УДК 624.539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ЦЕНТРАЛЬНО ЗАГРУЖЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Шевчук Л.И., канд. техн. наук, доцент,
Вербицкая О.Л.

Белорусский национальный технический университет

(г. Минск, Республика Беларусь)

Введение

При проектировании отдельных фундаментов, фундаментных плит и плит дорожных покрытий одной из важнейших проблем является учет жесткости грунтовых оснований, которые на разных площадках строительства могут отличаться особенностями своих механических свойств.

Ставится задача разработки модели для определения напряженно-деформированного состояния и метода оптимизации прямоугольных плит кусочно-постоянного сечения на упругом основании. Предусмотрена возможность расчета как физически линейной, так и физически нелинейной плиты.

Целью оптимизации является получение плиты минимального объема под заданную нагрузку при выполнении условий прочности и жесткости. В качестве параметров оптимизации приняты толщины отдельных частей плиты. Для оптимизации использован метод градиентного спуска по границе [1].

Оптимизация плиты методом градиентного спуска по границе

Статический расчет плиты выполнен методом конечных элементов. Прямоугольная нелинейно деформируемая плита разделена на *n* частей, отличающихся своей толщиной. Параметрами оптимизации являются толщины частей плиты $\left\{ x_i \right\}$. В качестве целевой функции взят объем пластинки $V\left(\vec{X}\right)$. На параметрах оптимизации строится многомерное пространство R_n, в пределах которого определяется минимум целевой функции

$$V\left(\vec{X}\right) = mimV\left(\vec{X}\right), \quad \vec{X} \in R_n , \tag{1}$$

где $\vec{X}$ – вектор (точка) n – мерного пространства R_n

$$\vec{X} = \left(x_1, x_2, ..., x_n \right)^T .$$

Параметры оптимизации ограничены только снизу

$$x_i \geq x_{adm}, \qquad i = 1,2,...,n . \tag{2}$$

Поставлены ограничения, выражающие условие прочности и жесткости

$$R_u - \sigma_{eq} \geq 0; \qquad w_{adm} - w_{max} \geq 0, \tag{3}$$

где x_i – толщина i –й части плиты;

x_{adm} – минимально допустимая толщина плиты;

R_u – расчетное сопротивление материала плиты;

σ_{ec} – эквивалентное напряжение;

w_{adm} – допускаемый прогиб плиты;

w_{max} – максимальный прогиб плиты.

Для поиска решения сформулированной выше задачи оптимизации нелинейно-деформированной плиты с кусочно-постоянным сечением применяется специально разработанный алгоритм [1], где используется метод градиентного спуска с проецированием очередной точки приближения на границы допускаемой области. В малой окрестности текущей точки пространства R_n, построенного на параметрах оптимизации, объем пластины может быть выражен линейной функцией параметров оптимизации

$$V\left(\vec{X}\right) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i , \tag{4}$$

где a_i – постоянные коэффициенты, устанавливаемые из геометрических соображений, $a_i > 0$;

x_i – толщина плиты в различных ее частях.

Очевидно, что целевая функция $V(\vec{X})$, может быть представлена как гиперплоскость в $n+1$– мерном пространстве, построенном на параметрах оптимизации $\vec{X}$ и объеме пластины V.

Пусть вблизи границы, описываемой условием (3), расположена точка N с координатами $x_{1N}, x_{2N}, \dots, x_{nN}$. Левые части выражений (3) можно рассматривать как некоторую функцию $\varepsilon(\vec{X})$, неявно выраженную через параметры оптимизации $x_1, x_2, \dots, x_n$. Учитывая, что размеры окрестности точки N малы, функцию $\varepsilon(\vec{X})$, можно представить как линейную. Приравняв ее к нулю, получим границу допустимой области параметров оптимизации

$$\varepsilon(\vec{X}) = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 0, \tag{5}$$

где n – количество параметров оптимизации.

Очевидно, что граница в этом случае представляют собой гиперплоскость в пространстве R_n. Для определения коэффициентов уравнения (5) $b_0, b_1, \dots, b_n$ вычисляются значения $\varepsilon_j(\vec{X})$ в точках, расположенных на координатных осях пространства R_n и удаленных от точки N на расстоянии s, а также в самой точке N. Выполняя равенство (5) в перечисленных точках, получим систему, содержащую $n+1$ линейных алгебраических уравнений

$$\varepsilon_k = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_{ik}, \quad k = 0, 1, \dots, n \ . \tag{6}$$

Решением системы уравнений (6), устанавливаются значения коэффициентов b_i. Для продолжения поиска оптимального решения вблизи границы (3) из точки N направим вектор в сторону антиградиента функции $V(\vec{X})$ и обозначим конец этого вектора буквой M.

