pi_2$ , и его натуральной величиной  $|A_2'B_2'| = |AB|$ .

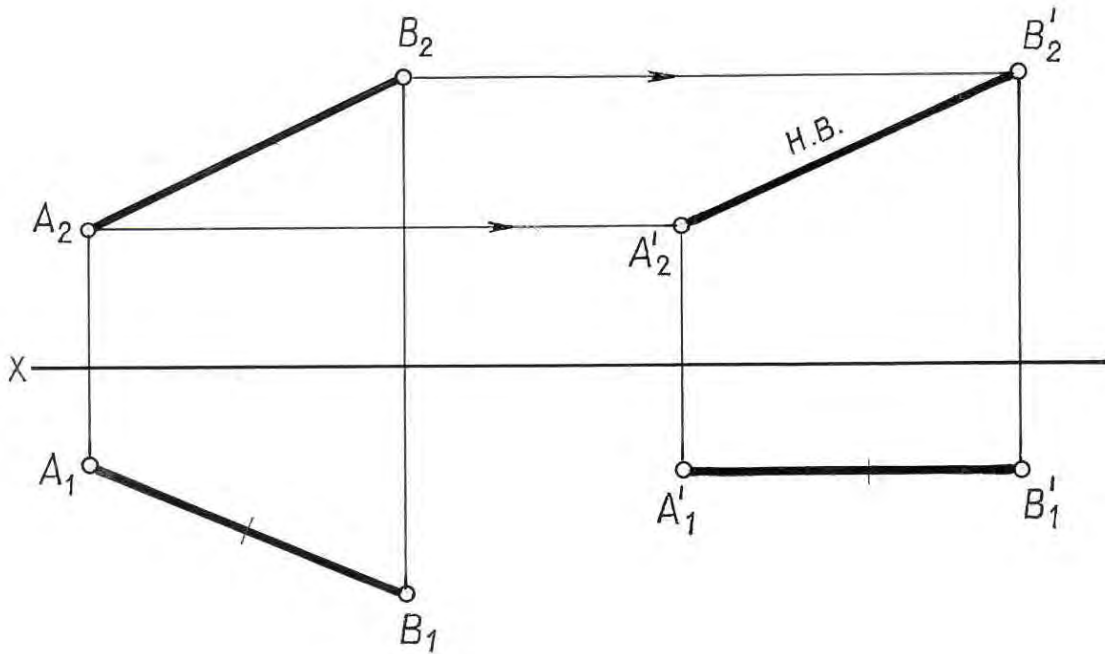


Рис. 10.5

**Задача 10.2.** Отрезок  $CD$  общего положения преобразовать в положение, перпендикулярное  $\Pi_2$ .

Для преобразования отрезка общего положения в проецирующее необходимо последовательно выполнить два перемещения параллельно плоскостям проекций: вначале перевести его в положение, параллельное плоскости  $\Pi_1$ , затем переместить отрезок в положение, перпендикулярное  $\Pi_2$ . Все преобразования показаны на рис. 10.6.

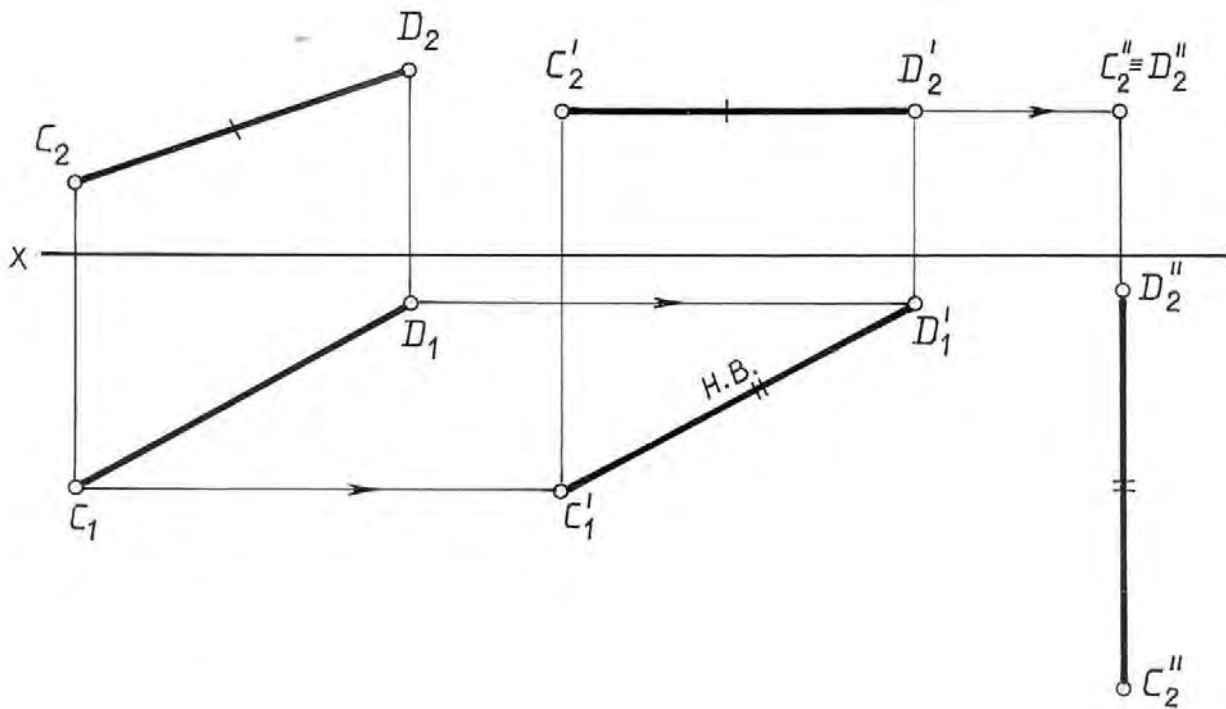


Рис. 10.6

**Задача 10.3.** Плоскость  $\Gamma(ABC)$  преобразовать в положение, перпендикулярное к плоскости  $\Pi_2$  (рис. 10.7).

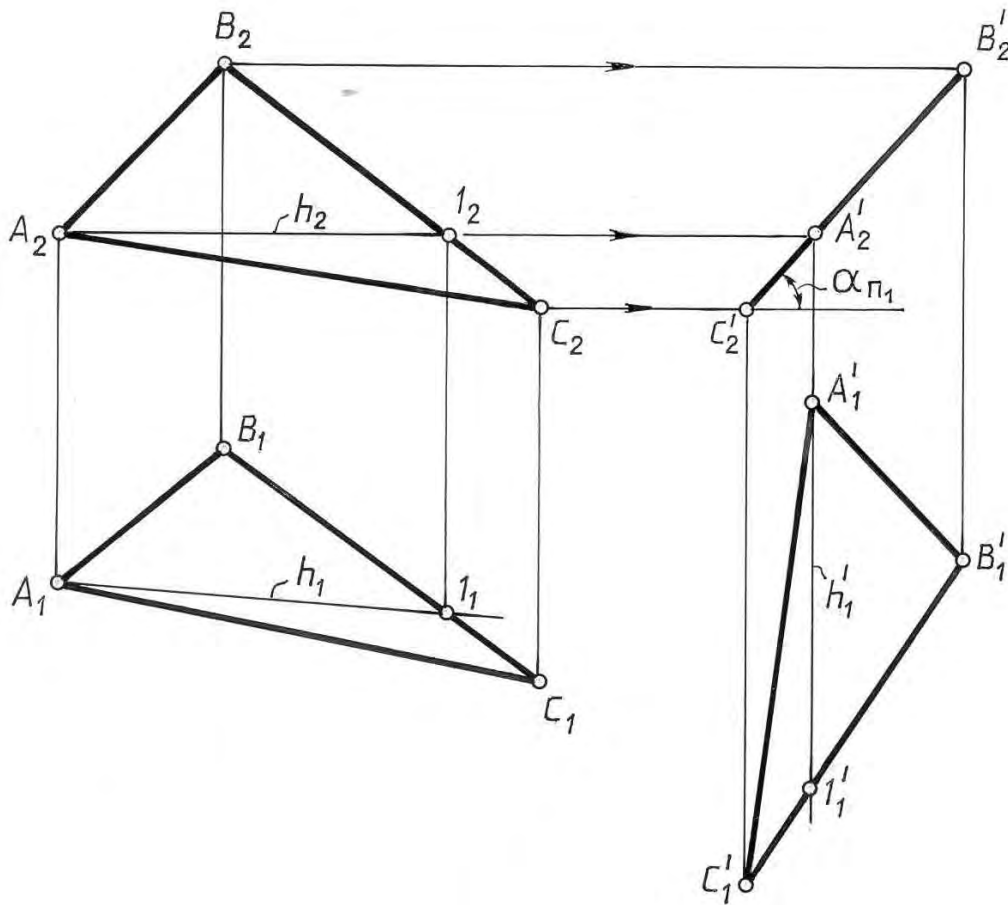


Рис. 10.7

Отметим, что у фронтально проецирующей плоскости горизонтали перпендикулярны плоскости  $\Pi_2$ . В плоскости  $\Gamma(ABC)$  проводим горизонталь  $h$  ( $h_2h_1$ ). Расположим плоскость  $\Gamma(ABC)$  перпендикулярно плоскости  $\Pi_2$ . При этом горизонталь займет проецирующее положение.

Проводим  $A_1'I_1' \perp OX$ ;  $|A_1'I_1'| = |A_1I_1|$ ;  $\Delta(A_1'B_1'C_1') \cong \Delta(A_1B_1C_1)$ .

Фронтальные проекции вершин треугольника  $A_2'B_2'C_2'$  находим в пересечении соответствующих линий проекционной связи с горизонтальными прямыми.

В таком положении плоскость треугольника становится фронтально проецирующей и треугольник  $ABC$  проецируется в виде отрезка прямой  $A_2'B_2'C_2'$ .

**Задача 10.4.** Плоскость  $\Gamma(ABC)$  общего положения преобразовать в положение, параллельное плоскости проекций  $\Pi_1$  (рис. 10.8).

Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня производится последовательно двумя перемещениями в пространстве. Вначале треугольник  $ABC$  из заданного положения перемещают в положение фронтально проецирующей плоскости (см. рис. 10.7: все точки треугольника перемещаются в горизонтальных плоскостях).

Затем треугольник  $ABC$  перемещается в положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций (все точки треугольника перемещаются во фронтальных плоскостях). При таком перемещении фронтальная проекция треугольника остается неизменной  $|A_2''B_2''C_2''| = |A_2'B_2'C_2'|$ , а горизонтальные проекции всех точек ( $A_1''B_1''C_1''$ ) перемещаются параллельно оси  $OX$ .

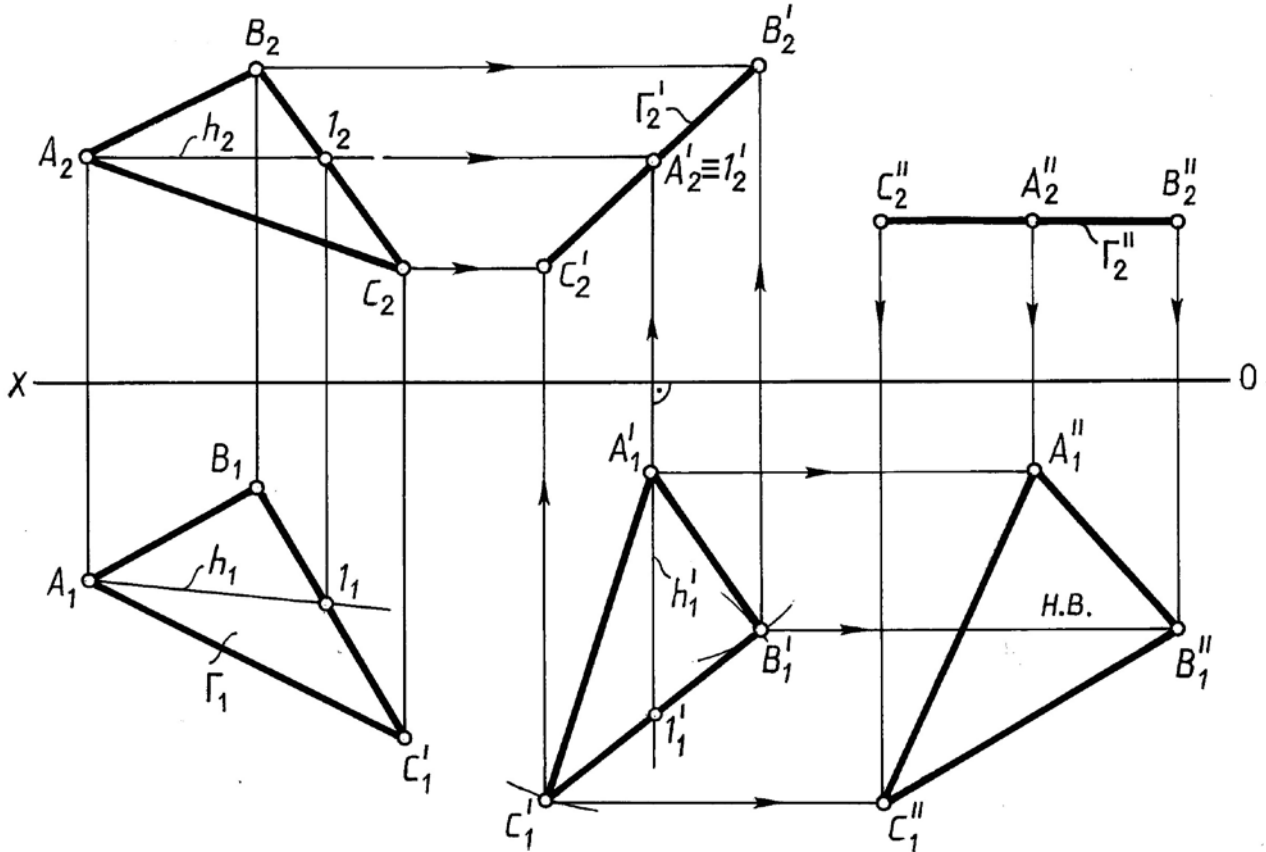


Рис. 10.8

В результате двукратного перемещения в пространстве треугольник  $ABC$  занял положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций, поэтому на эту плоскость проекций он проецируется без искажения:  $|A_1''B_1''C_1''| = |ABC|$ .

## 10.2. Способ вращения

### 10.2.1. Вращение вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций

Вращение вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций, является частным случаем плоскопараллельного перемещения; все точки геометрической фигуры также перемещаются в пространстве в плоскостях, параллельных плоскостям проекций, но не по произвольной траектории, а по окружностям.

Сущность способа заключается в том, что проецируемую фигуру путем ее поворота вокруг выбранной оси переводят относительно плоскостей проекций в новое положение, при котором легко получить решение задачи.

Все точки геометрической фигуры, не лежащие на оси вращения, вращаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения (рис. 10.9):  $\Sigma \perp i$ ;  $A \in \Sigma$ . Центр  $O$  окружности  $m$ , которую описывает точка  $A$ , является точкой пересечения оси  $i$  с плоскостью  $\Sigma$ ;  $O = i \cap \Sigma$ . Отрезок  $AO$  является радиусом  $R$  окружности  $m$ .

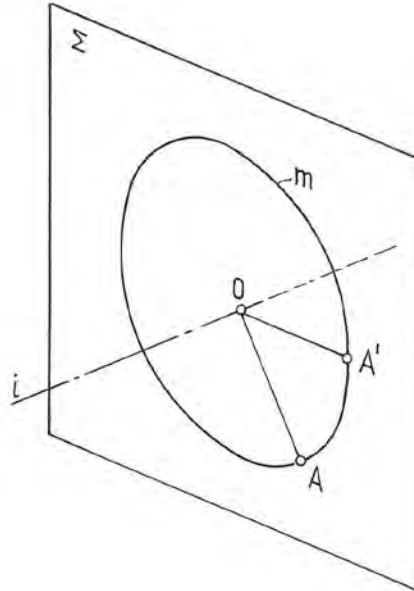


Рис. 10.9

Рассмотрим, как изменяется положение проекций точки при вращении ее вокруг оси, перпендикулярной к плоскости  $\Pi_1$  (рис. 10.10).

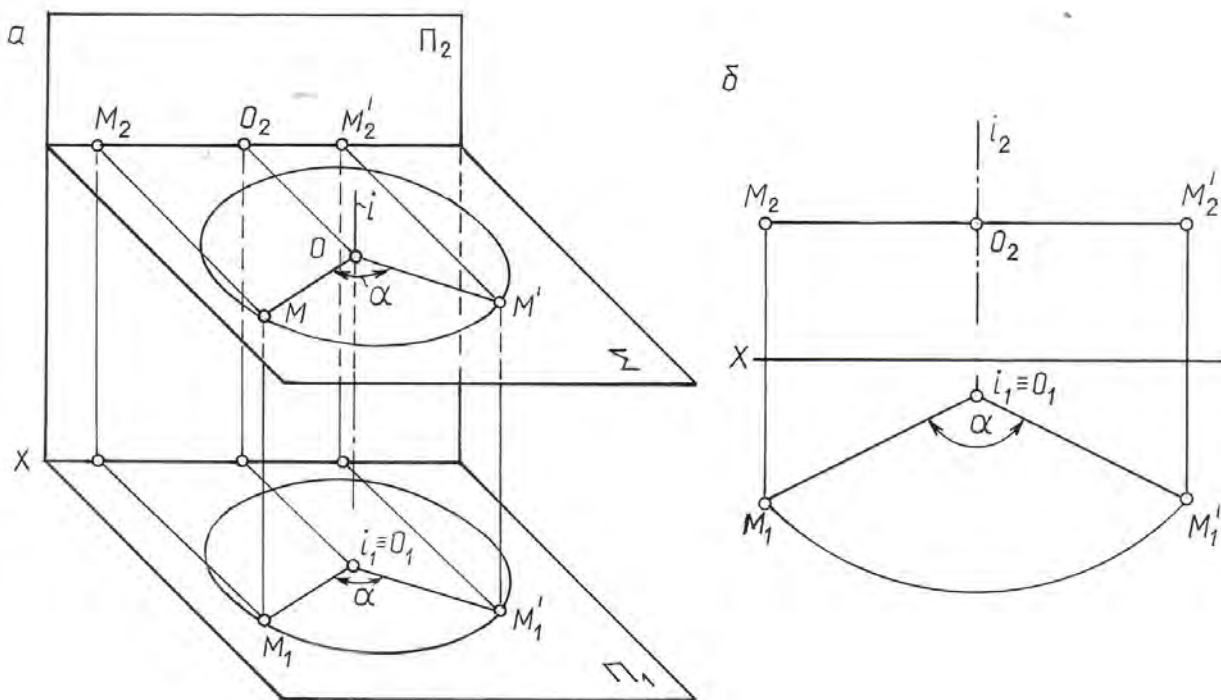


Рис. 10.10

При вращении точки  $M$  вокруг оси  $i \perp \Pi_1$  (центр вращения  $O$ , радиус вращения  $OM \perp i$ ) на угол  $\alpha$ , ее горизонтальная проекция  $M_1$  перемещается по окружности (с центром в точке  $O_1 \cong i_1$ ) того же радиуса, в ту же сторону и на тот же угол  $\alpha$ , что и сама точка  $M$ . Траектория движения точки  $M$  в пространстве на плоскость  $\Pi_1$  проецируется без искажения, так как она принадлежит плоскости  $\Sigma$ , параллельной  $\Pi_1$ . Фронтальная проекция точки  $M(M_2)$  перемещается по прямой, параллельной оси  $OX$ .

Вращение геометрических фигур сводится к вращению конечного числа точек, определяющих данную фигуру. При этом полезно иметь в виду следующее:

а) точки, лежащие на оси вращения, не меняют своего положения, остальные точки вращаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения;

б) все вращающиеся точки поворачиваются в одну сторону на один и тот же угол;

в) если ось перпендикулярна некоторой плоскости проекций, то проекции на эту плоскость вращающейся фигуры в любом ее положении конгруэнтны. Последнее вытекает из рассмотренных свойств метода плоскопараллельного перемещения, так как вращение вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям проекций, представляет собой частный случай этого метода.

Рассмотрим, как на эюре осуществляется перемещение отрезка общего положения в частное положение путем вращения вокруг оси перпендикулярной плоскостям проекций.

**Задача 10.5.** Отрезок  $AB$  общего положения преобразовать в положение, параллельное плоскости проекций  $\Pi_2$ .

Чтобы осуществить такое преобразование, достаточно повернуть отрезок  $AB$  вокруг оси  $i \perp \Pi_1$  на угол  $\alpha$ . Для сокращения количества геометрических построений ось  $i \ni B$  (рис. 10.11).

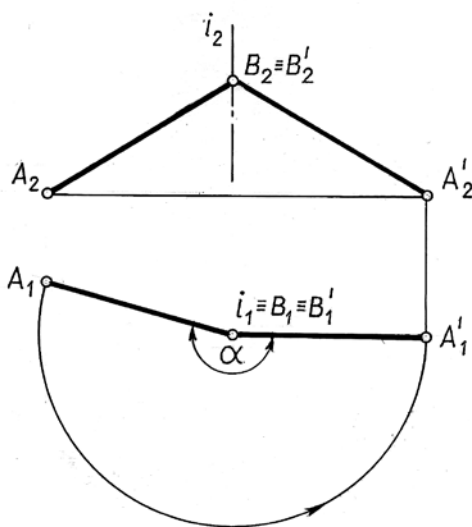


Рис. 10.11

Величина угла  $\alpha$  принимается такой, чтобы после поворота горизонтальная проекция отрезка заняла положение, параллельное  $OX$ . Так как точка  $B$  принадлежит оси вращения, то она не будет менять своего положения в процессе преобразования, следовательно,  $B_1 \equiv B_1'$  и  $B_2 \equiv B_2'$ . Для нахождения точки  $A_2'$  необходимо из  $A_1'$  провести вертикальную линию связи и отметить точку ее пересечения в горизонтальной прямой, проведенной через  $A_2$ .

### 10.2.2. Вращение вокруг линий уровня

Вращение вокруг линий уровня применяют в тех случаях, когда данную плоскую фигуру требуется совместить с какой-либо плоскостью, параллельной плоскости проекций. В таком положении плоская фигура проецируется на соответствующую плоскость проекций без искажения.

На рис. 10.12 показано вращение точки  $A$  вокруг горизонтальной оси  $h \parallel \Pi_1$ . В этом случае плоскостью вращения точки  $A$  (плоскость, в которой расположена траектория движения точки  $A$  – окружность) будет являться плоскость  $\Sigma$ , перпендикулярная оси вращения ( $\Sigma \perp h$ ) и, следовательно, горизонтальной плоскости проекций  $\Sigma \perp \Pi_1$ .

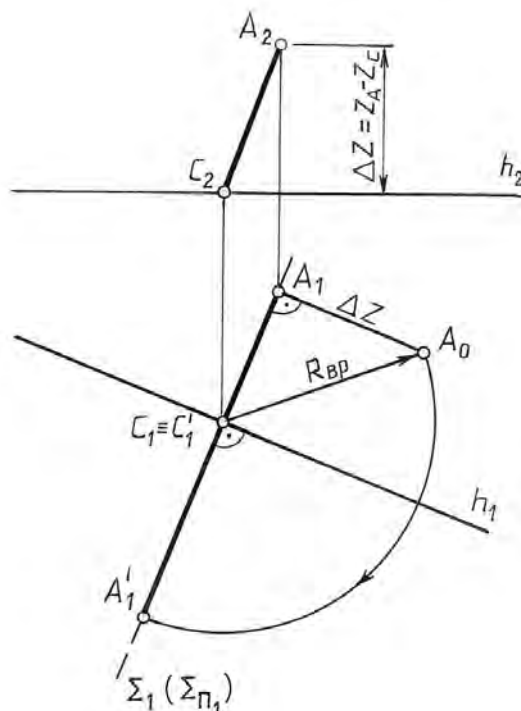


Рис. 10.12

Точка  $A$  будет перемещаться по окружности с центром в точке  $C$  (точка пересечения оси вращения с плоскостью  $\Sigma$ ):  $C = h \cap \Sigma$ . Радиус этой окружности равен расстоянию от точки  $A$  до оси вращения  $h$  ( $R = AC$ ).

Плоскость  $\Sigma$  – горизонтально проецирующая ( $\Sigma \perp \Pi_1$ ), поэтому траектория движения точки  $A$  в пространстве (окружность) спроецируется на плоскость  $\Pi_1$  в прямую, совпадающую с горизонтальным следом плоскости  $\Sigma$  ( $\Sigma_{\Pi_1}$ ).

Когда точка  $A$ , вращаясь вокруг оси  $h$ , совместится с плоскостью, параллельной плоскости проекций  $\Pi_1$ , радиус вращения этой точки  $R = CA$  займет горизонтальное положение и спроецируется на  $\Pi_1$  без искажения:  $C_1A_1 = CA = R$ .

**Задача 10.6.** Определить натуральную величину расстояния от точки  $A$  до горизонтали  $h$ .

Порядок решения задачи следующий.

1. Через горизонтальную проекцию  $A_1$  точки  $A$  проведем горизонтальный след плоскости  $\Sigma$  ( $\Sigma_1 \perp h_1$ ) и отмечаем центр вращения  $C(C_1C_2)$ .

2. Определяем натуральную величину радиуса вращения  $R_{вр.} = A_0C_1$  (как гипотенузу прямоугольного треугольника, катетами которого являются горизонтальная проекция радиуса вращения  $A_1C_1$  и разность координат  $Z$  точек  $A$  и  $C$ ,  $\Delta Z = Z_A - Z_C$ ). Гипотенуза треугольника  $\Delta C_1A_1A_0$ ,  $C_1A_0 = R_{вр.}$

Новое, после поворота, положение точки  $A_1'$  находится на пересечении дуги окружности, проведенной из горизонтальной проекции центра вращения  $C_1$  радиусом, равным  $C_1A_0$ , с горизонтальным следом  $\Sigma_1$  плоскости  $\Sigma$ .

**Задача 10.7.** Определить натуральную величину треугольника  $ABC$  (рис. 10.13). Используем метод вращения вокруг горизонтали  $h$ .

Точки  $D$  и  $A$  не меняют своего положения в процессе вращения треугольника ( $A_1 \equiv A_1'$ ,  $D_1 \equiv D_1'$ ), так как они принадлежат оси вращения  $h$  ( $D \in h$ ,  $A \in h$ ), а горизонтальные проекции точек  $B$  и  $C$  перемещаются по прямым, перпендикулярным  $h_1$  ( $B_1B_1' \perp h_1$  и  $C_1C_1' \perp h_1$ ). Положение точки  $B_1'$  после поворота треугольника определено описанным выше способом ( $O_1B_1' = O_1B_0 = R_{вр.}$ ). В результате вращения треугольник  $ABC$  занял положение  $A_1'B_1'C_1'$ , параллельное плоскости  $\Pi_1$ , и спроецировался на эту плоскость без искажений:  $|A_1'B_1'C_1'| = |ABC|$ . Фронтальная проекция треугольника после поворота  $A_2'B_2'C_2'$  – прямая линия, параллельная оси координат.



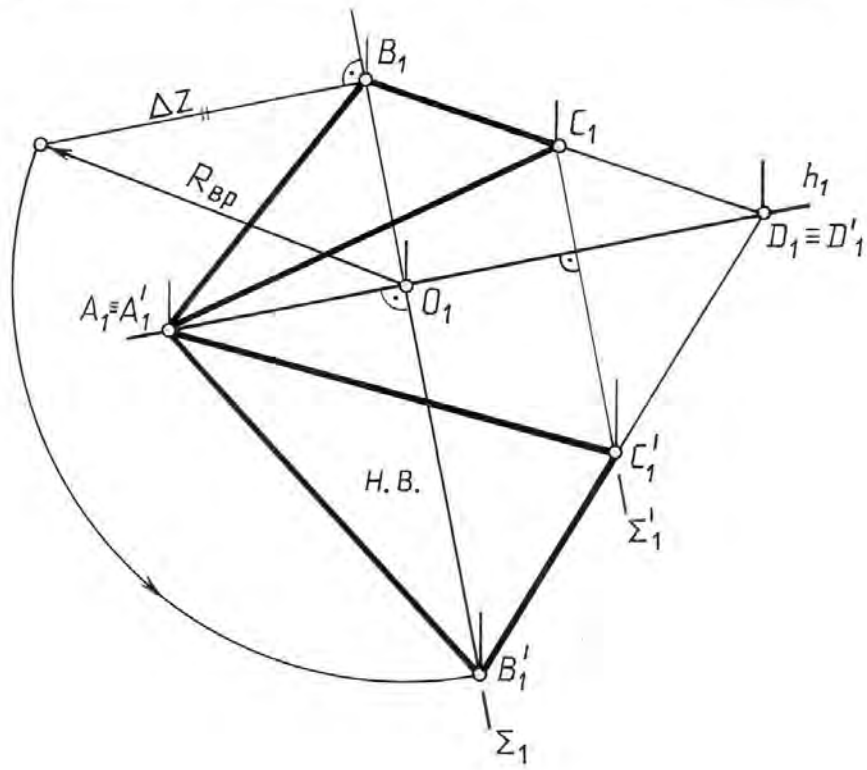
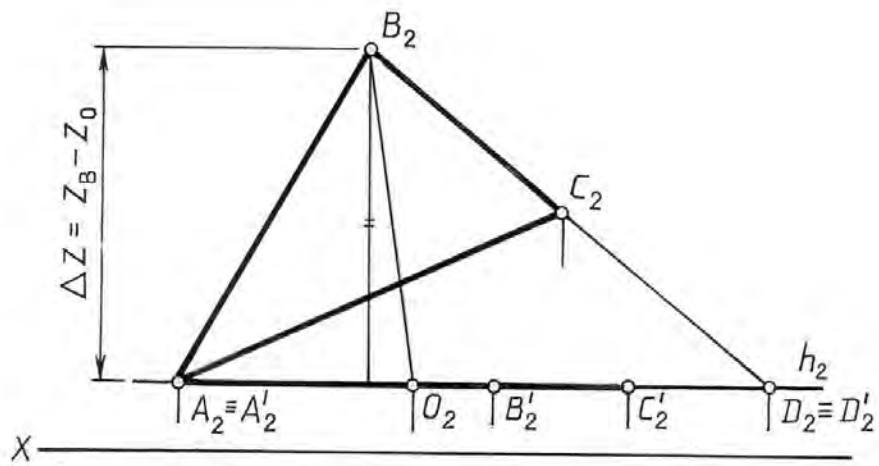


Рис. 10.13

## ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТЯМ

*Общие понятия. Способы построения касательных плоскостей.  
Основные типы задач по построению касательных плоскостей*

### 11.1. Общие понятия

**Плоскостью, касательной к криволинейной поверхности** в обыкновенной точке  $K$ , называется плоскость, определяемая двумя пересекающимися прямыми, касательными к этой поверхности в обыкновенной точке  $K$  (рис. 11.1).

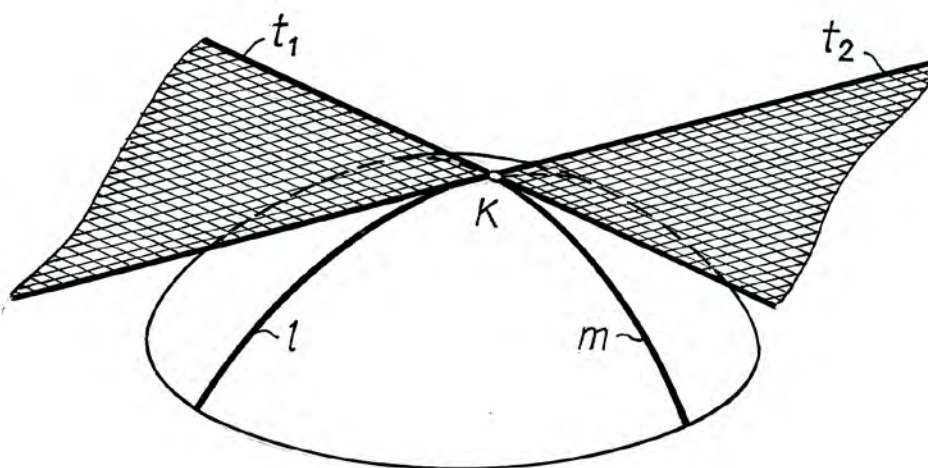


Рис. 11.1

Обыкновенными точками поверхности являются точки, в которых можно построить только одну касательную плоскость к поверхности. Особыми точками поверхности считаются те, в которых нельзя построить только одну касательную плоскость. Примерами особых точек поверхности являются вершина конуса, точка ребра возврата и т. д.

Касательные плоскости применяются при построении линий пересечения поверхностей, очерков поверхностей, собственных теней поверхности, нормали к поверхности и т. д.

Для того чтобы провести прямую, касательную к поверхности в определенной ее точке, достаточно через эту точку провести на поверхности любую кривую и построить касательную прямую к ней. Поскольку через одну точку поверхности можно провести множество кривых линий, то в одной обычной точке поверхности можно провести и множество касательных прямых.

Все эти касательные будут лежать в одной плоскости, являющейся касательной плоскостью к поверхности.

Таким образом, **касательная плоскость к поверхности** – это геометрическое место прямых, касающихся данной поверхности в обыкновенной точке.

Чтобы задать касательную плоскость, достаточно построить две касательные прямые к поверхности.

**Касательной к поверхности** называется прямая, являющаяся касательной к какой-либо линии, принадлежащей этой поверхности.

В качестве линий поверхности обычно используются линии ее определителя или линии, которые легко могут быть построены графически. Например, у поверхностей вращения это параллели и меридианы, у линейчатой поверхности – ее прямолинейные образующие.

На рис. 11.1 касательная плоскость к поверхности в точке  $K$  задается двумя пересекающимися прямыми  $t_1$  и  $t_2$ , которые касательны двум кривым  $m$  и  $l$ , принадлежащим заданной поверхности и проходящим через точку  $K$ .

Касательная плоскость может иметь с поверхностью только одну общую точку. В этом случае все линии поверхности, пересекающиеся в рассматриваемой точке, находятся по одну сторону от касательной плоскости. Такие точки поверхности называются **эллиптическими**. Поверхности, у которых все точки эллиптические, являются выпуклыми криволинейными поверхностями. К ним относятся сфера, эллипсоид вращения, параболоид вращения, закрытый тор и т. д.

Касательная плоскость может иметь с поверхностью общую линию (прямую или кривую). Например, касательная плоскость касается торсовых поверхностей вдоль их образующей – прямой линии. Она является касательной плоскостью для всех его точек, лежащих на этой прямой. Точки поверхности, удовлетворяющие этому условию, называются **параболическими**. К ним относятся точки разворачиваемых прямолинейных поверхностей – конических, цилиндрических и с ребром возврата.

Касательная плоскость к поверхности в данной точке может пересекать поверхность, к которой она проведена. В пересечении могут получаться пересекающиеся две прямые, две кривые либо прямая и кривая линии.

Точки поверхности, в которых касательная плоскость пересекает поверхность, называются **гиперболическими**. Такие точки касания находятся на внутренней поверхности открытого тора.

## 11.2. Способы построения касательных плоскостей

Наиболее распространенными являются следующие случаи построения касательных плоскостей к поверхностям:

- через точку на самой поверхности;
- через точку, лежащую вне поверхности;
- параллельно заданной прямой;
- параллельно заданной плоскости;
- через прямую, лежащую вне поверхности.

Построение касательных плоскостей может выполняться разными способами:

- построением двух касательных прямых к двум кривым линиям поверхности (обычно для эллиптических точек касания);
  - построением касательного следа плоскости к одноименному следу поверхности;
  - построением вспомогательных сечений поверхности с последующим проведением к ним касательных прямых определенного направления.
- Последние два способа обычно применяются для гиперболических и параболических точек касания.

### 11.3. Основные типы задач по построению касательных плоскостей

Рассмотрим примеры решения задач различных случаев.

**Задача 11.1.** Построить плоскость, касательную к поверхности сферы в точке  $K$  (рис. 11.2).

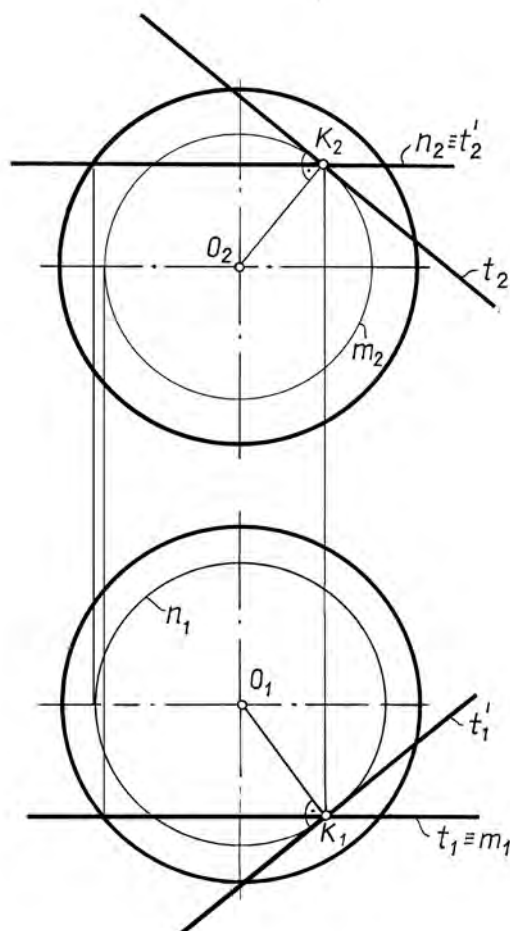


Рис. 11.2

Выберем две кривые линии, проходящие через точку  $K$ . Целесообразно взять наиболее графически простые линии – окружности (параллели и меридианы) –  $n$  и  $m$ .

К этим двум окружностям в точке  $K$  проводим касательные, причем каждую в плоскости своей окружности, т. е.  $t$  лежит в вертикальной, а  $t'$  – в горизонтальной плоскости.

Построенные касательные  $t$  и  $t'$  и задают искомую касательную плоскость.

В рассматриваемой задаче точка  $K$  – эллиптическая точка касания.  $OK$  – радиус, являющийся нормалью к касательной плоскости в точке  $K$ . Построенная плоскость ему перпендикулярна.

**Задача 11.2.** Построить касательную плоскость к поверхности вращения в точке  $K$  (рис. 11.3).

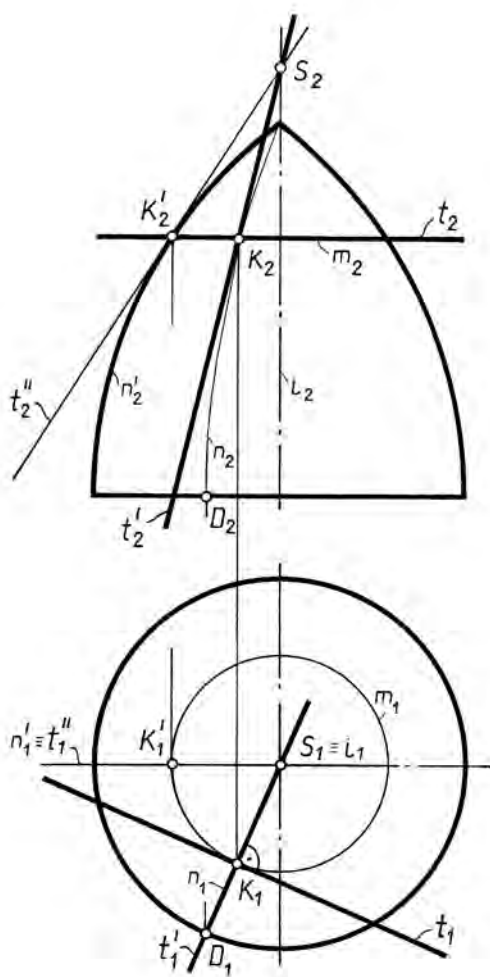


Рис. 11.3

В качестве линий, задающих касательную плоскость, примем две прямые, одна из которых является касательной к окружности – параллели  $t$ , проходящей через точку  $K$ , вторая – касательной к меридиану  $n'$ , проходящему через эту же точку.

Все прямые, касательные к тору в точках, лежащих на окружности-параллели  $m$ , будут принадлежать поверхности прямого кругового конуса с вершиной  $S$  на оси вращения тора  $i$ .

Для того чтобы провести касательную к меридиану  $n$ , повернем его на фронтальной проекции до совмещения с главным меридианом  $n_2'$  и проведем касательную  $t''_2$  в точке  $K'_2$ , лежащей на той же окружности параллели, что и точка  $K$ , до пересечения с осью вращения фигуры в точке  $S_2$ . Через эту же точку  $S_2$  пройдет касательная  $t'_2$  после возвращения поворачиваемого меридиана  $n$  в исходное положение. Для ее построения соединяем  $S_2$  и  $K_2$ .

Вторая касательная  $t$  строится с использованием окружности – параллели  $m$ . Ее фронтальная проекция  $t_2$  на фронтальной плоскости проекций совпадает с проекцией  $m$  этой окружности параллели. Горизонтальная проекция  $t_1$  строится как касательная прямая к горизонтальной проекции окружности – параллели  $m_1$ .

Касательные  $t$  и  $t'$  и определяют искомую касательную плоскость.

Отметим, что в этой задаче точка касания  $K$  также представляет собой эллиптическую точку касания.

