Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

Матвеева Л.Д.   Рудый А.Н.

Некоторые разделы курса Высшей математики

для студентов специальностей

1 - 27 01 01 **«Экономика и организация производства»**

1 - 27 **02 01 «Транспортная логистика»**

Минск 2017

УДК 519.85 (075.8)

ББК 18.87я7

М 54

Авторы: Л.Д. Матвеева, А.Н. Рудый

Рецензент В.И.Юринок

Настоящее издание является дополнением работ [5,6] тех же авторов . В пособии излагается теоретический материал и разбираются экономические приложения по изложенным темам из курса Высшей математики.
Приводятся также примеры решения типовых задач.
Пособие предназначено для студентов 1 курса автотракторного факультета БНТУ. Оно может быть также полезно преподавателям, ведущим практические занятия по данному курсу.

Регистрационный № БНТУ/ЭФ41-34.2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.

Интенсивное развитие новых наукоемких технологий делают особенно важной задачу подготовки инженерных кадров высокой квалификации способных решать поставленные перед ними задачи . Важную роль в системе такой подготовки играет курс Высшей математики, являющийся базовым для всех других естественно-научных курсов.

В представленном пособии изложен теоретический материал охватывающий следующие разделы курса математики:

1) Линейные векторные пространства ; модель межотраслевого баланса;
2) Прямая линия на плоскости; геометрическая интерпретация экономических задач;
3) Исследование функций с помощью производных; эластичность функций и ее использование в экономике .

1. **Линейные векторные пространства.**

Определение 1.1. Произвольное множество V будем называть линейным векторным пространством, если на V определена операция сложения его элементов (векторов), а именно: $\vec{u}, \vec{v} \to \vec{u}+\vec{v}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ и операция умножения вектора на действительное число $\alpha, \vec{u} \to \alpha\vec{u}, \forall \alpha \in R, \vec{u} \in V$. При этом необходимо, чтобы выполнялись следующие 8 аксиом:

1. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$, коммутативность сложения векторов.
2. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}),\ \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ - ассоциативность сложения векторов.
3. Существование нулевого элемента $\vec{0}$:
$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u},\ \forall \vec{u} \in V$.
4. Существование противоположного элемента:
$\forall \vec{u} \in V,\ \exists -\vec{u} \in V : \vec{u}+(-\vec{u})=-\vec{u}+\vec{u}=\vec{0}$.
5. $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{v}+\alpha\vec{u},\ \forall \alpha \in R, \vec{u}, \vec{v} \in V$.
6. $(\alpha \cdot \beta)\vec{u}=\alpha \cdot (\beta\vec{u}),\ \forall \alpha, \beta \in R, \vec{u} \in V$.
7. $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u},\ \forall \alpha, \beta \in R, \vec{u} \in V$.
8. $1 \cdot \vec{u}=\vec{u},\ \forall \vec{u} \in V$.

Пример 1.1. Множество действительных чисел R с обычными операциями сложения и умножения чисел будет линейным векторным пространством (все 8 аксиом выполняются).

Пример 1.2. Множество $M(m,n)$ всех матриц размерности $m \times n$ с обычными операциями сложения и умножения матрицы на число будет линейным векторным пространством (все 8 аксиом выполняются).

Пример 1.3. Множество матриц вида:

$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_{12} \in R$ - не будет линейным векторным пространством, так как это множество не замкнуто относительно операции сложения и умножения (сумма двух элементов данного вида не будет элементом данного вида).

Пример 1.4. Множество матриц вида

$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ будет линейным векторным пространством.

Пример 1.5. Арифметическое пространство $R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in R\}$ будет линейным векторным пространством, если задать операции сложения его элементов $\vec{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\vec{y}=(y_1, y_2, ..., y_n)$: $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n)$ и операцию умножения на число α: $\alpha\cdot\vec{x}=(\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$ (все 8 аксиом выполняются).

Определение 1.2. Векторы $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2},..., \overrightarrow{u_m}$ называются линейно-зависимыми, если $\exists$ такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ не все равные нулю, что

$$\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\lambda_2\overrightarrow{u_2}+...+\lambda_m\overrightarrow{u_m}=0. \tag{1}$$

Если же равенство (1) выполняется только при нулевых значениях λ_i $(\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_m=0)$, то векторы называются линейно-независимыми.

Базисом пространства V называется совокупность векторов $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2},..., \overrightarrow{v_n}\in V$, если : 1) они линейно-независимы; 2) любой вектор $\vec{u}\in V$ выражается через них с какими-то коэффициентами:

$$\vec{u}=\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{v_n}. \tag{2}$$

При этом числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ в (2) называются координатами вектора $\vec{u}$ в базисе $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2},..., \overrightarrow{v_n}$. Число n векторов базиса называется размерностью пространства V, $n=\dim V$.

Пример 1.6. Для линейного пространства M(2, 2) всех матриц размерности 2×2(см.пример1.2) матрицы $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ являются базисом, при этом любая матрица $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, то есть координатами A в данном базисе будут числа $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$.

Теорема 1.1. Координаты вектора в данном базисе определены однозначно.

Доказательство. От противного. Предположим, что $\vec{u}=\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{v_n}$ и $\vec{u}=\beta_1\overrightarrow{v_1}+\beta_2\overrightarrow{v_2}+...+\beta_n\overrightarrow{v_n}$ - два различных выражения вектора $\vec{u}$ через базис. Тогда $\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{v_n}=\beta_1\overrightarrow{v_1}+\beta_2\overrightarrow{v_2}+...+\beta_n\overrightarrow{v_n}$

$$(\alpha_1-\beta_1)\overrightarrow{v_1}+(\alpha_2-\beta_2)\overrightarrow{v_2}+...+(\alpha_n-\beta_n)\overrightarrow{v_n}=0. \tag{3}$$

Векторы образующие базис, линейно-независимы, поэтому из (3) следует:

$\alpha_1-\beta_1=0; \alpha_2-\beta_2=0; ...; \alpha_n-\beta_n=0$, то есть $\alpha_1=\beta_1; \alpha_2=\beta_2; ...; \alpha_n=\beta_n$. Противоречие, что и требовалось доказать.

Теорема 1.2. Система векторов

$$\begin{matrix} u_1(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}) \\ u_2(a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}) \\ ... \\ u_m(a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}) \end{matrix}$$ заданных своими координатами в некотором базисе,

будет линейно независимой тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленный из координат векторов равен m – числу векторов.

Доказательство. Достаточность. Дано: ранг матрицы равен m. Докажем, что векторы линейно-независимы. От противного. Предположим, что векторы линейно-зависимы. Тогда один из них линейно выражается через остальные. Например $u_m = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + ... + \alpha_{m-1}\overrightarrow{v_{m-1}}$ и если от последней строки отнять первую, умноженную на α_1, вторую – умноженную на α_2, …, $(m-1)$ - ю умноженную α_{m-1}, то получим нулевую строку, то есть ранг < m. Противоречие, ч. т. д.