Если в точке M условия (3) не выполняются, то направление поиска оптимального решения корректируется. Для этого определяются направляющие косинусы β_i гиперплоскости $\varepsilon(\vec{X}) = 0$.

Уравнение нормали к плоскости $\varepsilon(\vec{X}) = 0$, опущенной из точки M, имеет вид:

$$\frac{x_i - x_{i,M}}{\beta_i} = \frac{x_{i+1} + x_{i+1,M}}{\beta_{i+1}}, \quad i = 1,2,...,n-1. \qquad (7)$$

Координаты точки пересечения гиперплоскости $\varepsilon(\vec{X}) = 0$ и нормали к ней, опущенной из точки M, определяются в результате решения системы уравнений (8).

На каждом шаге поиска оптимального решения выполняется проверка и, если хотя бы одна из границ пересечена, строится план, включающий саму прогнозируемую точку M и все ее проекции на границах (рис. 1).

$$\varepsilon_t(\vec{X}) = 0,\ t = 1,2,...,n; \qquad \varphi_j(\vec{X}) = 0, \quad j = 1,2,...,m\ . \qquad (8)$$

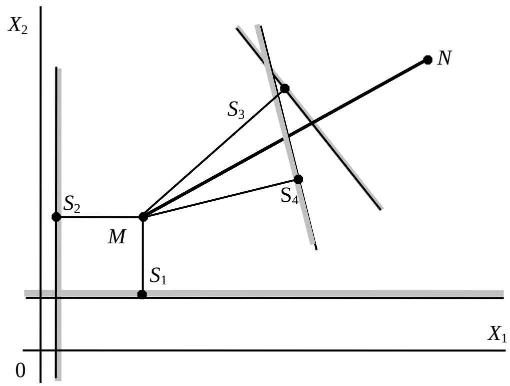

Рис. 1. Схема построения плана проекций на границы допускаемой области параметров оптимизации

Затем устанавливается такая точка плана, в которой одновременно выполняются условия (3) и целевая функция $V(\vec{X})$ имеет наименьшее значение. Эта точка и принимается в качестве решения на данном шаге приближения.

Пример оптимизации плиты на упругом основании

Выполнен расчет центрально нагруженной плиты (2,4×2,4 м) на упругом основании. Плита подкреплена двумя перекрестными ребрами шириной 40 см. Модуль упругости и коэффициент Пуассона плиты соответственно равны $E = 29$ ГПа, $\nu = 0,18$. Коэффициент жесткости основания установлен пробным расчетом по осадке $W_0 = 10$ мм при давлении $p = 200$ кПа. Для ограничения по прочности и жесткости приняты $R_u = 12$ МПа и $w_{adm} = 30$ мм. В качестве параметров оптимизации приняты толщина плиты и высота ребра.

В результате расчета по авторской программе *CROSS* получена плита оптимальной размеров с толщиной плиты $h_p = 10$ см и высотой ребра $h_r = 30$ см.

а) *б*)

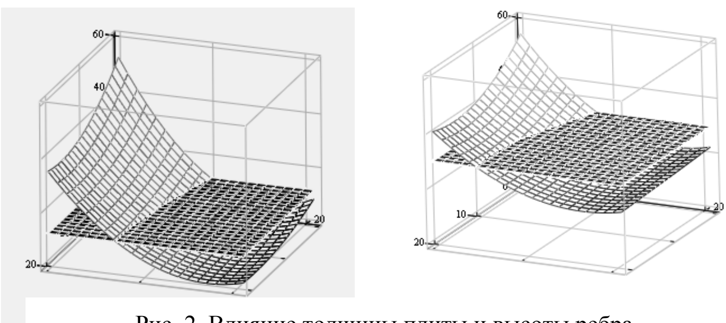

Рис. 2. Влияние толщины плиты и высоты ребра
на результаты расчета
а) максимальные напряжения; *б*) максимальные прогибы

На рис. 2 приведены зависимости максимальных напряжений и максимальных прогибов плиты от толщины плиты и высоты ребра.

Заключение

Анализ полученных результатов показывает, что в случае расположения точки поиска оптимального решения вблизи границы допускаемой области эффективным является метод градиентного спуска с проецированием поисковой точки на границы. При этом значительно сокращается число обращений к статическому расчету нелинейно деформируемой пластины.

Изложенный выше метод может быть успешно использован при составлении прикладных программ для оптимизации фундаментных плит и отдельно стоящих фундаментов.

Литература

Вербицкая, О.Л. Алгоритм оптимизации прямоугольных пластинок методом градиентного спуска с навигацией направления поиска вблизи границы / О.Л. Вербицкая // Вестник БНТУ. – 2004. – № 2. – С.15–20.