**Задача 11.3.** Построить плоскость, касательную к цилиндру в точке  $K$  (рис. 11.4).

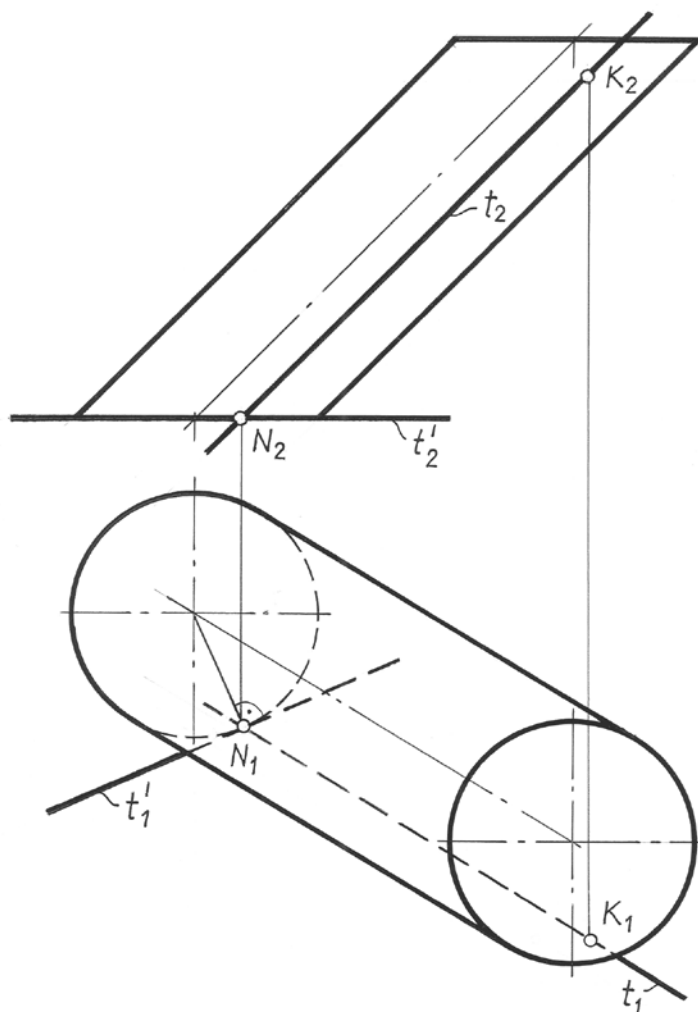


Рис. 11.4

Элементом касания плоскости к цилиндру будет являться образующая цилиндра  $t$ , на которой лежит точка  $K$ . В этой задаче точка касания  $K$  является одной из геометрического множества параболических точек касания, лежащих на данной образующей цилиндра.

Второй прямой, задающей касательную плоскость, будет  $t'$  – касательная к окружности основания цилиндра в точке  $N$ . Эта точка является точкой пересечения образующей  $t$  с плоскостью основания цилиндра.

**Задача 11.4.** Построить плоскость, касательную к конической поверхности и проходящую через точку  $K$ , не принадлежащую поверхности конуса. В качестве двух линий на заданной поверхности выберем две прямые – образующие конуса – и окружность – параллель  $m$ , расположенную на высоте точки  $K$  (рис. 11.5).

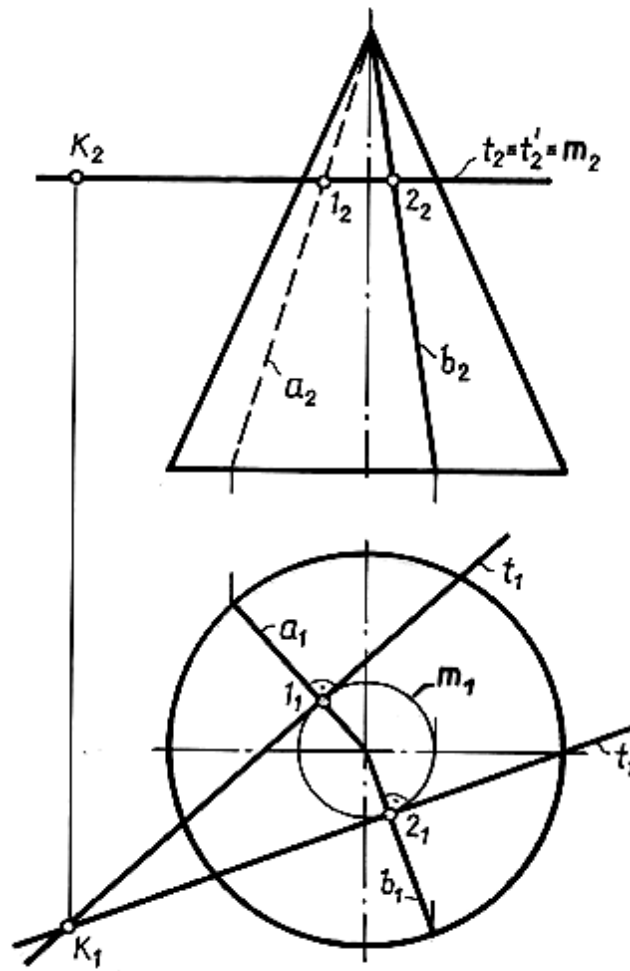


Рис. 11.5

Задача может иметь два решения, поскольку к окружности – параллели  $m$  – из точки  $K$  можно провести две касательные прямые  $t$  и  $t'$ . Эти касательные на





Заклучим прямую  $l$  в плоскость параллелизма, параллельную образующим цилиндра. Для этого на прямой  $l$  берем произвольную точку  $K$  и через нее проводим линию  $m$ , параллельную образующим цилиндра. Пересекающиеся прямые линии  $l$  и  $m$  определяют плоскость параллелизма – плоскость  $R$ .

Строим линию пересечения плоскости  $R$  с фронтально проецирующей плоскостью основания цилиндра – линию  $d$ . Она проходит через точки  $A$  и  $B$ .

Касательная плоскость параллельна плоскости параллелизма  $R$  и поэтому будет пересекаться с основанием по прямой, параллельной прямой  $d$ . Кроме того, она должна касаться линии основания цилиндра.

Таких прямых можно провести две ( $t$  и  $t'$ ). Обе построенные прямые касаются основания цилиндра в точках  $1$  и  $2$ . Отметим две образующие –  $n$  и  $n'$ , по которым искомые плоскости касаются поверхности цилиндра.

Задача имеет два решения. Каждая из образующих  $n$  и  $n'$  в сочетании с одной из касательных  $t$  или  $t'$  определяет одну из двух касательных плоскостей.

**Задача 11.6.** Провести касательную плоскость к сфере параллельно заданной плоскости  $\Sigma(f \cap h)$  (рис. 11.7).

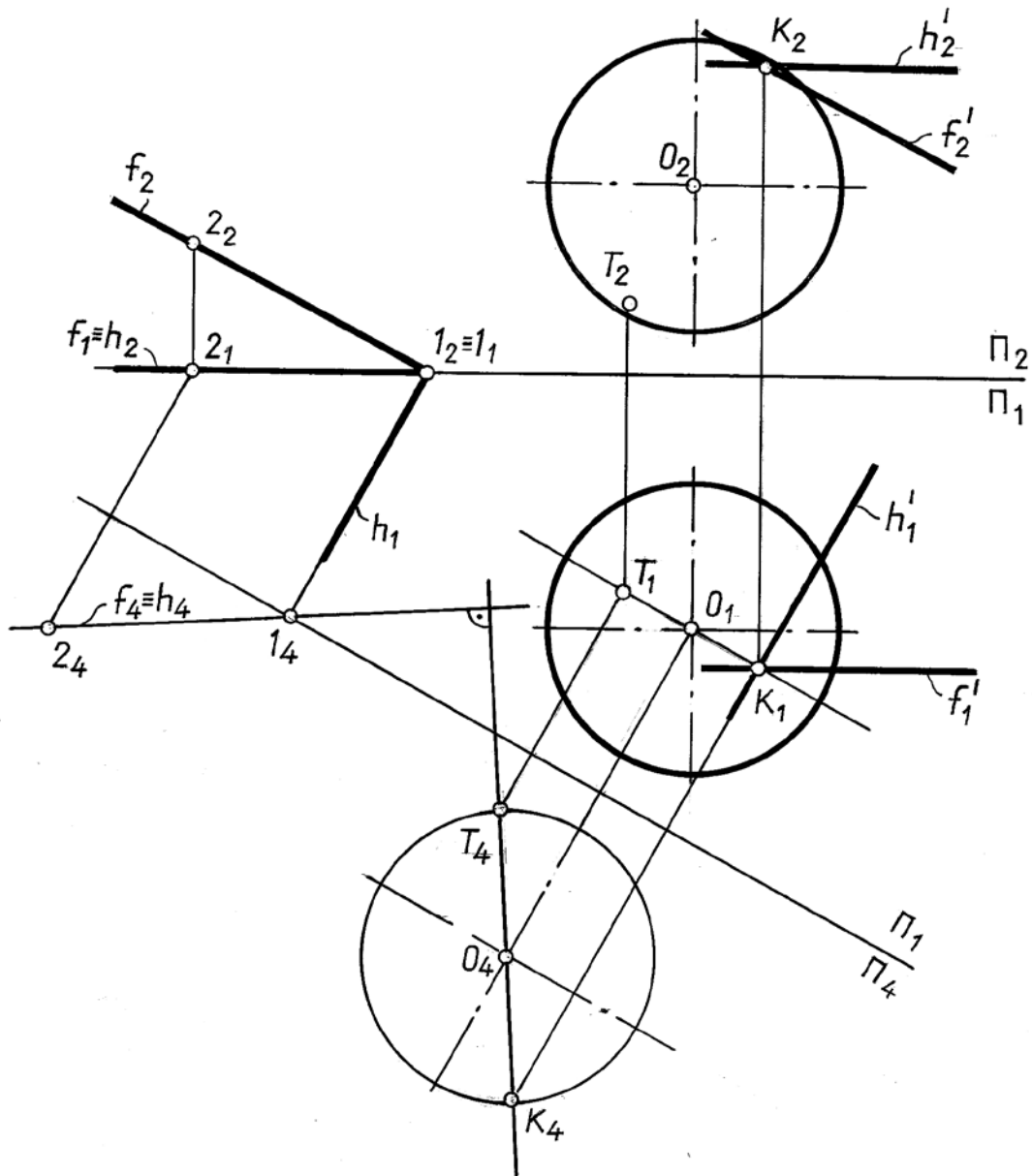


Рис. 11.7

Плоскость  $\Sigma$  задана фронталью  $f$  и горизонталью  $h$ . Решением задачи будут две плоскости, параллельные заданной и касающиеся сферы в двух точках, лежащих на концах одного диаметра сферы, который перпендикулярен заданной плоскости  $\Sigma$ .

Определим эти точки касания. Для этого произведем преобразование чертежа любым методом (например, заменой плоскостей проекций). Проведем новую плоскость проекций  $\Pi_4$  так, чтобы заданная плоскость  $\Sigma$  стала проецирующей. После этого из центра новой проекции сферы на плоскости – точки  $O_4$  – проведем перпендикуляр к вырожденной проекции плоскости  $\Sigma$ . Пересечение этого перпендикуляра с очерком сферы даст точки  $T$  и  $K$ , которые и будут искомыми точками касания.

Через полученные точки проводим две касательные плоскости, используя условие их параллельности плоскости  $\Sigma$ .

На рис. 11.7 показана лишь одна касательная плоскость, проведенная через точку  $K$ . Она задана фронтально  $f'$  и горизонталью  $h'$ .

**Задача 11.7.** Провести плоскость, касательную к поверхности цилиндра через прямую  $l$ , лежащую вне этой поверхности (рис. 11.8).

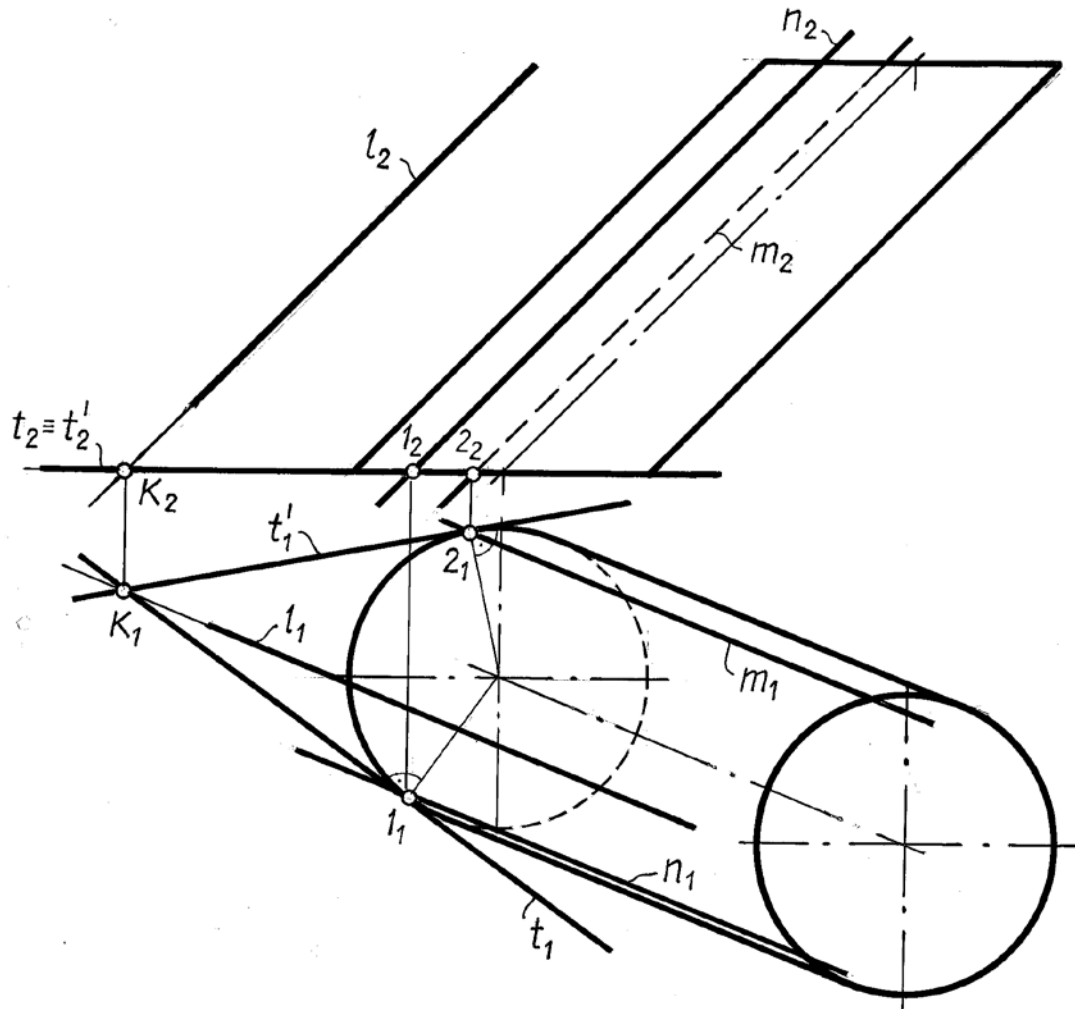


Рис. 11.8

Необходимо иметь в виду, что построение такой плоскости возможно только в следующих случаях:

- при цилиндрической поверхности – если заданная прямая параллельна образующим или касается этой поверхности;
- конической поверхности – если прямая параллельна образующим или проходит через вершину конуса;
- сферической поверхности – всегда, когда прямая не пересекает поверхность сферы.

Определяем точку  $K$  как результат пересечения прямой  $l$  с плоскостью основания цилиндра. Через эту точку проводим две прямые  $t'_1$  и  $t_1$ , касательные к

горизонтальной проекции основания цилиндра. Их фронтальные проекции  $t'_2$  и  $t_2$  совпадают с фронтальной проекцией основания цилиндра.

Отмечаем точки касания этих прямых к проекции основания цилиндра – точки  $1_1$  и  $2_1$ . Из этих точек строим проекции образующих  $m$  и  $n$ , по которым искомые касательные плоскости касаются заданной поверхности.

Задача имеет два решения. Каждая из этих образующих совместно с одной из касательных  $t'$  и  $t$  задает одну касательную плоскость.

## РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

*Общие понятия. Развертывающиеся и неразвертывающиеся поверхности. Общие правила построения разверток. Построение разверток пирамидальной и конической поверхности. Построение разверток, призматических и цилиндрических поверхностей. Построение приближенных разверток неразвертывающихся поверхностей*

### 12.1. Общие понятия

В практике инженерного проектирования и строительства часто возникает необходимость моделировать поверхность плоской фигурой, которая может быть названа «выкройкой» поверхности или разверткой. **Разверткой поверхности** называется плоская фигура, в которую преобразуется поверхность при ее совмещении с плоскостью. При этом поверхность представляется в виде гибкой, но не растяжимой и несжимаемой пленки.

Построение разверток поверхностей является технической задачей, имеющей большое значение при изготовлении различных деталей и конструкций из листового материала, например: воздухопроводов для промышленной вентиляции, водосточных труб, кожухов, цистерн, различных отводов.

Для обеспечения необходимой точности изготовления и экономичного расходования материала изделие конструируют таким образом, чтобы каждая часть изделия была развертывающейся поверхностью.

Развертывающейся поверхностью называется поверхность, которая всеми своими точками может быть совмещена с плоскостью, т. е. деформирована в плоскость без складок и разрывов. Каждой точке на поверхности соответствует единственная точка развертки, т. е. поверхность и ее развертку можно рассматривать как две геометрические фигуры, между точками которых существует взаимнооднозначное соответствие, обладающие свойствами:

- 1) длины отрезков линий, расположенных на поверхности и на ее развертке, равны между собой;
- 2) углы между соответствующими линиями поверхности и развертки равны между собой.

Однако угол между двумя образующими на конической поверхности меньше угла между соответствующими им прямыми на развертке, так как вершина конуса является особой точкой, которая не обладает свойствами, характерными для обыкновенных точек;

- 3) площади фигур, ограниченные соответствующими замкнутыми линиями на поверхности и развертке, равны между собой. Следует помнить, что все размеры на развертке имеют натуральную величину.

Рассмотрим поверхность  $\theta_0$  и ее развертку  $\theta$  (рис. 12.1). Длина дуги  $AB$  равна длине дуги  $A_0B_0$ , угол  $\alpha$  равен углу  $\alpha_0$ , и площадь  $F$  равна площади  $F_0$ . За-

метим, что углом между двумя кривыми называется угол между их касательными. Прямой линии на поверхности (образующей) всегда соответствует прямая на развертке, параллельные прямые на поверхности на развертке переходят в параллельные.

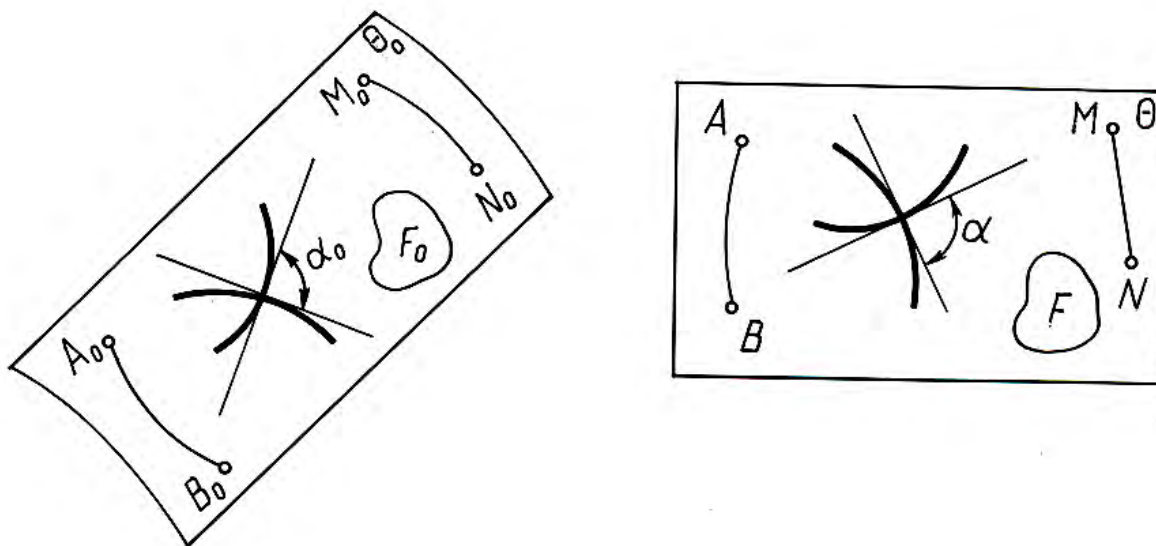


Рис. 12.1

Линия кратчайшего расстояния между двумя точками на поверхности называется *геодезической*. На развертке этой линии соответствует прямая. Например, дуга  $M_0N_0$  является кратчайшей из всех дуг на поверхности, проведенных между точками  $M_0N_0$ , так как на развертке этой линии соответствует прямая  $MN$ .

## 12.2. Развертываемые и неразвертываемые поверхности

К развертываемым поверхностям относятся все многогранные поверхности. Разверткой многогранной поверхности является плоская фигура, полученная последовательным совмещением с одной и той же плоскостью всех ее граней, поэтому построение развертки многогранной поверхности сводится к построению истинных размеров и формы отдельных граней, которые затем совмещают с плоскостью без изменения формы и размеров.

Из кривых поверхностей к развертываемым относятся линейчатые поверхности, которые образованы взаимно параллельными или пересекающимися образующими. К таким поверхностям относятся торсы и их частные виды – конические и цилиндрические поверхности. Остальные линейчатые и нелinearчатые поверхности относятся к неразвертываемым поверхностям.

Развертки развертываемых и неразвертываемых поверхностей, которые, как правило, строятся графически, являются приближенными. При построении этих разверток заданную поверхность заменяют (аппроксимируют) другой поверхностью, которую вписывают или описывают около нее. Аппроксимируемыми поверхностями выбирают развертываемые поверхности. Линейчатые поверхности заменяют многогранными, например, цилиндр – вписанной в него

призмой, конус – вписанной в него пирамидой, а торс – вписанной в него многогранной поверхностью (гранный торс). Поверхности с криволинейными образующими предварительно заменяют цилиндрическими и коническими поверхностями вращения, которые затем заменяют многогранными. Количество граней в аппроксимирующей поверхности должно быть достаточным для обеспечения необходимой точности построения развертки.

### 12.3. Общие правила построения разверток

В общем случае построение развертки выполняется в следующей последовательности.

1. В данную кривую поверхность вписывается многогранная поверхность.
2. Определяется натуральная величина всех граней вписанного многогранника. Для построения натуральной величины боковых граней определяют истинную длину каждого бокового ребра. Если грани имеют более трех сторон, то следует разбить их диагоналями на треугольники и определить натуральную величину диагоналей.
3. На плоскости чертежа строится натуральная величина первой грани и к ней посредством смежных ребер последовательно пристраиваются остальные грани.
4. Соответствующие концы всех ребер на развертке соединяются плавными кривыми линиями.
5. Линии обрезки ребер обводятся сплошными толстыми линиями, а линии изгибов – штрихпунктирными линиями с двумя точками.

### 12.4. Построение разверток пирамидальной и конической поверхности

Построение разверток пирамидальных поверхностей сводится к последовательному построению натурального вида граней – треугольников, из которых состоит данная пирамидальная поверхность. Развертка боковой поверхности конуса в общем случае строится по схеме развертки поверхности пирамиды, вписанной в данную коническую поверхность и заменяющей ее.

**Задача 12.1.** Построить развертку боковой поверхности наклонной пирамиды  $SABC$  (рис. 12.2).

Развертку боковой поверхности пирамиды строят по следующей схеме.

1. Определяют длины ребер и сторон основания пирамиды.
2. На плоскости чертежа последовательно по трем сторонам строят треугольники (грани пирамиды), примыкающие друг к другу и с общей вершиной.

**Решение.** Как видно из чертежа, основание  $ABC$  пирамиды расположено в горизонтальной плоскости, и поэтому его стороны проецируются на  $\Pi_1$  в натуральную величину. Натуральные размеры боковых ребер определяют с помощью прямоугольных треугольников, у которых одним катетом является превышение точки  $S$  над точками  $A, B, C$  (отрезок  $S_2S_0$ ), а вторым катетом – отрезок, равный горизонтальной проекции соответствующего бокового ребра ( $S_0A_0 = S_1A_1$ ,

$S_0B_0 = S_1B_1, S_0C_0 = S_1C_1$ ). Натуральной величиной боковых ребер являются отрезки  $S_2A_0, S_2B_0, S_2C_0$ . После определения натуральных величин ребер приступают к построению развертки. Для этого из произвольной точки  $S$  проводят произвольную прямую  $a$ . На ней от точки  $S$  откладывают отрезок  $SA = S_2A_0$ . Из точки  $A$  проводят дугу радиусом  $A_1C_1$ , а из точки  $S$  – дугу радиусом  $S_2C_0$ . Пересечение дуг определяет положение вершины  $C$  треугольника  $SAC$  – натуральной величины грани пирамиды. Аналогично находят точки  $B$  и  $A$ . Соединив точки  $A, C, B, A, S$ , получают развертку боковой поверхности пирамиды  $SABC$ .

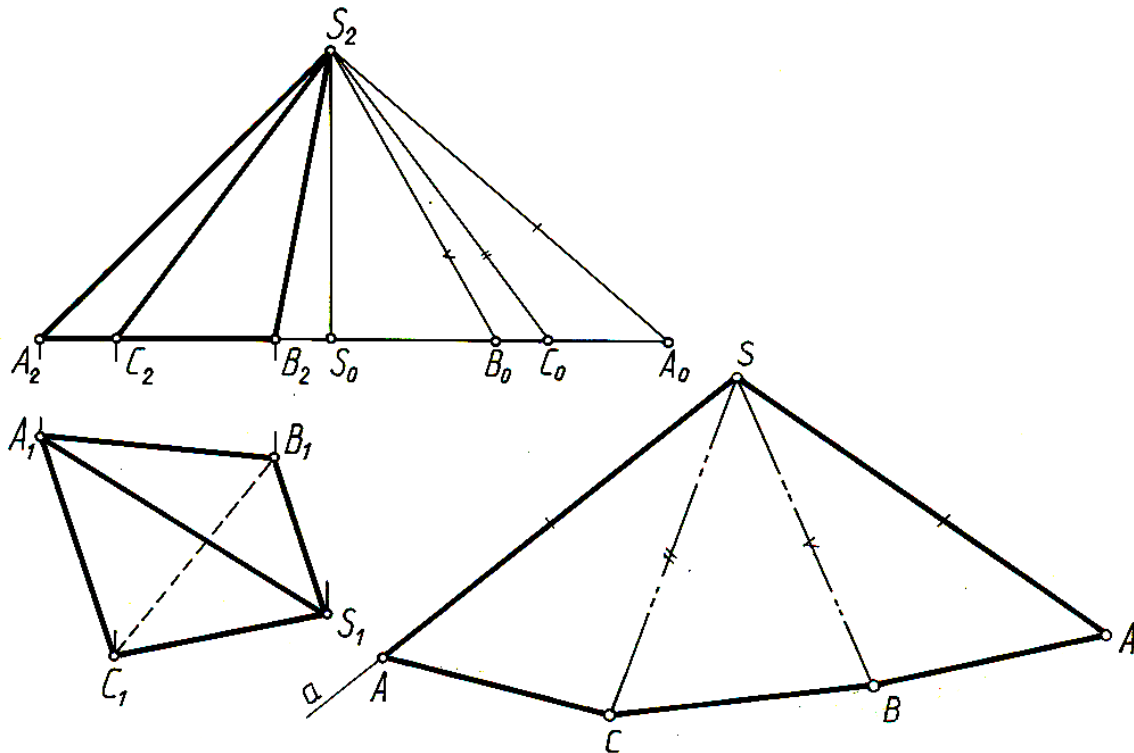


Рис. 12.2

**Задача 12.2.** Построить развертку боковой поверхности наклонного эллиптического конуса с круговым основанием (рис. 12.3).

Развертка конической поверхности выполняется по схеме построения развертки боковой поверхности пирамиды – способу треугольников. Для этого коническая поверхность аппроксимируется (заменяется) вписанной в нее многогранной пирамидальной поверхностью.

*Решение.* В данную коническую поверхность впишем двенадцатиугольную пирамиду. Так как коническая поверхность имеет плоскость симметрии  $\Gamma$ , то можно построить развертку только одной половины поверхности. Разделим половину окружности на шесть равных частей, начиная от точки  $O_1$  пересечения ее с плоскостью симметрии  $\Gamma$  ( $\Gamma_1$ ), которая делит поверхность и, следовательно, ее развертку на две симметричные части. Через точки деления  $O_1, I_1, 2_1, \dots$  и вершину  $S_1$  проводим горизонтальные проекции образующих конуса – прямые  $S_1O_1, S_1I_1, S_12_1, \dots$ , которые являются боковыми ребрами вписанной пирамиды. Сторонами основания пирамиды являются хорды, соединяющие точки деления и про-



ещирующиеся на  $\Pi_1$  в натуральную величину. Натуральную величину боковых ребер определяем способом прямоугольных треугольников. Проводим ось симметрии развертки и от точки  $S$  откладываем отрезок  $SO = S_2O_0$  (см. рис. 12.3). Из точки  $S$  радиусом  $S_2l_0$  проводим дугу окружности, а из точки  $O$  радиусом  $O_1l_1$  делаем на ней засечку. Точка  $l$  – искомая точка развертки. Для построения смежной грани из точки  $S$  радиусом  $S_22_0$ , а из точки  $l$  – радиусом  $l_12_1$  сделаем засечки и в пересечении отметим точку  $2$  и т. д. Соединив точки  $0, 1, 2, \dots, 6$  плавной кривой, получим развертку половины боковой поверхности конуса.

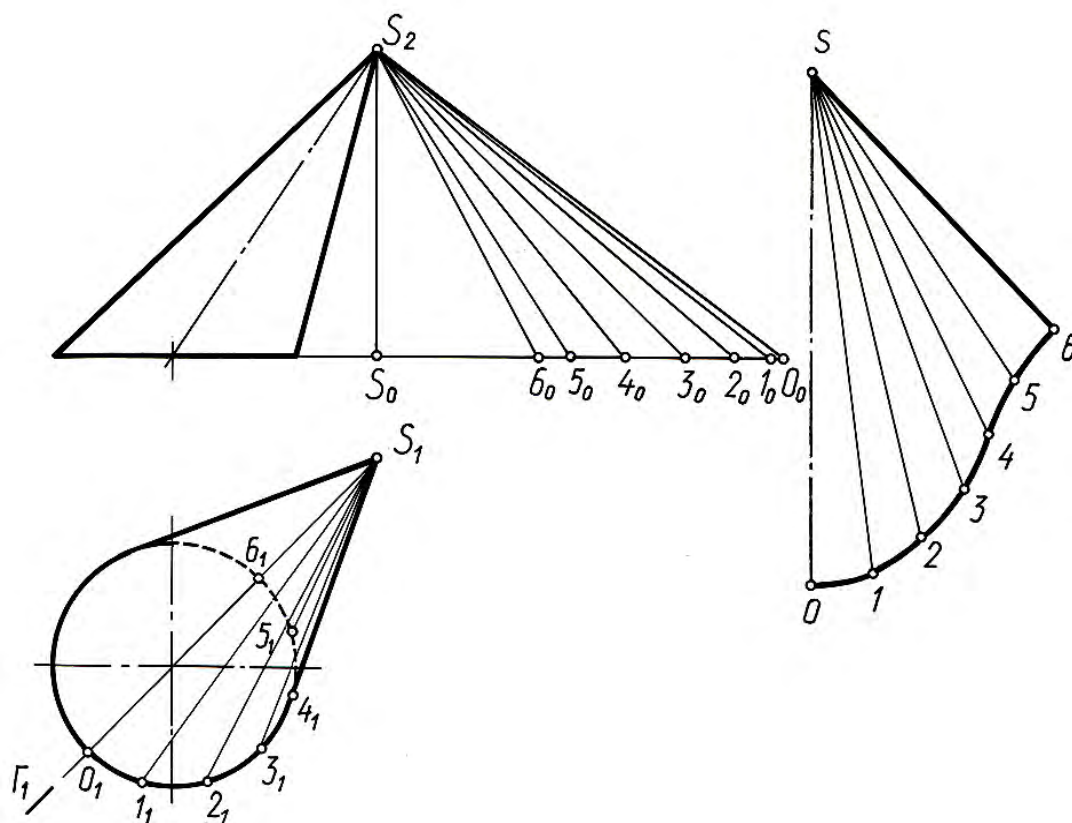


Рис. 12.3

## 12.5. Построение разверток призматических и цилиндрических поверхностей

Построение разверток призматических поверхностей сводится к построению истинных размеров и формы отдельных граней, что и выполняется на чертеже различными способами. Построение разверток цилиндрических поверхностей соответствует построению разверток призматических поверхностей, вписанных в цилиндрическую поверхность.

### 12.5.1. Способ триангуляции – разбивки многоугольника на треугольники

Построение развертки проводится по следующей схеме.

1. Каждая боковая грань призмы, представляющая параллелограмм, разбивается диагоналями на два треугольника.

2. Определяются длины сторон граней (параллелограммов) и построенных диагоналей.

3. На плоскости чертежа по сторонам и диагонали последовательно строятся грани (параллелограммы).

**Задача 12.3.** Построить развертку боковой поверхности наклонной призмы (рис. 12.4).

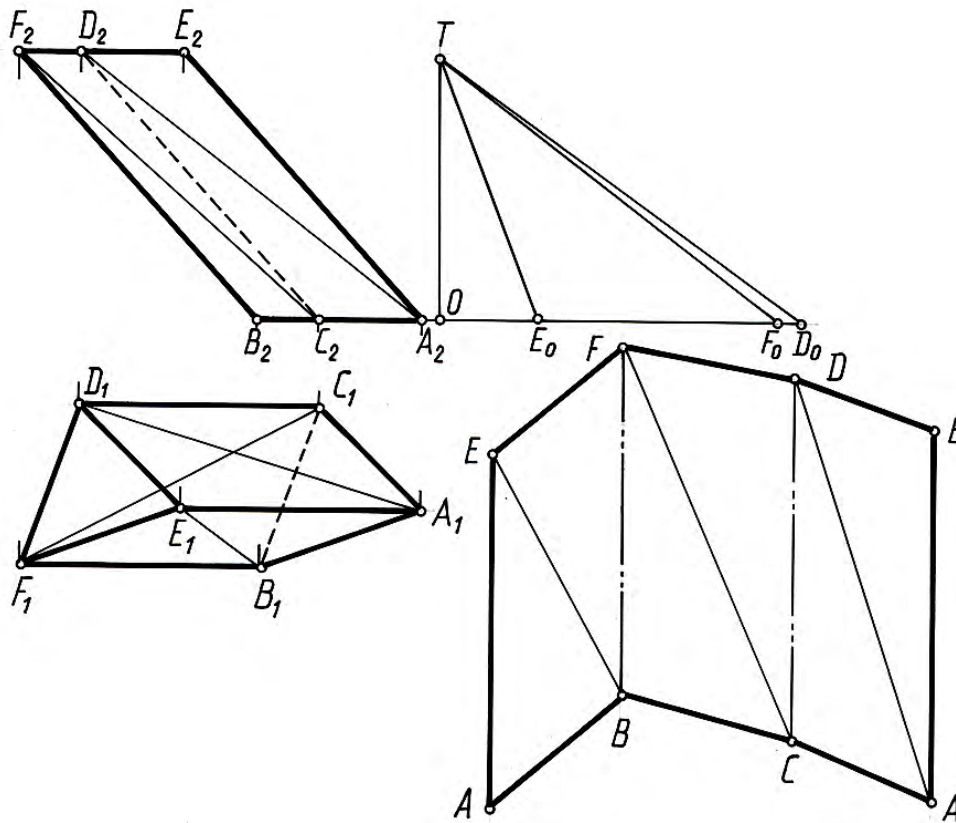


Рис. 12.4

*Решение.* Каждую боковую грань призмы делим диагональю на два треугольника. Натуральные длины диагоналей  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  определим как гипотенузы прямоугольных треугольников, у которых одним катетом является высота призмы, а другим – горизонтальная проекция соответствующей диагонали ( $A_1D_1$ ,  $B_1E_1$ ,  $C_1F_1$ ). В нашем примере боковые ребра призмы параллельны фронтальной плоскости проекций и проецируются на  $\Pi_2$  в натуральную величину, а стороны основания параллельны горизонтальной плоскости проекций и тоже проецируются на  $\Pi_1$  в натуральную величину.

На плоскости чертежа по трем сторонам строим треугольники боковой поверхности призмы, соблюдая их последовательность.

### 12.5.2. Способ нормального сечения

1. Для получения нормального сечения проводится плоскость, перпендикулярная к боковым ребрам призмы.

2. Определяется натуральная величина нормального сечения. Стороны этого сечения определяют расстояние между боковыми ребрами, т. е. ширину граней.

3. Нормальное сечение разворачивается в прямую и через концы отрезков проводятся ребра призмы, которые перпендикулярны построенной прямой, а следовательно и периметру сечения  $1, 2, 3$ .

4. На проведенных ребрах откладываются длины отрезков боковых ребер, заключенных между линией сечения и основаниями. Полученные точки соединяются последовательно между собой.

**Задача 12.4.** Построить полную развертку наклонной призмы (рис. 12.5).

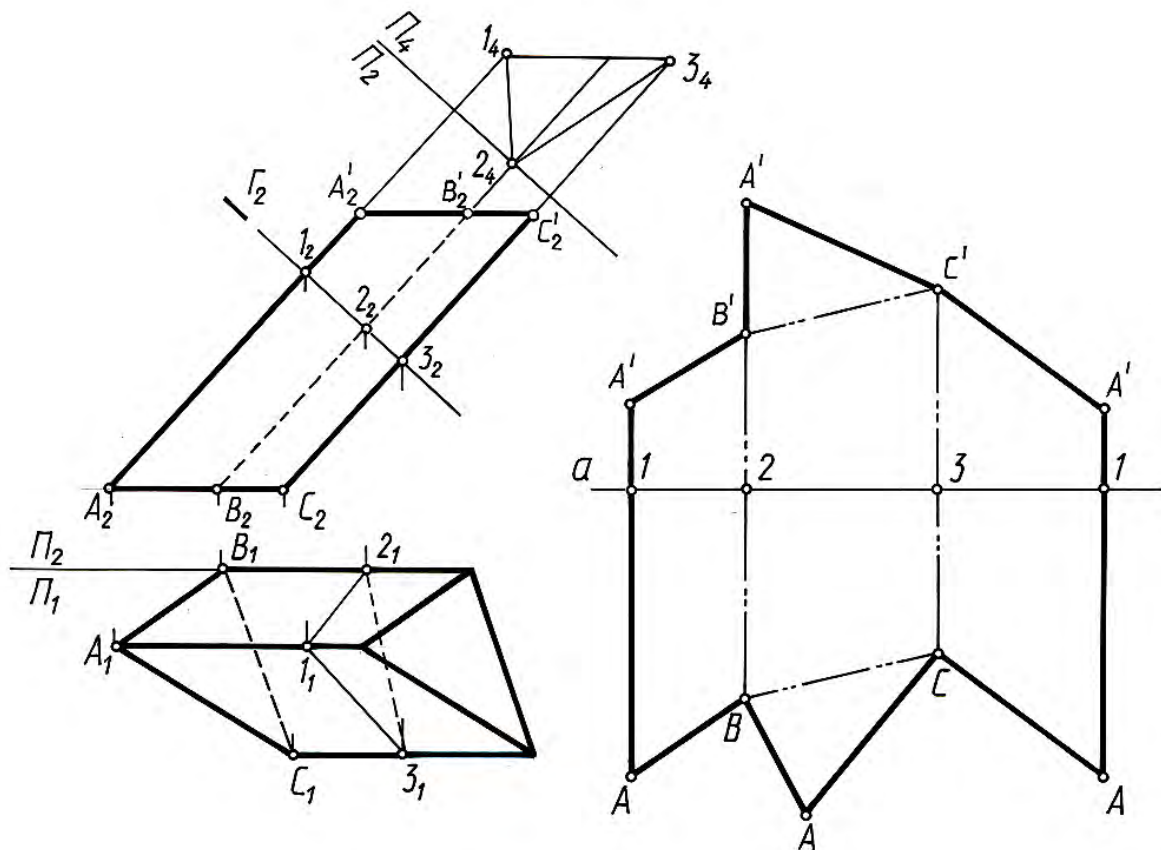


Рис. 12.5

Призма расположена относительно плоскостей проекций так, что ее боковые ребра параллельны фронтальной плоскости проекций и проецируются на  $\Pi_2$  в натуральную величину. Стороны основания проецируются без искажения на плоскость  $\Pi_1$ . Пересечем призму в произвольном месте плоскостью  $\Gamma$ , перпендикулярной боковым ребрам.

В нашем примере эта плоскость является фронтально-проецирующей плоскостью и пересекает призму по треугольнику  $123$  ( $1_22_23_2, 1_12_13_1$ ). Стороны треугольника определяют расстояние между боковыми ребрами. Определяем натуральную величину сечения (треугольник  $1_42_43_4$ ), используя способ замены плоскостей проекций. Стороны периметра нормального сечения последова-

тельно отложим на прямой  $a$ :  $1-2 = 1_4-2_4$ ,  $2-3 = 2_4-3_4$ ,  $3-1 = 3_4-1_4$ . Полученный отрезок  $1-1$  равен периметру нормального сечения.

Через точки  $1, 2, 3$  проведем прямые, перпендикулярные к развертке периметра сечения, и на них отложим натуральную величину боковых ребер  $1-A = 1_2-A_2$  и  $1-A' = 1_2-A_2'$ ,  $2-B = 2_2-B_2$  и  $2-B' = 2_2-B_2'$ ,  $3-C = 3_2-C_2$  и  $3-C' = 3_2-C_2'$  и т. д. Соединив концы отложенных отрезков, получим развертку боковой поверхности призмы. Для построения полной развертки необходимо к развертке боковой поверхности пристроить натуральные величины оснований, используя натуральные величины их сторон.

### 12.5.3. Способ раскатки

Способ раскатки применяется для построения разверток призматических и цилиндрических поверхностей в случае, когда боковые ребра призмы или образующие цилиндра параллельны какой-либо плоскости проекций, следовательно, проецируются в натуральную величину, а стороны основания параллельны другой плоскости проекций.

Порядок построения развертки:

1. Боковая поверхность мысленно разрезается по одному из ребер.
2. Последовательным вращением вокруг боковых ребер как вокруг линий уровня все боковые грани совмещаются с плоскостью уровня, проходящей через ребро, по которому разрезается данная призма.