Пример 1.7. Даны векторы $\overrightarrow{u_1}(1, 2, -1), \overrightarrow{u_2}(-2, -2, 3), \overrightarrow{u_3}(0, 2, 2)$. Доказать, что они образуют базис в пространстве R^3 и найти в этом базисе координаты вектора $\vec{b}(0, 4, 3)$.

Решение. Применим теорему 1.2. Найдем ранг матрицы А, составленной из координат векторов: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Координаты векторов выпишем в столбцы.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{1-й\ шаг}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{2-й\ шаг}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{3-й\ шаг}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1-й шаг. Ко второй строке прибавляем первую, умноженную на -2. К третьей строке прибавляем первую.

2-й шаг. Переставляем местами 2-ю и 3-ю строки.

3-й шаг. К третьей строке прибавляем вторую, умноженную на -2.

$rank\, A = 3 \Rightarrow$ векторы линейно-независимы.

Три линейно-независимых вектора трехмерного пространства образуют базис. Найдем координаты вектора $\vec{b}(0, 4, 3)$ в базисе $\overrightarrow{u_1}(1, 2, -1), \overrightarrow{u_2}(-2, -2, 3), \overrightarrow{u_3}(0, 2, 2)$:

$$\vec{b} = x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2} + x_3\overrightarrow{u_3}.$$

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}. \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решая систему, получим $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$- координаты вектора в базисе $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

или в матричном виде $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, где А – матрица системы.

Теорема 1.3. Система (4) всегда совместна. Множество решений системы (4) образует линейное пространство.

Доказательство. $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ является решением системы, поэтому она совместна. Пусть $(x_1^0, ..., x_n^0), (y_1^0, ..., y_n^0)$ - решения системы, тогда

$A \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ ... \\ x_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ ... \\ y_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$. Рассмотрим вектор $\begin{pmatrix} x_1^0 + y_1^0 \\ x_2^0 + y_2^0 \\ ... \\ x_n^0 + y_n^0 \end{pmatrix}$, тогда

$A \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 + y_1^0 \\ x_2^0 + y_2^0 \\ ... \\ x_n^0 + y_n^0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ ... \\ x_n^0 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ ... \\ y_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, то есть вектор $\begin{pmatrix} x_1^0 + y_1^0 \\ x_2^0 + y_2^0 \\ ... \\ x_n^0 + y_n^0 \end{pmatrix}$, также является решением системы (4) (множество всех решений замкнуто относительно операции сложения).

Аналогично доказывается, что $\forall \alpha \in R$

$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ ... \\ x_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1^0 \\ \alpha x_2^0 \\ ... \\ \alpha x_n^0 \end{pmatrix}$ - решение системы (4). Значит множество всех решений системы замкнуто относительно операции умножения решений на число. Все 8 аксиом линейного пространства проверяются непосредственно, ч.т.д.

Определение 1.3. Базис пространства всех решений системы (4) называется фундаментальной системой решений.

Пример 1.8. Найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+3x_2+3x_3+3x_4+3x_5=0 \\ 2x_1+4x_2+5x_3+6x_4+7x_5=0 \end{cases}.$$

Решение. Решим систему по методу Гаусса.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \underset{1-й\ шаг}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{2-й\ шаг}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rank} A=3$.

1-й шаг. Ко второй и третьей строкам прибавляем первую умноженную соответственно на -1 и -2.

2-й шаг. К третьей строке прибавляем вторую, умноженную на -1. Вторую строку сокращаем на 2.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_3+2x_4+3x_5=0 \end{cases}$$

$x_4=c_1,\ x_5=c_2$. Из последнего уравнения $x_3=-2c_1-3c_2$.

Из второго уравнения $x_2=-x_3-x_4-x_5=2c_1+3c_2-c_1-c_2=c_1+2c_2$. Из первого уравнения $x_1=0$.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ c_1+c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in R$ - общее решение. Количество свободных неизвестных задает размерность пространства решений. Для того, чтобы получить фундаментальную систему решений, одно из свободных неизвестных приравнивают к 1 остальные берут равными 0. И так поступают со всеми свободными неизвестными по очереди. В результате получают векторы фундаментальной системы решений.

$c_1=1,\ c_2=0 \Rightarrow \overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $c_2=1,\ c_1=0 \Rightarrow \overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ - фундаментальная система решений. При этом общее решение:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ c_1+c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=c_1\cdot\overrightarrow{u_1}+c_2\cdot\overrightarrow{u_2}.$$

Пример1. 9. Две отрасли промышленности производят каждая свою продукцию. Межотраслевая связь между выпуском продукции в отрасли и частичным расходованием продукции необходимым для обеспечения производства представлена в таблице:

		Отрасли производства 1	2	Конечная продукция	Валовый продукт
Отрасли производства	1	40	60	50	150
	2	40	30	30	100
Валовый продукт		150	100		

Таблица 1.1.

Каждой отрасли, как производителю соответствует строка таблицы 1.1. Для первой отрасли: валовый продукт составляет 150 единиц, из них 40 единиц используются самой отраслью, 60 единиц – 2-й отраслью и оставшиеся 50 единиц – конечная продукция. Для второй отрасли: валовый продукт составляет 100 единиц, из них 40 уходит в 1-ю отрасль, 30 единиц используется самой 2-й отраслью и оставшиеся 30 единиц конечная продукция. Каждой отрасли, как потребителю соответствуют столбцы таблицы. Определить какой валовый продукт $X=(x_1,\,x_2)$ необходим для того, чтобы конечная продукция $Y=(60;\,45)$.

Решение. Пусть $x_{11}=40,\ x_{12}=60,\ x_{21}=40,\ x_{22}=30$. Тогда $a_{11}=\dfrac{x_{11}}{150};\ a_{21}=\dfrac{x_{21}}{150}$ - количество единиц продукции 1-й и 2-й отрасли, идущих на изготовление единицы продукции 1-й отрасли. Аналогично, $a_{12}=\dfrac{x_{12}}{100};\ a_{22}=\dfrac{x_{22}}{100}$ - количество единиц продукции 1-й и 2-й отрасли, идущих на изготовление единицы продукции 2-й отрасли. Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}x_2\right)=\begin{pmatrix} 60 \\ 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 60 \\ 45 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{4}{15} & \dfrac{6}{10} \\ \dfrac{4}{15} & \dfrac{3}{10} \end{pmatrix}$ - матрица прямых затрат. Тогда систему (5) можно переписать в виде:

$$(E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 60 \\ 45 \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ - единичная матрица.

$E-A=\begin{pmatrix}\frac{11}{15} & -\frac{6}{10}\\ -\frac{4}{15} & \frac{7}{10}\end{pmatrix}$. Решая систему $\begin{pmatrix}\frac{11}{15} & -\frac{6}{10}\\ -\frac{4}{15} & \frac{7}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\ 45\end{pmatrix}$, получим $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}195{,}3\\ 138{,}7\end{pmatrix}$.

Замечание. Таблица 1.1 – таблица межотраслевого баланса. Так как межотраслевые потоки в таблице представлены в единицах производимой продукции- натуральный межотраслевой баланс. Аналогично можно рассматривать стоимостные таблицы. В общем виде стоимостный межотраслевой баланс представляется в виде:

отрасли	1	2	. . .	n	Y	X
1	x_{11}	x_{12}	. . .	x_{1n}	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	. . .	x_{2n}	y_2	x_2
. . .	…	…	. . .	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	. . .	x_{nn}	y_n	x_n
V	v_1	v_2	. . .	v_n		
X	x_1	x_2	. . .	x_n		

Таблица 1.2. Стоимостный межотраслевой баланс.

В таблице 1.2: x_{ij} – денежный эквивалент продукции i – й отрасли, идущий на нужды j – й отрасли; $X=(x_1, \dots, x_n)$ - вектор валового производства; $Y=(y_1, \dots, y_n)$ - вектор конечной продукции; $V=(v_1, \dots, v_n)$ - вектор условно-чистой продукции(характеризует прибавочную стоимость).

При этом:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}+y_i=x_i \ , \forall i=1, 2, \dots, n \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}+v_j=x_j \ , \forall j=1, 2, \dots, n. \qquad (8)$$

Упражнение 1.1. Используя (7), (8) проверить, что

$$\sum_{i=1}^{n} y_i=\sum_{j=1}^{n} v_j.$$

(9)

Матрица $A=(a_{ij})$, где $a_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{x_j}$ - называется матрицей прямых затрат (см. пример 1.9) и система:

$$(E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (10)$$

задает зависимость между векторами X и Y. Система уравнений (10) называется моделью межотраслевого баланса Леонтьева.

Определение 1.1. Матрица А называется продуктивной, если все элементы матрицы $B=(E-A)^{-1}$ - неотрицательны.

Перепишем систему уравнений (10) в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(E-A)^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

Из формулы (11) следует, что для продуктивной матрицы А и любого вектора $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ конечной продукции $y_i \geq 0,\ i=1,\ 2,\ \dots,\ n$ можно найти вектор $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \geq 0, i=1,\dots,n$ валового продукта необходимый для получения на выходе конечной продукции Y.

Упражнение 1.2. Дана стоимостная таблица межотраслевого баланса

отрасли	1	2	3	Y	X
1	3000	1200	500	5000	9700
2	800	400	10	890	2100
3	600	200	0	0	800
V	5300	300	290		
X	9700	2100	800		

1) Построить матрицу прямых затрат А и проверить ее продуктивность.

2) Найти вектор валовой продукции X необходимый для получения конечной продукции $Y = \begin{pmatrix} 10000 \\ 1500 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Замечание. Матрица $B = (E - A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат, $B = (b_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$. Из формулы (11) следует, что элемент b_{ij} матрицы B задает стоимость в валовом выпуске продукции i – ой отрасли, которая приходится на единицу конечной продукции j – ой отрасли.

Задания к п.1.

Задание 1.1. Даны векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$. Доказать, что они образуют базис в пространстве R^3 и найти в этом базисе координаты вектора $\vec{b}$.

1) $\overrightarrow{a_1} = (2;1;2), \overrightarrow{a_2} = (1;2;2), \overrightarrow{a_3} = (2;2;1), \vec{b} = (1;\ 2;\ 1)$

2) $\overrightarrow{a_1} = (1;2;1), \overrightarrow{a_2} = (2;1;1), \overrightarrow{a_3} = (1;1;2), \vec{b} = (2;\ 1;\ 2)$

3) $\overrightarrow{a_1} = (1;3;2), \overrightarrow{a_2} = (2;1;3), \overrightarrow{a_3} = (3;2;1), \vec{b} = (5;\ 6;\ 1)$

4) $\overrightarrow{a_1} = (1;4;6), \overrightarrow{a_2} = (2;-2;-1), \overrightarrow{a_3} = (2;-5;3), \vec{b} = (3;\ 5;\ 1)$

5) $\overrightarrow{a_1} = (1;4;-7), \overrightarrow{a_2} = (2;5;8), \overrightarrow{a_3} = (3;6;10), \vec{b} = (1;\ 7;\ -15)$

6) $\overrightarrow{a_1} = (2;4;3), \overrightarrow{a_2} = (1;2;4), \overrightarrow{a_3} = (3;5;7), \vec{b} = (3;\ 5;\ 2)$

7) $\overrightarrow{a_1} = (3;1;2), \overrightarrow{a_2} = (4;5;3), \overrightarrow{a_3} = (2;2;4), \vec{b} = (8;\ 5;\ 3)$

8) $\overrightarrow{a_1} = (1;2;4), \overrightarrow{a_2} = (3;6;8), \overrightarrow{a_3} = (2;1;-1), \vec{b} = (4;\ 2;\ 2)$

Задание 1.2. Найти фундаментальную систему решений:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 7x_1 \qquad + 5x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$

3) $x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0 \end{cases}$

Задание 1.3. Проверить образует ли линейное пространство множество:

а) P_2 всех многочленов вида $P_2=\{a_0x^2+a_1x+a_2 \mid a_i\in R, i=0,1,2\}$;

в) всех многочленов вида $\{x^2+a_1x+a_2 \mid a_i\in R, i=1,2\}$;

с) подмножество в арифметическом пространстве R^3 вида $\{(x_1,x_2,0) \mid x_i\in R, i=1,2\}$;

d) подмножество в арифметическом пространстве R^3 вида $\{(x_1,x_2,1) \mid x_i\in R, i=1,2\}$;

e) подмножество в арифметическом пространстве R^3 вида $\{(x_1,x_2,x_1+x_2) \mid x_i\in R, i=1,2\}$;

f) подмножество в арифметическом пространстве R^3 вида $\{(x_1,x_2,3x_1+2x_2) \mid x_i\in R, i=1,2\}$;

g) подмножество в арифметическом пространстве R^3 вида $\{(x_1,x_2,3x_1+2x_2+5) \mid x_i\in R, i=1,2\}$;

Задание 1.4. Найти какой-либо базис для линейных пространств из упражнения 5.3.

1.5. Дана матрица прямых затрат А. Доказать, что она является продуктивной. Найти матрицу полных затрат:

а) $A=\begin{pmatrix} 0,50 & 0,20 \\ 0,30 & 0,40 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 0,35 & 0,40 \\ 0,60 & 0,30 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 0,20 & 0,15 \\ 0,35 & 0,28 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$.