**Задача 12.5.** Построить полную развертку поверхности наклонной призмы.

**Решение.** Развертку боковой поверхности призмы строим способом раскатки, так как ее боковые ребра параллельны фронтальной плоскости проекций, а стороны основания параллельны горизонтальной плоскости проекций и проецируются в натуральную величину (рис. 12.6).

Так как боковые ребра параллельны фронтальной плоскости  $\Pi_2$ , каждую грань можно повернуть вокруг соответствующего ребра до положения, когда эта грань окажется параллельна плоскости  $\Pi_2$ . Тогда она на плоскость  $\Pi_2$  спроецируется без искажения. Повернув таким образом каждую грань, получим развертку боковой поверхности призмы.

Примем за плоскость развертки плоскость  $\Sigma$  ( $\Sigma_1$ ), проходящую через ребро  $AA'$  и параллельную фронтальной плоскости проекций. Совместим грань  $AA'B'B$  с плоскостью  $\Sigma$ . Для этого мысленно разрежем поверхность призмы по ребру  $AA'$  и повернем грань  $AA'B'B$  вокруг ребра (как вокруг фронтали) до совмещения с фронтальной плоскостью  $\Sigma$ , проходящей через это ребро.

Для определения совмещенного положения ребра  $BB'$  с плоскостью  $\Sigma$  из точки  $B_2'$  проводим вырожденную проекцию плоскости  $\Gamma$  ( $\Gamma_2$ ), в которой вращается точка  $B'$  (см. метод вращения вокруг линии уровня), перпендикулярную  $AA'$ , на которой из точки  $A_2'$  делаем засечку дугой окружности радиуса  $A_2'B' = A_1B_1$ . Через точку  $B'$  проводим прямую  $B'B$ , параллельную  $A'A$ . Принимаем совмещенное положение ребра  $B'B$  за новую ось и вращаем вокруг нее грань

$B'BC'$  до совмещения с плоскостью  $\Sigma$ . Для этого из точки  $C_2'$  проводим вырожденную проекцию плоскости  $\Delta$  ( $\Delta_2$ ), перпендикулярную ребру  $BB'$ , а из точки  $B'$  – дугу окружности радиусом, равным  $B_1C_1$ . Пересечение дуги с  $\Delta_2$  определит положение точки  $C'$ . Аналогично определяем положение ребра  $A'A$ . Соединив соответствующие точки прямыми линиями, получим развертку боковой поверхности призмы. Достроив основания призмы, получим полную развертку.

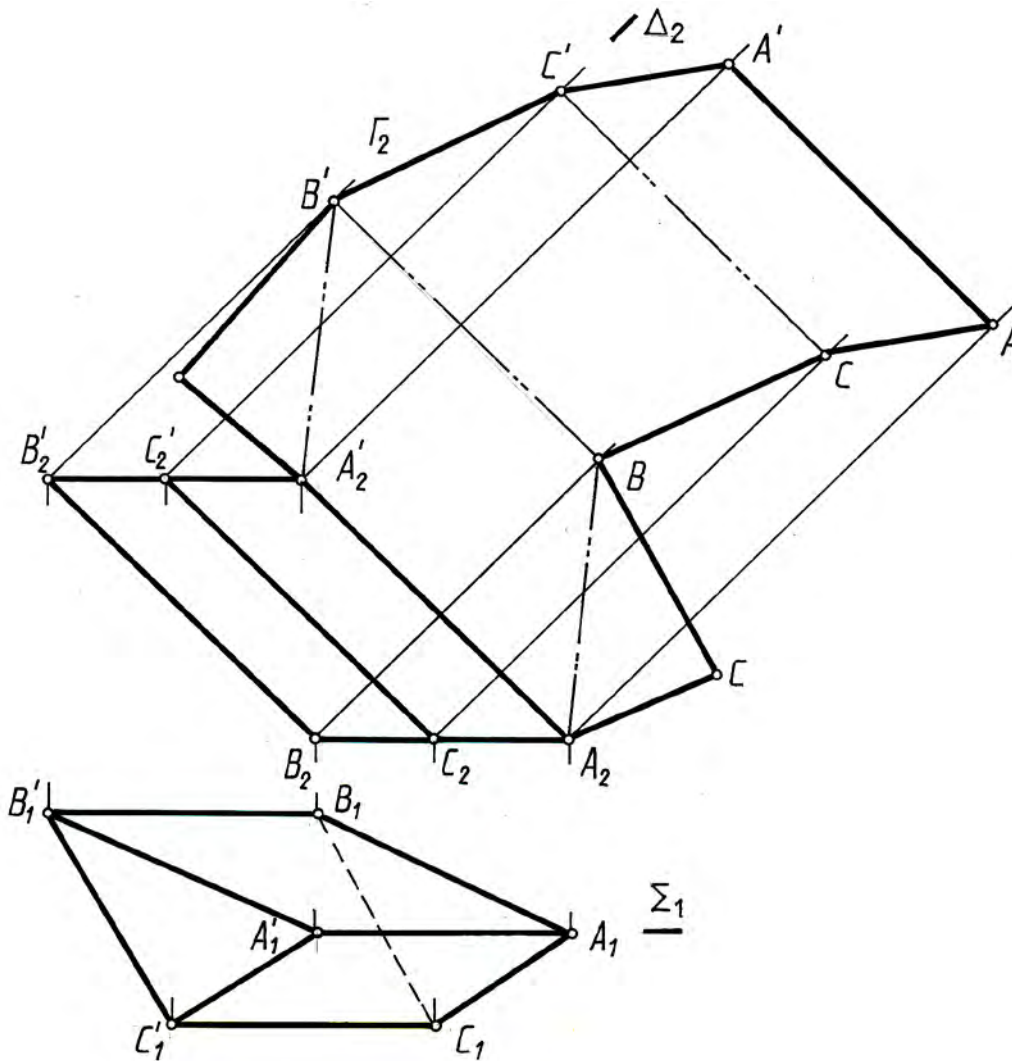


Рис. 12.6

## 12.6. Построение приближенных разверток неразвертывающихся поверхностей

Общий прием построения приближенных разверток неразвертывающихся поверхностей состоит в следующем.

1. Данная поверхность разбивается на равные или примерно равные части.
2. Каждая такая часть аппроксимируется (заменяется) развертывающейся поверхностью.
3. Строится развертка этих частей, совокупность которых и представляет собой приближенную развертку неразвертывающейся поверхности. Чем на

большее число частей разбивается кривая поверхность, тем ближе аппроксимирующие поверхности будут по форме воспроизводить заданную.

Приближенные развертки поверхностей вращения с криволинейными образующими обычно строят способом вспомогательных цилиндров или конусов, которые описываются или вписываются в данную поверхность.

**Задача 12.6.** Построить развертку сферической поверхности (рис. 12.7).

*Решение.* При построении развертки сферы как всякой поверхности вращения с криволинейной образующей поверхность разбивают с помощью меридианных сечений на узкие доли. Каждую такую долю («лепесток») заменяют описанной цилиндрической поверхностью, ось которой проходит через центр сферы (радиус цилиндрической поверхности равен радиусу сферической). При этом цилиндрическая поверхность касается данной сферической поверхности в точках среднего меридиана доли. Этот средний меридиан является нормальным сечением цилиндрической поверхности. Границами цилиндрической поверхности доли будут меридианы, ограничивающие ее.

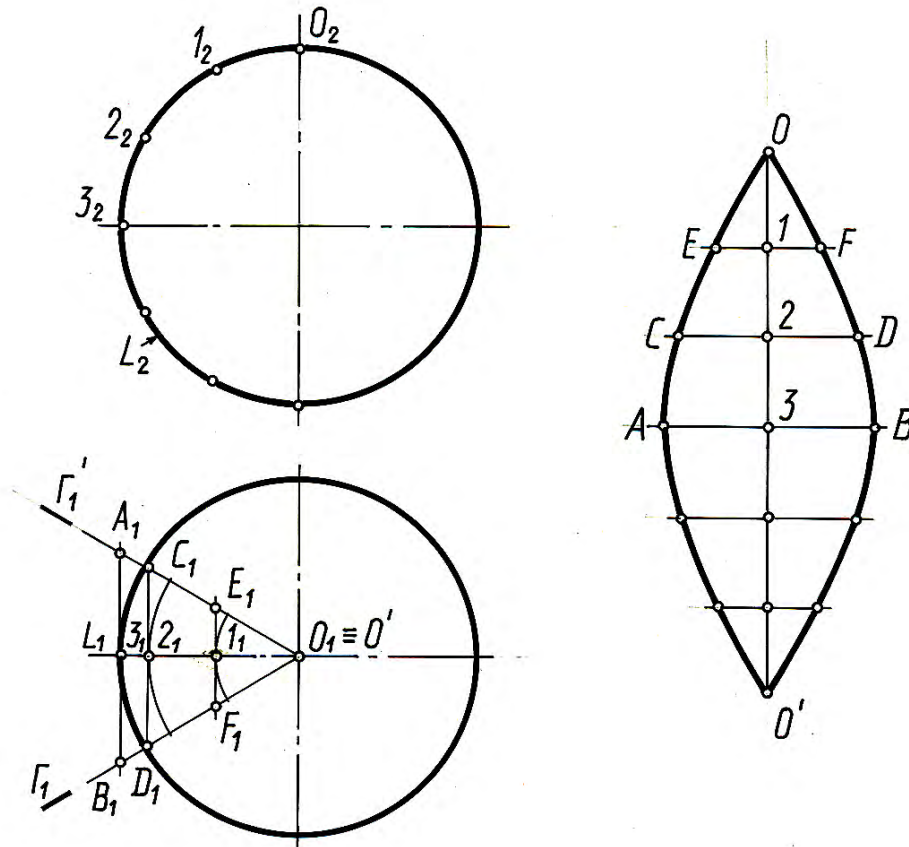


Рис. 12.7

В нашем примере сферическая поверхность разделена на шесть равных частей. Для получения более точной развертки сферической поверхности ее разбивают на 12 и более частей. Рассмотрим построение приближенной развертки одного «лепестка», у которого средним меридианом является главный меридиан  $l$  ( $l_1, l_2$ ). Заменяем этот «лепесток» отсеком цилиндрической поверхности,

описанной около него. Эта поверхность – фронтально проецирующая, и поэтому образующие проецируются на плоскость проекций  $\Pi_1$  в натуральную величину. Нормальным сечением цилиндрической поверхности этой части является половина главного меридиана  $l$  ( $l_1, l_2$ ), а границами поверхности являются плоскости меридианов  $\Gamma\Gamma'$  ( $\Gamma_1\Gamma_1'$ ), ограничивающие ее.

Для построения развертки этой цилиндрической поверхности заменяем ее вписанной призматической поверхностью, для чего половину главного меридиана ( $l$ ) делим на шесть равных частей и через точки деления  $1(1_1), 2(2_1), 3(3_1)$  проводим образующие  $AB$  ( $A_1B_1$ ),  $CD$  ( $C_1D_1$ ),  $EF$  ( $E_1F_1$ ) цилиндрической поверхности.

Развертку строим способом нормального сечения. А так как нормальным сечением аппроксимирующей поверхности является полумеридиан  $l$ , то на развертке спрямляем его в отрезок  $OO'$  ( $0-1 = 0_2-1_2$ ) и через точки деления  $1, 2, 3$  проводим перпендикулярно к нему образующие, на которых отмечаем точки  $A, B, C, D, E, F, \dots$ , используя соответствующие отрезки:  $AB = A_1B_1, CD = C_1D_1$  и т. д. Соединив концы этих образующих плавными кривыми, получим приближенную развертку  $1/6$  части сферы. Полная развертка будет состоять из шести таких долей.

## АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

*Сущность метода аксонометрических проекций и основные понятия. Стандартные аксонометрические проекции (прямоугольная изометрия, прямоугольная диметрия, косоугольные аксонометрические проекции).*

*Построение аксонометрических изображений по ортогональным проекциям (аксонометрия точки, аксонометрия плоской фигуры, аксонометрия призматической поверхности).*

*Решение позиционных задач в аксонометрии*

### 13.1. Сущность метода аксонометрических проекций и основные понятия

**Аксонометрическая проекция**, или **аксонометрия**, есть параллельная проекция фигуры-оригинала и осей координат пространства, к которым эта фигура отнесена, на одну плоскость проекций, называемую **аксонометрической плоскостью проекций** ( $\Pi'$ ).

Аксонометрическую проекцию получают по методу **параллельного проецирования**, поэтому все свойства параллельного проецирования остаются справедливыми и для аксонометрической проекции. Например, сохраняется параллельность прямых и пропорциональность деления отрезков.

Достоинством такой проекции является наглядность. Недостатком – проецирование на одну плоскость проекций.

Сущность метода рассмотрим на примере получения аксонометрии точки  $A$ . Выберем в пространстве прямоугольную систему координат  $Oxyz$  и точку  $A$ , положение которой относительно осей координат определено:  $X_A = OA_x$ ,  $Y_A = A_xA_1$ ,  $Z_A = A_1A$  (рис. 13.1). Полученная ломаная  $AA_1A_xO$  – координатная ломаная точки  $A$ . По каждому из направлений натуральной системы координат ( $xuz$ ) отложим отрезки единичной длины  $e_x, e_y, e_z$ .

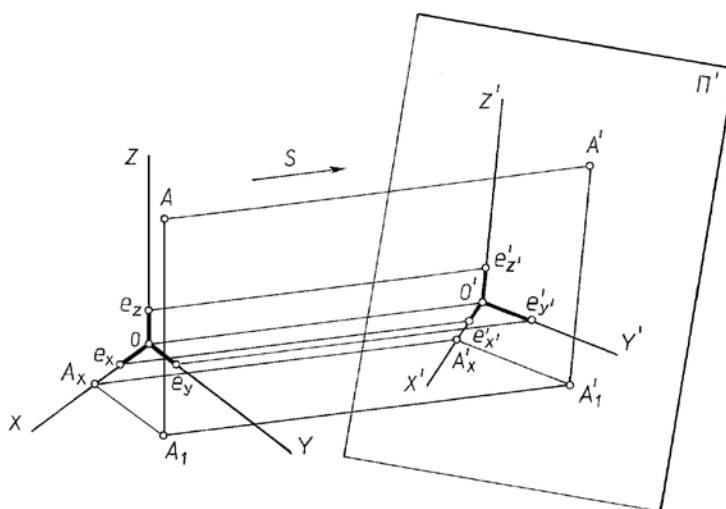


Рис. 13.1



Спроецируем в направлении  $S$  на плоскость  $\Pi'$  выбранную декартову систему координат  $Oxyz$  вместе с точкой  $A$  и ее горизонтальной (прямоугольной) проекцией  $A_1$  на координатной плоскости  $xOy$ , а также единичные отрезки  $e_x, e_y, e_z$ .

Оси  $O'x'y'z'$ , полученные проецированием координатных осей пространства на аксонометрическую плоскость проекций  $\Pi'$ , называются **аксонометрическими осями**; проекция  $A'$  – аксонометрической проекцией точки  $A$ , а  $A_1'$  – вторичной проекцией точки  $A$ .  $A'A_1'A_x'O'$  – аксонометрическая проекция координатной ломаной точки  $A$ .

Для получения обратимого чертежа в том случае, если проецирование ведется на одну плоскость проекций необходимо использовать вторичную проекцию. **Вторичной проекцией** называется аксонометрическое изображение не самой точки, а одной из ее ортогональных проекций (чаще всего горизонтальной). Этот термин хорошо подчеркивает тот факт, что проекция  $A_1$  получается в результате двух последовательных проецирований. Заметим, что для получения наглядного аксонометрического изображения, направление проецирования  $S$  не должно быть параллельным ни одной из координатных осей ( $x, y, z$ ) или координатной плоскости, так как при этом аксонометрическая проекция такой плоскости изобразится прямой линией и чертеж утратит свою наглядность.

Если плоскость аксонометрических проекций  $\Pi'$  не параллельна ни одной из координатных осей, то очевидно, что любые отрезки, расположенные в пространстве на осях  $e_x, e_y, e_z$  (или параллельные осям), проецируются на плоскость  $\Pi'$  с некоторым искажением  $e'_{x'}, e'_{y'}, e'_{z'}$ . Отношение длины аксонометрической проекции отрезка, лежащего на координатной оси или параллельного ей, к истинной длине этого отрезка называется **коэффициентом (показателем) искажения** по соответствующей аксонометрической оси:

$$e'_{x'}/e_x = m, \quad e'_{y'}/e_y = n, \quad e'_{z'}/e_z = k.$$

Числовое выражение коэффициентов искажения показывает, во сколько раз увеличиваются или уменьшаются отрезки по осям на аксонометрических изображениях. В зависимости от соотношения коэффициентов искажения аксонометрические проекции делятся:

– на **изометрические**, если коэффициенты искажения по всем трем осям равны:

$$m = n = k;$$

– **диметрические**, если коэффициенты искажения одинаковы лишь по двум осям, например,

$$m = k \neq n;$$

– **триметрические**, если все три показателя искажения разные:

$$m \neq n \neq k.$$

В зависимости от угла  $\varphi$  между направлением проецирования  $S$  и аксонометрической плоскостью проекций  $\Pi'$  различают:

– **прямоугольную** аксонометрическую проекцию, если

$$\varphi = S \wedge \Pi' = 90^\circ;$$

– **косоугольную** аксонометрическую проекцию, если

$$\varphi = S \wedge \Pi' \neq 90^\circ.$$

Между коэффициентами искажения и углом  $\varphi$ , образованным направлением проецирования  $S$  с плоскостью  $\Pi'$ , существует следующая зависимость:

$$m^2 + n^2 + k^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi. \quad (1)$$

Так в общем случае можно получить множество аксонометрических проекций, отличающихся друг от друга направлением аксонометрических осей и коэффициентами искажения по ним. Это положение сформулировано в 1851 году и доказано **теоремой К. Польке**, которая гласит: *три отрезка произвольной длины, лежащие в одной плоскости и выходящие из одной точки под произвольными углами друг к другу, представляют параллельную проекцию трех равных отрезков, отложенных на прямоугольных осях координат от начала.*

Позже Г. Шварц обобщил теорему К. Польке, которая имеет существенное значение как для теории аксонометрии, так и для многих ее приложений. На основании теоремы Польке системы аксонометрических осей, а также отношение коэффициентов искажения по ним могут быть заданы совершенно произвольно. При произвольном выборе характеристических данных, определяющих аксонометрическую систему, получается косоугольная триметрическая проекция общего вида.

Однако из многих систем аксонометрических проекций на практике чаще всего пользуются теми, которые рекомендует ГОСТ 2.317–69 «Аксонометрические проекции», а именно: прямоугольной изометрией и диметрией, косоугольной фронтальной и горизонтальной изометрией и фронтальной косоугольной диметрией.

## 13.2. Стандартные аксонометрические проекции

### 13.2.1. Прямоугольная изометрия

**Прямоугольная изометрия** – наиболее простой вид прямоугольной аксонометрии, при котором все координатные оси наклонены к аксонометрической плоскости проекций под одинаковыми углами и, таким образом, имеют одинаковые коэффициенты искажения. Числовое значение коэффициентов искаже-

ния легко вычислить. Поскольку  $m = n = k$  и  $\varphi = 90^\circ$ , то на основании формулы (1) можно записать, что  $3m^2 = 2$ , и тогда  $m = \sqrt{2/3} = 0,82$ . В этом случае  $0,82$  – **фактические коэффициенты искажения**.

Следовательно, при построении изометрической проекции размеры отрезков, откладываемые по аксонометрическим осям или параллельно им, умножаются на  $0,82$ . Такой перерасчет неудобен, поэтому ГОСТ 2.317–69 рекомендует строить **прямоугольную** изометрию без сокращений размеров по аксонометрическим осям, т. е. пользоваться так называемыми **приведенными** коэффициентами (показателями) **искажения**, равными 1.

При использовании приведенных коэффициентов искажения аксонометрическое изображение пропорционально увеличивается в  $1,22$  раза ( $1 : 0,82 = 1,22$ ), каждый же отрезок, откладываемый по осям  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  или параллельно им, сохраняет свою величину, что удобно при построении. На рис. 13.2 показано расположение осей изометрической проекции.

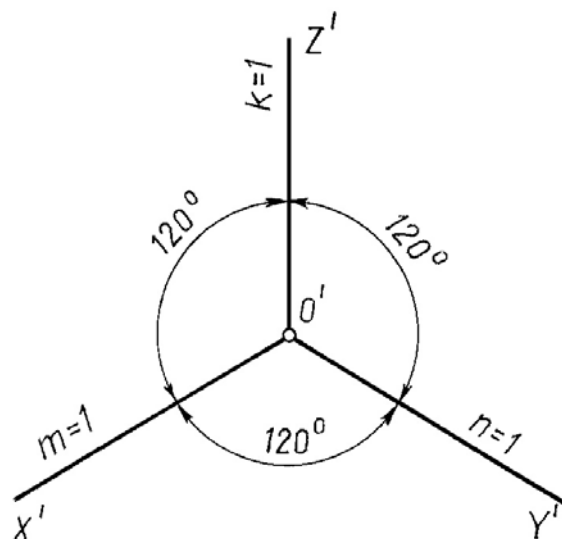


Рис. 13.2

### 13.2.2. Прямоугольная диметрия

В прямоугольной диметрии коэффициенты искажения  $m = k$ , а третий –  $n$  – не равен им. Для практических целей применяется диметрия, у которой  $m = k$  и  $n = 0,5m$ . При таком соотношении коэффициентов искажений аксонометрические оси расположены под углами, указанными на рис. 13.3. Подставляя в формулу прямоугольной аксонометрии значения  $m = k$  и  $n = 0,5m$ , получим  $m = k = 0,94$ ;  $n = 0,47$ . Однако для практических целей применяются приведенные коэффициенты искажения ( $m = k = 1$  и  $m = 0,5$ ). Изображение, построенное с приведенными коэффициентами искажения, будет увеличено в  $1,06$  раза ( $1 : 0,94 = 0,5 : 0,47 = 1,06$ ).

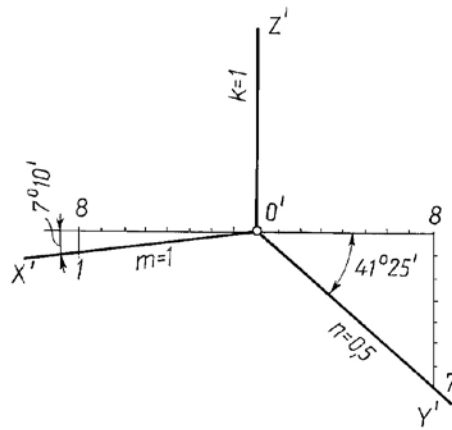


Рис. 13.3

### 13.2.3. Косоугольные аксонометрические проекции

Косоугольные аксонометрические проекции характеризуются двумя основными признаками:

1) плоскость аксонометрических проекций располагается параллельно одной из сторон объекта (параллельно одной из координатных плоскостей); все плоские фигуры, расположенные в этой координатной плоскости или параллельно ей, изображаются без искажения;

2) проецирование косоугольное (проецирующие лучи составляют с аксонометрической плоскостью проекций острый угол), что дает возможность спроецировать и две другие стороны объекта, но уже с искажением.

Аксонометрические искажения при косоугольном проецировании оказываются менее наглядными, чем при прямоугольном, однако они обладают и важным преимуществом: элементы объекта, параллельные плоскости аксонометрических проекций, проецируются без искажения.

**Фронтальная изометрия и диметрия** (рис. 13.4) применяются в основном тогда, когда изображаемый объект имеет большое количество окружностей или других кривых линий, расположенных во фронтальной плоскости. Коэффициенты искажения по аксонометрическим осям  $x'$  и  $z'$  равны 1, а угол между ними составляет  $90^\circ$ . Коэффициент искажения по оси  $y'$  равен 1 для изометрии и 0,5 для диметрии.

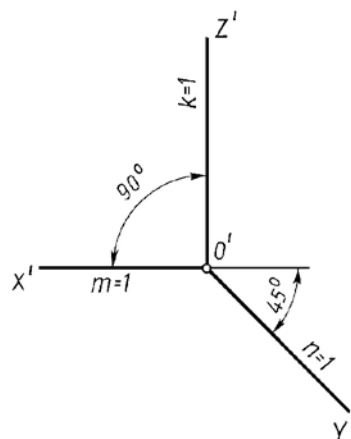


Рис. 13.4

**Горизонтальная изометрия** (рис. 13.5) целесообразна для применения в тех случаях, когда изображаемый объект имеет большое количество окружностей или других кривых линий, расположенных в горизонтальных плоскостях. При построении горизонтальной изометрии плоскость аксонометрических проекций располагают горизонтально, параллельно координатной плоскости  $xOy$  и все коэффициенты искажения принимают равными единице.

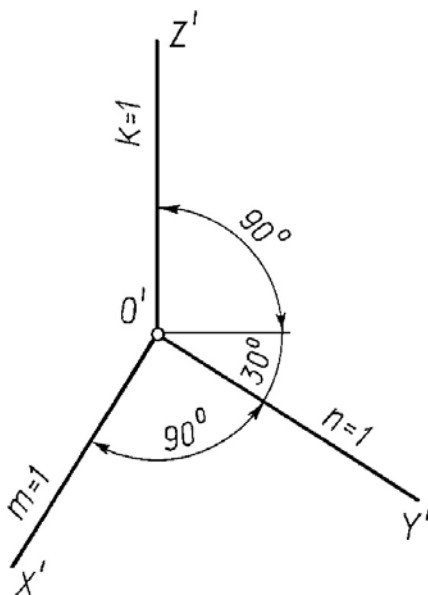


Рис. 13.5

### 13.3. Построение аксонометрических изображений по ортогональным проекциям

Переход от эпюра Монжа (ортогональных проекций) к аксонометрическому изображению рекомендуется выполнять в такой последовательности.

1. На ортогональном чертеже размечают оси прямоугольной системы координат, к которой относят данный объект. Оси ориентируют так, чтобы они допускали удобное измерение координат точек объекта, совмещая их с осями симметрии объекта или с основными его гранями.

2. Строят оси выбранной аксонометрической проекции.

3. Строят вторичную проекцию (чаще всего аксонометрию горизонтальной проекции объекта) по размерам, взятым с ортогональных проекций объекта (с учетом приведенных коэффициентов искажения по осям для выбранной аксонометрии).

4. Достраивают аксонометрию объекта, построив высоты (апликаты) характерных точек вторичной проекции.

5. Оформляют чертеж.

Рассмотрим примеры построения аксонометрических изображений некоторых фигур.

### 13.3.1. Аксонометрия точки

**Задача 13.1.** Построить прямоугольную изометрию и прямоугольную диметрию точки  $A$  (рис. 13.6, а).

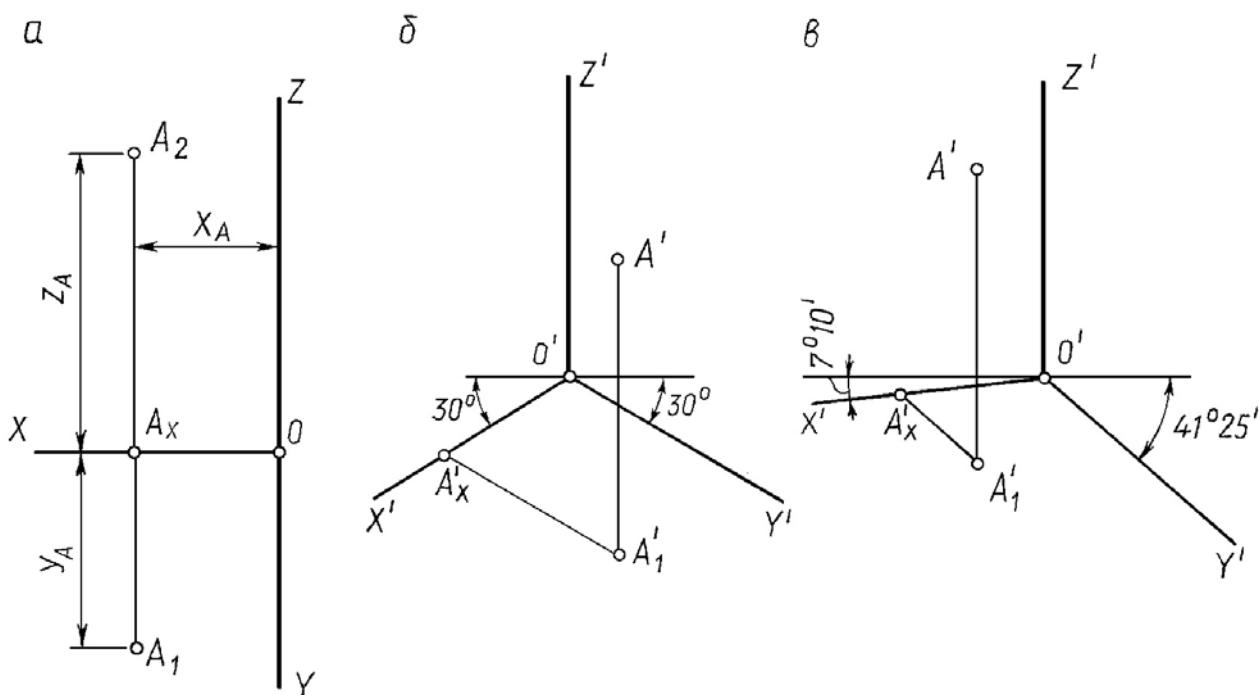


Рис. 13.6

*Решение.*

1. Задают оси аксонометрических проекций. На рис.13.6, б – оси прямоугольной изометрии, на рис. 13.6, в – оси прямоугольной диметрии.

2. От точки  $O'$  на оси  $X'$  откладывают координату  $X_A$ , взятую с ортогонального чертежа, получают точку  $A'_x$ :  $O'A'_x = OA_x = X_A$ .

3. Через  $A'_1$  проводят прямую, параллельную оси  $Y'$ , и откладывают на ней координату  $Y_A$ , взятую также с ортогонального чертежа. При этом обязательно должен быть учтен коэффициент искажения по оси  $Y$ .

Так, на рис. 13.6, б в прямоугольной изометрии по направлению  $Y'$  отложен отрезок, равный  $Y_A$ , а на рис. 13.6, в в прямоугольной диметрии отложен отрезок  $0,5Y_A$  (приведенный коэффициент искажения в прямоугольной диметрии по оси  $y$  равен  $0,5$ ).  $A'_1$  – вторичная проекции точки  $A$ .

4. Через точку  $A'_1$  проведена прямая, параллельная оси  $Z$ , и на ней отложен отрезок, равный отрезку  $Z_A$ :  $A'_1A' = A_x A_2 = Z_A$ .

Итак, любую аксонометрическую проекцию точки можно получить, построив в аксонометрии координатную ломаную линию, определяющую положение этой точки в пространстве.

### 13.3.2. Аксонометрия плоской фигуры

**Задача 13.2.** Построить прямоугольную изометрическую проекцию шестиугольника по его ортогональному чертежу (рис. 13.7, а).

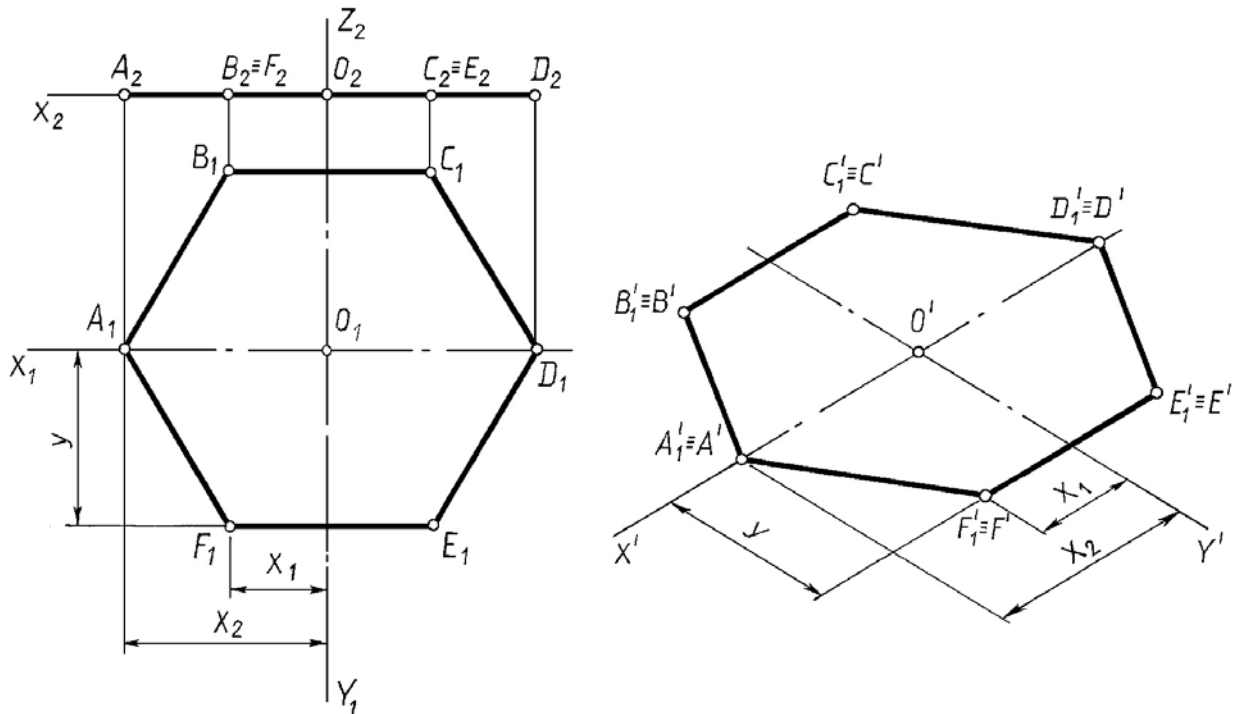


Рис. 13.7

*Решение*

1. За оси координат  $X$  и  $Y$  принимаем оси симметрии шестиугольника.
2. Строим оси прямоугольной изометрии.
3. Плоский шестиугольник расположен в плоскости  $XOY$ , поэтому его аксонометрия совпадает со вторичной проекцией. Аксонометрию многоугольника строим по координатам вершин, пользуясь приведенными коэффициентами искажения, равными единице. Выполненные построения ясны из чертежа.

### 13.3.3. Аксонометрия призматической поверхности

**Задача 13.3.** Построить прямоугольную *изометрию* и *диметрию* прямой четырехгранной призмы, в основании которой – квадрат (рис. 13.8, а).

*Решение.*

1. Относим призму к натуральной системе координат, задав на ортогональном чертеже начало координат – точку  $O$  и оси  $X, Y, Z$ .
2. Задаем оси прямоугольной изометрии (рис. 13.8, б) и диметрии (рис. 13.8, в).
3. Строим вторичную проекцию квадрата, пользуясь приведенными коэффициентами искажения для прямоугольной изометрии (рис. 13.8, б) и диметрии (рис. 13.8, в).

4. Через вторичные проекции вершин проводим прямые, параллельные оси  $Z'$ , и откладываем на них отрезки, равные значению соответствующих вертикальных ребер призмы.

5. Соединив построенные аксонометрические проекции вершин, получаем аксонометрию заданной призмы.

Анализ рис. 13.8, б и в позволяет сделать вывод о целесообразности построения прямоугольной диметрии (рис. 13.8, в) такой призмы. Прямоугольная изометрия в данном случае *не является наглядным изображением*.

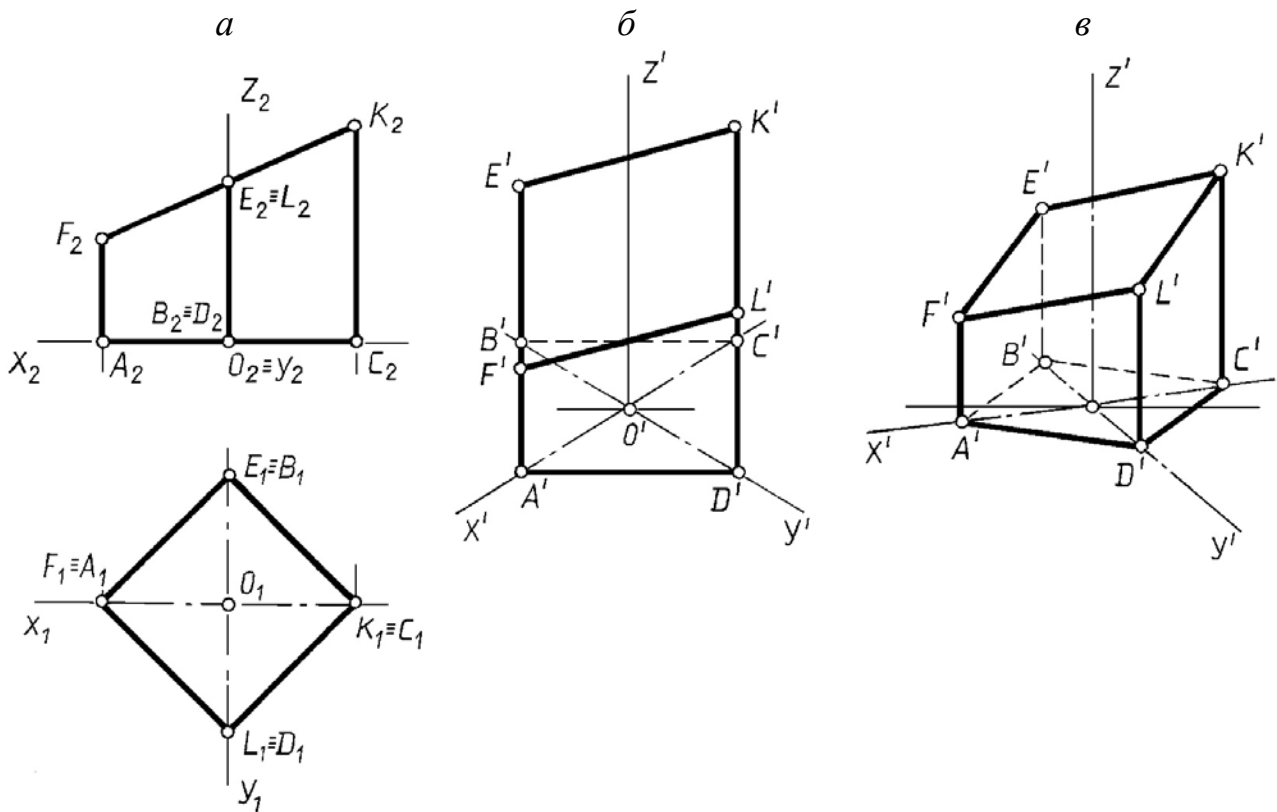


Рис. 13.8

### 13.4. Решение позиционных задач в аксонометрии

Алгоритмы решения позиционных задач на аксонометрическом чертеже не отличаются от алгоритмов решения этих задач в ортогональных проекциях на эюре Монжа.

**Задача 13.4.** Построить следы прямой  $l$  (рис. 13.9).

*Решение.* Алгоритм решения задачи такой же, как и на эюре Монжа.

$T$  – фронтальный след прямой  $l'$ ,  $K$  – горизонтальный след и  $E$  – профильный след (рис.13.9).



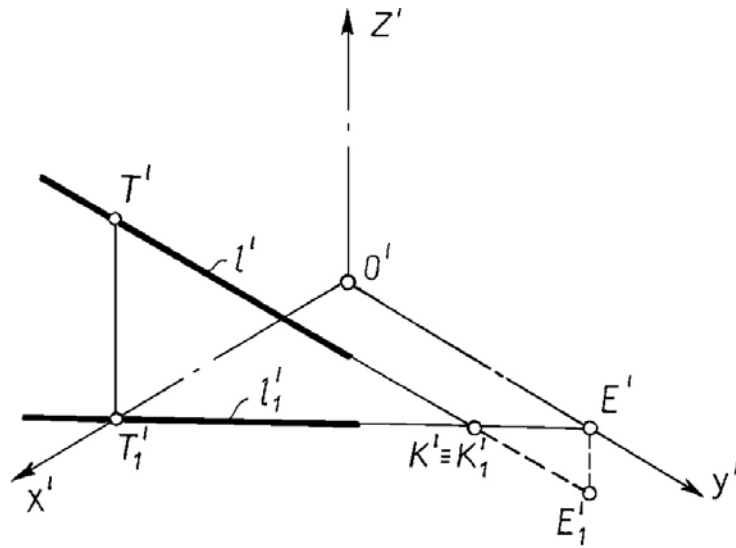


Рис. 13.9

Рассмотрим примеры построения пересечения геометрических фигур в аксонометрии.

**Задача 13.5.** Построить пересечение заданной прямой  $l$  и плоскости  $\Gamma(ABC)$  (рис. 13.10).

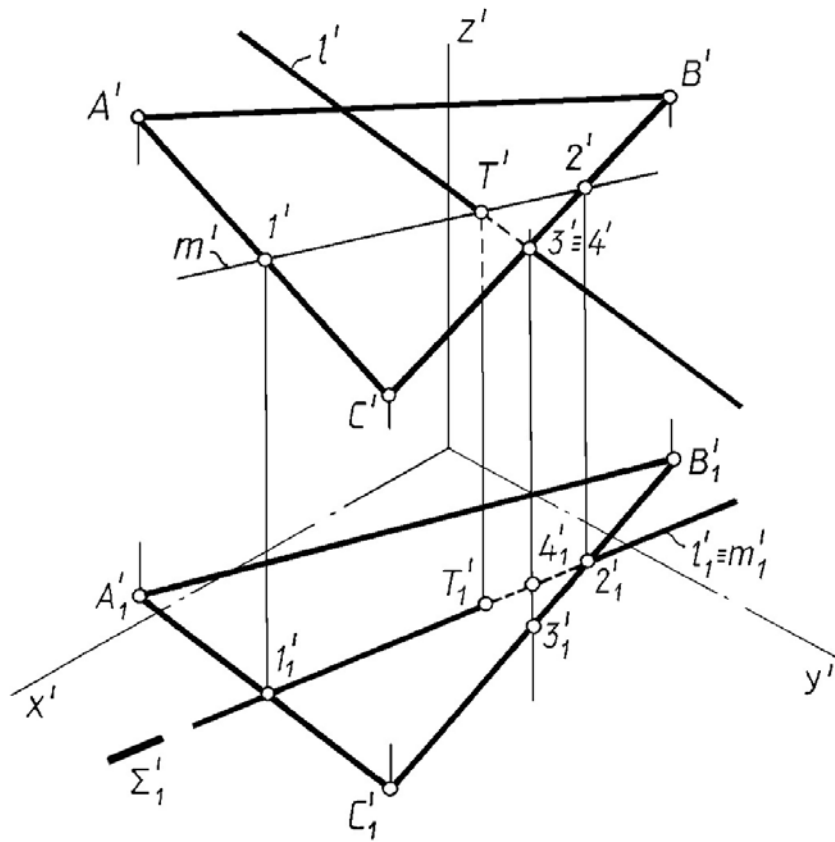


Рис. 13.10

*Решение.* Плоскость  $\Gamma(ABC)$  и прямая  $l$  заданы своими аксонометрическими и вторичными проекциями. Задачу решаем, используя вспомогательную плоскость-посредник.