1.6. Матрица прямых затрат имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,7 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Найти вектор конечной продукции Y при заданном векторе валовой продукции $X=\begin{pmatrix} 120 \\ 100 \end{pmatrix}$.

1.7. Найти матрицу прямых затрат А по заданной матрице полных затрат $B=\begin{pmatrix}1,7 & 0,9\\1,2 & 1,7\end{pmatrix}$.

1.8. Дана матрица прямых затрат

$$A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,05 & 0,2\\0,3 & 0 & 0,15\\0,2 & 0,4 & 0\end{pmatrix}.$$

Найти валовой продукт при новом ассортименте конечного продукта

$$Y=\begin{pmatrix}100\\50\\80\end{pmatrix}.$$

1.9. Найти матрицу полных затрат и изменение валового продукта, необходимого для обеспечения изменения конечного продукта, если

$A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,2\\0,1 & 0,3\end{pmatrix}$, $\Delta Y=\begin{pmatrix}10\\20\end{pmatrix}$.

1.10. Рассчитать матрицу полных затрат B и найти конечный продукт Y, если $A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,1 & 0,2\\0,3 & 0,2 & 0,1\\0,1 & 0,4 & 0\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}100\\120\\150\end{pmatrix}$.

1.11. По данным отчетного периода получен следующий баланс трехотраслевой экономической системы:

№ отраслей	Потребители			Конечная продукция (тыс. шт.)	Валовая продукция (тыс. шт.)
	1	2	3		
1	20	40	30	110	200
2	30	16	60	54	160
3	10	24	16	150	200

Определить следующие экономические показатели на планируемый период:
1) коэффициенты прямых затрат;
2) коэффициенты полных затрат;
3) валовый выпуск отраслей, обеспечивающий новый конечный продукт

$$Y=\begin{pmatrix}130\\60\\160\end{pmatrix}.$$

1.12. Предприятие выпускает три вида продукции с использованием трех видов сырья. Характеристики производства указаны в таблице

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции, по вес. ед./ изд.			Запас сырья вес. ед.
	1	2	3	
1	5	12	7	2350
2	10	6	8	2060
3	9	11	4	2270

Найти:
1) Объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья;
2) прирост объема валовых выпусков по каждой отрасли, если конечное потребление увеличено по отрасли, соответственно на 30, 10 и 50%.

Ответы

1.1. 1) $\left(-\frac{2}{5};\frac{3}{5};\frac{3}{5}\right)$; 2) $\left(-\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$; 3) (1; - 1; 2); 4) (1; 2; -1); 5) (2; 1; -1); 6) (1; -2; 1); 7) (2; 1; -1); 8) (3; -1; 2).

1.2. 1) $X=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-11\\-9\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\11\\9\end{pmatrix}$; 2) $X=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\14\\11\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\7\\5\end{pmatrix}$;

3) $X=c_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-4\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$;

4) $X = c\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$; 5) $X = c_1\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{7} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$; 6); $X = c_1\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 7)

$$X = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

1.3. Образует линейное пространство: a); c); e); f).

1.4. Один из базисов: a) $1, x, x^2$; c) $(1,0,0);(0,1,0)$; e)$(1,0,1);(0,1,1)$; f)$(1,0,3),(0,1,2)$.

1.5. а) продуктивна, $B = \begin{pmatrix} 2,500 & 0,833 \\ 0,125 & 0,208 \end{pmatrix}$.

б) продуктивна, $B = \begin{pmatrix} 7,368 & 6,316 \\ 6,316 & 6,842 \end{pmatrix}$.

в) продуктивна, $B = \begin{pmatrix} 1,375 & 0,287 \\ 0,669 & 1,528 \end{pmatrix}$.

г) продуктивна, $B = \begin{pmatrix} 1,042 & 0,211 & 0,026 \\ 0,211 & 1,055 & 0,132 \\ 0,026 & 0,132 & 1,266 \end{pmatrix}$.

1.6. $Y = \begin{pmatrix} 46 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1.7. $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$.

1.8. $X = \begin{pmatrix} 152 \\ 126 \\ 159 \end{pmatrix}$.

1.9. $B = \frac{1}{0,4}\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$, $\Delta X = \begin{pmatrix} 27,5 \\ 32,5 \end{pmatrix}$.

1.10. $B=\begin{pmatrix} 1,974 & 0,468 & 0,442 \\ 0,805 & 1,506 & 0,312 \\ 0,519 & 0,649 & 1,169 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 18 \\ 51 \\ 92 \end{pmatrix}$.

1.11. 1) $A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,25 & 0,15 \\ 0,15 & 0,1 & 0,3 \\ 0,05 & 0,15 & 0,08 \end{pmatrix}$;

2) $B=\begin{pmatrix} 1,175 & 0,250 & 0,140 \\ 0,228 & 1,240 & 0,400 \\ 0,101 & 0,220 & 1,160 \end{pmatrix}$;

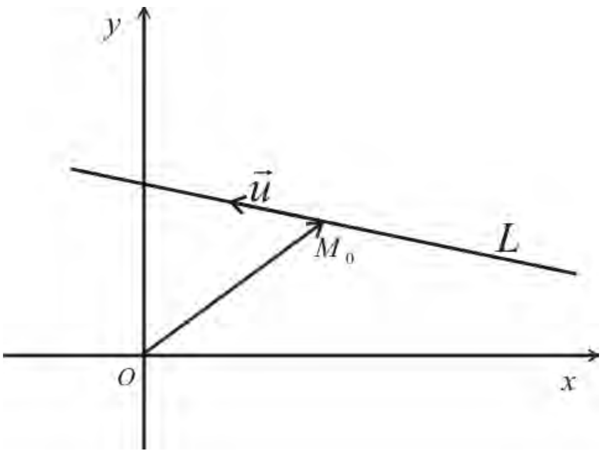
3) $X=\begin{pmatrix} 190,5 \\ 168,0 \\ 212,0 \end{pmatrix}$.

1.12. 1) $Y=\begin{pmatrix} 70 \\ 120 \\ 30 \end{pmatrix}$; 2) $\Delta X=\begin{pmatrix} 24,5 \\ 15,7 \\ 28,7 \end{pmatrix}$.

2. **Прямая линия на плоскости.**

Определение 2.1. Пусть $(0, \vec{i}, \vec{j})$ - прямоугольная декартова система координат на плоскости, $M_0(x_0, y_0)$ – фиксированная точка плоскости, $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r_0}(x_0, y_0)$ - ее радиус вектор, $\vec{u}(u_1, u_2)$ - ненулевой вектор. Прямой линией L, проходящей через точку M_0 с направляющим вектором $\vec{u}$ называется множество точек плоскости, радиус-векторы $\vec{r}(x, y)$ которых записываются в виде:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{u},\ t \in R \qquad (1)$$



Замечание. Другие уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases},\ t \in R. \qquad (2)$$

Уравнение (2) – параметрическое уравнение прямой.