1. Заключаем прямую  $l$  во вспомогательную вертикальную плоскость  $\Sigma$ . При этом  $\Sigma_1'$ , совпадающая с  $l_1'$ , представляет собой вторичную проекцию вертикальной плоскости-посредника. Отметим, что вторичная проекция любой фигуры, расположенной в плоскости  $\Sigma$ , совпадает с вторичной проекцией  $\Sigma_1'$ .

2. Строим пересечение заданной плоскости  $\Gamma(ABC)$  с плоскостью-посредником  $\Sigma$ ; во-первых, находим точки пересечения вторичных проекций плоскостей ( $\Sigma_1' \cap A_1 B_1 C_1' = l_1' 2_1'$ ); затем проводим вертикальные линии связи из  $l_1'$  и  $2_1'$  до пересечения с аксонометрическими проекциями соответствующих сторон заданной плоскости, а именно  $l'$  и  $2'$ . Объединяем точки в прямую  $l' 2'$ .

3. Определяем точку  $T'$  пересечения прямой  $l'$  и плоскости  $A'B'C'$ , а именно  $l' \cap l' 2' = T'$ . По принадлежности к  $l_1'$  находим вторичную проекцию точки пересечения  $T_1'$ .

4. Для определения видимости прямой относительно заданной плоскости воспользуемся конкурирующими точками 3 и 4, принадлежащими соответственно заданной прямой и стороне  $BC$  плоскости. Проведя линии связи, определяем вторичные проекции выбранных точек. По положению вторичных проекций определяем видимость заданной прямой относительно плоскости.

**Задача 13.6.** Построить линию пересечения цилиндра и плоскости  $\Sigma$  (рис. 13.11).

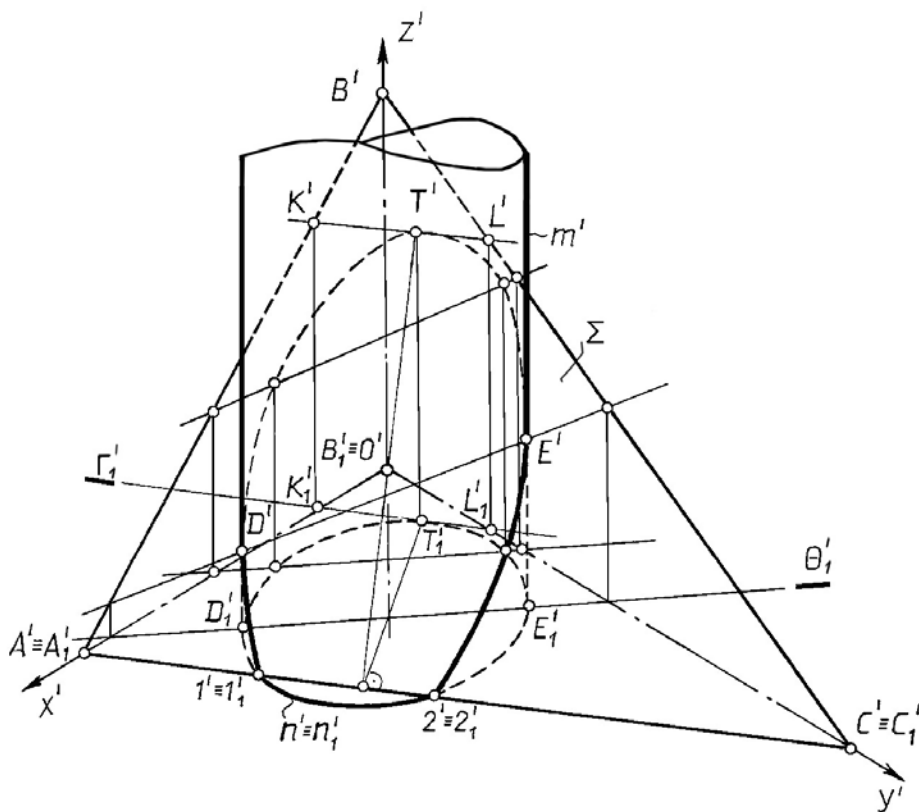


Рис. 13.11

При решении задачи на рис. 13.11 целесообразно использовать вертикальные плоскости-посредники, так как каждая такая плоскость пересечет цилиндр по образующей, а заданную плоскость – по прямой. Пересечение образующей и прямой даст точку на искомой кривой пересечения. Соединив множество таких точек, получим искомую кривую.

## ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ

*Проекция точки. Проекция прямой. Градуирование прямой.*

*Взаимное положение двух прямых. Плоскость.*

*Проекция поверхностей*

При проектировании инженерно-строительных сооружений приходится прибегать к изображению земной поверхности. Форма поверхности Земли и земляных сооружений сложна, а их вертикальные размеры по отношению к горизонтальным очень малы, например: дороги, мосты, аэродромы, строительные площадки, гидротехнические объекты и т. д. Для их изображения на строительных чертежах существует специальный метод – проекции с числовыми отметками.

### 14.1. Проекция точки

Сущность метода проекций с числовыми отметками состоит в том, что точки объекта проецируются ортогонально на одну горизонтальную плоскость. Так как одна параллельная (ортогональная) проекция не определяет положения объекта в пространстве, то для получения обратимого чертежа указывается не только горизонтальная проекция точки, но и ее удаление от горизонтальной плоскости проекций, т. е. координата  $Z$ , которая называется **числовой отметкой** (или просто отметкой) этой точки (рис. 14. 1).

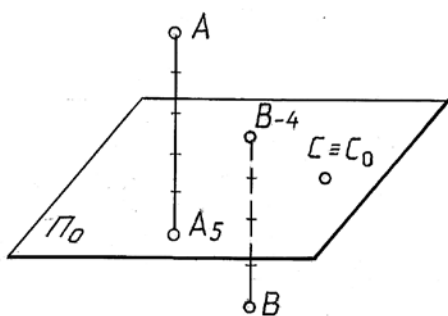


Рис. 14.1

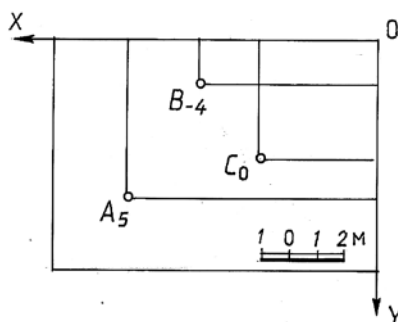


Рис. 14.2

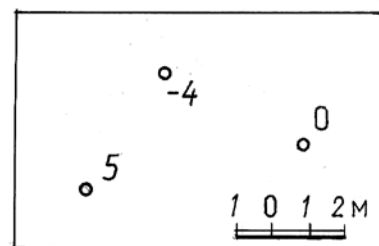


Рис. 14.3

Горизонтальная плоскость проекций  $\Pi_0$ , на которую проецируются геометрические объекты, называется **основной** или плоскостью **нулевого уровня**. Положение проекций точек на плане определяется координатами  $x$  и  $y$ , а числовые отметки указывают величину координаты  $z$  (рис. 14.2).

Если точки расположены над плоскостью проекций, то их отметки считаются положительными, если ниже плоскости проекций – отрицательными. Отметки точек, принадлежащих плоскости проекций, называются **нулевыми** (см. рис. 14.2).

В некоторых случаях, когда наименование точки не имеет значения, для упрощения не указывают буквенного обозначения точек, а оставляют только их числовые отметки (рис. 14.3).

На чертежах, выполненных в проекциях с числовыми отметками, не указывают координатные оси, начало координат и индекс плоскости проекций. Условимся такие чертежи называть планами. На планах необходимо вычерчивать линейный масштаб, которым приходится пользоваться при решении различных метрических задач, размеры обычно указываются в метрах (см. рис. 14.3).

На территории СНГ за плоскость нулевого уровня принят уровень Балтийского моря (нуль Крондштадского футштока). При проектировании инженерных сооружений за горизонтальную плоскость проекций может быть принята любая горизонтальная плоскость (**плоскость промежуточного уровня**) при условии, что известно ее расстояние до уровня Балтийского моря.

Если план выполнен на плоскости нулевого уровня (рис. 14.4), то числовые отметки имеют **абсолютные** значения ( $A_7, B_2$ ). Если план выполнен на плоскости проекций промежуточного уровня, то числовые отметки точек имеют **относительные** значения ( $A_2, B_{-7}$ ) (удаление от плоскости промежуточного уровня).

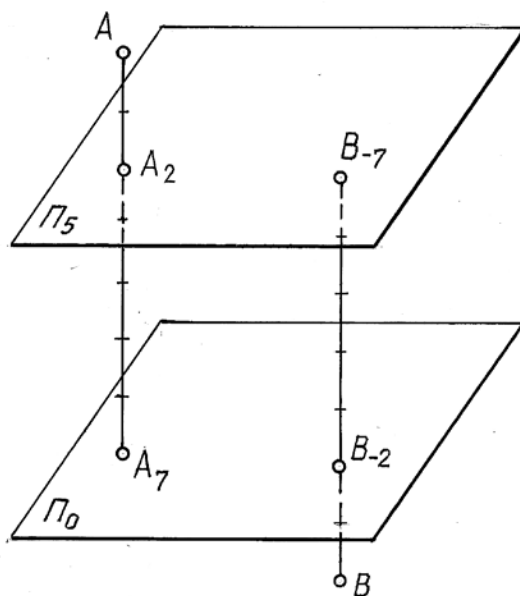


Рис. 14.4

## 14.2. Проекция прямой

При геометрических операциях на прямых линиях используют понятия: «заложение отрезка прямой», «интервал и уклон прямой линии». На рис. 14.5 изображен отрезок прямой  $AB$  и его проекция  $A_1B_{3,5}$  на плоскости  $\Pi_0$ . Величина горизонтальной проекции отрезка называется **заложением** отрезка и обозначается буквой  $L$ . Разность отметок концов отрезка прямой (расстояние по вертикали между концами отрезка) называется **превышением** отрезка и обозначается буквой  $H$ .

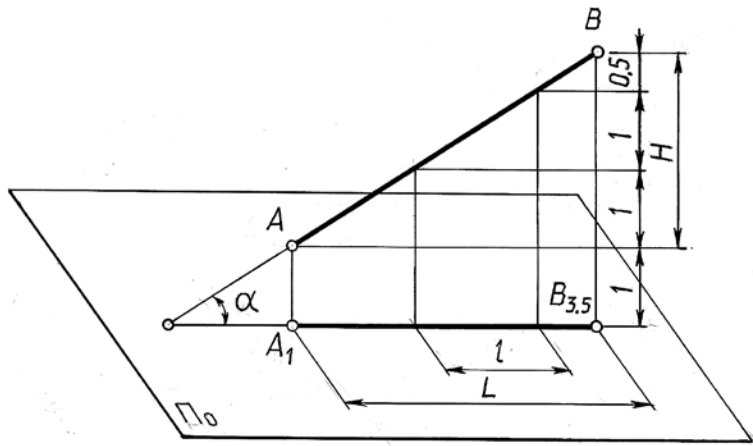


Рис. 14.5

**Уклоном прямой** называется отношение превышения отрезка прямой к его заложению. Уклон обозначается буквой  $i$  и равен тангенсу угла наклона прямой к плоскости  $\Pi_0$  (см. рис. 14.5):

$$i = \frac{H}{L} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Заложение прямой, соответствующее единице превышения, называется **интервалом** прямой и обозначается буквой  $l$  (см. рис. 14.5). Нетрудно заметить, что интервал прямой есть величина, обратная ее уклону:

$$i = \frac{1}{l}.$$

В проекциях с числовыми отметками прямая общего положения может быть задана:

- 1) проекциями двух точек прямой и их отметками (рис. 14.6, а);
- 2) горизонтальной проекцией, отметкой одной из точек прямой и углом наклона прямой к плоскости проекций (рис. 14.6, б);
- 3) проекцией на основную плоскость, отметкой одной из ее точек и уклоном прямой (рис. 14.6, в).

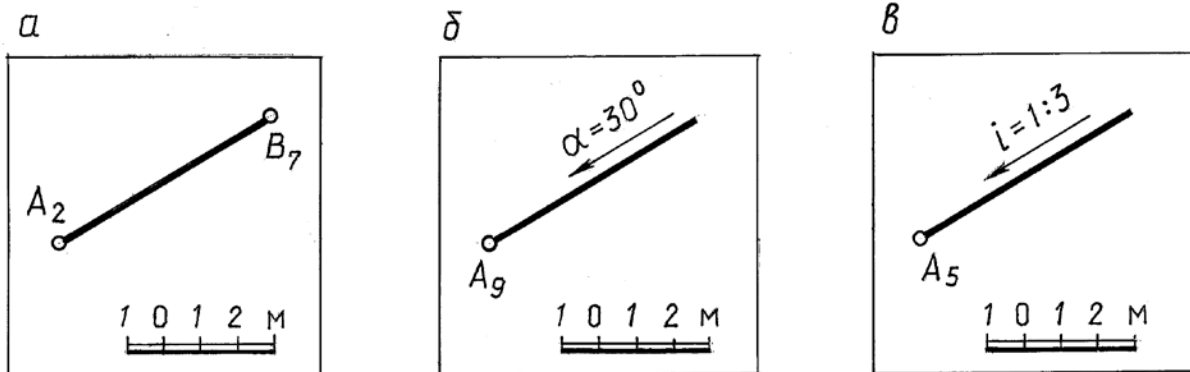


Рис. 14.6

Обозначение угла наклона или уклона прямой должно быть дополнено стрелкой, указывающей направление спуска прямой. Горизонтальную прямую будем обозначать буквой  $h$  с указанием числовой отметки, например  $h_5$ , или только отметкой 5. Отрезок вертикальной прямой задается концевыми точками с указанием их отметок.

### 14.3. Градуирование прямой

Графические действия по определению интервала прямой называются **градуированием** прямой. Проградуировать прямую – это значит определить на ее горизонтальной проекции точки, разность высотных отметок которых равна единице.

Существует несколько способов градуирования прямой. Все они представляют различные варианты решения задачи деления отрезка в данном отношении.

Рассмотрим наиболее распространенные способы решения этой задачи.

*1-й способ* (рис. 14.7) – использование пропорционального деления отрезка. Через один из концов отрезка (например,  $A_{2,3}$ ) проводится вспомогательная прямая любого направления и на этой прямой в произвольном масштабе откладываются величины, соответствующие превышениям между концевыми и искомыми точками отрезка прямой. Построенная последняя точка на вспомогательной прямой соединяется со вторым концом отрезка и через точки деления параллельно замыкающей прямой проводятся прямые. Эти прямые определяют искомые точки на заданной проекции отрезка.

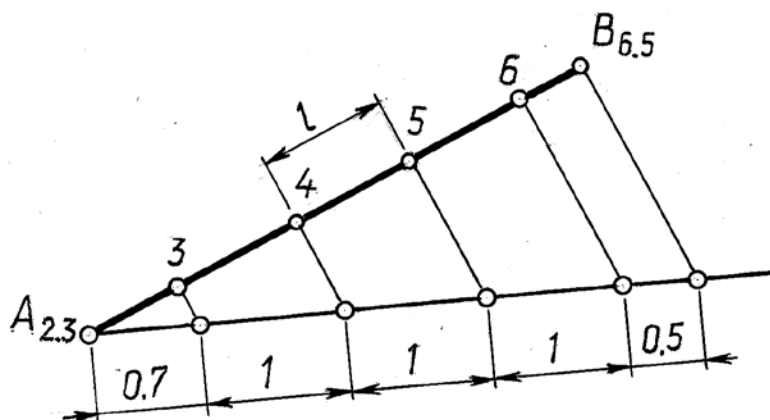


Рис. 14.7

Отметим, что заложение между двумя точками, разность отметок которых равна единице, есть **интервал прямой**. На рис. 14.7 величина интервала показана между точками с отметками 4 и 5.

*2-й способ* (рис. 14.8) – использование дополнительной горизонтально проецирующей (вертикальной) плоскости  $\Pi'$ , параллельной заданному отрезку (или проходящей через него) и совмещенной затем с плоскостью проекций  $\Pi_0$

поворотом вокруг оси  $\frac{\Pi'}{\Pi_0}$ .

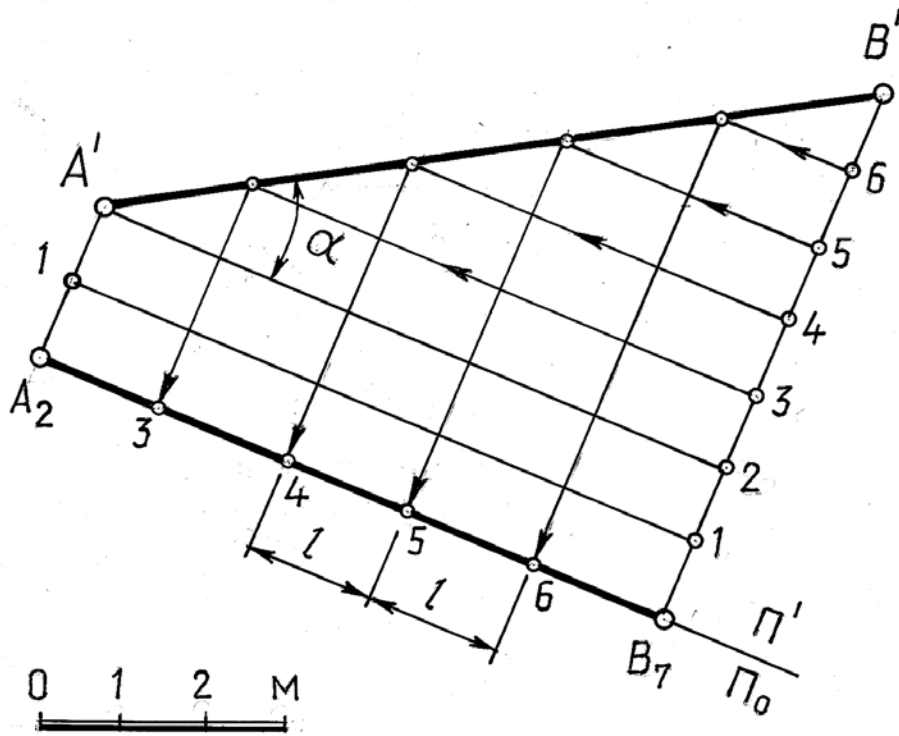


Рис. 14.8

На рис. 14.8 вспомогательная плоскость  $\Pi'$  проведена через заданный отрезок  $AB(A_2B_7)$ , поэтому ось  $\frac{\Pi'}{\Pi_0}$  совпадает с проекцией отрезка. Восстановив перпендикуляры к проекции отрезка (линии связи) в точках, являющихся проекциями концов отрезка, и, отложив на них отрезки, равные высотам этих точек, получают  $A'B'$  – натуральную величину отрезка  $AB$  и угла  $\alpha$  – угла наклона прямой к плоскости  $\Pi_0$ . Затем с помощью прямых, параллельных проекции отрезка, на  $A'B'$  определены точки с целыми отметками, после чего построены проекции этих точек на заданной проекции отрезка.

*3-й способ* – графическое определение интервала прямой с помощью графика уклона прямой, называемого **масштабом уклонов**.

Этот способ можно использовать, если прямая задана проекцией, одной точкой с целой числовой отметкой и известен уклон прямой или угол наклона к основной плоскости.

На рис. 14.9 показано градуирование прямой, которая задана горизонтальной проекцией, точкой  $A_9$  и углом наклона к плоскости проекций. График уклона прямой выполняется в масштабе чертежа: по одной (горизонтальной) оси откладываются заложения, а по другой (вертикальной) – превышения  $H$ . Из начала координат проводится прямая под заданным углом  $\alpha$  к оси  $L$ . На этом графике величина заложения, соответствующая единице превышения и будет интервалом  $l$  данной прямой.

Найденная величина интервала  $l$  откладывается на заданной прямой от заданной точки  $A$ .



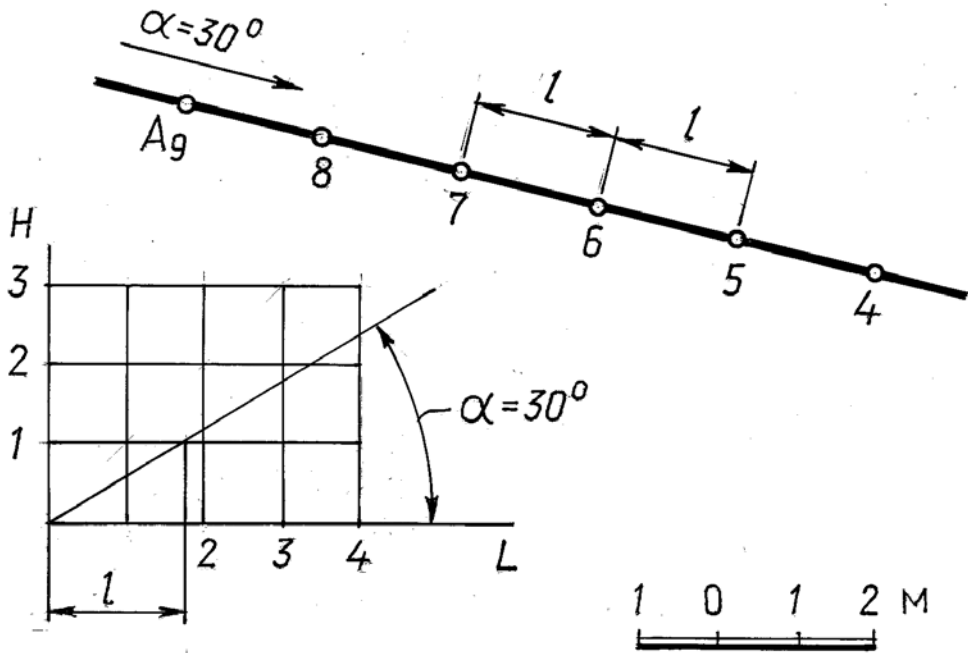


Рис. 14.9

#### 14.4. Взаимное положение двух прямых

Две прямые в пространстве могут пересекаться, скрещиваться и быть параллельными. Однако отсутствие второй проекции не дает возможности определить взаимное расположение прямых непосредственно по чертежу, не проводя предварительно вспомогательных построений. Так, взаимное расположение прямых можно определить, если проградировать прямые и сравнить интервалы, уклоны и отметки точек пересечения проекций прямых. Отметим признаки, характерные для различных случаев расположения прямых.

**Параллельные прямые** – проекции прямых параллельны, уклоны (или интервалы) равны, и числовые отметки возрастают (или убывают) в одном направлении (рис. 14.10). При этом прямые, соединяющие точки с одинаковыми отметками, параллельны. Они являются горизонталями плоскости, проходящей через заданные прямые.

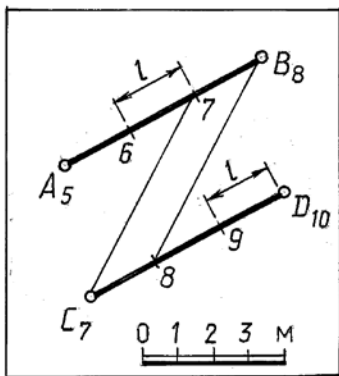


Рис. 14.10

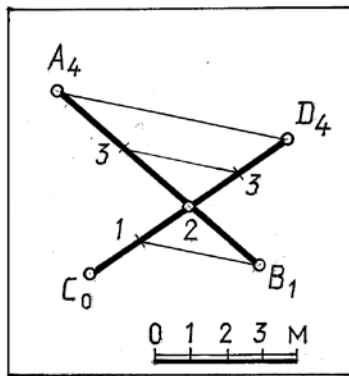


Рис. 14.11

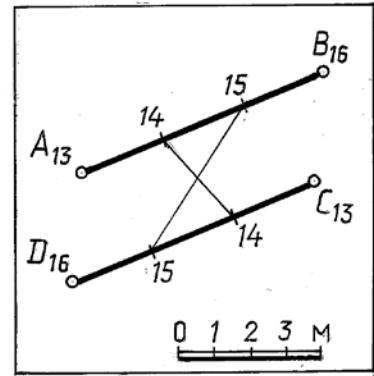


Рис. 14.12

**Пересекающиеся прямые** – проекции прямых пересекаются в точке, которая, будучи отнесена к каждой из пересекающихся прямых, имеет одинаковую отметку (рис. 14.11). Это легко проверить, если прямые проградуйрованы. Отметим, что прямые, соединяющие точки с одинаковыми отметками, параллельны. Они являются горизонталями плоскости, проходящей через заданные пересекающиеся прямые.

**Скрещивающиеся прямые** – прямые, у которых признаки пересечения и параллельности отсутствуют (рис. 14.12). В этом случае прямые, соединяющие точки с одинаковыми отметками, не параллельны.

**Задача 14.1.** Через точку  $A(A_3)$  провести горизонтальную прямую, пересекающую заданную прямую  $CD(C_1D_7)$  (рис. 14.13).

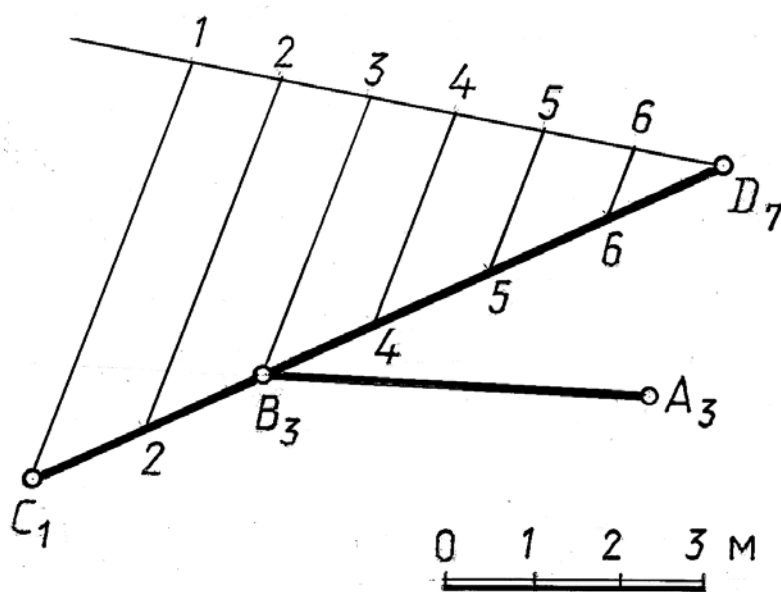


Рис. 14.13

**Решение.** Искомая горизонтальная прямая определяется точкой  $A(A_3)$  и точкой  $B(B_3)$  на прямой  $CD$ , имеющей такую же отметку.

Проградуйруем прямую  $CD$ , применяя пропорциональное деление отрезка. Построенную проекцию  $B_3$  соединим с проекцией  $A_3$ . Прямая  $AB(A_3B_3)$  – искомая.

## 14.5. Плоскость

Плоскость в проекциях с числовыми отметками может быть задана проекциями с числовыми отметками следующих геометрических элементов: трех точек, не лежащих на одной прямой (рис. 14.14, а); прямой и точки вне этой прямой (рис. 14.14, б); параллельных прямых (рис. 14.10); пересекающихся прямых (рис. 14.11); плоской фигурой (рис. 14.14, в).

Но наиболее удобным и наглядным изображением плоскости в проекциях с числовыми отметками является задание с помощью масштаба уклона плоскости.

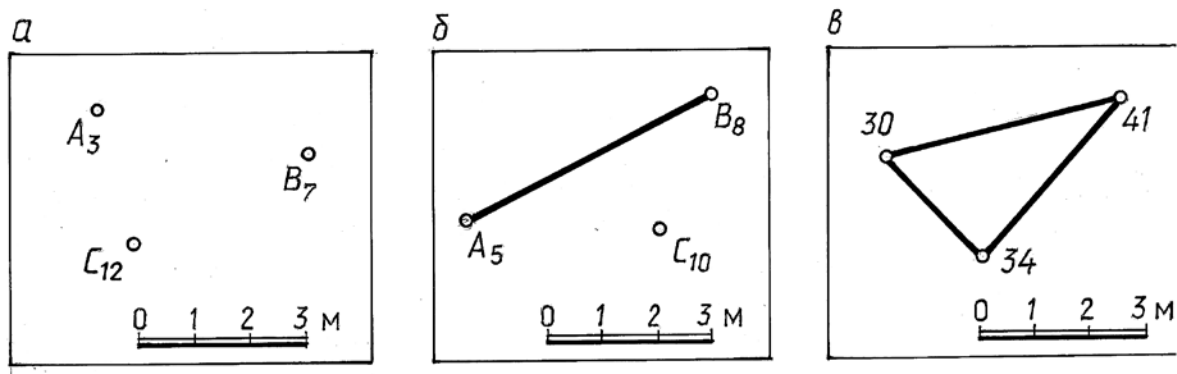


Рис. 14.14

**Масштаб уклона плоскости**, или масштаб падения, – проградированная проекция линии наибольшего ската плоскости. На рис. 14.15 дано наглядное изображение плоскости  $\Gamma$  общего положения. Дадим определения основных элементов этой плоскости, которые используются в проекциях с числовыми отметками.

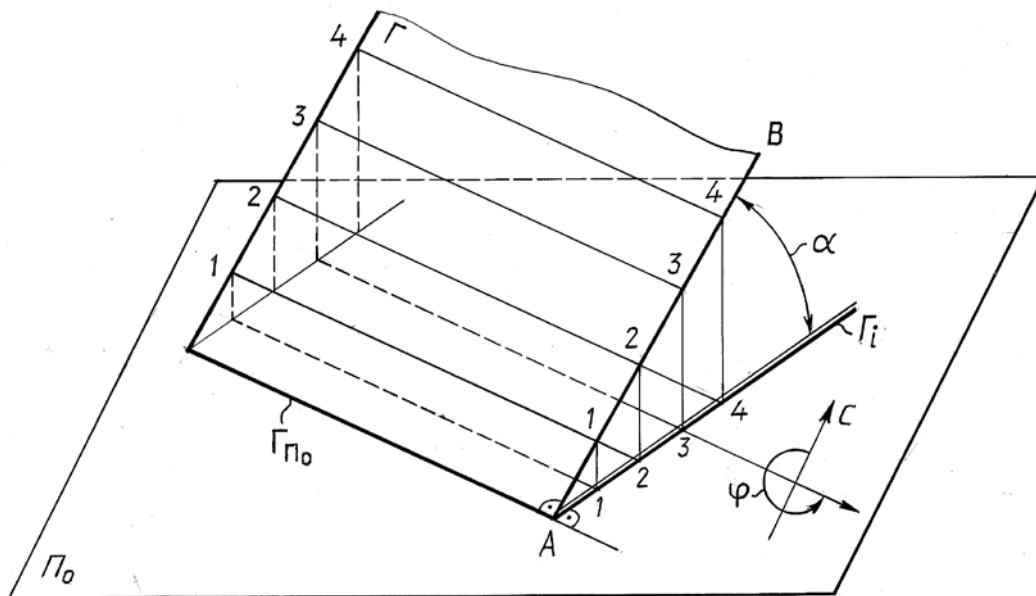


Рис. 14.15

**Отметка горизонтали** – высота горизонтали над плоскостью проекций (на рис. 14.15 горизонтالي проведены соответственно с отметками 1, 2, 3 единицы масштаба). След плоскости  $\Gamma_{\Pi_0}$  является горизонталью с нулевой отметкой.

**Линия наибольшего ската плоскости**, иначе называется **линией падения**  $AB$  (рис. 14.15), – прямая, принадлежащая плоскости и перпендикулярная ее горизонталям ( $AB \perp \Gamma_{\Pi_0}$ ). Она определяет угол падения плоскости (он же угол наклона плоскости). Так как линия наибольшего ската перпендикулярна горизонталям, то масштаб уклона плоскости (проекция линии наибольшего ската) тоже перпендикулярен проекциям горизонталей (теорема об ортогональном проектировании прямого угла).

Изображение плоскости  $\Gamma$  масштабом уклона плоскости показано на рис. 14.16. Масштаб уклона плоскости изображается двумя параллельными прямыми (толстой и тонкой) и обозначается той же буквой, что и плоскость, с нижним индексом  $i - \Gamma_i$ .

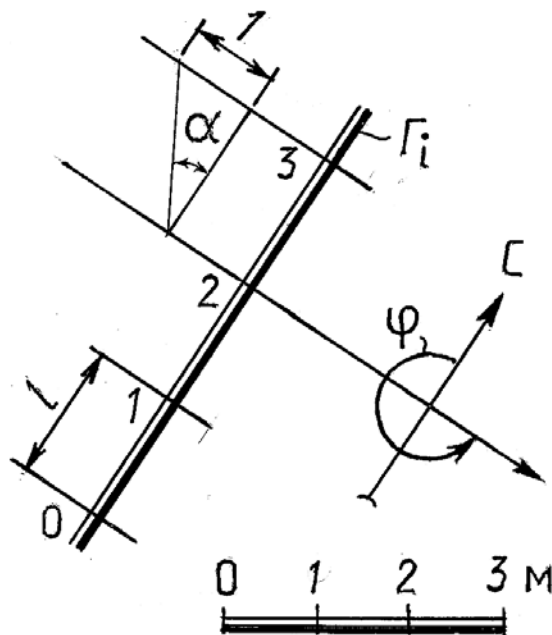


Рис. 14.16

Перпендикулярно масштабу уклона плоскости проводятся проекции горизонталей. Вдоль масштаба уклона плоскости (со стороны тонкой линии) указываются отметки этих горизонталей. Цифры числовых отметок проставляются так, чтобы их верх был ориентирован в сторону подъема плоскости.

Расстояния между соседними делениями масштаба уклона  $l$ , соответствующие единице превышения, являются интервалом линии наибольшего ската, а следовательно, и **интервалом плоскости**.

**Угол падения плоскости**  $\alpha$  – угол наклона плоскости к плоскости проекций (угол наклона линии наибольшего ската к плоскости проекций). На чертеже в проекциях с числовыми отметками угол падения  $\alpha$  определяется из прямоугольного треугольника, у которого один катет равен интервалу линии наибольшего ската, а второй катет равен единице высоты в масштабе чертежа (см. рис. 14.16).

**Уклон плоскости** – тангенс угла падения плоскости. Уклон плоскости равен уклону линии наибольшего ската. Уклон плоскости есть величина, обратная интервалу плоскости.

Для решения инженерных задач на земной поверхности необходимо ориентировать заданную плоскость относительно меридиана Земли. Для этого вводят понятия:

– **направление простирания плоскости** – правое направление ее горизонталей, если смотреть на плоскость в сторону возрастания отметок;

– **угол простирания плоскости** – угол  $\varphi$  между меридианом Земли и направлением простирания (см. рис. 14.15, 14.16). Угол простирания измеряют от северного конца меридиана против часовой стрелки до направления простирания плоскости.

Плоскость задана горизонталью 5, уклоном  $i = 1:3$  и направлением спуска, которое обозначено штрихом в сторону спуска. Такой штрих называется **бергштрихом** (рис. 14.17, а).

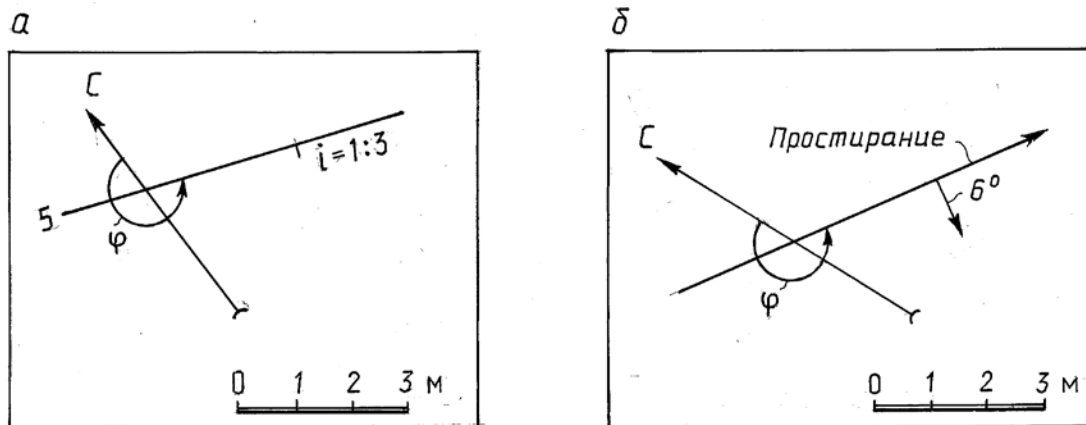


Рис. 14.17

Плоскость может быть задана углом падения и направлением простирания (рис. 14.17, б). Этот метод задания плоскости применяется в топографии, геологии и т. д.

Для решения большинства метрических и позиционных задач удобно, когда плоскость задана горизонталями. Проведение на плоскости горизонталей называется **градуированием** плоскости.

**Задача 14.2.** Определить углы падения  $\alpha$  и простирания  $\varphi$  плоскости  $\Gamma$ , заданной треугольником  $ABC$  (рис. 14.18).

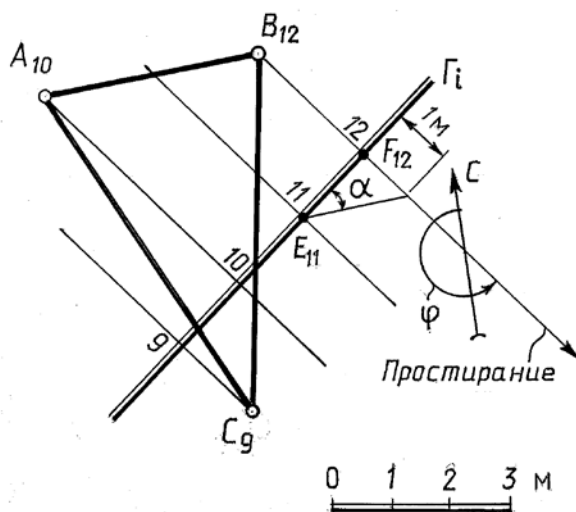


Рис. 14.18

*Решение.* Проградуировав отрезки  $AB$  и  $CB$ , соединяем прямыми точки с одинаковыми отметками. Это будут горизонтали заданной плоскости. Масштаб падения плоскости проводится перпендикулярно горизонталям. С помощью прямоугольного треугольника, одним катетом которого является отрезок  $E_{11}F_{12}$ , а другим – отрезок, равный единице высоты, определяем угол наклона линии наибольшего ската плоскости  $\Gamma$  к  $\Pi_0$ . Затем, установив направление простирания, строим угол простирания  $\varphi$ .

Задачи на взаимную принадлежность точки и прямой линии плоскости в проекциях с числовыми отметками решаются обычными методами.

Прямая в плоскости строится по двум точкам, отметки которых определяются в местах пересечения проекции прямой с горизонталями плоскости (рис. 14.19).

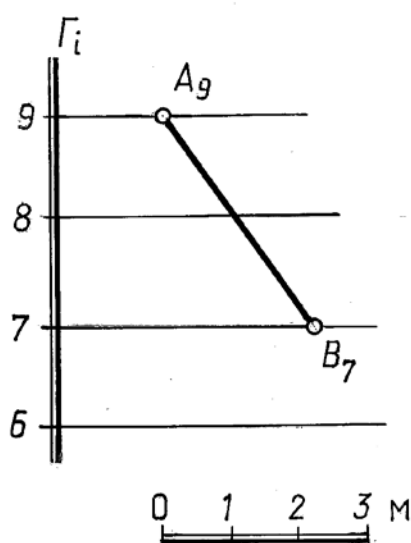


Рис. 14.19

Точка в плоскости строится с помощью произвольной прямой плоскости. Для определения отметки точки вспомогательная прямая градуируется.

При проектировании инженерных сооружений в проекциях с числовыми отметками очень часто необходимо решить два типа задач:

- проведение в плоскости прямой с заданным уклоном  $i$ ;
- проведение через прямую плоскости с заданным уклоном  $i$ .

**Задача 14.3.** В плоскости, заданной масштабом уклона  $\Gamma_i$ , через точку  $A_8$  провести прямую с уклоном  $i = 1:3$  (рис. 14.20).

*Решение.* Интервал прямой, которую требуется построить, равен  $l = 1/i = 3$  единицам масштаба. Следовательно, точка искомой прямой, имеющая отметку 7, должна лежать на горизонтали плоскости с отметкой 7 и быть удалена от точки  $A_8$  на величину интервала прямой  $l = 3$  м. Через точку  $A_8$  проведем окружность радиусом  $R = 3$  м и найдем точки ее пересечения с 7-й горизонталью плоскости  $\Gamma$ . Точка  $A_8$  и полученные точки  $B_7$  и  $C_7$  определяют две прямые, удовлетворяющие условию задачи.

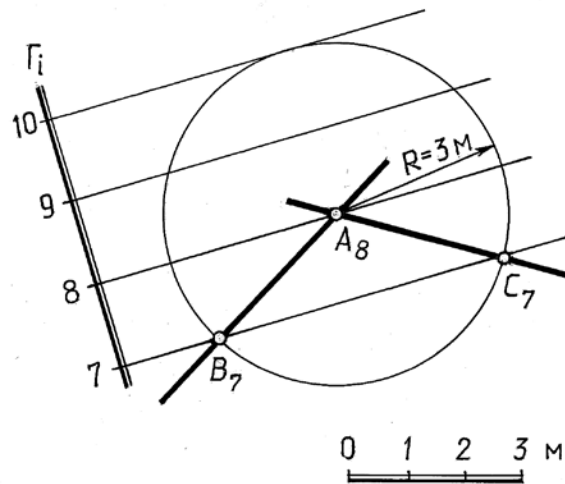


Рис. 14.20

**Задача 14.4.** Через наклонную прямую  $AB(A_2B_5)$  провести плоскость  $\Gamma(\Gamma_i)$ , уклон которой равен  $i = 1:2$  (рис. 14.21).

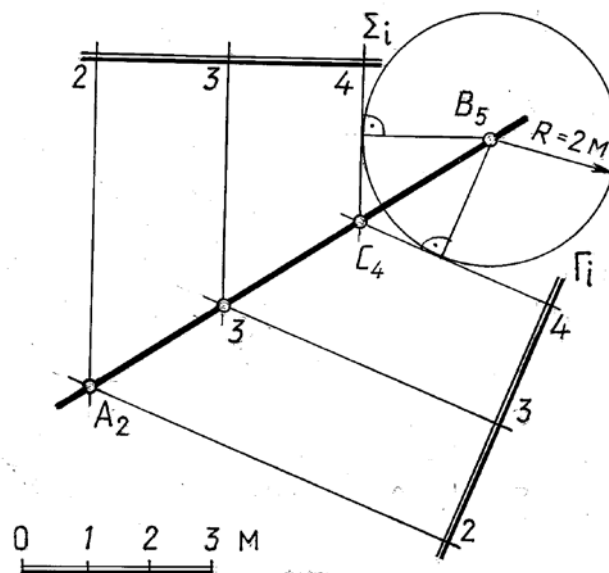


Рис. 14.21

*Решение.* Искомая плоскость  $\Gamma$  является касательной к поверхности прямого кругового конуса, образующие которого имеют уклон, равный уклону плоскости. Горизонталь конуса – окружности, радиусы которых отличаются на величину интервала плоскости. Построения на чертеже выполняются в следующем порядке:

1) из произвольной точки прямой с целой отметкой (на рис. 14.21 использована точка  $B(B_5)$ ) проводится окружность радиусом, равным величине интервала плоскости  $R = 2$  м (горизонталь конуса, высота которой равна единице);

2) из ближайшей точки деления прямой  $C(C_4)$  проводится касательная к построенной окружности. Эта касательная является горизонталью с отметкой 4 искомой плоскости.

**Параллельные плоскости.** Необходимым и достаточным условием параллельности двух плоскостей является параллельность их линий наибольшего ската (рис. 14.22).

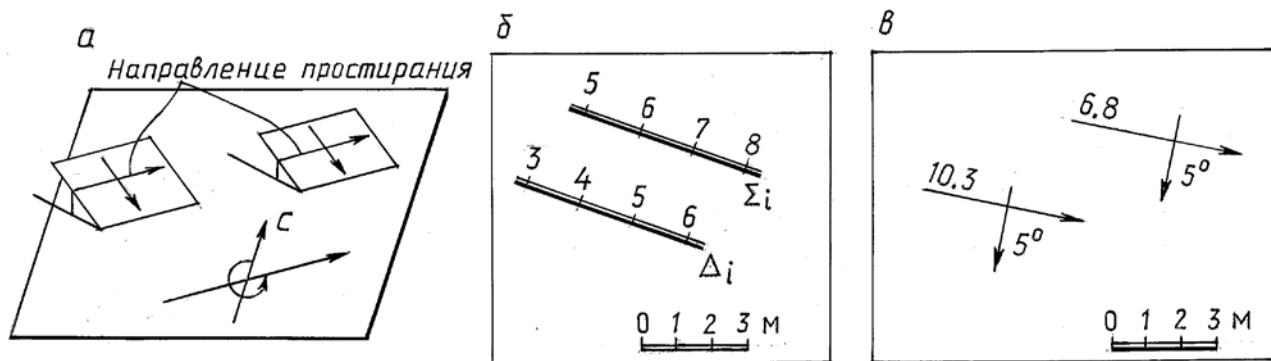


Рис. 14.22

На чертеже в проекциях с числовыми отметками (рис. 14.22, а, б, в) масштабы уклонов параллельных плоскостей должны быть параллельны, иметь равные интервалы, а отметки – возрастать в одном и том же направлении. Признаком параллельности плоскостей является также равенство их углов простирания и уклонов (углов падения).

#### 14.6. Проекции поверхностей

В проекциях с числовыми отметками форма любых поверхностей достаточно полно характеризуется их горизонталями. **Горизонталями поверхности** называются линии пересечения этой поверхности горизонтальными плоскостями. Таким образом, в проекциях с числовыми отметками поверхности задаются линейным каркасом. **Линиями каркаса** являются горизонтали поверхности с целыми и дробными числовыми отметками.

**Многогранники** в проекциях с числовыми отметками изображаются проекциями вершин с указанием их отметок или проекцией и отметкой одной из граней и уклонами других граней (рис. 14.23, а, б).

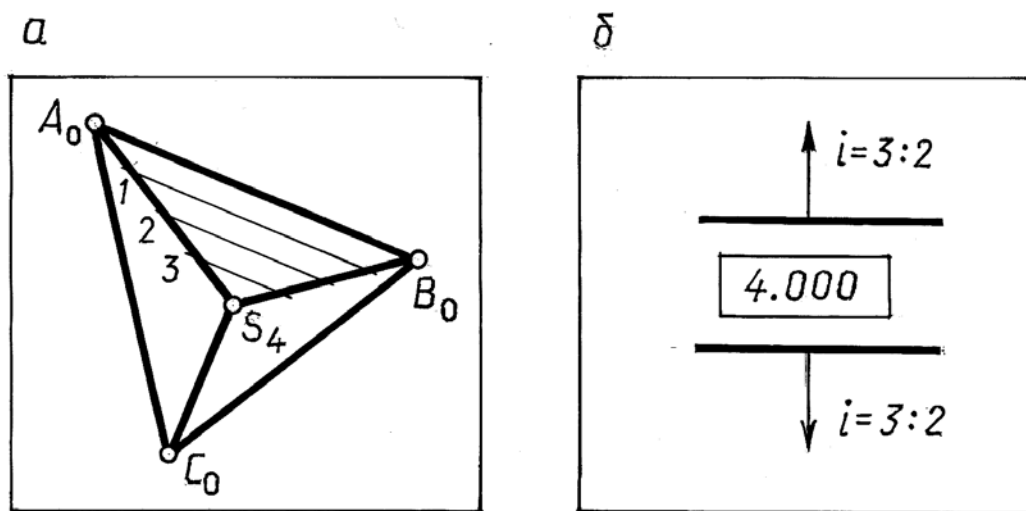


Рис. 14.23



**Коническая поверхность.** Прямой конус, как поверхность равного уклона, изображается проекцией его вершины  $S$  с указанием отметки и горизонталями (окружностями) (рис. 14.24, *a*). Градуированная проекция любой образующей такого конуса является масштабом уклона поверхности и ее линией наибольшего ската. На рис. 14.24, *б* показано задание горизонталями наклонного эллиптического конуса с круговыми горизонтальными сечениями.

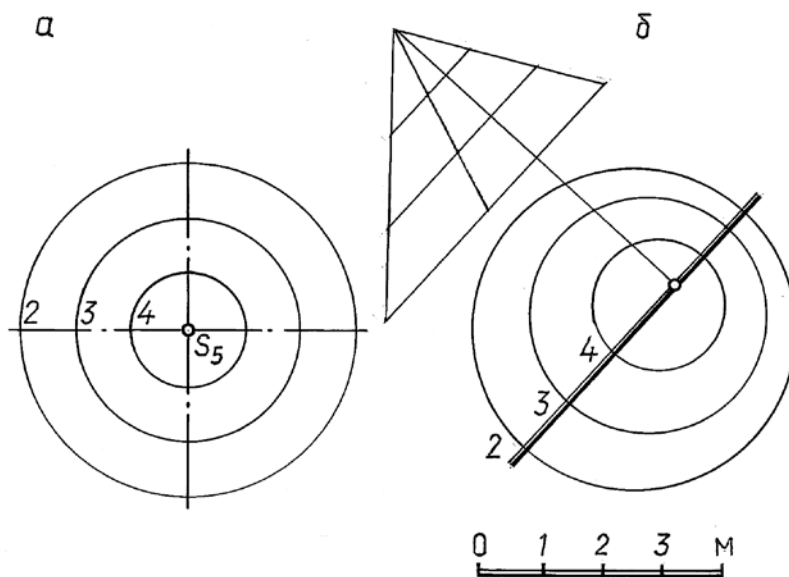


Рис. 14.24

**Поверхность равного уклона** (рис. 14.25, 14.26) является линейчатой поверхностью, все образующие которой составляют с горизонтальной плоскостью постоянный угол. Такая поверхность может быть образована, если прямой круговой конус с вертикальной осью и образующими заданного уклона перемещать вдоль некоторой направляющей, оставляя ось конуса вертикальной. Поверхности откосов насыпей и выемок на криволинейных участках дорог являются поверхностями одинакового уклона.

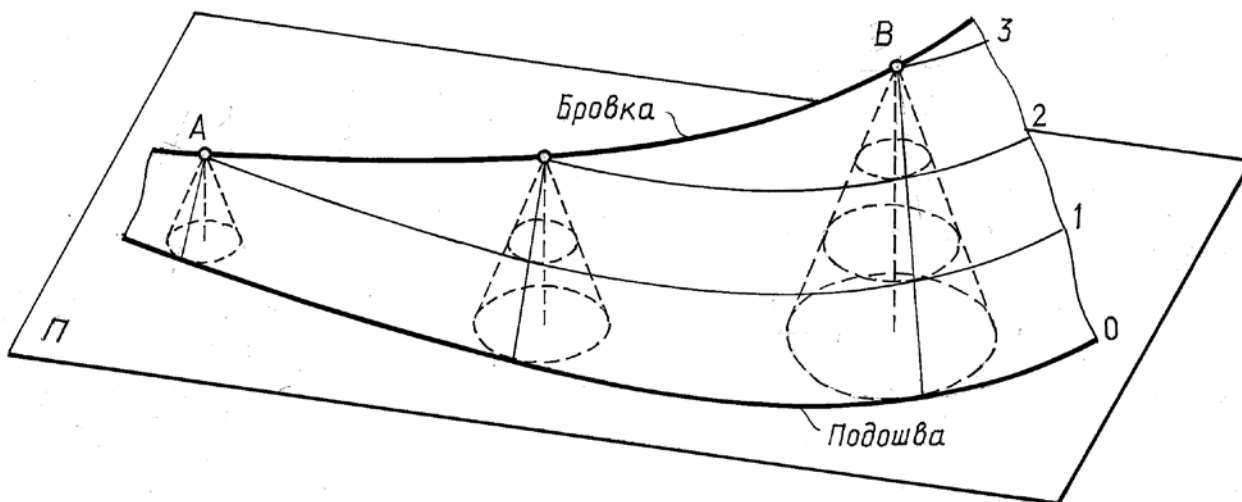


Рис. 14.25

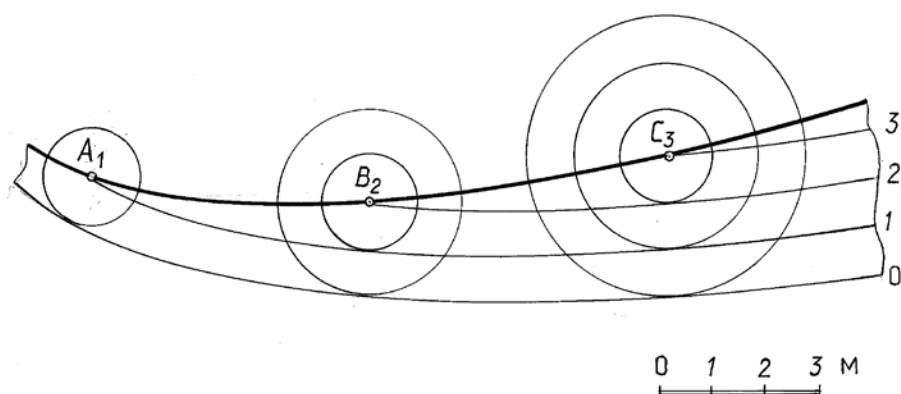


Рис. 14.26

На рис. 14.26 показано построение горизонталей поверхности равного уклона. Здесь каждая горизонталь поверхности является огибающей семейства горизонталей конусов, причем все горизонтали данного семейства имеют одинаковую отметку. Так, на рис. 14.26 горизонталь поверхности с отметкой  $l$  огибает семейство горизонталей конуса с той же отметкой.

Поверхность некоторого участка земли служит примером так называемой **топографической поверхности**, образование которой не подчинено какому-либо геометрическому закону. Топографическая поверхность задается на плане горизонталями, которые получаются в результате пересечения поверхности горизонтальными плоскостями (рис. 14.27). Расстояния между секущими горизонтальными плоскостями выбираются в зависимости от рельефа местности и чертежа. Обычно они кратны одному или пяти метрам. При слабо выраженном рельефе местности, когда горизонтали недостаточно характеризуют неровности земной поверхности, проводятся промежуточные горизонтали. На планах их проводят штриховой линией. Направление спуска указывается бергштрихом — короткой черточкой, которую проводят перпендикулярно горизонтали и направляют от нее в сторону спуска.

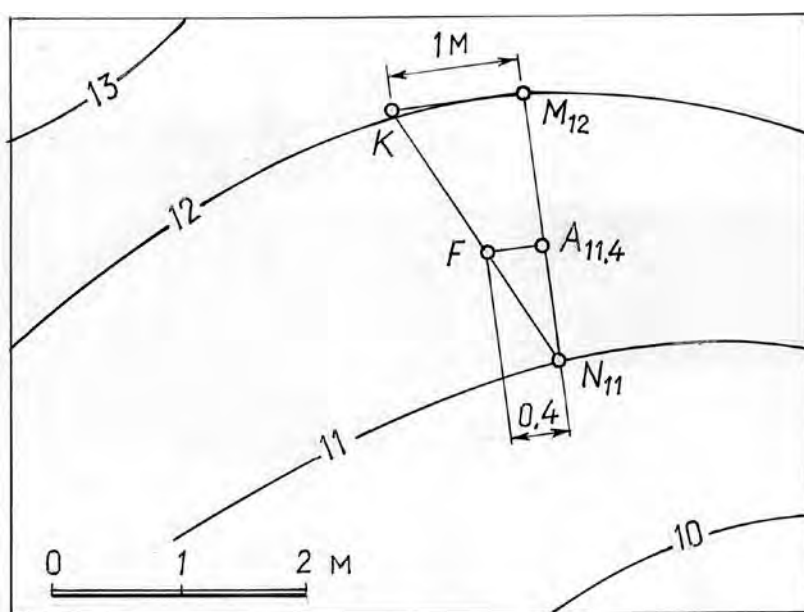


Рис. 14.27

При решении задач на топографической поверхности допускают, что прямая линия, соединяющая две точки смежных горизонталей, принадлежит поверхности.

Построение точки на топографической поверхности сводится к нахождению ее отметки. На рис. 14.27 отметка точки  $A$ , принадлежащей топографической поверхности и расположенной между горизонталями  $11$  и  $12$ , определена следующим образом: через точку  $A$  проведен отрезок  $MN$ , соединяющий точки двух соседних горизонталей, затем построен прямоугольный треугольник  $NMK$ , катет  $KM$  которого равен 1 м в масштабе чертежа. Точка  $A$  делит отрезок  $MN$  на две части, пропорциональные превышениям.

## ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

*Построение пересечения геометрических фигур в проекциях с числовыми отметками. Проектирование инженерных сооружений в проекциях с числовыми отметками*

### 15.1. Построение пересечения геометрических фигур в проекциях с числовыми отметками

#### 15.1.1. Пересечение двух плоскостей, плоскости и поверхности, двух поверхностей

Так как каждая из поверхностей (в том числе и плоскость) изображается при помощи семейства горизонталей, то линия пересечения поверхностей (плоскостей) может быть построена как множество точек пересечения горизонталей с одинаковыми отметками.

Рассмотрим примеры построения линий пересечения различных геометрических фигур в проекциях с числовыми отметками.

**Задача 15.1.** Построить линию пересечения плоскостей  $\Gamma$  и  $\Delta$ , заданных масштабами уклонов (рис. 15.1).

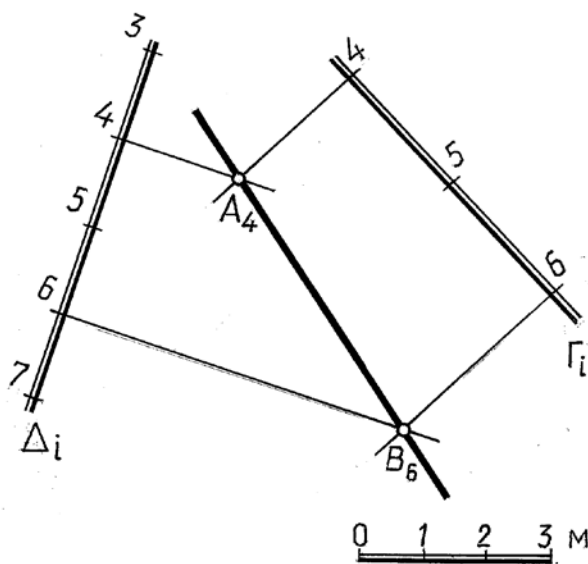


Рис. 15.1

**Решение.** Так как линия пересечения плоскостей – прямая, то для ее построения достаточно найти точки пересечения двух пар одинаковых по высоте горизонталей, например, горизонталей 5 и 7. Точки  $A_5$  и  $B_7$  определяют прямую  $AB$ , которая является линией пересечения заданных плоскостей.

**Задача 15.2.** Построить линию пересечения плоскостей  $\Gamma$  и  $\Delta$ , заданных масштабами уклонов, при условии, что горизонтали этих плоскостей параллельны (рис. 15.2).

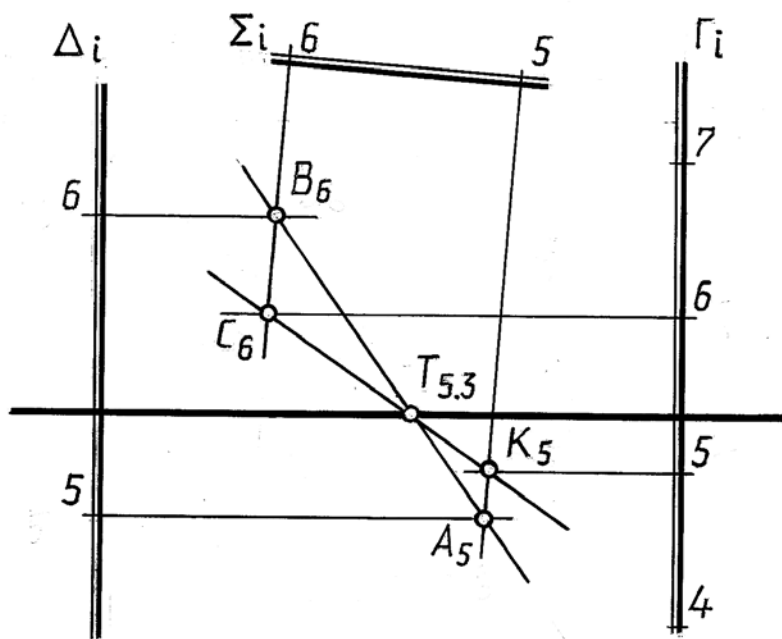


Рис. 15.2

*Решение.* Горизонтали заданных плоскостей параллельны, но сами плоскости не параллельны, так как не равны интервалы и, следовательно, углы наклона к плоскости проекций.

Горизонтали заданных плоскостей параллельны, следовательно, параллельны их горизонтальные следы, которые являются нулевыми горизонталями. В этом случае линия пересечения этих двух плоскостей будет параллельна их горизонталям.

Для определения точки, через которую пройдет искомая линия пересечения заданных плоскостей, проведена вспомогательная плоскость  $\Sigma$ . Эта плоскость задана произвольным масштабом уклонов  $\Sigma_i$ . Затем построены линии пересечения заданных плоскостей со вспомогательной плоскостью  $\Sigma$ . Горизонтали этих плоскостей пересекаются, поэтому нетрудно построить их линии пересечения:

$A_5B_6$  – линии пересечения плоскостей  $\Delta$  и  $\Sigma$ ;

$C_6K_5$  – линии пересечения плоскостей  $\Gamma$  и  $\Sigma$ .

Точка  $T_{5,3}$  пересечения линий  $A_5B_6$  и  $C_6K_5$  принадлежит всем трем плоскостям, а следовательно, линии пересечения заданных плоскостей.

Аналогично решается задача, если горизонтали заданных плоскостей не параллельны, но пересекаются за пределами чертежа. Так как в этом случае направление линии пересечения неизвестно, то вводятся две вспомогательные плоскости и определяются две точки, принадлежащие искомой линии пересечения плоскостей.

**Задача 15.3.** Построить линию пересечения топографической поверхности горизонтально проецирующей (вертикальной) плоскостью  $A$  (рис. 15.3).

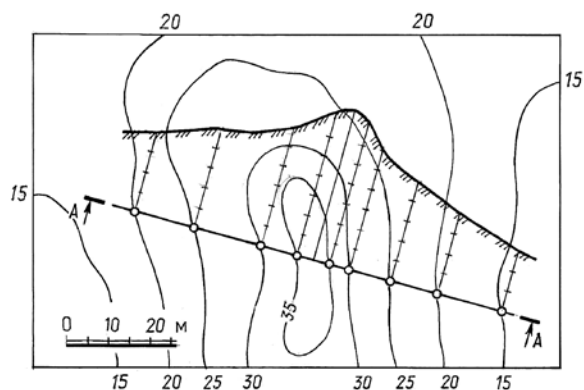


Рис. 15.3

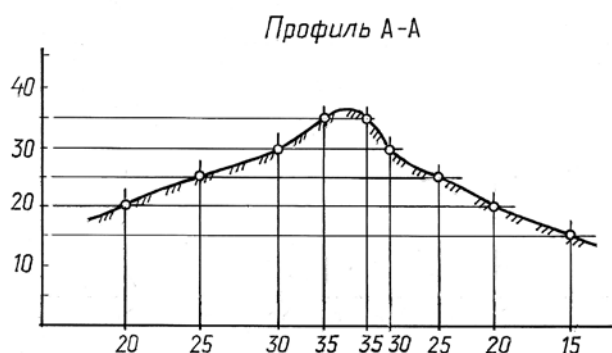


Рис. 15.4

Сечение топографической поверхности вертикальной плоскостью называется **профилем** поверхности. Профиль может изображаться на свободном месте чертежа (вынесенный профиль) или совмещаться с чертежом топографической поверхности (наложенный профиль).

*Решение.* Для построения наложенного профиля (см. рис. 15.3) определяются точки пересечения проекции заданной плоскости (линии  $A-A$ ) с горизонталями топографической поверхности, затем из этих точек проводятся перпендикуляры к линии  $A-A$ , на которых в масштабе чертежа откладываются превышения точек пересечения над выбранной линией уровня – базой профиля. Плавная линия, соединяющая построенные точки, и есть профиль топографической поверхности.

На рис. 15.4 показано построение вынесенного профиля той же топографической поверхности. Для построения вынесенного профиля вычерчивается линия – база профиля – и вертикальная линия, задающая вертикальный масштаб. На базу профиля с плана (см. рис. 15.3) переносятся заложения, определяющие точки пересечения горизонталей топографической поверхности с заданной плоскостью. Из полученных точек восстанавливаются перпендикуляры к базе профиля до пересечения с горизонтальными линиями, имеющими такие же числовые отметки. Полученные таким образом точки соединяются плавной линией, которая образует профиль сечения.

**Задача 15.4.** Построить линию пересечения топографической поверхности наклонной плоскостью (рис. 15.5).

*Решение.* Линия пересечения топографической поверхности плоскостью проходит через точки пересечения их горизонталей с одинаковыми отметками. Соединяя плавной линией построенные точки, получим искомую линию пересечения.

Выполненные построения ясны из чертежа.

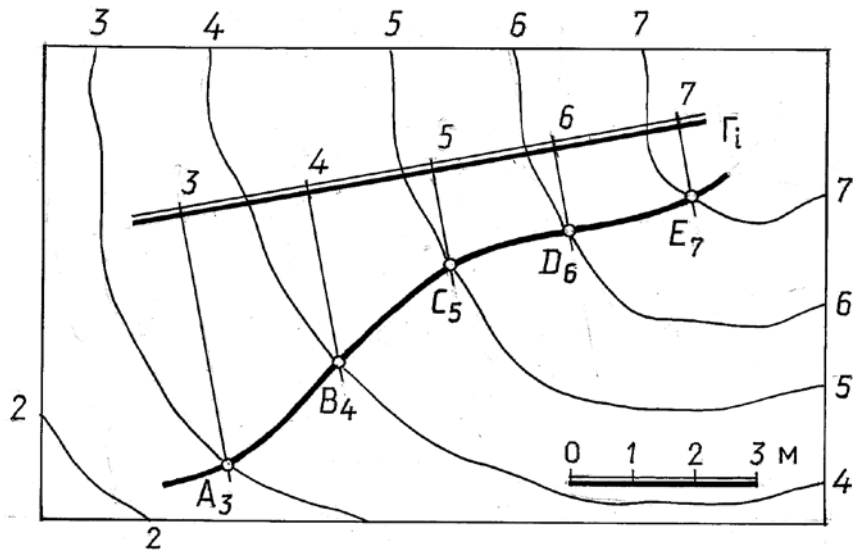


Рис. 15.5

Если горизонталы топографической поверхности и плоскости в пределах чертежа не пересекаются (или не пересекаются вообще), можно применить известный метод вспомогательных секущих плоскостей (см. рис. 15.2). На рис. 15.6 показано построение линий пересечения топографической поверхности с плоскостью  $\Gamma$ , горизонталы которой не пересекаются. Для этого проведены две вспомогательные плоскости:  $\Sigma$  и  $\Delta$ . Плоскость  $\Sigma$  пересекает топографическую поверхность по линии  $A_{24}B_{23}$  (дуга линии пересечения заменена отрезком прямой для упрощения). Эта же плоскость пересекает заданную плоскость по прямой  $C_{23}K_{24}$ . Точка  $T_{23,5}$  пересечения прямых  $A_{24}B_{23}$  и  $C_{23}K_{24}$  принадлежит линии пересечения топографической поверхности и плоскости  $\Gamma$ . Аналогично строится точка искомой линии пересечения – точка  $M_{23,5}$ . В зависимости от требуемой точности можно построить любое количество точек, принадлежащих линии пересечения.

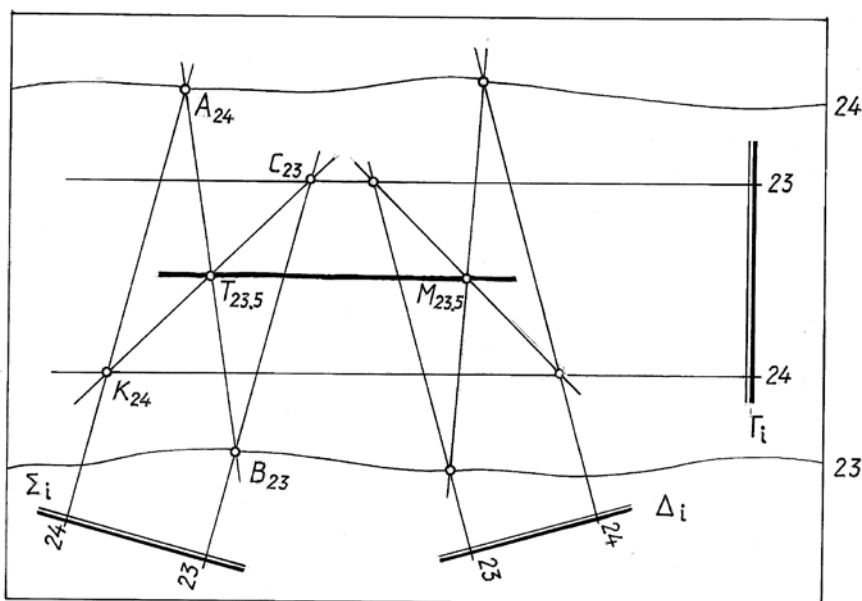


Рис. 15.6

На рис. 15.7 показано решение этой же задачи с использованием вспомогательных секущих вертикальных плоскостей (метод профилей). Заданная топографическая поверхность и плоскость  $\Gamma$  пересечены двумя вспомогательными горизонтально проецирующими плоскостями  $\Sigma$  и  $\Delta$ , и построены профили сечения этими плоскостями.

При построении профиля вертикальные масштабы выбраны произвольно и для упрощения дуги линий, по которым вспомогательные плоскости пересекают топографическую поверхность, заменены отрезками прямых. Все построения ясны из чертежа.

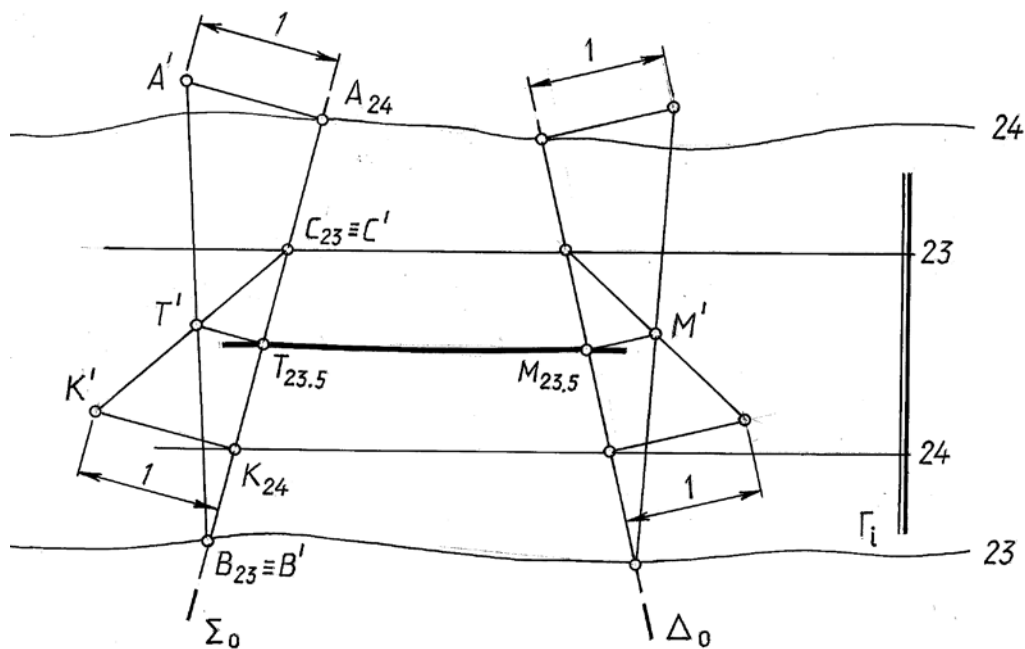


Рис. 15.7

**Задача 15.5.** Построить линию пересечения топографической и конической поверхностей (рис. 15.8).

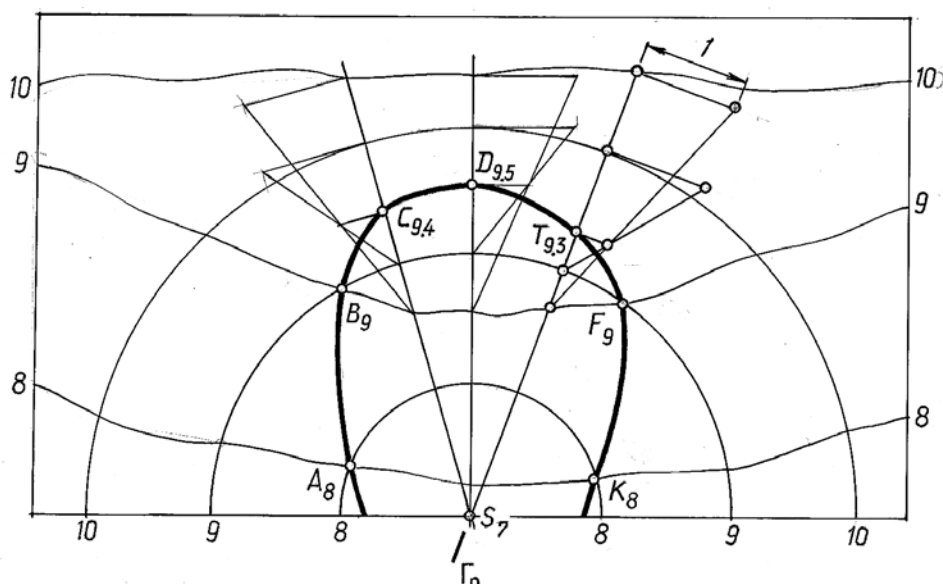


Рис. 15.8



*Решение.* Построение линии пересечения поверхностей сводится к нахождению точек пересечения их горизонталей, имеющих одинаковые отметки.

Для определения точки  $T$ , принадлежащей линии пересечения и находящейся между горизонталями 9 и 10, использована вспомогательная вертикальная плоскость  $\Gamma$ . Построены профили сечения топографической и конической поверхностей плоскостью  $\Gamma$  (условно кривые заменены отрезками прямых).

### 15.1.2. Пересечение прямой линии с плоскостью или поверхностью

Построение точек пересечения прямой линии с плоскостью или поверхностью в проекциях с числовыми отметками аналогично решению такой же задачи в других методах проецирования, а именно:

- 1) прямая заключается во вспомогательную секущую плоскость-посредник;
- 2) строится линия пересечения плоскости посредника с заданной плоскостью (поверхностью);
- 3) отмечается точка (точки) пересечения построенной линии с заданной прямой.

Рассмотрим решение задач на примерах. Отметим, что в качестве посредника можно использовать вертикальную плоскость (метод профилей) или плоскость общего положения (метод горизонталей).

**Задача 15.6.** Определить точку пересечения прямой  $AB$  с плоскостью  $\Gamma$  (рис. 15.9).

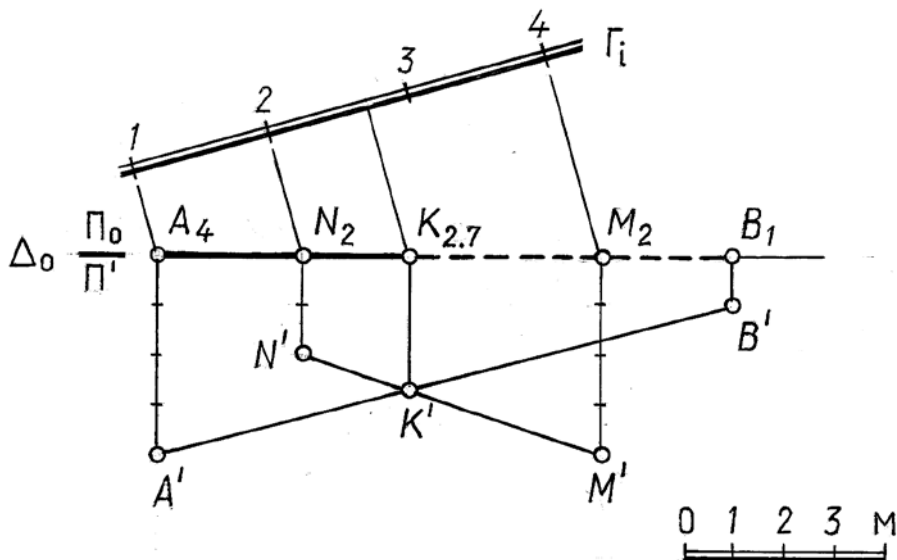


Рис. 15.9

*Решение.* Для решения задачи через заданную прямую проведена горизонтально проецирующая плоскость  $\Delta$ , пересекающая заданную плоскость по прямой  $MN$ . С помощью замены плоскостей проекций построены дополнительная

проекция прямой  $AB$  и линии пересечения двух плоскостей. Вначале определена дополнительная проекция  $K'$  искомой точки пересечения, а затем и горизонтальная проекция.

Решение этой задачи можно выполнить с помощью плоскости общего положения.

**Задача 15.7.** Определить точку пересечения прямой  $AB$  с плоскостью  $\Gamma$  (рис. 15.10).

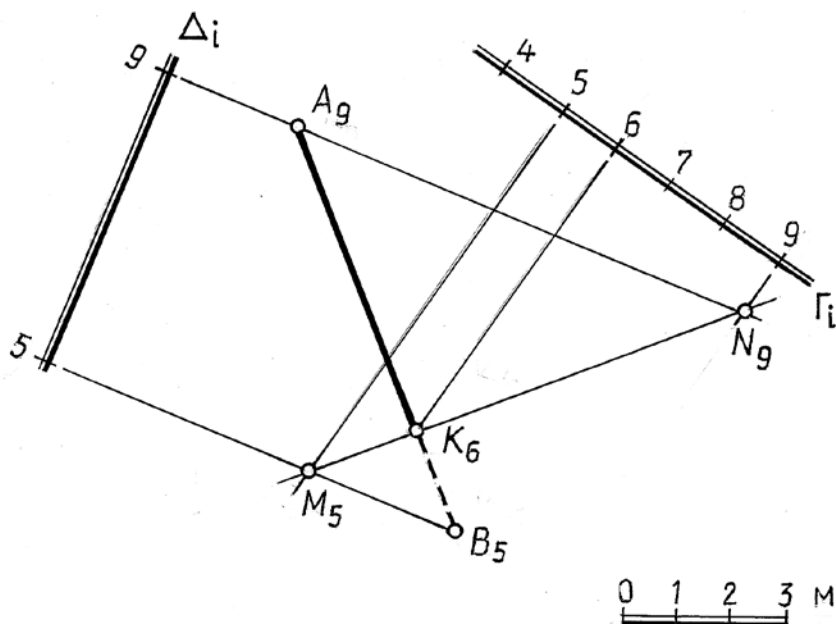


Рис. 15.10

*Решение.* Через прямую  $AB$  проводится произвольная вспомогательная плоскость общего положения  $\Delta_i$ , заданная горизонталями ( $h_9, h_5$ ).

Горизонтали вспомогательной плоскости проводятся через точки  $A$  и  $B$  так, чтобы они в пределах чертежа пересекали горизонталы, имеющие те же отметки заданной плоскости  $\Gamma_i$ .

Затем строится линия пересечения вспомогательной плоскости  $\Delta_i$  с плоскостью  $\Gamma$  – прямая  $MN$ . Точка  $K$  – точка пересечения прямой  $AB$  и линии  $MN$  – есть искомая точка пересечения прямой с плоскостью  $\Gamma$ . Отметка точки  $K$  определяется по масштабу уклона плоскости  $\Gamma$ .

**Задача 15.8.** Измерить расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\Gamma$  (рис. 15.11).

*Решение.* Перпендикулярно горизонталям плоскости  $\Gamma$  проводим вертикальную плоскость  $\Pi'$ . Заменой плоскостей проекций получаем вырожденную проекцию плоскости  $\Gamma$  на плоскость  $\Pi'$  (линия  $N'M'$ ) и новую проекцию точки  $A$  ( $A'$ ). Из  $A'$  спускаем перпендикуляр на  $N'M'$  и получаем точку  $K'$ . Отрезок  $A'K'$  и является натуральной величиной расстояния от точки  $A_8$  до плоскости  $\Gamma$ .