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) – каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\vec{u}(u_1, u_2)$.

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \text{ -} \qquad (4)$$

уравнение прямой по двум точкам $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$.

Определение 2.2. Вектором нормали к прямой (1) будем называть произвольный ненулевой вектор $\vec{n}$ перпендикулярный прямой.

Замечание. Любые два вектора нормали к прямой L – коллинеарны. Если $\vec{n}(A, B)$ - вектор нормали к L, то $(\vec{n}, \vec{u}) = 0$, то есть:

$$(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r_0}) = 0 \text{ -} \qquad (5)$$

векторное уравнение прямой. Так как $\vec{r}-\vec{r_0}=(x-x_0)\cdot\vec{i}+(y-y_0)\cdot\vec{j}$, то из (5) следует:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \text{ -} \qquad (6)$$

уравнение прямой по точке $M_0(x_0,\, y_0)$ и вектору нормали $\vec{n}(A,\, B)$. Раскроем скобки в формуле (6), получим:

$$Ax+By+(-Ax_0-By_0)=0$$

$$Ax+By+C=0 \text{ -} \qquad (7)$$

общее уравнение прямой.

Пример 2.1. Дана прямая L: $4x-3y+12=0$ и точка M(1; 2). Проверить, что M не принадлежит прямой и написать уравнение прямой, проходящей через точку M

1) параллельно прямой L; 2) перпендикулярно прямой L.

Решение. Подставим координаты точки M в уравнение: $4\cdot1-3\cdot2+12\neq0$, поэтому точка M не принадлежит прямой.

1) Так как прямые параллельны, то их векторы нормали совпадают, поэтому $\vec{n}(4;-3)$ - вектор нормали к искомой прямой. Тогда по формуле (6):

$$4(x-1)-3(y-2)=0$$

$4x-3y+2=0$ - искомая прямая.

2) Так как прямые перпендикулярны, то вектор нормали $\vec{n}(4;-3)$ для первой прямой будет направляющим вектором для искомой прямой, поэтому по формуле (3):

$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{-3}$ - искомая прямая.

Нормальное уравнение прямой.

Пусть $\overrightarrow{n^0}$ - вектор нормали к прямой L, $\left|\overrightarrow{n^0}\right|=1$ и пусть $\overrightarrow{n^0}$ направлен от начала координат к прямой, $\overrightarrow{n^0}\,(\cos\alpha,\, \cos\beta)$.

Тогда:

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta-p=0 \text{ -} \qquad (8)$$

нормальное уравнение прямой (p – расстояние от начала координат до прямой). При этом, если $M\,(a,\, b)$ - произвольная точка плоскости, то

$$d=\left|a\cos\alpha+b\cos\beta-p\right| \text{ -} \qquad (9)$$

расстояние от точки M до прямой. Для того, чтобы из уравнения (7) получить уравнение (8) надо представить его в виде:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0,$$

причем знак перед корнем выбирается противоположным знаку C. Поэтому формула (9) перепишется в виде $d=\left|\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}a+\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}b+\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$.

Пример 2.2. В условиях примера 2.1 найдем расстояние от точки $M(1;2)$ до прямой L.

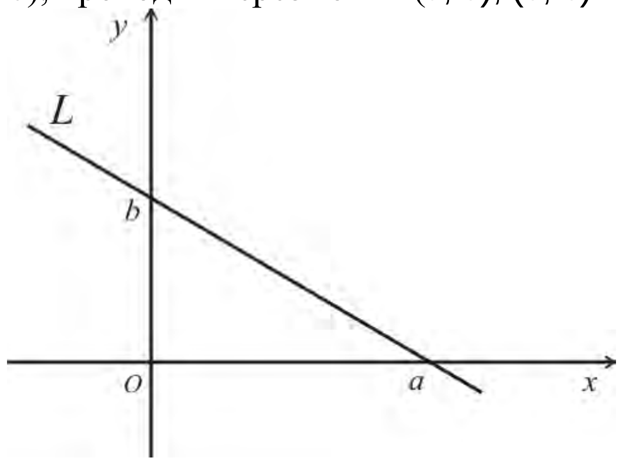
Решение. $L: 4x-3y+12=0, \vec{n}(4;-3)$ - вектор нормали, $|\vec{n}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$. Тогда $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{12}{5}=0$ - нормальное уравнение прямой, поэтому, по формуле (9):

$$d=\left|-\frac{4}{5}\cdot 1+\frac{3}{5}\cdot 2-\frac{12}{5}\right|=2.$$

Замечание. Рассмотри (7) – общее уравнение прямой. Пусть $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0$. Тогда уравнение (7) можно переписать в виде:

$$Ax+By=-C;\ \frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)}=1 \text{ или } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{10}$$

где $a=-\frac{C}{A}, b=-\frac{C}{B}$; уравнение (10) – уравнение прямой в отрезках. Прямая , заданная уравнением (10), проходит через точки (a, 0), (0, b) на осях координат:



Предположим, что какие-то из коэффициентов A, B, C в уравнении $Ax+By+C=0$ равны нулю. Тогда:

1) если C=0, то прямая проходит через начало координат;
2) если A=0, то прямая проходит параллельно оси Ox;
3) если B=0, то прямая проходит параллельно оси Oy.

Верна также теорема:

Теорема 2.1. Пусть $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ две прямые, заданные общими уравнениями. Тогда

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}, \tag{11}$$

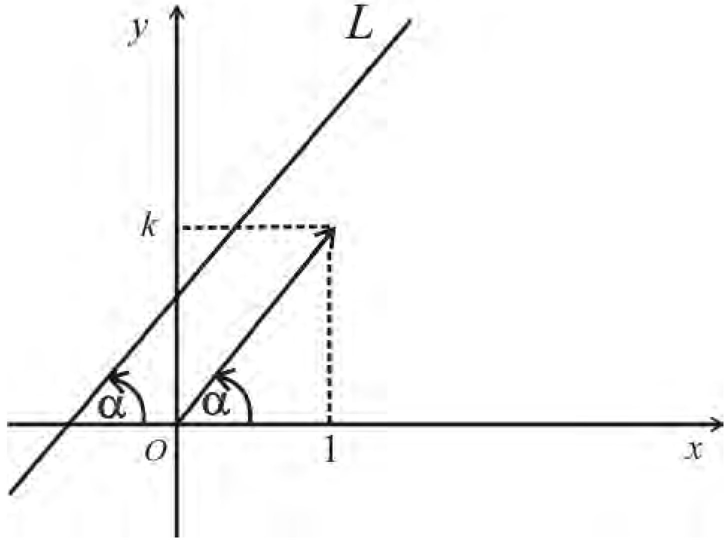
Где φ - угол между прямыми. Если $A_1A_2+B_1B_2=0$, то прямые перпендикулярны.