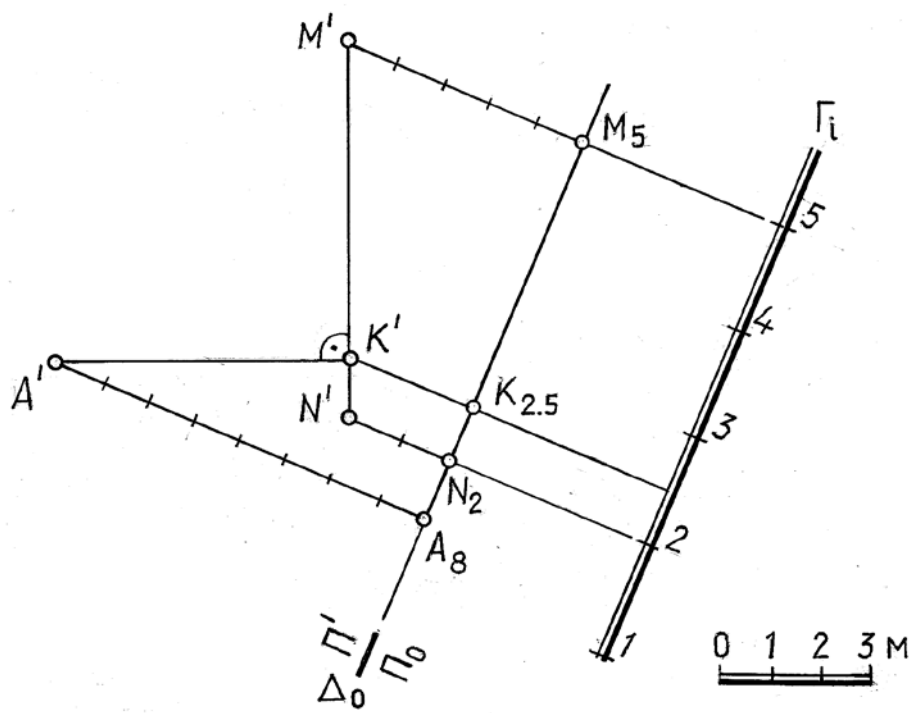


Рис. 15.11

**Задача 15.9.** Построить точки пересечения прямой с топографической поверхностью (рис. 15.12, 15.13).

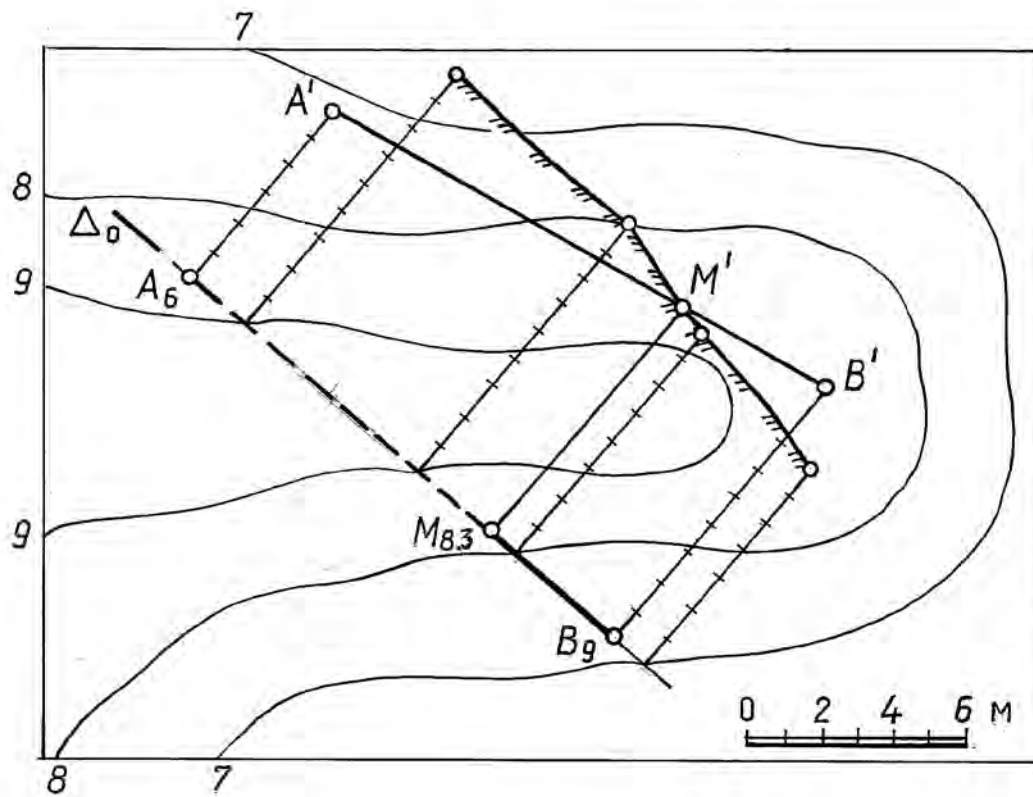


Рис. 15.12

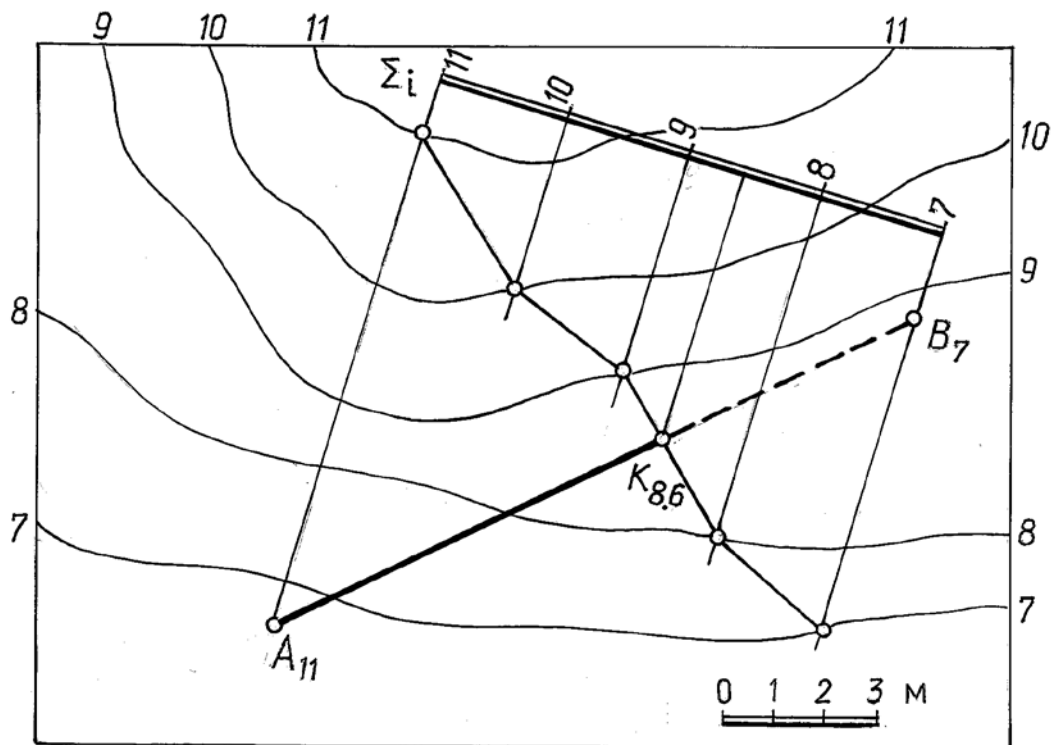


Рис. 15.13

*Решение.* Через прямую  $AB$  (см. рис.15.12) проводится горизонтально проецирующая плоскость  $\Delta$  и строится профиль этого сечения топографической поверхности.  $A'B'$  – профиль прямой в плоскости  $\Sigma$ . Точка пересечения проекции  $A'B'$  с профилем топографической поверхности определяет проекцию  $M'$  – точки пересечения заданной прямой с топографической поверхностью. Проведя линию проекционной связи, определяют горизонтальную проекцию этой точки.

Если на чертеже задана проградированная проекция прямой, то для решения задачи рационально использовать плоскость-посредник общего положения, как показано на рис. 15.13. Для определения точки пересечения прямой  $AB$  с топографической поверхностью через прямую  $AB$  проведена плоскость общего положения  $\Sigma$ . Вспомогательная плоскость задана на чертеже с помощью горизонталей, которые проведены так, чтобы в пределах чертежа они пересекали горизонталы с одинаковыми отметками топографической поверхности. Затем построено сечение топографической поверхности плоскостью-посредником и отмечена точка пересечения построенной линии и заданной прямой  $AB$ , точка  $K$  – есть искомая точка пересечения прямой с топографической поверхностью. Отметка точки  $K$  определяется по масштабу уклона вспомогательной плоскости  $\Sigma$ .

## 15.2. Проектирование инженерных сооружений в проекциях с числовыми отметками

Метод проекций с числовыми отметками имеет широкое применение в проектировании инженерных земляных сооружений. Примером таких сооружений являются различные горизонтальные строительные площадки.

Распространенной задачей является определение границ земляных работ при организации строительной площадки, что выражается в определении линий срезки и подсыпки, организации откосов согласно полученному заданию. Если уровень площадки выше уровня поверхности местности, то строительная площадка выполняется в виде **насыпи**, если ниже – то в виде **выемки**. Плоскости и поверхности, ограничивающие строительную площадку со всех сторон и соединяющие ее с поверхностью местности, называются **откосами**. Уклоны откосов выбираются в зависимости от типа грунта и задаются при проектировании строительных площадок.

При проектировании строительных площадок решаются следующие рассмотренные ранее геометрические задачи:

- 1) проведение плоскостей с заданным уклоном через отрезки прямых, ограничивающих площадку в плане;
- 2) проведение поверхностей с заданным уклоном через дуги кривых, ограничивающих площадку;
- 3) построение линий пересечения соседних откосов (двух плоскостей, двух поверхностей или плоскости с поверхностью);
- 4) построение пересечения поверхностей или плоскостей откосов с топографической поверхностью – определение границ земляных работ.

Проиллюстрируем сказанное конкретным примером.

**Задача 15.10.** На плоском склоне запроектировать откосы и определить границы земляных работ горизонтальной строительной площадки с отметкой 50 м и аппарели («*аппарель*» – пологий въезд или спуск на горизонтальную площадку) (рис.15.14). Уклоны откосов насыпи  $i_n = 2:3$ , уклоны откосов выемки  $i_b = 1:1$ , уклон аппарели  $i_a = 1:3$ .

*Решение*

1. Предварительно вычерчиваем график масштаба уклонов и графически определяем величины интервалов для откосов выемки и насыпи.

2. Определяем точки нулевых работ (точка нулевых работ – точка, в которой профиль площадки пересекается с профилем местности, и, следовательно, в этом месте никаких земляных работ производить не требуется). Горизонталь 50 склона пересекает контур площадки с отметкой 50 в точках  $A_{50}$  и  $B_{50}$  по линии нулевых работ. Выше нее будет выемка, ниже – насыпь.

3. Строим масштабы уклонов для откосов насыпей и выемок горизонтальной площадки, проведя их перпендикулярно к сторонам строительной площадки. Строим горизонтали откосов.

4. Строим горизонтали откосов аппарели. С геометрической точки зрения эта задача сводится к построению плоскости заданного уклона через наклонную прямую. Аппарель пересекает плоскость склона по линии  $K_{48}M_{45}$ , которая помогает определить точки нулевых работ на аппарели (точки  $N$  и  $L$ ).

5. Строим линии пересечения соседних откосов, построив точки пересечения горизонталей откосов с одинаковыми отметками.

6. Строим границы земляных работ, определив точки пересечения горизонталей откосов и склона с одинаковыми отметками.

7. Для более наглядного выражения направления ската у верха кромок откосов наносятся штрихи перпендикулярно горизонталям (ГОСТ 21.108–78). Расстояние между длинными штрихами 3–4 мм; между короткими и длинными 1,5–2 мм. Штрихи проводят линиями одинаковой толщины, равной 0,1–0,15 мм.

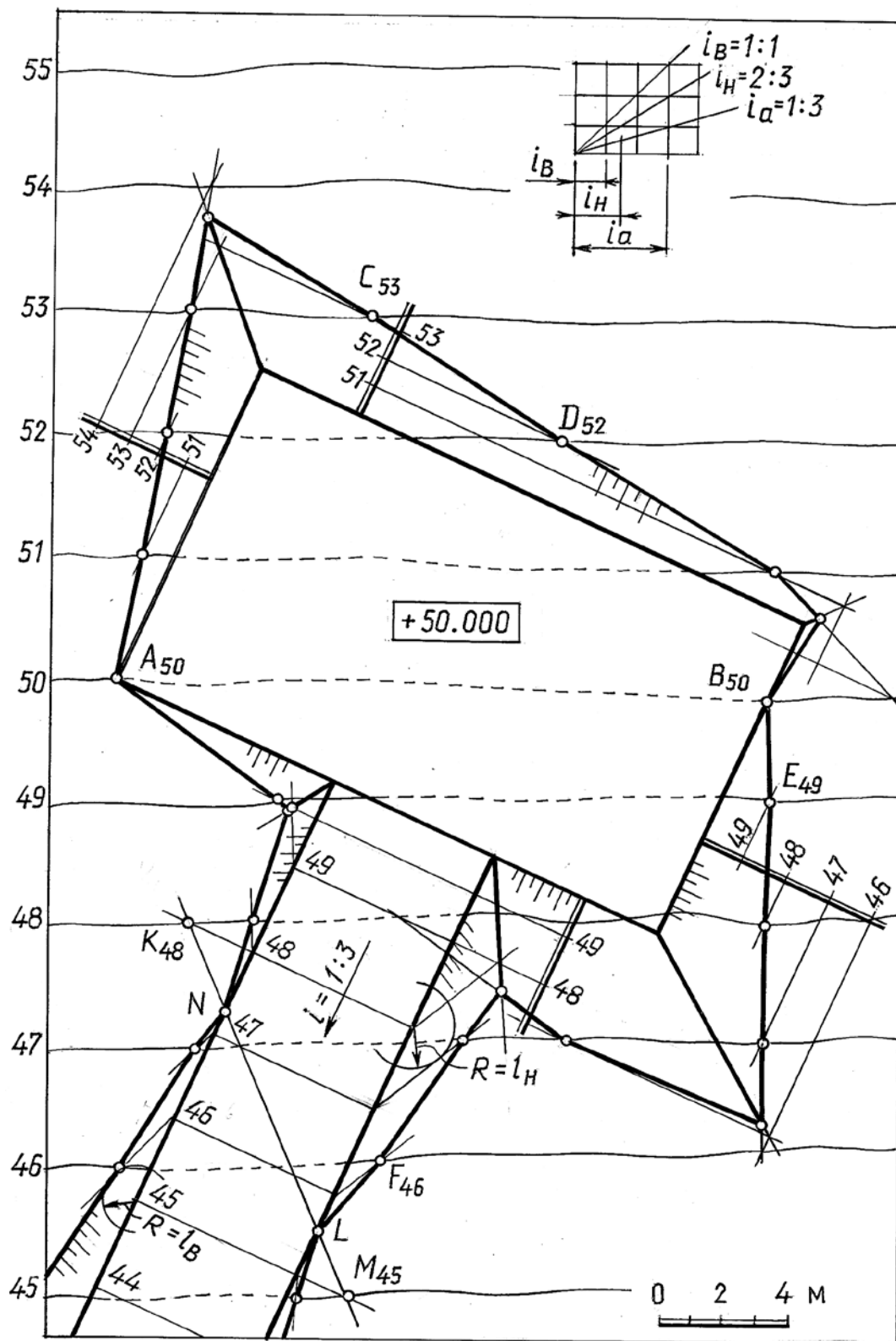


Рис. 15.14

## ПЕРСПЕКТИВА

*Центральное проецирование. Аппарат линейной перспективы.  
Перспектива прямой. Построение перспективы прямой, принадлежащей предметной плоскости. Построение перспективы точки, принадлежащей предметной плоскости. Построение перспективы отрезка прямой, принадлежащей предметной плоскости*

### 16.1. Центральное проецирование

Чтобы получить центральную проекцию геометрической фигуры на плоскости проекций  $K$  (рис. 16.1), необходимо:

- 1) через точки фигуры провести проецирующие лучи так, чтобы они проходили через центр проекции – точку  $S$ ;
- 2) определить точки пересечения проецирующих лучей с плоскостью проекций  $K$ .

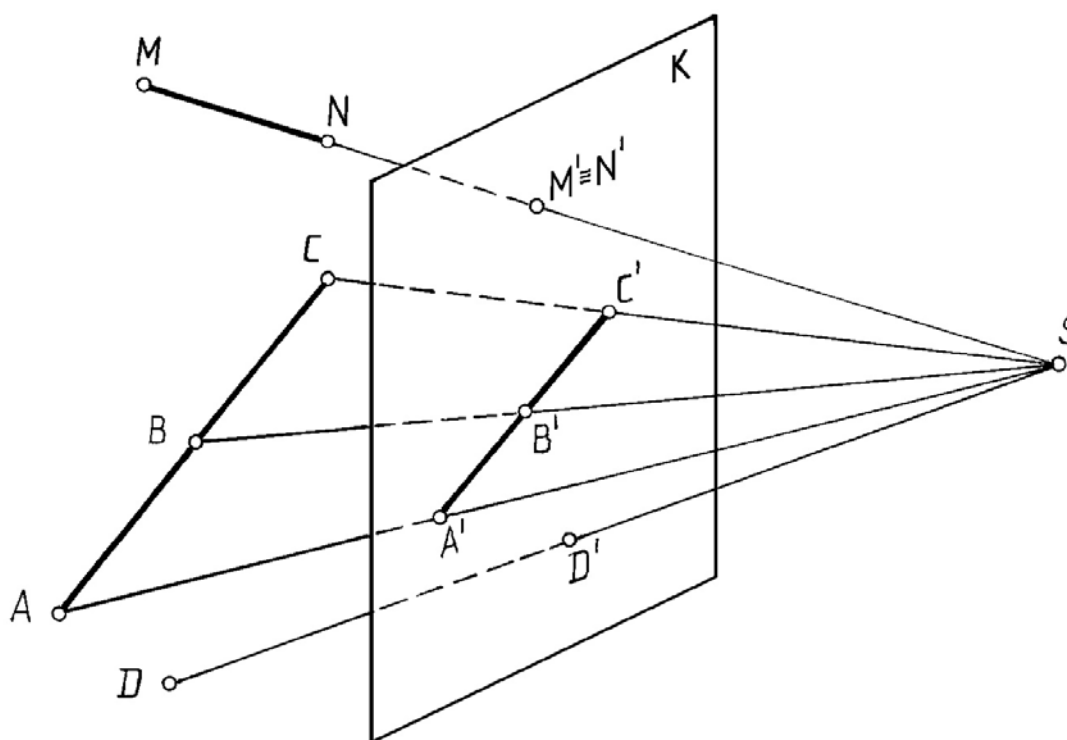


Рис. 16.1

Свойства центрального проецирования (см. рис. 16.1).

1. Проекция точки есть точка.
2. Проекция прямой есть прямая или точка.
3. Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции прямой.

**Перспективой** называется изображение, построенное способом центрального проецирования при определенным образом заданном центре проекций  $S$  и плоскости проекций  $K$  (картине), отвечающее условиям зрительного восприятия. Достоинство перспективы – наглядность; недостаток – проецирование на одну плоскость проекций (получение обратимого чертежа).

Перспектива, построенная на плоскости, называется **линейной**, на цилиндрической поверхности – **панорамной**, на сферической поверхности – **купольной**.

## 16.2. Аппарат линейной перспективы

В архитектуре и строительстве находит применение линейная перспектива. Аппарат линейной перспективы изображен на рис. 16.2.

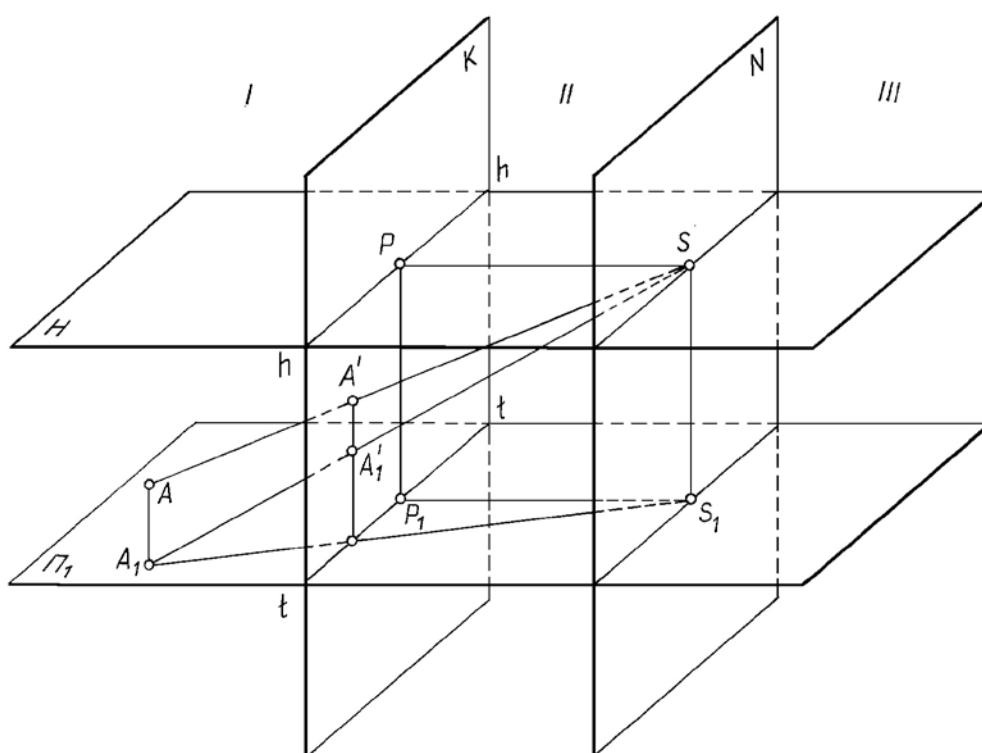


Рис. 16.2

$\Pi_1$  – горизонтальная плоскость, на которой располагается объект проецирования, называется **предметной плоскостью**.

$K$  – плоскость, перпендикулярная предметной плоскости, на которую осуществляется проецирование, называется **картинной плоскостью** или **картинной**,  $K \perp \Pi_1$ .

$S$  – центр проецирования, т. е. точка, в которой располагается глаз наблюдателя, называется **точкой зрения**.

$N$  – плоскость, проходящая через точку зрения параллельно картине, называется **нейтральной плоскостью**,  $N \parallel K$ .

Картинная и нейтральная плоскости делят все пространство на три части:



– **предметное** пространство I (которое от наблюдателя находится за картиной и в котором располагается проецируемый объект (предмет));

– **промежуточное** пространство II (заключенное между картиной и нейтральной плоскостью);

– **мнимое** пространство III (расположенное по другую сторону от нейтральной плоскости);

$H$  – горизонтальная плоскость, проходящая через точку зрения, называется **плоскостью горизонта**,  $H \parallel \Pi_1$ .

$hh = H \cap K$  – **линия горизонта**;

$tt = \Pi_1 \cap K$  – **основание картины** (линия Земли);

$hh \parallel tt$ .

$SP$  – перпендикуляр, опущенный из точки зрения  $S$  на картинную плоскость  $K$ , называется **главным лучом** ( $SP \perp K$ ).

$P = SP \cap K$  – **главная точка** картины;

$PP_1$  – **главная линия** картины,  $PP_1 \perp tt$  и  $PP_1 \perp hh$ .

Ортогональные проекции точек на предметную плоскость  $\Pi_1$ , называются **основаниями** этих точек:

$A_1$  – основание точки  $A$ , расположенной в предметном пространстве;

$P_1$  – основание главной точки картины,

$S_1$  – основание точки зрения или **точка стояния**.

$SS_1$  – расстояние от точки зрения до предметной плоскости, называемое **высотой точки зрения** (высотой горизонта)  $|SS_1| = |PP_1|$ .

$PS$  – расстояние от точки зрения до картины, называемое **главным** или **дистанционным** расстоянием.

$A' = AS \cap K$  – **перспектива** точки  $A$ .

$A_1' = A_1S \cap K$  – перспектива основания или **вторичная** проекция точки  $A$ .

Одним из требований, предъявляемых к чертежу, является его **обратимость**. Для получения обратимого чертежа при проецировании на одну плоскость проекций необходима **вторичная проекция**. Таким образом, перспектива точки и ее вторичная проекция однозначно определяют положение точки в пространстве.  $A'A_1'$  – линия связи между **перспективой точки и ее вторичной проекцией**.  $A'A_1' \perp hh$ ;  $A_1'A' \parallel PP_1$ .

Построение перспективного изображения (рис. 16.3) начинают с задания основных элементов перспективного аппарата, принадлежащих картине. Вначале задают горизонтально расположенные линии земли  $tt$  и горизонта  $hh$ , расстояние между которыми равно высоте точки зрения  $SS_1$ . В произвольном месте (обычно по центру) задают главную линию картины, проводя  $PP_1$  перпендикулярно линии горизонта.

Иногда на перспективном изображении показывают дистанционную окружность. Это окружность с центром в точке  $P$  радиусом  $PD = PS$ . Точка  $D$  называется **дистанционной**.

По положению **вторичной проекции** точки (перспективы основания точки) относительно линий  $hh$  и  $tt$  можно судить о положении точки в пространстве, что видно из схемы перспективного аппарата, изображенной на рис. 16.2–16.4.

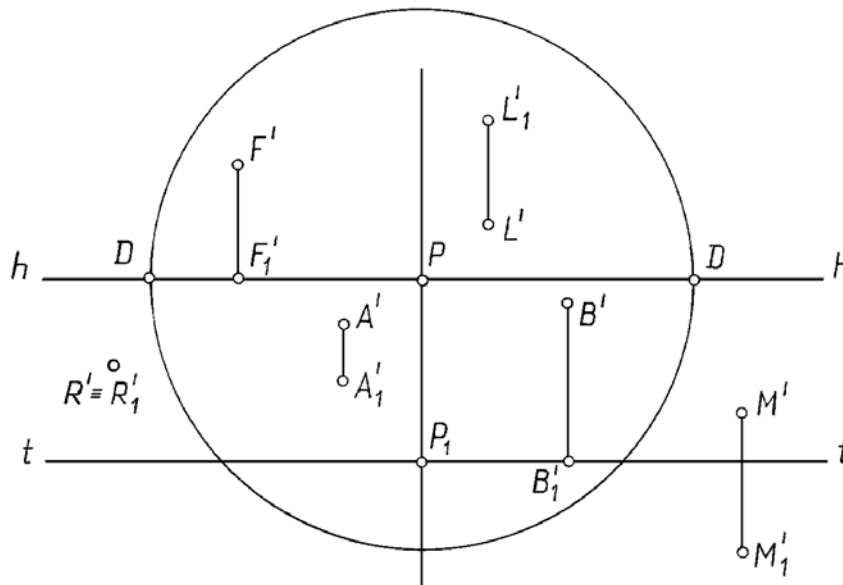


Рис. 16.3

Если  $A_1'$  (см. рис. 16.3) находится между линиями  $hh$  и  $tt$ , то точка  $A$  находится в предметном пространстве.

Если  $M_1'$  расположена ниже  $tt$ , то точка  $M$  находится в промежуточном пространстве.

Если  $L_1'$  расположена выше линии  $hh$ , то точка  $L$  находится в мнимом пространстве.

Если  $B_1'$  расположена на линии  $tt$ , то точка  $B$  принадлежит картине.

Если  $R' \equiv R_1'$ , то точка  $R$  лежит на плоскости  $\Pi_1$ .

Если  $F_1'$  расположена на линии  $hh$ , то точка  $F$  находится в бесконечности, однако на чертеже это показать невозможно.

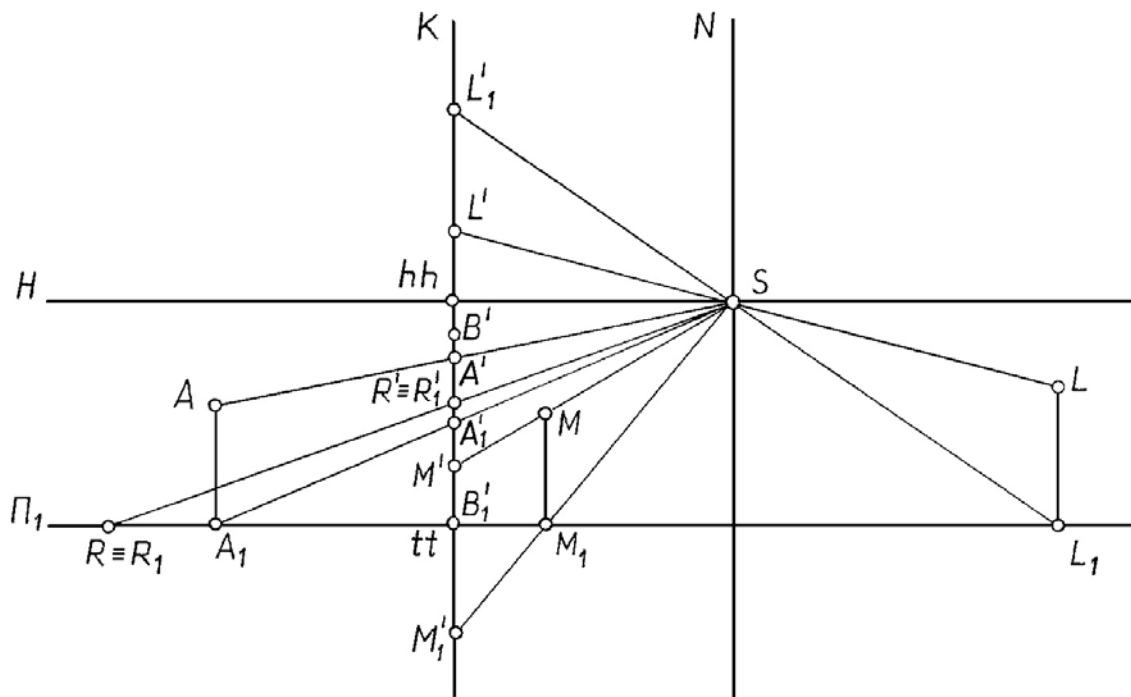


Рис. 16.4

### 16.3. Перспектива прямой

Две точки определяют прямую в пространстве. Чтобы построить перспективу прямой, обычно строят перспективу двух ее точек – картинный след и точку схода прямой (рис. 16.5).

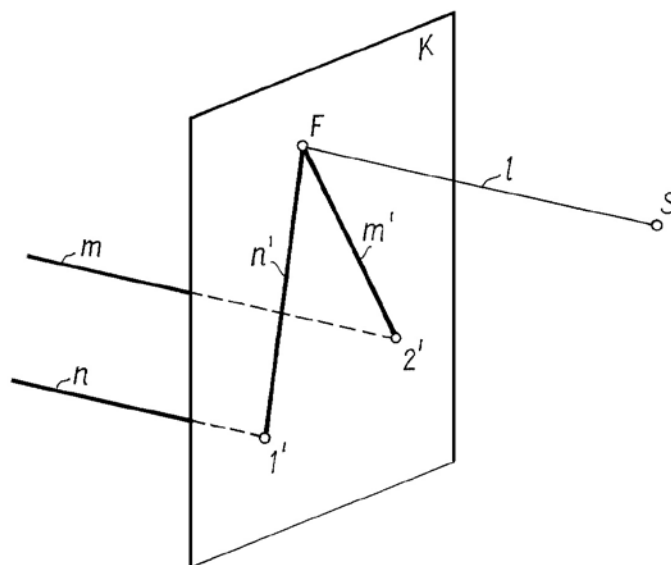


Рис. 16.5

**Картинный след** – это точка пересечения прямой с картиной. На рис. 16.5:

$1'$  – картинный след прямой  $n$ ;

$2'$  – картинный след прямой  $m$ .

**Точка схода** – это перспектива несобственной (бесконечно удаленной) точки прямой. Чтобы построить точку схода прямой, необходимо через точку зрения провести луч, параллельный прямой, и найти точку пересечения этого луча с картиной. Обозначают точку схода буквой  $F$ .

Если прямые параллельны в пространстве и не параллельны картине, то в перспективе они пересекаются в общей точке схода  $F$  (см. рис. 16.5).

### 16.4. Построение перспективы прямой, принадлежащей предметной плоскости

Чтобы построить перспективу прямой по ее ортогональным проекциям, надо найти точку схода и картинный след на ортогональном чертеже, а затем перенести их на перспективное изображение. При необходимости задается дистанционная точка  $D$ .

**Задача 16.1.** Построить перспективу прямой  $l$ , принадлежащей предметной плоскости (рис. 16.6).

*Решение.*

1. На перспективном изображении задаем горизонтальные прямые  $tt$  и  $hh$ , расстояние между которыми равно высоте точки зрения  $z_s$ . В произвольном месте (обычно по центру) задаем главную линию  $PP_1$ .

2. На ортогональном чертеже определяем картинный след (точку  $I$ ) и строим ее в перспективе на  $tt$ , отложив  $P_1I' = P_1I_1$ .

3. Определяем точку схода  $F$  на ортогональном чертеже:

$$S_1F_1 \parallel l_1; \quad F_1 = F_1S_1 \cap K_1.$$

4. Строим перспективу точки схода прямой, отложив на  $hh$   $PF' = P_1F_1$ .

5. Строим перспективу прямой  $l'$ , соединяя точки  $I'$  и  $F'$ . В данном случае вторичная проекция прямой и ее перспектива совпадают:  $l'_1 \equiv l'$ .

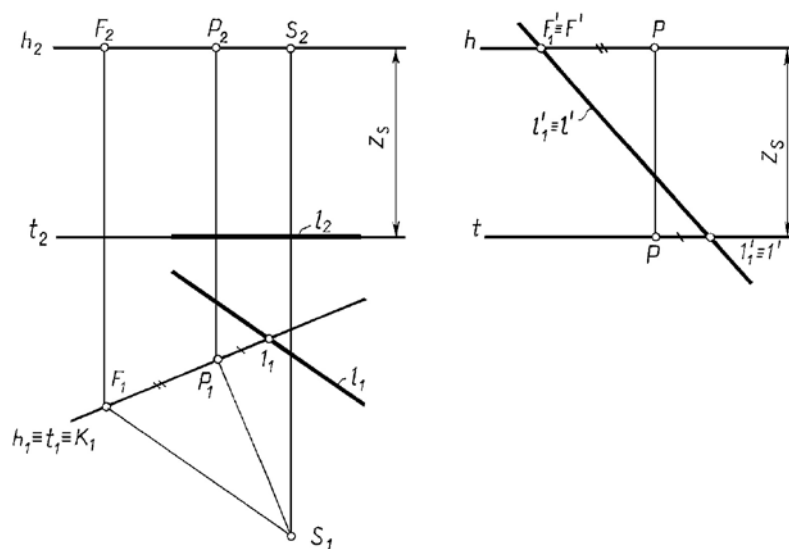


Рис. 16.6

**Задача 16.2.** Построить перспективу прямой  $n$ , принадлежащей предметной плоскости и проходящей через точку стояния  $S_1$  (рис. 16.7).

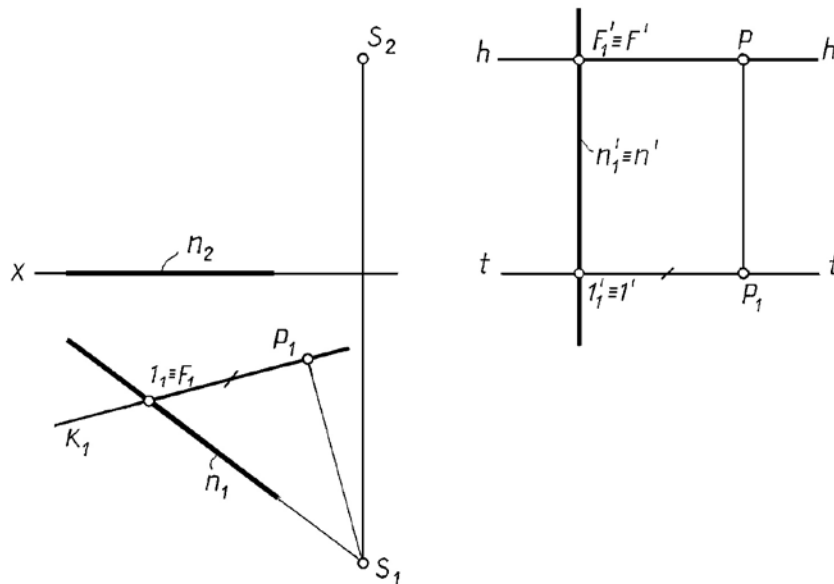


Рис. 16.7

Если прямая принадлежит предметной плоскости и проходит через точку стояния  $S_1$ , то перспектива ее параллельна главной линии картины  $PP_1$  (см. рис. 16.7).

**Задача 16.3.** Построить перспективу прямой  $m$ , принадлежащей предметной плоскости и перпендикулярной картине (рис. 16.8).

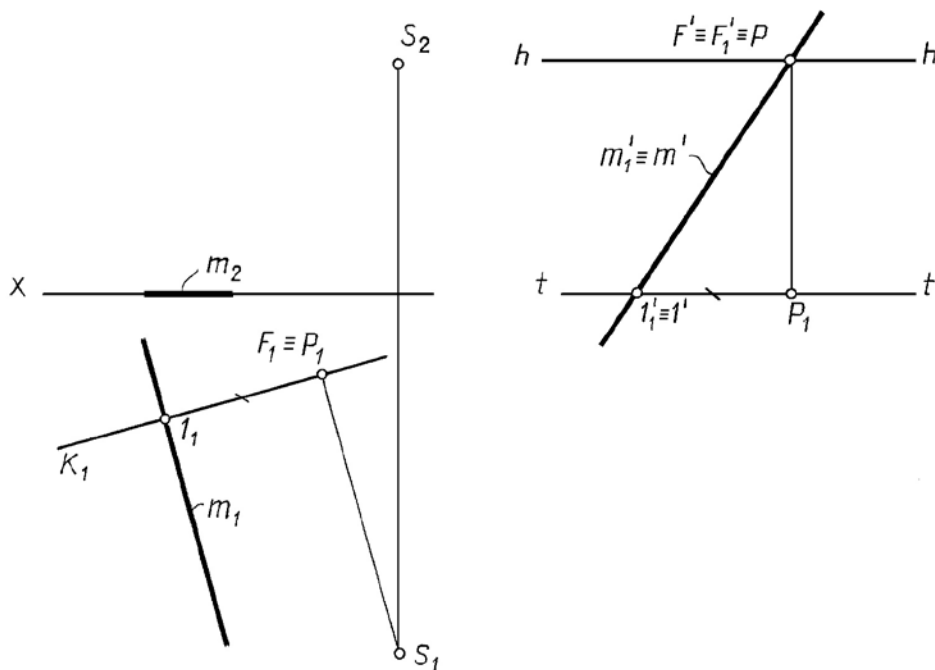


Рис. 16.8

Если прямая перпендикулярна картине,  $m \perp K$ , то точка схода ее совпадает с главной точкой картины  $P$  (см. рис. 16.8).

**Задача 16.4.** Построить перспективу прямой  $b$ , принадлежащей предметной плоскости и составляющей с картиной угол  $45^\circ$  (рис. 16.9).

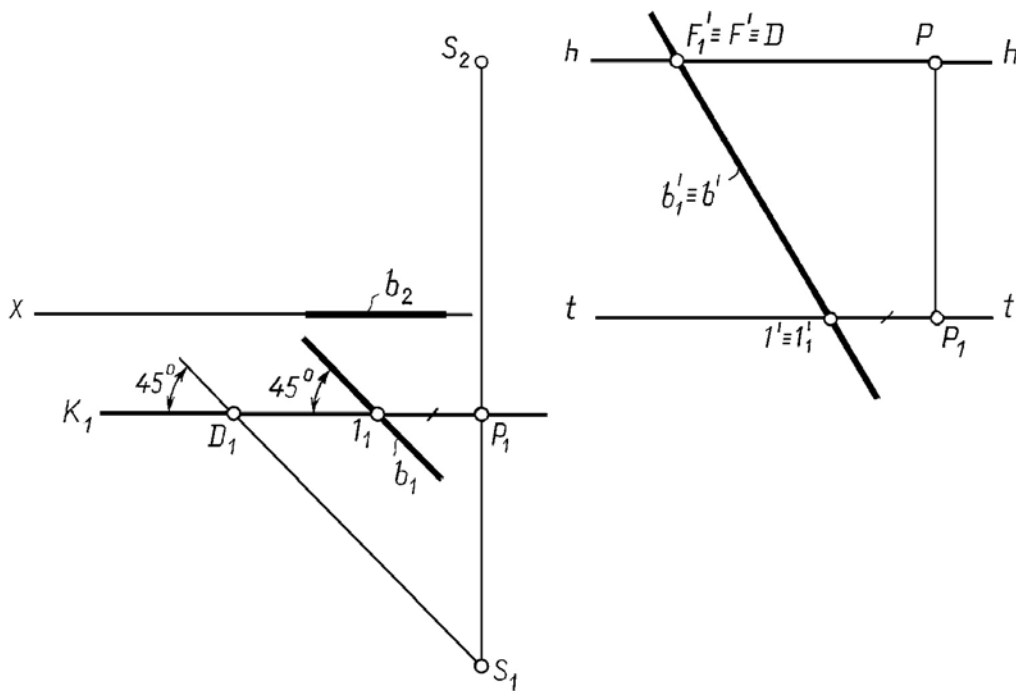


Рис. 16.9

Если прямая принадлежит предметной плоскости или параллельна предметной плоскости и составляет с картиной угол  $45^\circ$ , то ее точка схода совпадает с дистанционной точкой  $D$ . На рис. 16.9 треугольник  $D_1P_1S_1$  – равнобедренный:  $|S_1P_1| = |D_1P_1|$ , поэтому  $F \equiv D$ .

Перспективу **вертикального отрезка** нельзя построить по картинному следу и точке схода. Для построения вертикальных отрезков можно воспользоваться способом выноса в картину или боковой стенкой, они будут описаны ниже.

### 16.5. Построение перспективы точки, принадлежащей предметной плоскости

**Задача 16.5.** Построить перспективу точки  $A$ , принадлежащей предметной плоскости (рис. 16.10).

**Решение.** Заметим, что перспектива точки строится как точка пересечения перспектив двух прямых, проходящих через эту точку.

1. На ортогональном чертеже через точку  $A$  проводим прямую  $m \perp K$  и прямую  $n$ , проходящую через точку стояния.

2. Строим перспективу этих прямых  $m'$  и  $n'$ .

3. Отмечаем перспективу точки  $A'$  в пересечении перспектив построенных прямых  $m'$  и  $n'$ .

4. В данном случае вторичная проекция точки и перспектива точки совпадают:  $A_1' \equiv A'$ .

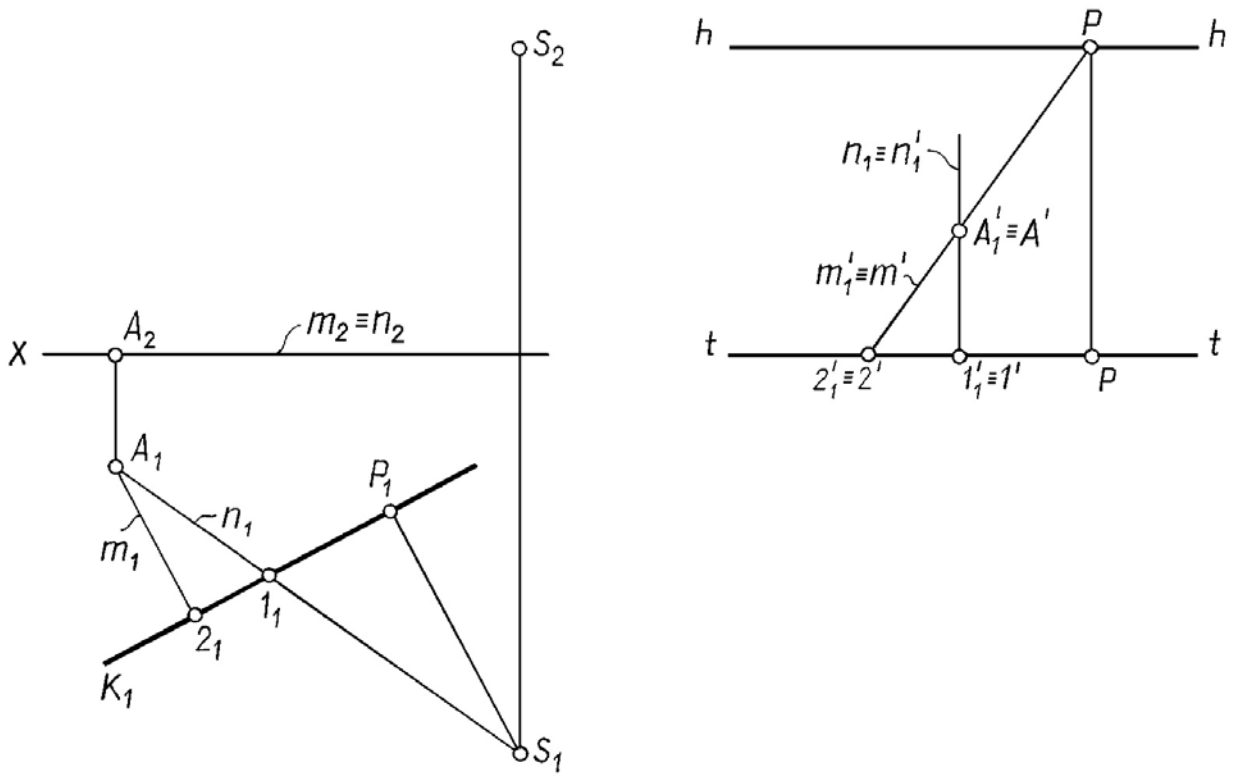


Рис. 16.10

**16.6. Построение перспективы отрезка прямой, принадлежащей предметной плоскости**

**Задача 16.6.** Построить перспективу отрезка  $AB$  (рис. 16.11).

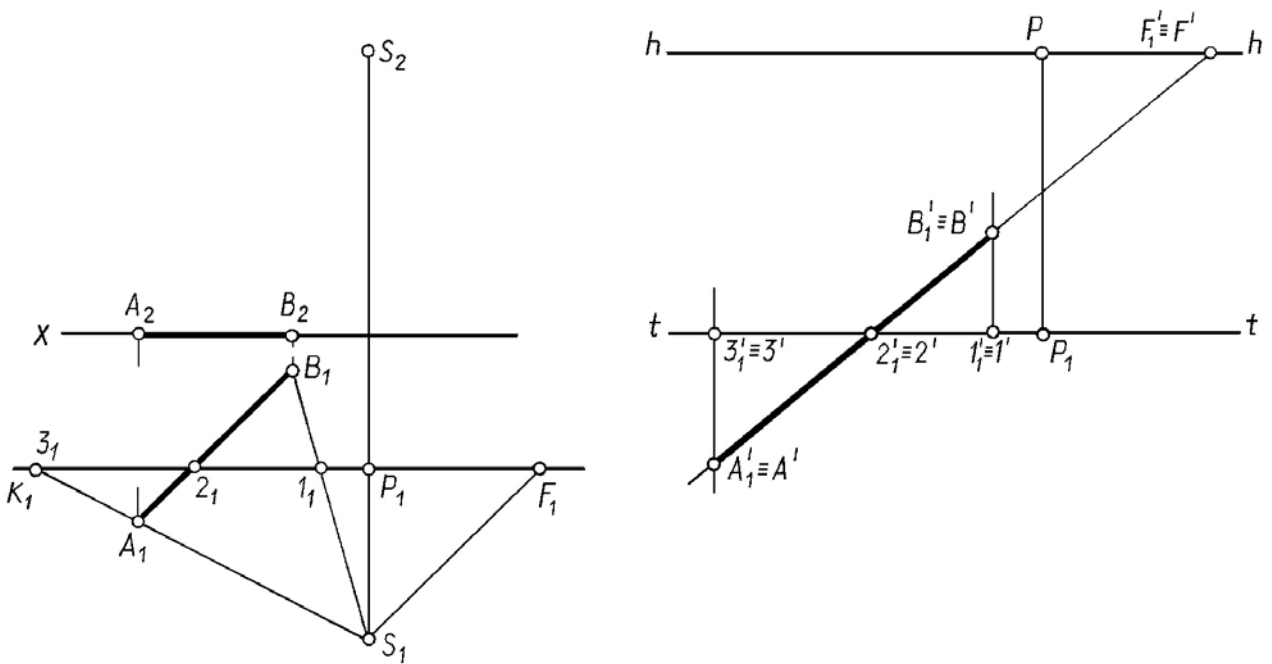


Рис. 16.11

*Решение.*

1. Строим перспективу прямой, которой принадлежит отрезок  $AB$  (по точкам  $2$  и  $F$ ).

2. Определяем на этой прямой точки  $A$  и  $B$  с помощью вспомогательных прямых ( $SA$  и  $SB$ ), проходящих через точку стояния.

В данном примере точка  $A$  находится в промежуточном пространстве, поэтому  $A_1'$  ниже линии земли  $tt$ , а точка  $B$  – в предметном пространстве, поэтому  $B_1'$  – выше  $tt$ .



## ПОСТРОЕНИЕ ПЕРСПЕКТИВЫ ФИГУР ПО ИХ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПРОЕКЦИЯМ

*Построение перспективы плоской фигуры, принадлежащей предметной плоскости. Построение перспективы вертикального отрезка с использованием выноса в картину, боковой стенки, радиального способа. Построение перспективы прямой общего положения. Способы построения перспективы. Выбор точки зрения. Построение следов и точки схода прямой по перспективе и вторичной проекции прямой. Деление отрезков на равные и пропорциональные части*

### 17.1. Построение перспективы плоской фигуры, принадлежащей предметной плоскости

**Задача 17.1.** Построить перспективу плоской фигуры, принадлежащей предметной плоскости (рис. 17.1).

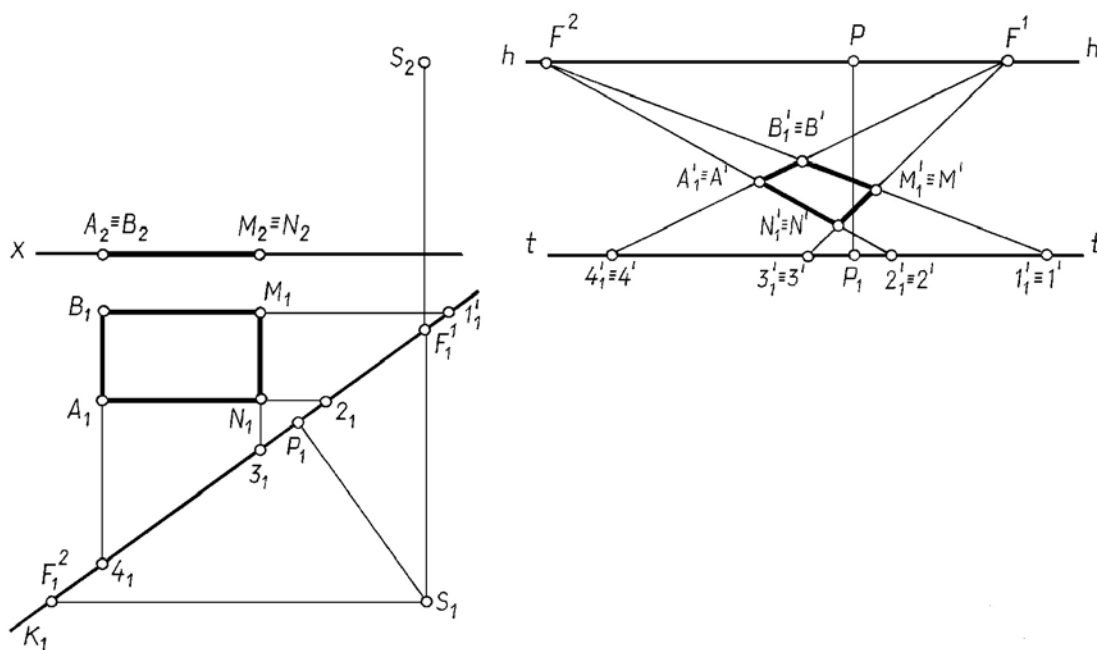


Рис. 17.1

#### Решение

1. Строим перспективу прямых, ограничивающих плоскую фигуру:  $AB$ ,  $NM$  и  $NA$ ,  $MB$  (попарно параллельными с точками схода  $F^1$  и  $F^2$ ).

2. Точки пересечения перспектив этих прямых определяют вершины плоской фигуры  $A'$ ,  $B'$ ,  $M'$ ,  $N'$ . Вторичная проекция и перспектива плоской фигуры совпадают:  $A_1' B_1' M_1' N_1' \equiv A' B' M' N'$ .

Такой способ построения перспективы с использованием двух точек схода называется *способом архитекторов*.

## 17.2. Построение перспективы вертикального отрезка с использованием выноса в картину, боковой стенки, радиального способа

Так как для вертикального отрезка прямой нельзя построить картинный след прямой и точку схода, то в этом случае необходимо воспользоваться другими приемами построения перспективы, а именно: выносом в картину или боковой стенкой.

**Задача 17.2.** Построить перспективу вертикального отрезка  $AB$  (рис. 17.2).

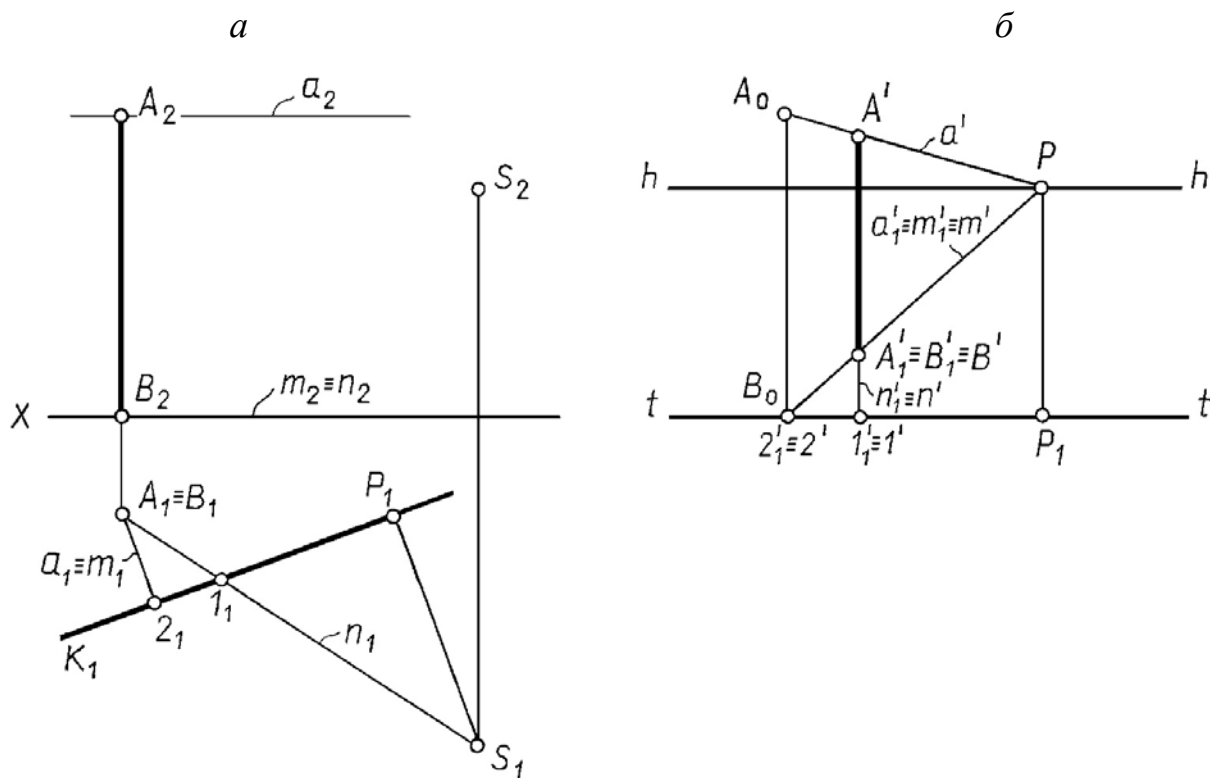


Рис. 17.2

**Решение.** Построение перспективы вертикального отрезка основано на том, что натуральную величину такого отрезка можно отложить только в картине ( $A_2B_2 = A_0B_0$ , рис 17.2, а, б), а затем, зная закон изменения величины проекции изображаемого отрезка, построить его перспективу  $A'B'$ . При этом по мере удаления вертикального отрезка от картины в предметном пространстве изображение отрезка уменьшается (а в промежуточном пространстве – увеличивается).

1. Строим перспективу основания отрезка  $AB$  точки  $B$  (см. рис. 17.2). С ней совпадает вторичная проекция отрезка  $B' \equiv B_1' \equiv A_1$ .

2. Строим перспективу точки  $A$ . Для этого можно воспользоваться выносом на картину (см. рис. 17.2).

Ту же задачу можно решить с помощью боковой стенки – рис. 17.3.

В этом случае картинным  $A_0B_0$  и предметным  $B_0P$  следом задается удобная для выполнения построений вертикальная плоскость – боковая стенка.

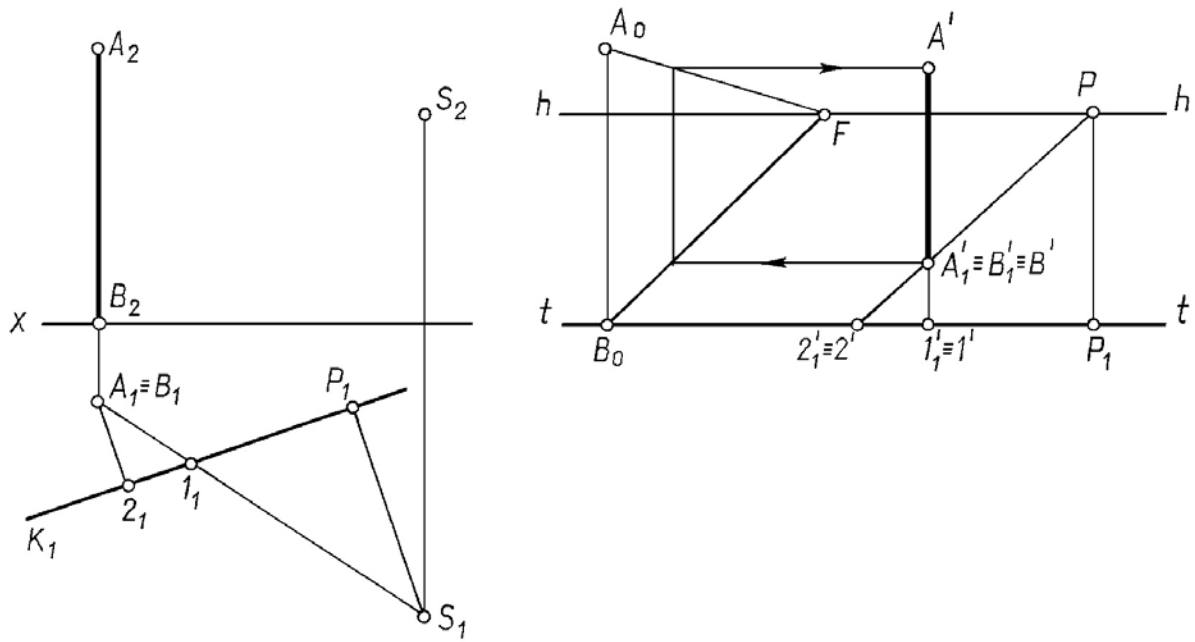


Рис. 17.3

Также эту задачу можно решить радиальным способом (рис. 17.4), т. е. найти точки пересечения проецирующих лучей  $SA$  и  $SB$  с картиной  $K$ .

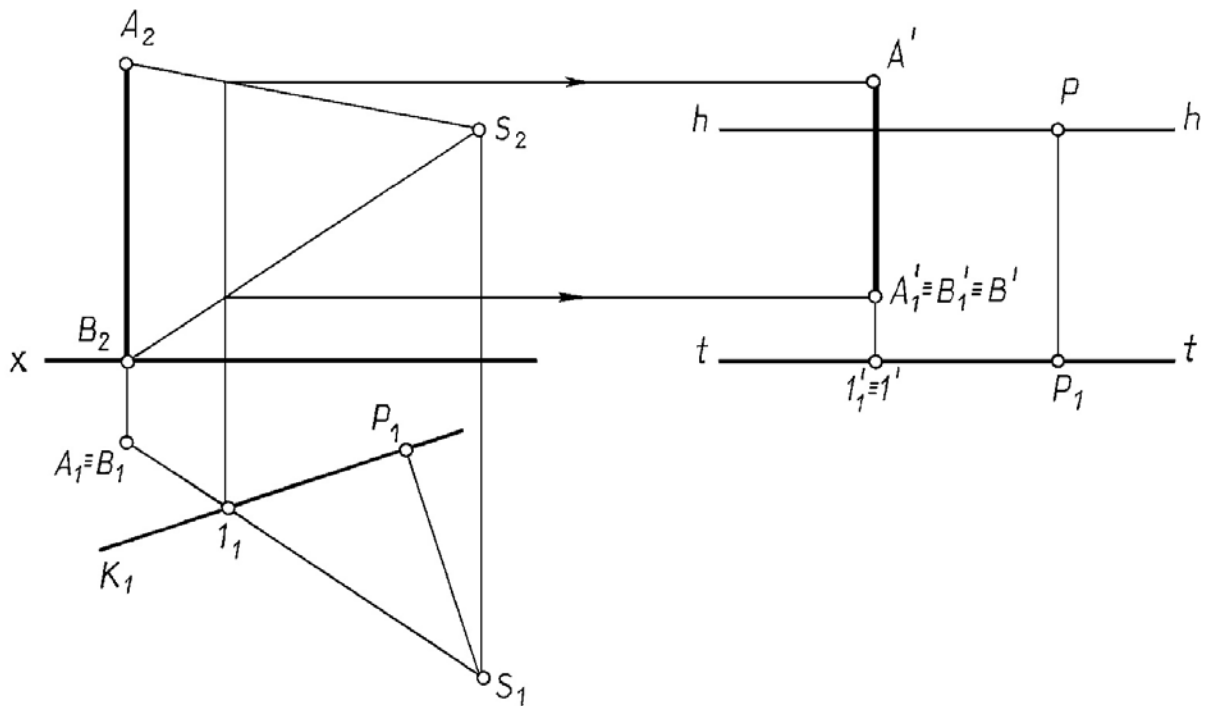


Рис. 17.4

### 17.3. Построение перспективы прямой общего положения

**Задача 17.3.** Построить перспективу отрезка  $AB$  прямой общего положения (рис. 17.5).



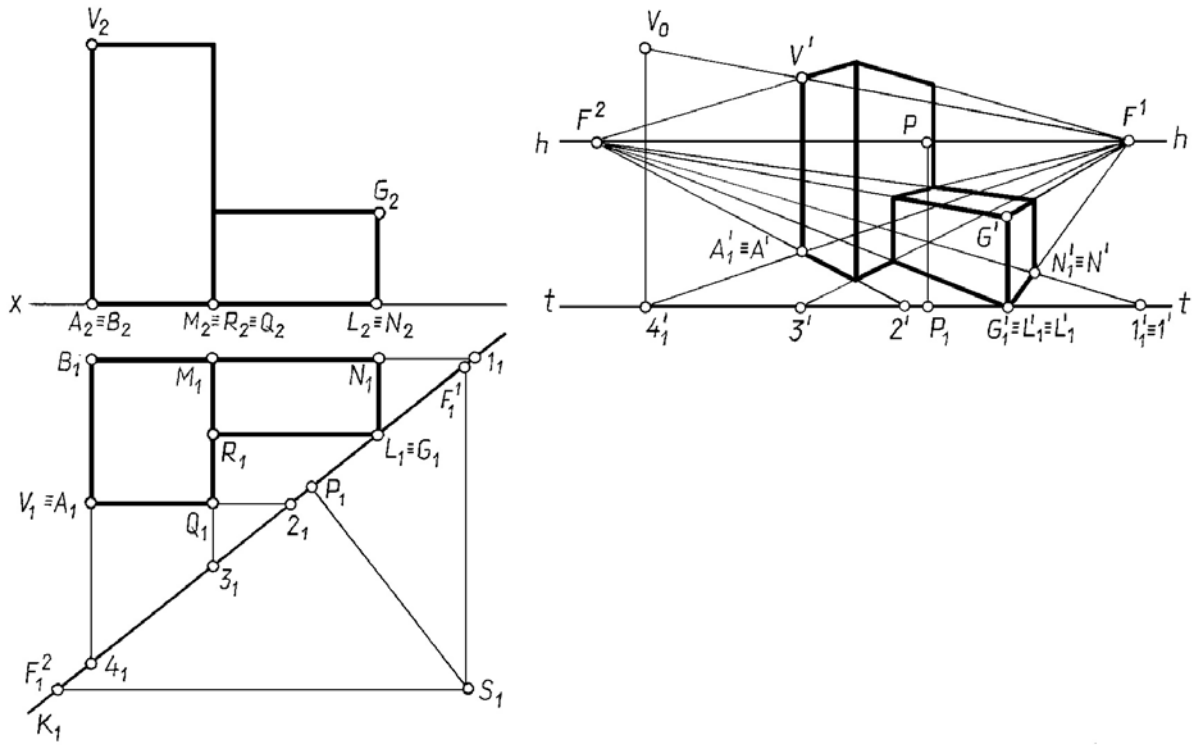


Рис. 17.6

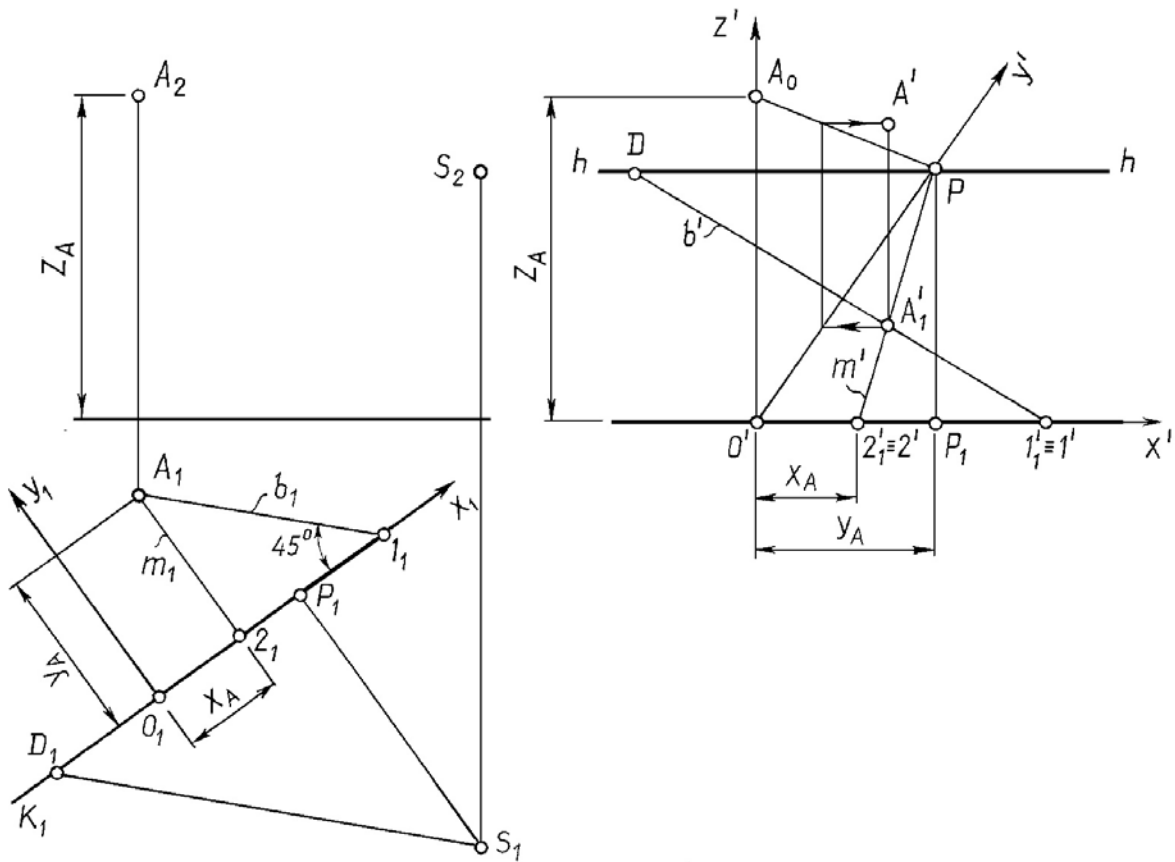


Рис. 17.7

## 17.5. Выбор точки зрения

Выбор точки зрения включает три основных элемента, тесно связанных между собой и устанавливаемых совместно:

- а) величину угла зрения  $\varphi$ ;
- б) расстояние точки зрения от объекта как положение главного луча  $SP$ ;
- в) положение линии горизонта  $hh$ .

Выберем точку зрения на конкретном примере (рис. 17.8), учитывая следующие рекомендации.

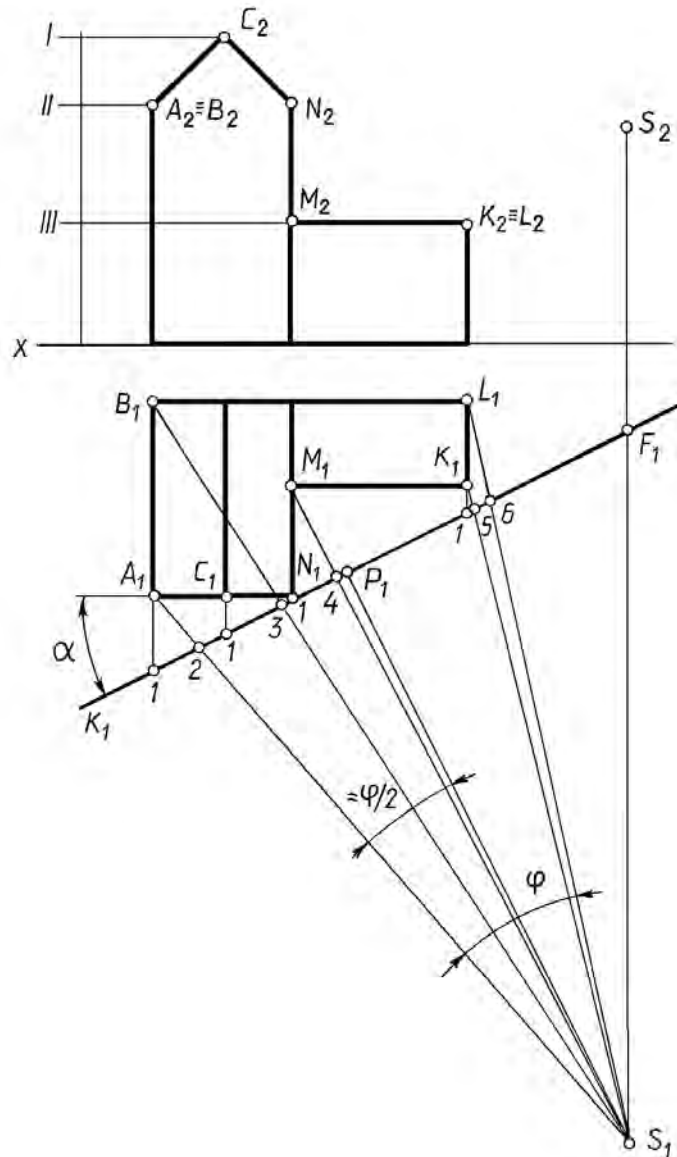


Рис. 17.8

1. Картина задается так, чтобы она проходила хотя бы через одно вертикальное ребро.

2. Угол наклона  $\alpha$  картины к тому фасаду, который должен быть больше отражен в перспективе, равен 20–30 %.

3. Желательно, чтобы главный луч совпадал с биссектрисой угла зрения – угла, заключенного между крайними точками объекта.

4. Угол зрения  $\varphi$  допускается в пределах  $18\text{--}53^\circ$ . Оптимальная величина  $\varphi = 28^\circ$ .

Вид перспективного изображения зависит и от высоты точки зрения, т. е. высоты горизонта.

Перспектива, полученная с точки зрения, расположенной на высоте человеческого роста (около двух метров), называется *перспективой с нормального горизонта*.

Иногда точку зрения располагают выше изображаемого объекта, на высоте 100 м и выше, тогда перспективу называют *перспективой с птичьего полета*.

*Перспективой с нулевого горизонта* называется перспектива при расположении точки зрения на предметной плоскости.

Если высота горизонта мала или равна нулю (рис. 17.9), для построения перспективы применяют так называемый «опущенный план».

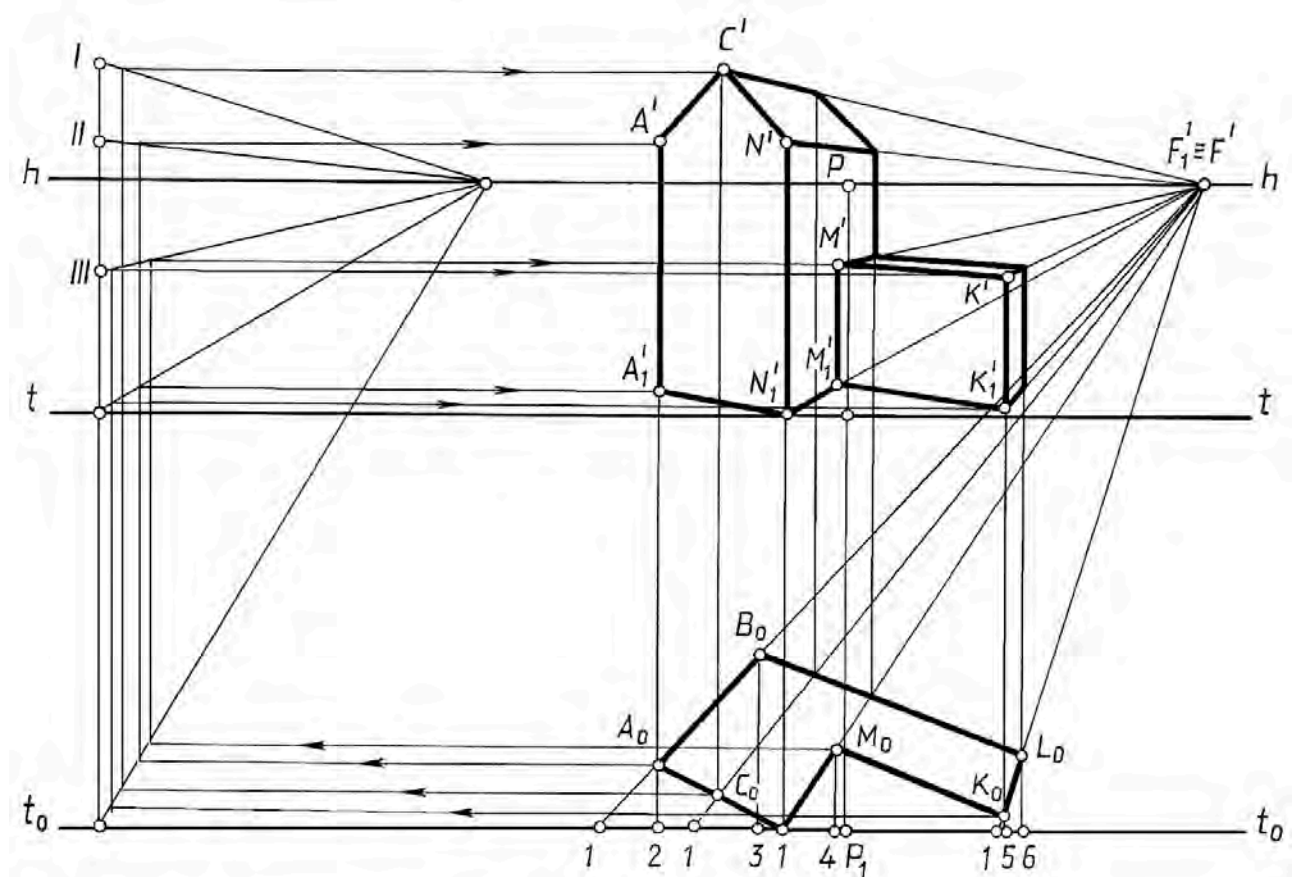


Рис. 17.9

При этом вторичная проекция объекта (план) строится не на предметной плоскости, а на некоторой горизонтальной плоскости  $t_0t_0$ , смещенной от предметной плоскости на произвольное расстояние. В связи с этим на перспективном изображении появляется новая линия  $t_0t_0$  – линия опущенного плана.

Переход от опущенного плана к построению перспективы объема выполняется с помощью боковой стенки (натуральные величины высоты I, II и III

уровней откладывают в картине, а затем перемещают в исходное положение; на рис. 17.9. построения показаны стрелками).

### 17.6. Построение следов и точки схода прямой по перспективе и вторичной проекции прямой

**Задача 17.4.** Построить картинный след  $l$ , предметный след  $M$  и точку схода  $F$  заданной прямой  $l$  (рис. 17.10).

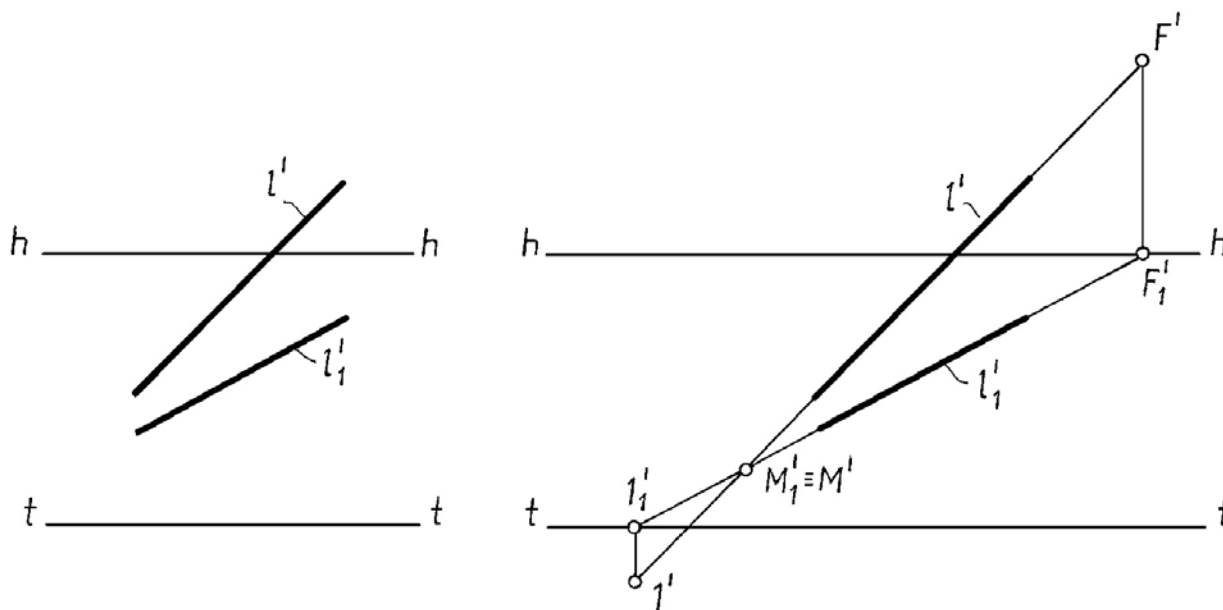


Рис. 17.10

*Решение.*

1. Строим картинный след – точку пересечения прямой с картиной. Это точка  $l$ , у которой вторичная проекция  $l_1' = l_1' \cap t t$ , а перспектива  $l'$  принадлежит перспективе прямой  $l'$ .

2. Отмечаем предметный след прямой – точку пересечения прямой с предметной плоскостью:  $M' \equiv M_1'$ ;  $M' = l_1' \cap l_1'$ .

3. Строим точку схода – перспективу бесконечно удаленной точки прямой. Это точка  $F$ , у которой вторичная проекция находится на линии горизонта и принадлежит вторичной проекции прямой  $F_1' = l_1' \cap h h$ , а перспектива точки  $F'$  принадлежит перспективе прямой  $l'$ .

### 17.7. Деление отрезков на равные и пропорциональные части

Деление отрезков, параллельных картине ( $AB \parallel K$ ,  $MN \parallel K$ ,  $PE \parallel K$ ), выполняется так же, как в ортогональных проекциях, так как сохраняется пропорциональность частей этих отрезков.

**Задача 17.5.** Разделить заданные отрезки в отношении  $1 : 2$  (рис. 17.11).



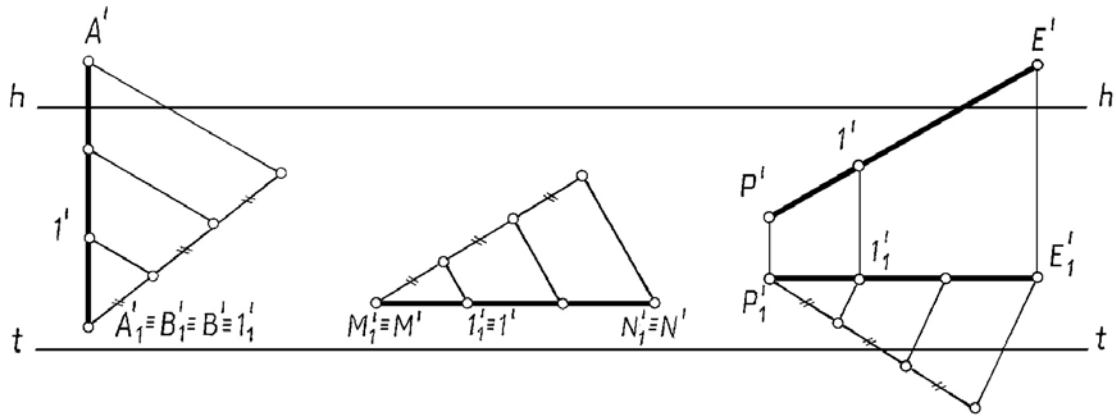


Рис. 17.11

*Решение.* Для решения используем **теорему Фалеса**. Луч, на котором откладываем заданное отношение, проводим под произвольным углом (однако этот вспомогательный луч параллелен картине). Выполненные построения ясны из чертежа.

Деление **отрезков, не параллельных картине**, выполняется с использованием прямых, принадлежащих предметной плоскости и параллельных между собой и, следовательно, имеющих общую точку схода.

**Задача 17.6.** Разделить заданные отрезки на три равные части (рис. 17.12).

*Решение.* Луч, на котором откладываем три равных отрезка, проводим параллельно  $t t$  (луч параллелен картине и принадлежит предметной плоскости). Затем, соединив конец заданного отрезка с последней засечкой на вспомогательном луче, находим точку пересечения полученной линии с линией горизонта (или точку схода вспомогательных прямых деления) – определяем  $F_{\text{дел}}$ . Через  $F_{\text{дел}}$  и засечки на вспомогательном луче проводим линии, которые и делят вторичную проекцию заданных отрезков на требуемое число частей.

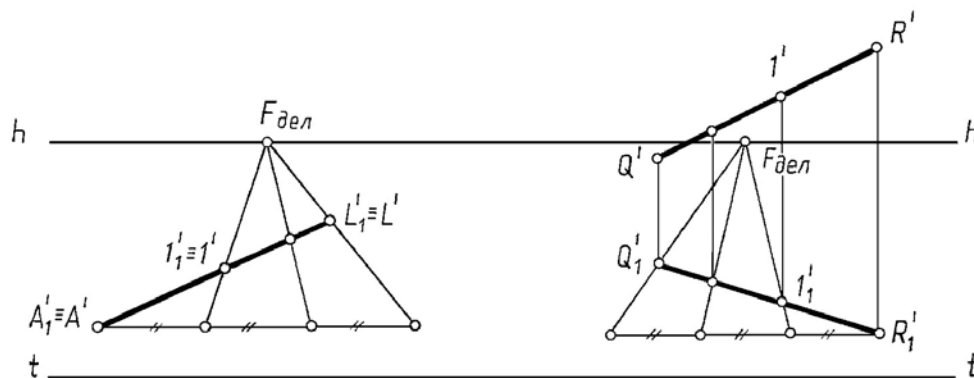


Рис. 17.12

При делении отрезка прямой  $QP$  общего положения деление **начинают со вторичной проекции**.

## ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИИ ТЕНЕЙ

*Построение теней на ортогональном чертеже. Тени от точки.  
Тени от прямой линии. Тени от плоской фигуры. Тень от объемной фигуры.  
Построение теней в аксонометрии. Построение теней в перспективе*

### 18.1. Построение теней на ортогональном чертеже

В начертательной геометрии при построении теней изучают графические методы определения границ теней и не рассматривают физические основы теней (интенсивность источника света, световые блики и пр.).

При построении теней считается, что свет распространяется прямолинейно. Если тени строятся при солнечном освещении, то световые лучи считаются параллельными, так как источник света практически удален в бесконечность.

Основной геометрической задачей построения теней является определение границ (контуров) собственных и падающих теней.

Неосвещенная часть поверхности называется **собственной тенью**. Линия, отделяющая освещенную часть поверхности тела от собственной тени, называется **контуром собственной тени**.

Тень от одного предмета на другой или от одной части поверхности на другую называется **падающей тенью**, а линия, ее ограничивающая, – **контуром падающей тени**. Контур падающей тени строится от контура собственной.

На ортогональном чертеже направление светового луча принимается параллельным диагонали куба, грани которого совпадают с плоскостями проекций. При этом проекции светового луча наклонены к оси  $Ox$  под углом  $45^\circ$  (рис. 18.1).