Если $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$, то прямые параллельны

Пусть $Ax+By+C=0$ - общее уравнение прямой L. Пусть $B\neq 0$. Тогда $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$. Или в других обозначениях:

$$y=kx+b \text{ -} \tag{12}$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом k. При этом вектор $\vec{n}(-k,1)$ - вектор нормали к прямой L. Тогда $\vec{u}(1,k)$ - направляющий вектор прямой:



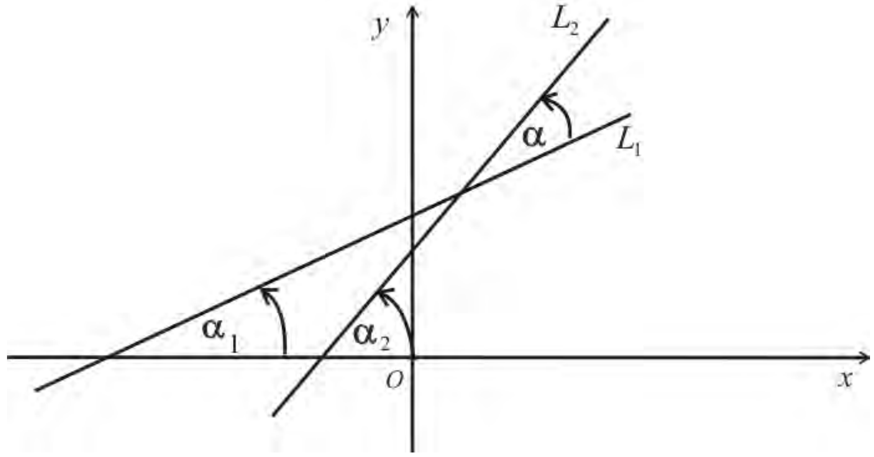
и $\operatorname{tg}\alpha=k$ - тангенс угла, образованного прямой с положительным направлением оси Ox (угол α отсчитывается от оси Ox к прямой L против часовой стрелки).

Формула (12) получена преобразованием формулы (7). Аналогичные преобразования формулы (6) дадут формулу:

$$y=y_0+k(x-x_0) \text{ -} \tag{13}$$

уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(x_0,\,y_0)$ с угловым коэффициентом k.

Рассмотрим две прямые $L_1: y=k_1x+b_1$ и $L_2: y=k_2x+b_2$, заданные уравнениями (12):

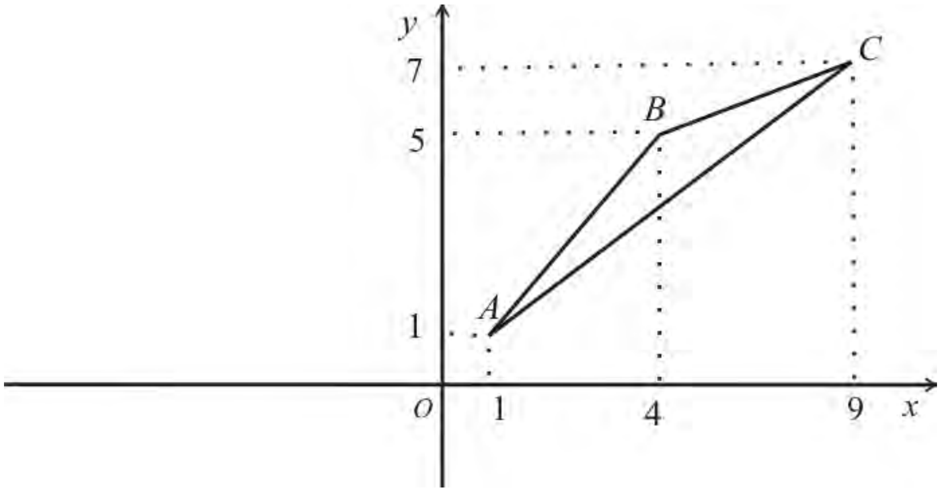


Тогда $\operatorname{tg}\alpha_1=k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2=k_2$, $\alpha=\alpha_2-\alpha_1$,

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \text{ -} \qquad (14)$$

формула угла φ между прямыми (угол φ отсчитывается от прямой L_1 и L_2 против часовой стрелки). Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то $k_1 = k_2$, если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Пример 2.3. Дан ΔABC, $A(1,1)$; $B(4,5)$; $C(9,7)$. Написать уравнение стороны АС, уравнение медианы и высоты, проведенных из вершины В, найти длину высоты. Написать уравнение биссектрисы, проведенной из вершины А. Сделать чертеж.



1) По формуле (4):

$AC: \dfrac{x-1}{9-1} = \dfrac{y-1}{7-1}; \dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y-1}{6};\ y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4}$ - уравнение стороны АС.

2) Найдем середину АС. $M\left(\dfrac{9+1}{2}; \dfrac{7+1}{2}\right) = (5;\, 4)$, тогда $\dfrac{x-4}{5-4} = \dfrac{y-5}{4-5}$;

$x - 4 = -(y-5);\ y = -x + 9$ - уравнение медианы.

3) $\overrightarrow{AC}(8;\, 6)$ - вектор нормали к высоте

$8(x-4) + 6(y-5) = 0;\ 8x + 6y - 62 = 0;\ \ 4x + 3y - 31 = 0$ - уравнение высоты.

4) $3x - 4y + 1 = 0$ - уравнение стороны АС;

$-\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{1}{5} = 0$ - нормальное уравнение стороны АС.

$d = \left| -\dfrac{3}{5} \cdot 4 + \dfrac{4}{5} \cdot 5 - \dfrac{1}{5} \right| = \dfrac{7}{5}$ - длина высоты.

5) $\overrightarrow{AB}(3,4)$, $\overrightarrow{AC}(8,\, 6)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\overrightarrow{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

$\vec{l}_1 = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}\right); \vec{l}_2 = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \left(\dfrac{8}{10}; \dfrac{6}{10}\right) = \left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{3}{5}\right).$

$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \left(\dfrac{7}{5}; \dfrac{7}{5}\right)$ - направляющий вектор биссектрисы

$\frac{x-1}{\frac{7}{5}}=\frac{y-1}{\frac{7}{5}}$; $x-1=y-1$; $y=x$ - биссектриса угла А.

Замечание. Рассмотрим прямую L, заданную уравнением (7):

$Ax+By+C=0$. Пусть $M_1(a_1,b_1)$ и $M_2(a_2,b_2)$ две произвольные точки плоскости, $M_1, M_2 \notin L$. Тогда, если:

$$(Aa_1+Bb_1+C)(Aa_2+Bb_2+C)>0, \qquad (15)$$

то точки M_1 и M_2 лежат по одну сторону от прямой L. В противном случае – по разные стороны.

Пример 2.4. Малое предприятие выпускает мебель двух видов: столы и стулья. Месячный план выпуска: не менее 50 столов и 150 стульев. При изготовлении продукции используется сырье двух видов: S_1 и S_2. Месячные запасы сырья, а также количество сырья идущего на изготовление единицы продукции приведены в таблице:

Вид сырья	Запасы сырья	Количество единиц сырья, идущего на изготовление	
		1 стола	1 стула
S_1	900	3	1
S_2	1500	4	2

Изобразить на плоскости множество планов выпуска продукции.

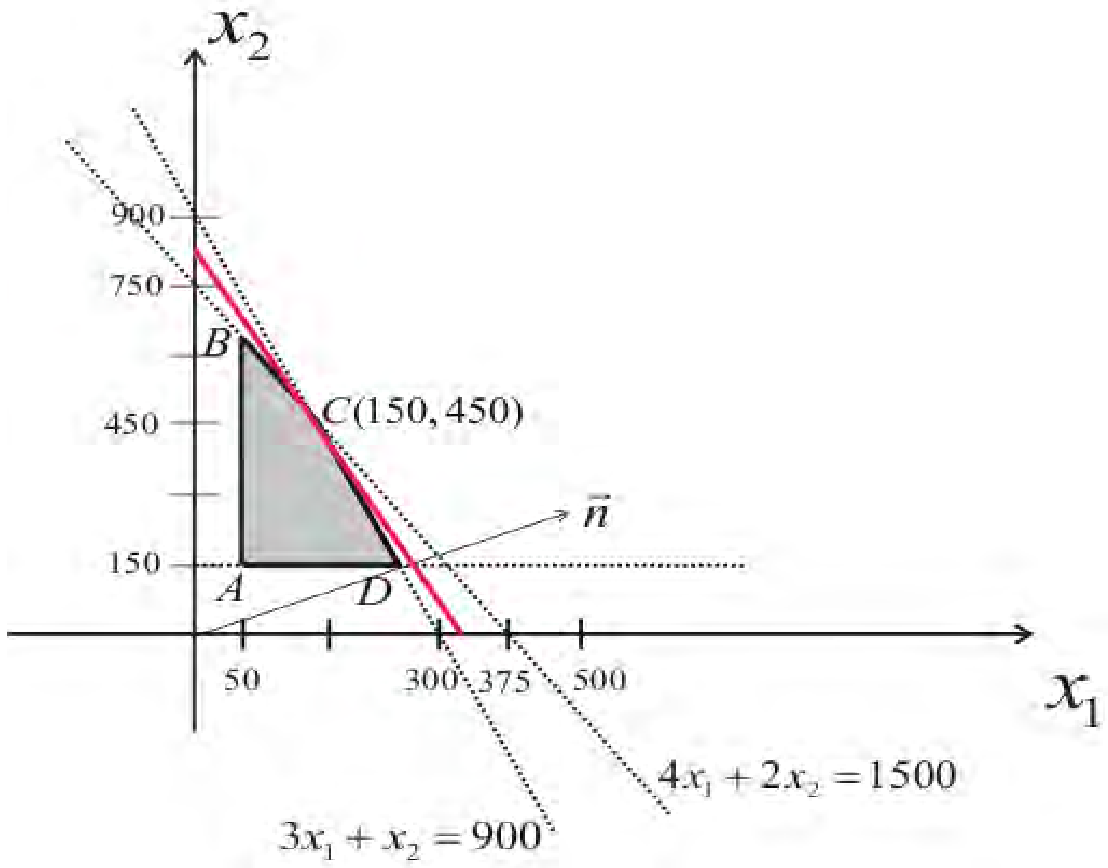
Решение. Каждая точка $M_1(x_1, x_2)$ плоскости имеет две координаты x_1 и x_2. Пусть x_1 – количество выпускаемых столов, x_2 – количество выпускаемых стульев; тогда ограничения на x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_1 \ge 50 \\ x_2 \ge 150 \\ 3x_1+x_2 \le 900 \\ 4x_1+2x_2 \le 1500 \\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

При построении многоугольника планов строим прямые:

$x_1=50$; $x_2=150$; $3x_1+x_2=900$; $4x_1+2x_2=1500$.

Из (15) следует что, если какая-либо точка(например О(0; 0)) удовлетворяет неравенству $3x_1+x_2-900\le 0$, то и все точки полуплоскости ,где лежит точка О, будут ему удовлетворять. И так для каждого неравенства. В результате получим четырехугольник:



Все точки с целыми координатами в четырехугольнике ABCD будут допустимыми планами.

Пример 2.5. В условиях примера 4 предположим, что предприятие продает мебель по цене: 500(ден.ед.) – за один стол и 200(ден.ед.) – за один стул. Найдем план производства, при котором прибыль – максимальна.

Решение. Для плана $M_1(x_1,\, x_2)$ прибыль Z равна:

$Z = 500x_1 + 200x_2 \to \max$. Рассмотрим прямую

$$500x_1 + 200x_2 - Z = 0. \quad (16)$$

Пусть $Z > 0$. Вектор $\vec{n}(500, 200)$ направлен от начала координат к прямой и расстояние α от начала координат до прямой равно: $d = \dfrac{Z}{|\vec{n}|}$(см. формулу (9)).

Таким образом $Z = d \cdot |\vec{n}|$, и чем больше d – тем больше прибыль Z. Будем двигать прямую (16) параллельно в направлении вектора $\vec{n}$ максимально далеко от начала координат, пока она имеет хоть одну общую точку с четырехугольником. Предельное положение(когда прямая проходит через точку С) будет соответствовать максимальной прибыли Z. При этом угловая точка С(150; 450) – единственное решение задачи. Из уравнения (16) следует, что

$Z = 500x_1 + 200x_2 = 500 \cdot 150 + 200 \cdot 450 = 165000$ - максимальная прибыль. При этом план производства: 150 столов и 450 стульев – оптимальный план.

Упражнение 2.1. В условиях примера 5 сделаем дополнительное предположение: предприятие решило увеличить месячные размеры сырья S_2. Найти предельное значение S_2, превышение которого не будет влиять на рост прибыли.