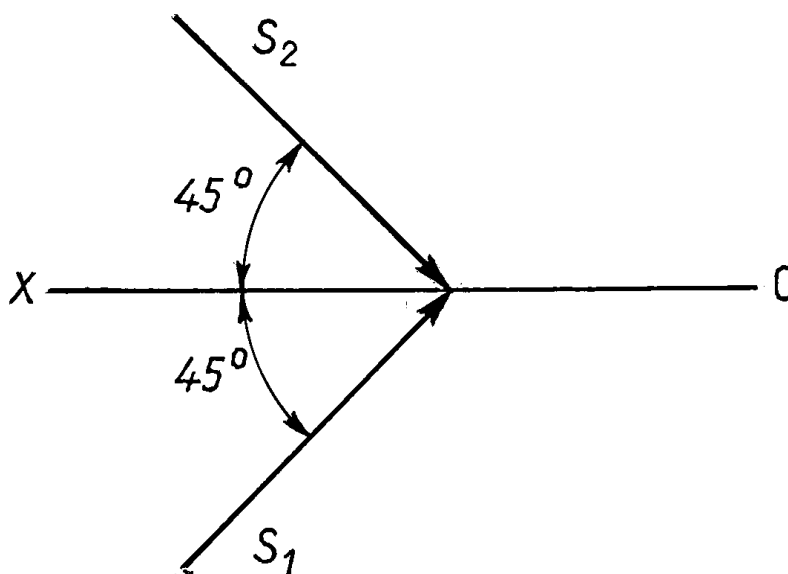


Рис. 18.1

## 18.2. Тени от точки

Тенью от точки  $A$  на любую поверхность  $\Gamma$  называется точка пересечения светового луча  $S$ , проходящего через эту точку  $A$ , с поверхностью  $\Gamma$ .

Тенью от точки  $A$  на плоскость проекций является след на этой плоскости светового луча  $S$ , проходящего через точку  $A$ .

На рис. 18.2 показано построение тени от точки  $A$  на плоскости проекций  $\Pi_2$  и  $\Pi_1$ . Для построения тени этой точки через ее проекции проведены проекции светового луча и построены его следы на фронтальной плоскости проекций ( $A_2^T$ ) и горизонтальной плоскости проекций ( $A_1^T$ ).

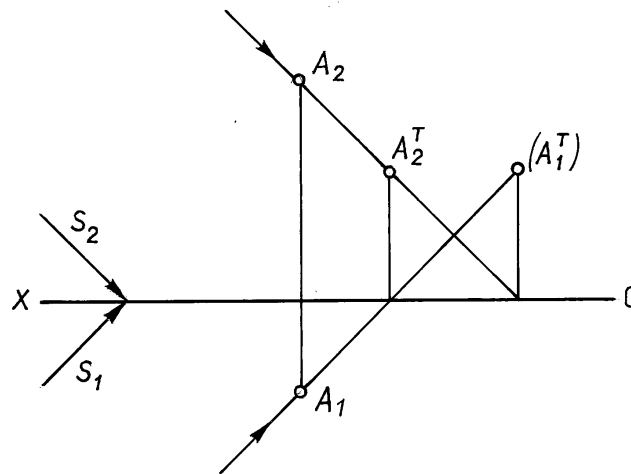


Рис. 18.2

Из этих двух теней первая  $A_2^T$  является реальной, действительной, вторая  $A_1^T$  – мнимой. Тень точки на фронтальной плоскости проекций реальна потому, что луч в рассматриваемом примере пересекает фронтальную плоскость проекций раньше, чем горизонтальную плоскость проекций.

Тенью от точки  $A$  на произвольную плоскую фигуру является точка  $A^T$  пересечения светового луча, проходящего через точку  $A$ , с плоской фигурой.

На рис. 18.3 показано построение тени  $A^T$  от точки  $A$  на плоскость треугольника.

Построения выполняются в следующем порядке.

1. Через проекции точки  $A$  проводятся проекции светового луча.
2. Определяется точка пересечения светового луча с заданной плоскостью (на рис. 18.3 для определения точки пересечения светового луча с плоскостью использована проецирующая плоскость).

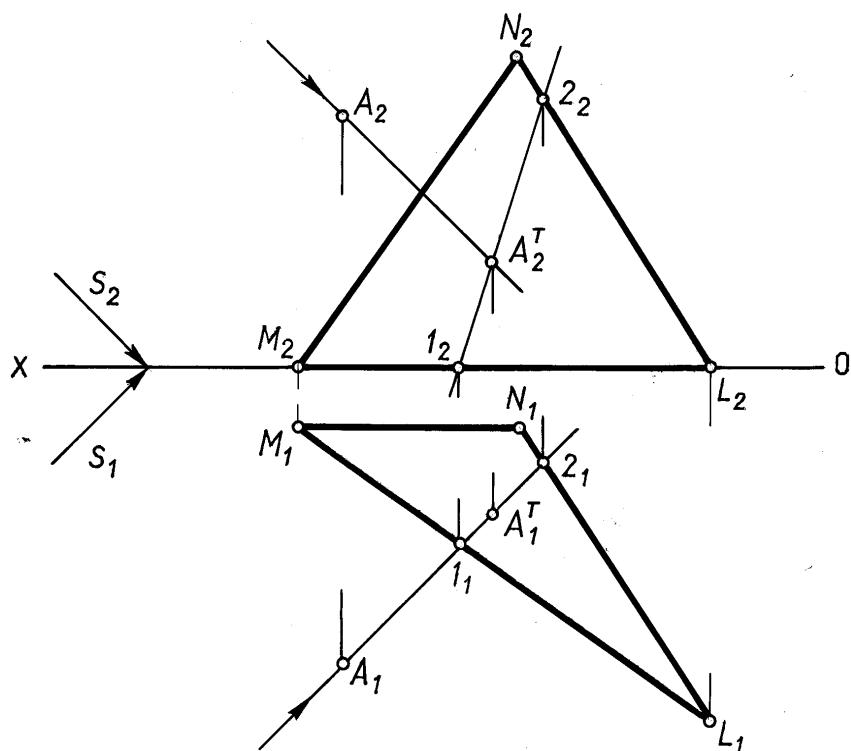


Рис. 18.3

### 18.3. Тени от прямой линии

Тень от прямой линии на поверхность есть линия пересечения лучевой плоскости с этой поверхностью. *Лучевой плоскостью* называется плоскость, проходящая через заданную прямую линию параллельно световому лучу.

Тенью от прямой может быть точка, прямая, ломаная или кривая. Процесс построения тени отрезка прямой на две плоскости проекций рекомендуется вести в следующей последовательности (рис. 18.4).

1. Строят тень отрезка на одну из плоскостей, предполагая, что второй не существует. Так, в примере на рис. 18.4 сначала построена тень отрезка на фронтальную плоскость проекций.

2. Если построенная тень пересекает ось проекций, то в этой точке, тень преломится и с одной плоскости проекций перейдет на другую.

В эту точку и будет направлена преломившаяся тень отрезка прямой. На рис. 18.4 такой точкой является реальная тень точки  $B$  на горизонтальной плоскости проекций.

Отметим закономерности расположения теней отрезков прямых частного положения.

Если отрезок прямой параллелен плоскости, то тень от него на эту плоскость параллельна отрезку и равна ему по величине.

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то тень, падающая от нее на эту плоскость, совпадает с проекцией светового луча на этой плоскости.

Если прямая параллельна направлению светового луча, то тень от нее — точка. Параллельные прямые имеют параллельные тени.



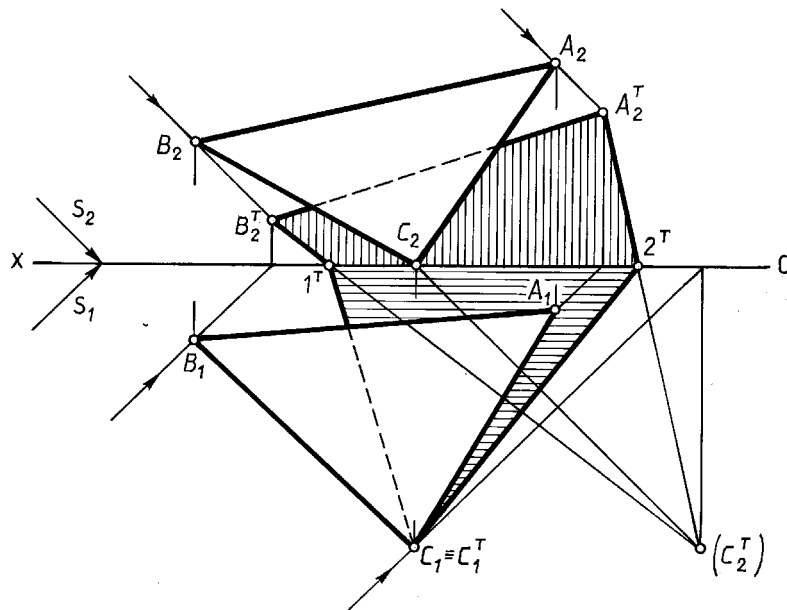


Рис. 18.5

Так, на рис. 18.5 на обе плоскости проекций треугольник проецируется освещенной стороной, так как последовательность расположения обозначений точек на контуре и фронтальной и горизонтальной проекций треугольника, на контуре его тени при их чтении, например по часовой стрелке, одинакова.

Одно из инвариантных свойств параллельного проецирования устанавливает, что проекция плоской фигуры, параллельной плоскости проекций, равновелика этой фигуре. Так как тени на плоскости проекций представляют собой параллельные косоугольные проекции, то тень на плоскость проекций от любой плоской фигуры, параллельной этой плоскости проекций, равновелика самой плоской фигуре (рис. 18.6). Следовательно, тень от круга, плоскость которого параллельна плоскости проекций, есть круг того же радиуса.

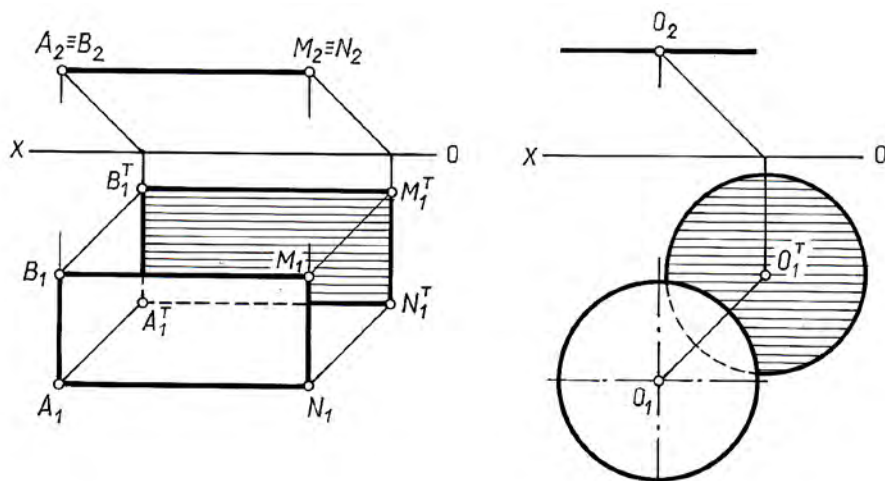


Рис. 18.6

Поэтому для построения контура падающей тени круга на параллельную ему плоскость проекций достаточно построить тень от центра круга и построить окружность того же радиуса, что и окружность, ограничивающая круг.

## 18.5. Тень от объемной фигуры

Любая поверхность, ограничивающая пространственное тело, разделяется контуром собственной тени на две части: освещенную и находящуюся в тени. Падающую тень от этой поверхности ограничивает тень от контура собственной тени поверхности. Поэтому построить тень от объемной фигуры можно двумя способами:

- 1) построить падающую тень, затем по контуру падающей тени определить контур собственной тени поверхности;
- 2) определить контур собственной тени и затем построить падающую тень от контура собственной тени.

На рис. 18.7 показано построение собственной и падающей теней прямого кругового конуса, основание которого расположено в горизонтальной плоскости проекций.

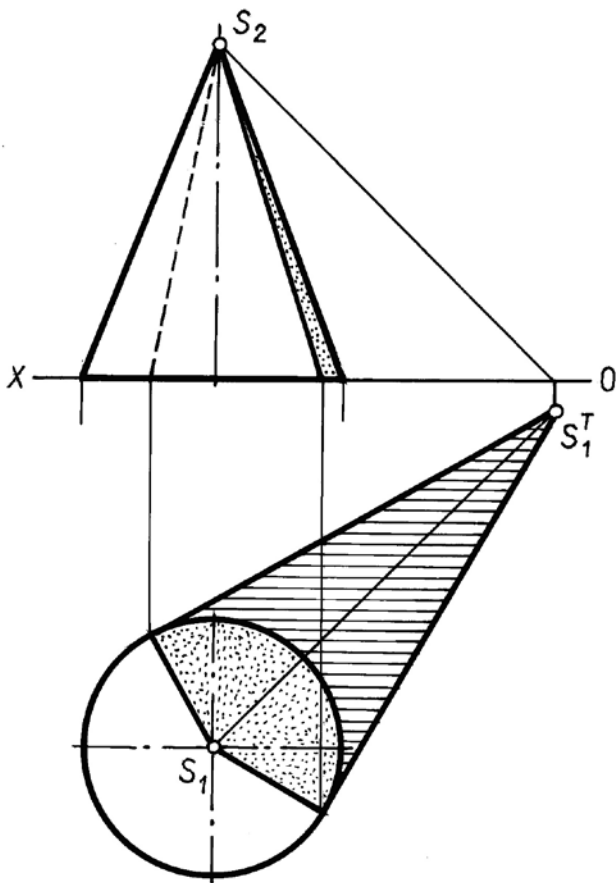


Рис. 18.7

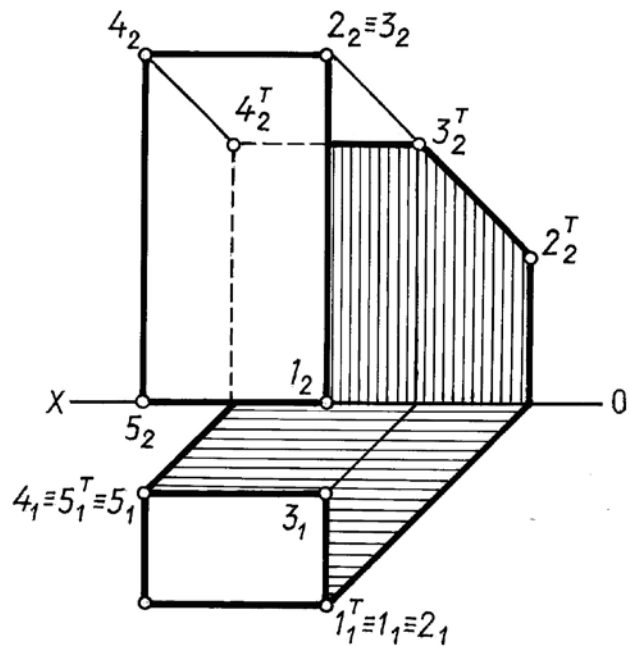


Рис. 18.8

Сначала определена тень на горизонтальную плоскость проекций от вершины конуса. Затем из построенной точки проведены две прямые, касательные к окружности основания конуса. Точки касания этих прямых к окружности основания определили положение образующих конуса, которые являются контуром собственной тени конуса.

На рис. 18.8 показано построение тени прямой призмы. Сначала определены грани, находящиеся в собственной тени, и обозначен контур собственной тени. Затем от контура собственной тени построен контур падающей тени.

На рис. 18.9 показано определение контура падающей тени от трубы на скат крыши здания.

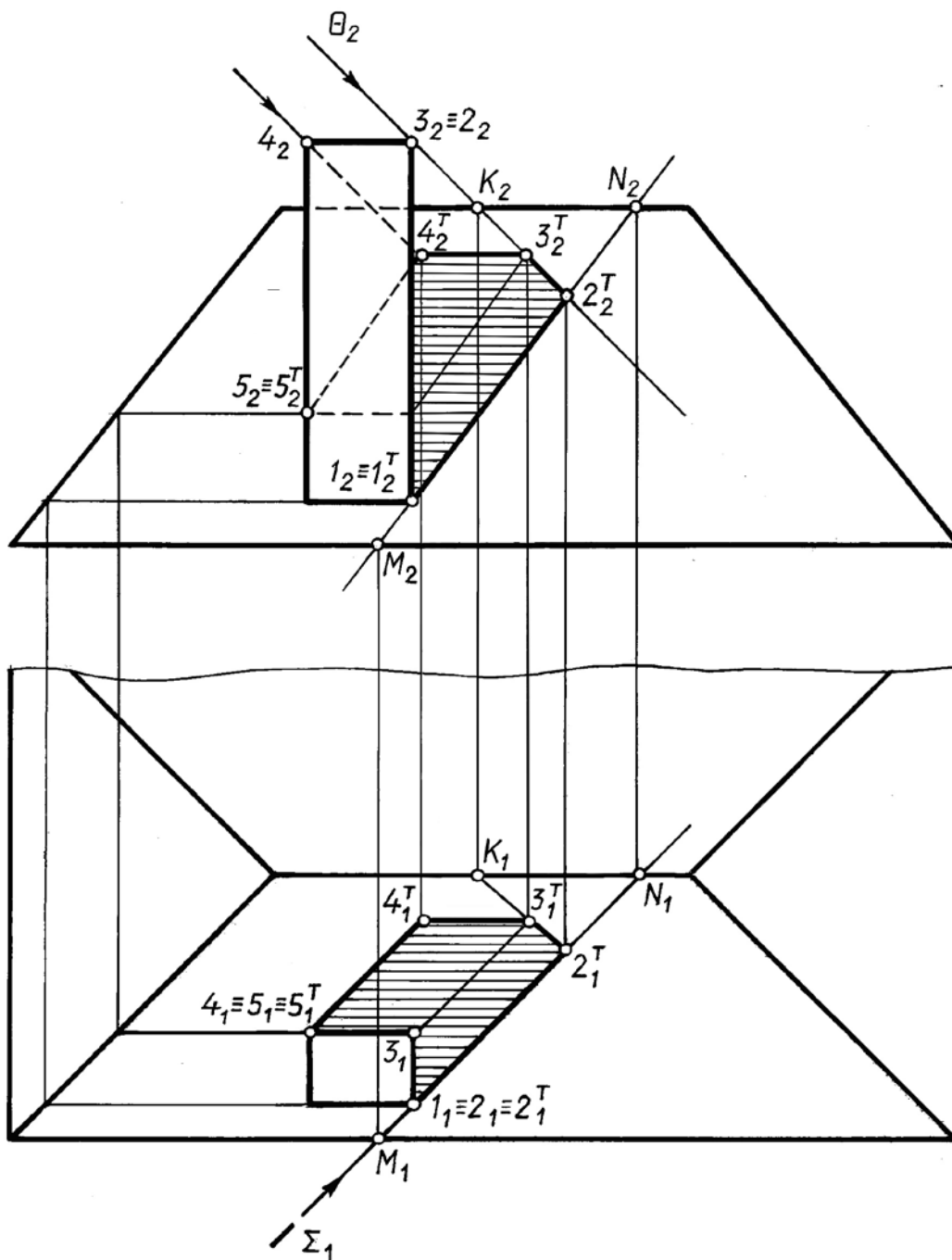


Рис. 18.9

Задача сводится к определению теней от точек и прямых на произвольно расположенную плоскость (скат крыши).

Построения выполнены способом вспомогательных секущих лучевых плоскостей  $Q$  и  $\Sigma$ .



## 18.6. Построение теней в аксонометрии

Основные правила построения теней, изложенные применительно к ортогональным проекциям, остаются в силе и при построении теней в аксонометрических проекциях. Особенности – только в задании направления светового луча.

В аксонометрических проекциях направление лучей света может быть принято любым, но при этом нужно соблюдать условие правдоподобности освещения, а также помнить, что тень является средством выявления формы и придания чертежу наибольшей выразительности. Лучи не должны быть слишком пологими или слишком крутыми; лучшим углом наклона луча света к горизонту можно считать  $30\text{--}40^\circ$ . Направление светового луча задается его аксонометрической  $S'$  и вторичной  $S_1'$  проекциями (рис. 18.10).

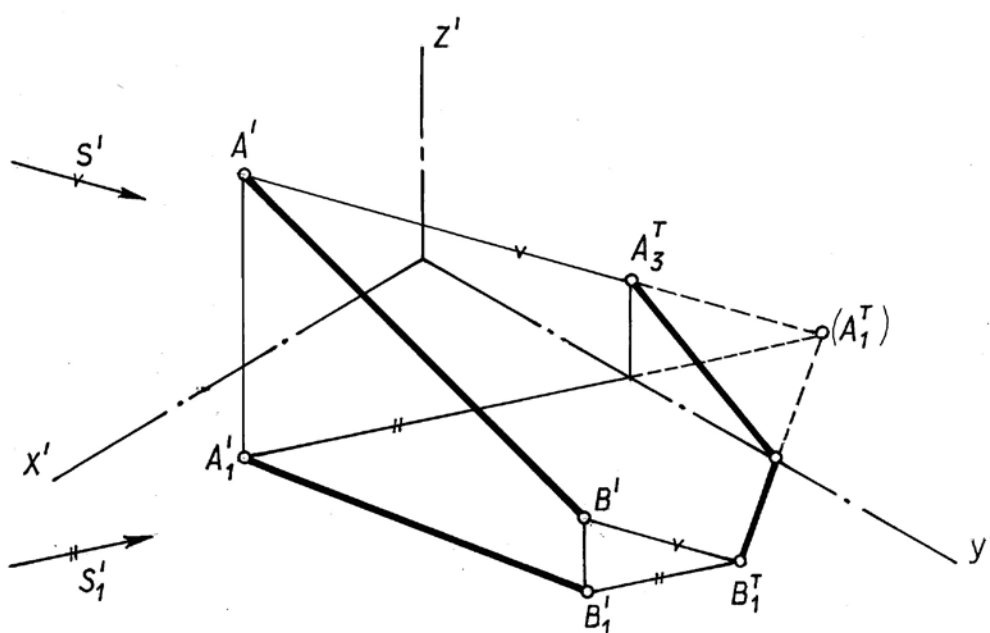


Рис. 18.10

Для построения тени точки  $B'$  (см. рис. 18.10) через аксонометрическую проекцию  $B'$  проводят аксонометрию луча параллельно заданному направлению  $S'$ , а через вторичную проекцию  $B_1'$  проводят прямую, параллельную вторичной проекции луча  $S_1'$ . Точка пересечения луча с его вторичной проекцией и есть тень точки  $B_1^T$ .

В зависимости от расположения точки в пространстве тень может падать не только на горизонтальную плоскость. Так, из построения тени точки  $A$  (см. рис. 18.10) видно, что тень от точки  $A$  легла на горизонтальную плоскость за пределами вертикальной профильной плоскости ( $A_1^T$ ).

Для определения тени точки  $A_3^T$  точки  $A$  на профильной плоскости необходимо из точки пересечения вторичной проекции светового луча с осью  $y'$  провести вертикальную прямую до пересечения с аксонометрией луча, проходящего через точку  $A'$ .

Для построения тени отрезка  $AB$  в аксонометрии на рис. 18.10 использована мнимая тень ( $A_1^T$ ) точки  $A$ .

На рис. 18.11 построены тени от лестницы и от тумбы, имеющей форму усеченного параллелепипеда.

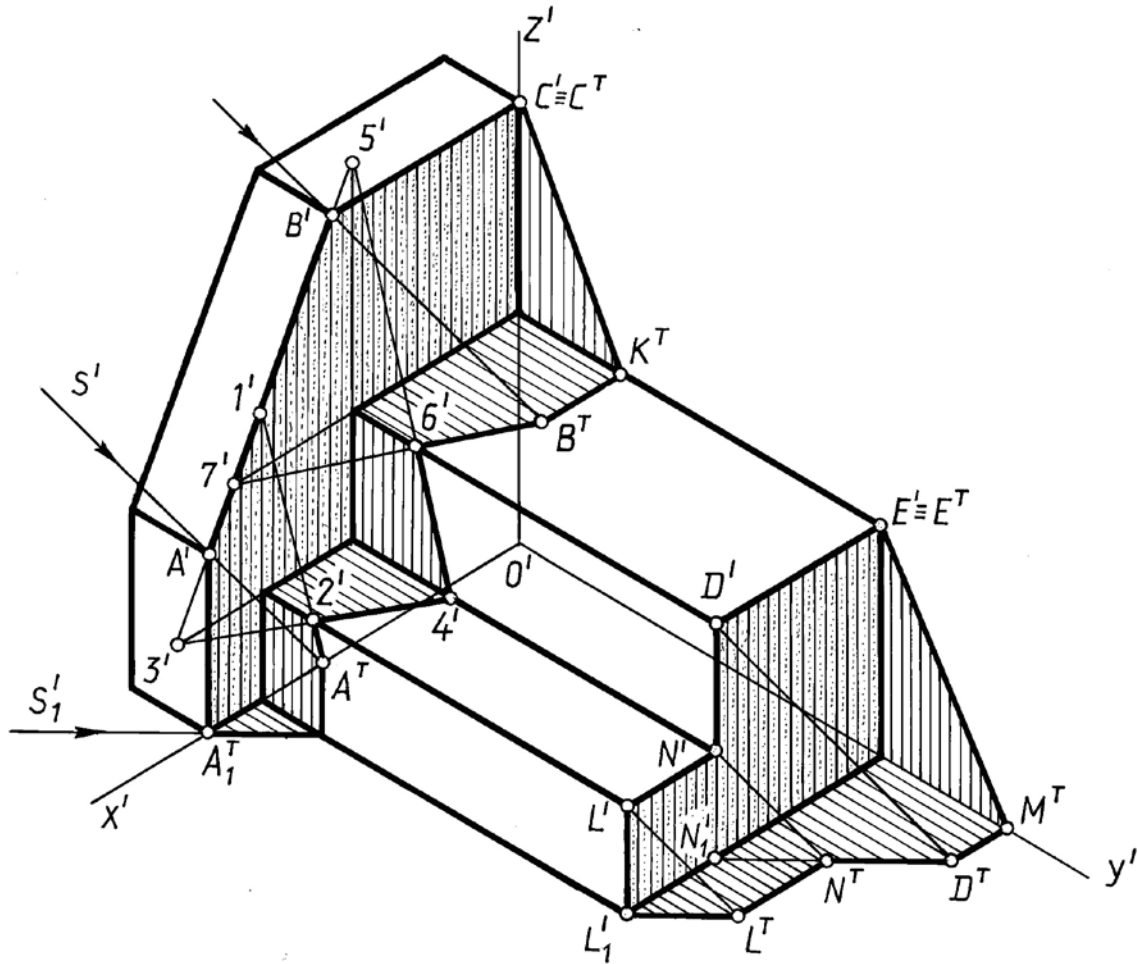


Рис. 18.11

Отметим, что в аксонометрии тень от вертикального отрезка на горизонтальной плоскости совпадает с направлением вторичной проекции светового луча, а тень от любой прямой на плоскость, ей параллельную, параллельна самой прямой.

Построения тени от лестницы ясны из чертежа.

На рис. 18.11 тени на лестнице от тумбы построены в следующем порядке.

1. Определена тень от вертикального отрезка  $A'A'_1$ .
2. Определена точка пересечения наклонной прямой  $A'B'$  с вертикальной плоскостью первой ступени – точка  $1'$ . Из точки  $A^T$  тень по вертикальной плоскости идет в точку  $1'$  и заканчивается в точке  $2'$ .

3. Наклонная прямая  $A'B'$  продолжена до пересечения с горизонтальной плоскостью ступеньки и получена точка  $3'$ . Соединив точки  $2'$  и  $3'$ , получили тень от отрезка  $A'B'$  на горизонтальной плоскости первой ступеньки, которая заканчивается в точке  $4'$ .

На второй ступеньке тень от отрезка  $A'B'$  строится аналогично. Выполненные построения ясны из чертежа.

4. Тень от горизонтального отрезка  $B'C'$  на горизонтальной плоскости параллельна самому отрезку, а на фасадной плоскости идет в точку  $C^T$  (точка  $C'$  – сама себе тень).

### 18.7. Построение теней в перспективе

Построение теней в перспективе принципиально ничем не отличается от построения теней в аксонометрических проекциях, за исключением того, что в перспективе в общем случае проекции световых лучей направлены в соответствующие точки схода.

В перспективных проекциях задается изображение солнца или направление светового луча, если оно параллельно картине. Так как солнце считается удаленным в бесконечность, то его вторичная проекция должна быть на линии горизонта. Если солнце – перед зрителем, то его изображение находится выше линии горизонта, если – сзади зрителя, то его изображение на картине находится ниже линии горизонта.

Чаще всего направление световых лучей в перспективе принимают параллельным плоскости картины. Тогда вторичные проекции световых лучей должны быть параллельны линии земли.

На рис. 18.12 построены падающие тени от вертикального отрезка  $AB$  при различных относительно его положениях источника света.

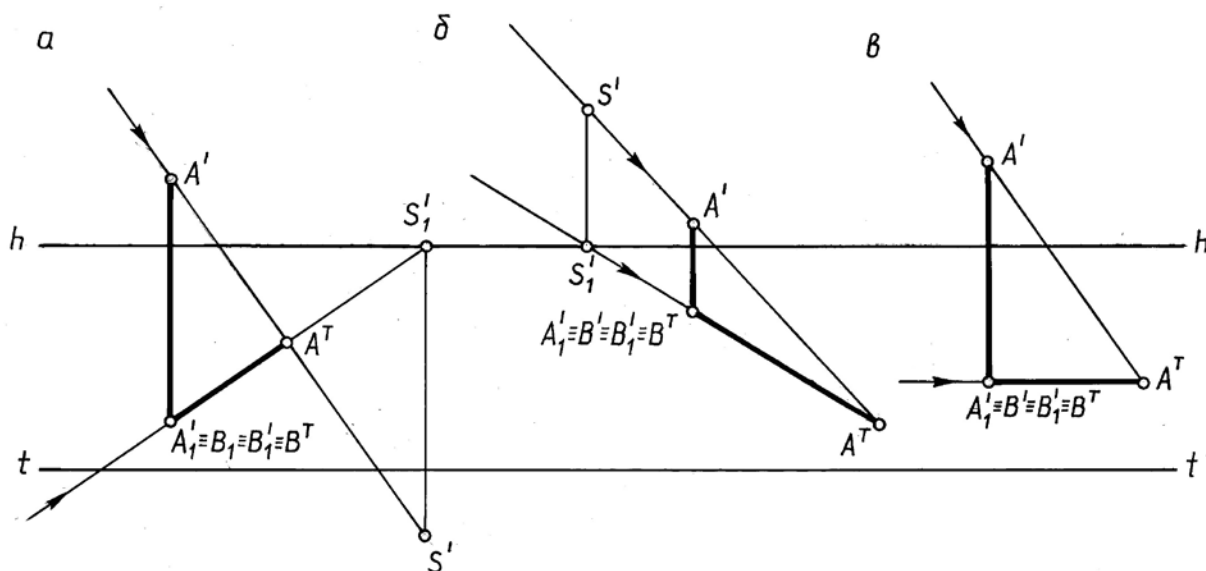


Рис. 18.12

На рис. 18.12, *a* солнце расположено перед отрезком, слева от него; точка  $S'$  схода перспектив световых лучей находится ниже линии горизонта.

На рис. 18.12, *б* солнце находится за отрезком и слева от него, точка  $S'$  расположена над линией горизонта.

На рис. 18.12, в некоторых случаях для упрощения построения теней в перспективе направление световых лучей принимается параллельно плоскости картины (рис. 18.14).

Проекции световых лучей на рис. 18.12 имеют направление слева направо. Очевидно, что при положении источника света справа проекции световых лучей будут направлены справа налево.

На рис. 18.13 показано построение тени отрезка  $AB$ , когда солнце находится позади зрителя.

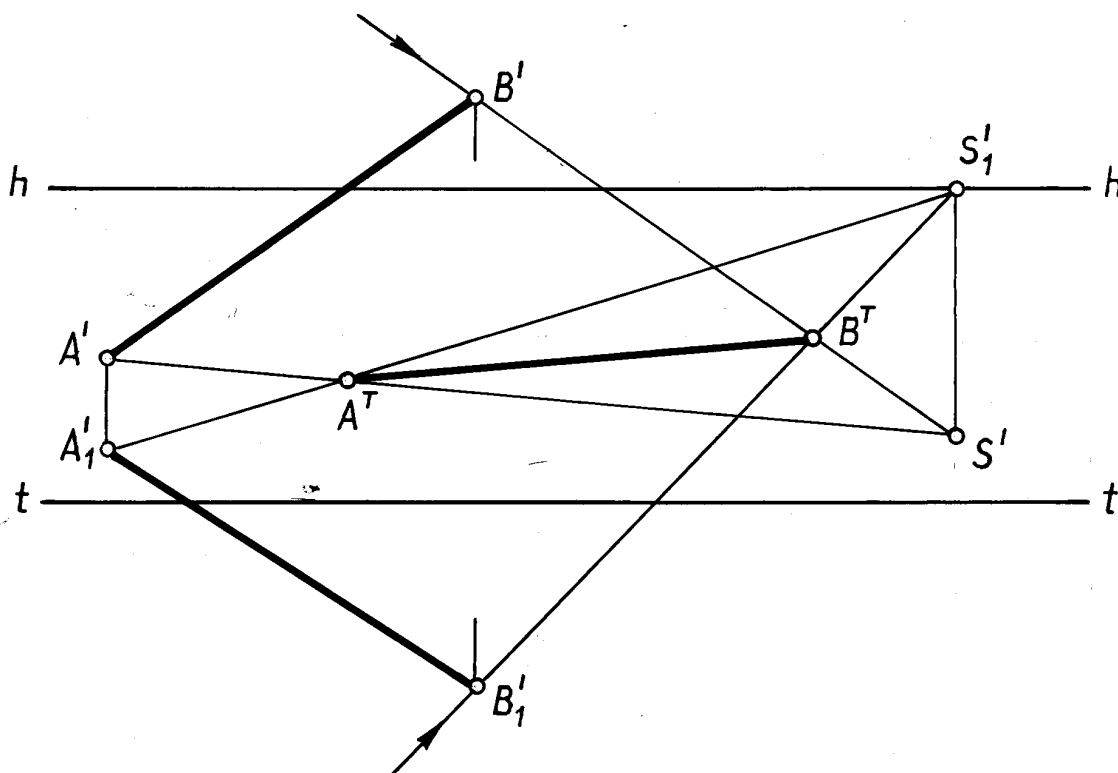


Рис. 18.13

Чтобы найти в перспективе тень  $A^T$  точки  $A$ , нужно через  $A'$  и  $S'$  провести перспективу светового луча, а через вторичную проекцию  $A_1'$  — вторичную проекцию луча (прямую  $A_1'S_1'$ ). Пересечение перспективы луча с его вторичной проекцией определит тень точки  $A$  на предметной плоскости.

Аналогично построена тень точки  $B$ .

Очевидные удобства при построении теней в перспективе присущи случаю, когда световые лучи принимаются параллельными плоскости картины. Следует иметь в виду, что при этом параллельны между собой не только вторичные проекции, но и сами световые лучи.

На рис. 18.14 построены собственные и падающие тени двух призм, когда световые лучи параллельны картине.

Определение контуров падающих теней в перспективе, когда световые лучи параллельны плоскости картины, по существу ничем не отличаются от определения контуров падающих теней в аксонометрии. Выполненные построения ясны из чертежа.

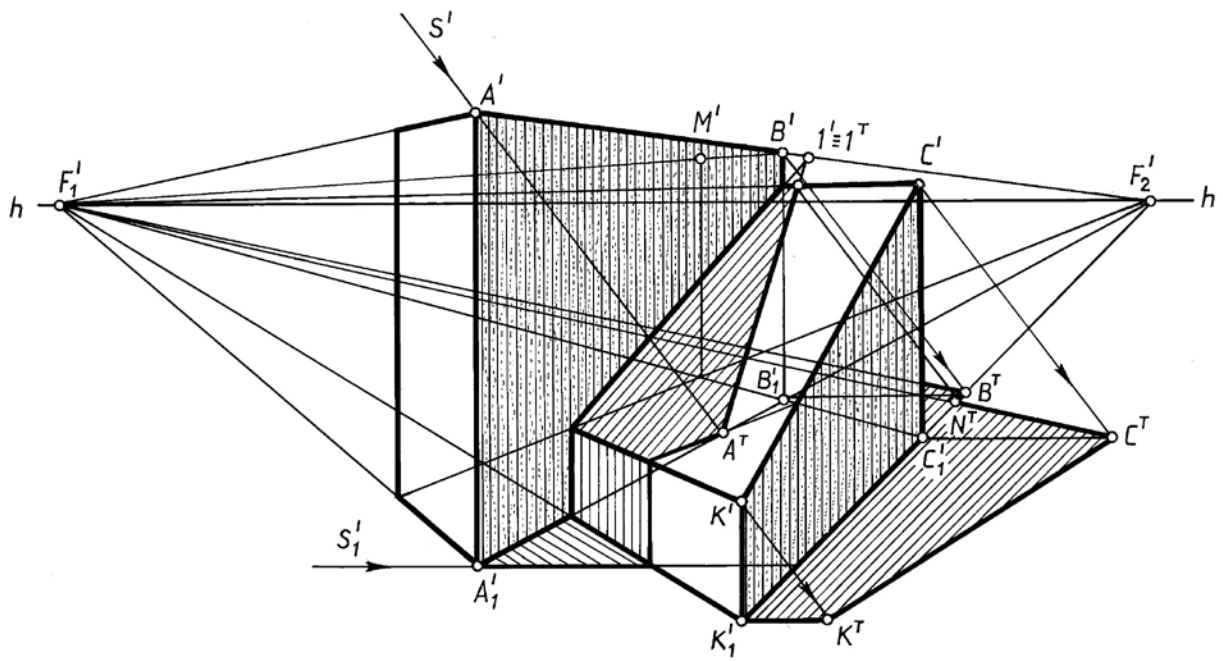


Рис. 18.14

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ .....	3	
<i>Лекция 9</i>		
СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ		
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ.....	4	
9.1. Общие понятия .....	4	
9.2. Способ замены плоскостей проекций .....	6	
9.2.1. Замена двух плоскостей проекций.....	9	
9.2.2. Основные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций.....	9	
<i>Лекция 10</i>		
СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ		
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ.....	15	
10.1. Плоскопараллельное перемещение .....	15	
10.2. Способ вращения .....	20	
10.2.1. Вращение вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций .....	20	
10.2.2. Вращение вокруг линий уровня .....	23	
<i>Лекция 11</i>		
ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТЯМ .....		26
11.1. Общие понятия .....	26	
11.2. Способы построения касательных плоскостей .....	27	
11.3. Основные типы задач по построению касательных плоскостей.....	28	
<i>Лекция 12</i>		
РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ .....		37
12.1. Общие понятия.....	37	
12.2. Развертывающиеся и неразвертывающиеся поверхности .....	38	
12.3. Общие правила построения разверток.....	39	
12.4. Построение разверток пирамидальной и конической поверхности .....	39	
12.5. Построение разверток призматических и цилиндрических поверхностей .....	41	
12.5.1. Способ триангуляции – разбивки многоугольника на треугольники.....	41	
12.5.2. Способ нормального сечения.....	42	
12.5.3. Способ раскатки.....	44	
12.6. Построение приближенных разверток неразвертывающихся поверхностей.....	45	
<i>Лекция 13</i>		
АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ.....		48
13.1. Сущность метода аксонометрических проекций и основные понятия .....	48	
13.2. Стандартные аксонометрические проекции.....	50	
13.2.1. Прямоугольная изометрия .....	50	
13.2.2. Прямоугольная диметрия .....	51	
13.2.3. Косоугольные аксонометрические проекции.....	52	
13.3. Построение аксонометрических изображений по ортогональным проекциям .....	53	
13.3.1. Аксонометрия точки.....	54	
13.3.2. Аксонометрия плоской фигуры.....	55	
13.3.3. Аксонометрия призматической поверхности .....	55	
13.4. Решение позиционных задач в аксонометрии.....	56	

#### Лекция 14

ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ .....	60
14.1. Проекция точки .....	60
14.2. Проекция прямой .....	61
14.3. Градуирование прямой .....	63
14.4. Взаимное положение двух прямых .....	65
14.5. Плоскость .....	66
14.6. Проекция поверхностей .....	72

#### Лекция 15

ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ) .....	76
15.1. Построение пересечения геометрических фигур в проекциях с числовыми отметками .....	76
15.1.1. Пересечение двух плоскостей, плоскости и поверхности, двух поверхностей .....	76
15.1.2. Пересечение прямой линии с плоскостью или поверхностью .....	81
15.2. Проектирование инженерных сооружений в проекциях с числовыми отметками .....	84

#### Лекция 16

ПЕРСПЕКТИВА .....	87
16.1. Центральное проецирование .....	87
16.2. Аппарат линейной перспективы .....	88
16.3. Перспектива прямой .....	91
16.4. Построение перспективы прямой, принадлежащей предметной плоскости .....	92
16.5. Построение перспективы точки, принадлежащей предметной плоскости .....	94
16.6. Построение перспективы отрезка прямой, принадлежащей предметной плоскости .....	95

#### Лекция 17

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРСПЕКТИВЫ ФИГУР ПО ИХ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПРОЕКЦИЯМ .....	97
17.1. Построение перспективы плоской фигуры, принадлежащей предметной плоскости .....	97
17.2. Построение перспективы вертикального отрезка с использованием выноса в картину, боковой стенки, радиального способа .....	98
17.3. Построение перспективы прямой общего положения .....	99
17.4. Способы построения перспективы .....	100
17.5. Выбор точки зрения .....	102
17.6. Построение следов и точки схода прямой по перспективе и вторичной проекции прямой .....	104
17.7. Деление отрезков на равные и пропорциональные части .....	104

#### Лекция 18

ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИИ ТЕНЕЙ .....	106
18.1. Построение теней на ортогональном чертеже .....	106
18.2. Тени от точки .....	107
18.3. Тени от прямой линии .....	108
18.4. Тени от плоской фигуры .....	109
18.5. Тень от объемной фигуры .....	111
18.6. Построение теней в аксонометрии .....	113
18.7. Построение теней в перспективе .....	115

Учебное издание

КОРЫТКО Людмила Семеновна  
САДОВСКИЙ Юрий Игоревич  
ПРОТАСОВА Майя Корнеевна и др.

## НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

*В 2 частях*

Часть 2

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ.  
ОДНОКАРТИННЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Редактор Т.Н. Микулик  
Компьютерная верстка Д.А. Исаева

---

Подписано в печать 28.04.2011.

Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 13,72. Уч.-изд. л. 5,36. Тираж 500. Заказ 1185.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.

Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.