Упражнение 2.2. Малое предприятие выпускает стулья двух моделей: M_1 и M_2. Каждую модель собирают отдельной бригадой. Первая бригада за смену собирает не более 200 стульев модели M_1, вторая – не более 300 стульев модели M_2. На производство одного стула модели M_1 расходуется 4 ед. комплектующих, для модели M_2 – 3 единицы. Общий запас комплектующих: 1100 ед. Прибыль от реализации одного стула модели M_1: 60 ден.ед., второго – 40 ден.ед. Найти:

1) План производства, при котором предприятие получит максимальную прибыль.

2) Предприятие для увеличения прибыли решило увеличить производительность первой бригады. Найти производительность, превышение которой не будет влиять на рост прибыли.

3) Предприятие для увеличения прибыли решило увеличить запас комплектующих. Найти предельное значение, после которого прибыль не будет расти.

Упражнение 2.3 Зависимость между затратами y (д. е.) на обслуживание автомобиля за одну поездку от расстояния x (км) задается в виде $y_1 = 30x + 2500$ - для первого автопарка и $y_2 = 25x + 4000$ - для второго автопарка. Фирма планирует взять в аренду автомобиль. При каких значениях x арендовать на 2-м автопарке предпочтительней. Построить графики $y_1(x)$, $y_2(x)$.

Задания к п.2.

2.1. Составить уравнения прямых, параллельных биссектрисе второго координатного угла и отсекающих на оси Оу отрезки, величины которых $b_1 = 3, b_2 = -7$.

2.2. Составить уравнение прямой проходящей через точку М(2; -1):
1) параллельной прямой $4x - 2y + 7 = 0$. Найти расстояние между прямыми;
2) перпендикулярно прямой $4x - 2y + 7 = 0$;
3) под углом 45° к прямой $4x - 2y + 7 = 0$.

2.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку М(3; 2) и перпендикулярной прямой $5x + y = 6$. Найти точку симметричную точке М относительно прямой.

2.4. Записать уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки:
1) $a = 2, b = -3$; 2) $a = 2\frac{1}{3}, b = -4\frac{1}{2}$.

2.5. Вычислить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой в каждом из следующих случаев:
1) $3x - y + 6 = 0$; 2) $x + 2y - 1 = 0$. Написать уравнения медианы и высоты прямого угла треугольника.

2.6. Диагонали ромба, принятые за оси координат, равны 8 и 10. Составить уравнения сторон ромба.

2.7. При каком значении С прямая $2x - 5y + C = 0$ отсекает на оси Ох отрезок $a = 6$?

2.8. При каких значениях А прямая $Ax + 3y + 12 = 0$ отсекает на координатных осях отрезки равной длины?

2.9. Найти значения В, при которых прямая $3x + By - 15 = 0$ образует с осью Ох соответственно углы 1) 45^0; 2) 135^0.

2.10. Через точку пересечения прямых l_1, l_2 провести прямую, параллельную прямой l в каждом из следующих случаев:
1) $l_1: 3x + 5y - 7 = 0, l_2: 2x + y - 7 = 0; l: x + 5y - 2 = 0$;
2) $l_1: 4x + y - 1 = 0, l_2: 3x - 5y + 1 = 0; l: x + 7y + 2 = 0$;
3) $l_1: 2x + y + 5 = 0, l_2: 5x + 4y - 7 = 0; l: x - y - 1 = 0$.

2.11. Найти углы между прямыми l_1, l_2 и расстояние от точки М до прямой l_1 в каждом из следующих случаев:
1) $l_1: 2x + 5y - 1 = 0, l_2: 4x - y - 2 = 0; M(-4, 2)$; 2) $l_1: x - y + 6 = 0, l_2: 5x - y - 6 = 0; M(3, 4)$;
3) $l_1: 11x - 2y - 7 = 0, l_2: 3x + y - 4 = 0; M(2, -2)$.
В каком угле- остром или тупом лежит точка М?

2.12. Через точку пересечения прямых l_1, l_2 провести прямую образующую угол φ с прямой l в каждом из следующих случаев:

1) $l_1: 3x-y-8=0$, $l_2: x+y-4=0; \varphi=45^0$; $l: x+5y-1=0$;

2) $l_1: 2x-y+5=0$, $l_2: x-y+7=0; \varphi=135^0$; $l: 2x+y-1=0$.

2.13. Составить уравнения двух перпендикуляров к прямой $3x+5y-15=0$, проведенных из точек пересечения ее с осями координат.

2.14. Найти точку Q, симметричную точке N относительно прямой l в каждом из следующих случаев:

1) $N(2,-2)$, $l: 3x+y-14=0$; 2) $N(2,7)$, $l: 2x+y-1=0$;

3) $N(5,5)$, $l: x-y-2=0$; 4) $N(6,1)$, $l: 4x+2y-5=0$.

2.15. Составить уравнения прямых, на которых лежат медианы треугольника с вершинами A(3, -1), B(3, 5), C (1, 1).

2.16. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами A(2, 1), B(4, 3), C(6,3).

2.17. Стороны трапеции лежат на прямых, заданных уравнениями: $2x+y-6=0$, $6x+3y-9=0$, $x-y-3=0$, $5x+y+6=0$.

Найти точку пересечения диагоналей.

2.18. Вычислить длину перпендикуляра, проведенного из точки N к прямой l в каждом из следующих случаев:

1) $N(2, 2)$, $l: 5y-x+2=0$; 2) $N(1,-3)$, $l: x-y+3=0$.

2.19. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $3x+4y-14=0$ и отстоящей от нее на расстоянии d=4.

2.20. Одна из сторон квадрата лежит на прямой $2x-y+5=0$, а центр его находится в точке M(2, -5). Составить уравнения его трех других сторон.

2.21. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(1,2)$ под углом 45° к прямой $x-3y+5=0$.

2.22. В треугольнике $ABC: A\ 1;2\ ,\ B\ 4;6\ ,\ C\ -7;8$. 1) Написать уравнение биссектрисы треугольника проходящей через вершину A.

2) Написать уравнение высоты и медианы треугольника проходящих через вершину B. Найти длину высоты.

2.23. Дана прямая $L:\ 5x+y-17=0$.

1) Написать уравнение прямой L_1, проходящей через точку $M(8,3)$ перпендикулярно прямой L.
2) Найти точку симметричную точке M относительно прямой L.
3) Написать уравнения биссектрис делящих пополам углы между L и L_1.

2.24. Затраты на перевозки одного и того же груза двумя разными видами транспорта вычисляются по формулам: $y_1=50x+200$ и $y_2=30x+400$, где x - расстояние в сотнях километров, y_1, y_2 - стоимость перевозки в денежных единицах. Определите графически, с какого расстояния более экономичным становится второй вид транспорта по сравнению с первым.

2.25. Затраты на перевозки одного и того же груза тремя разными видами транспорта вычисляются соответственно по формулам: $y_1 = 40x + 100$, $y_2 = 30x + 200$, $y_3 = 10x + 400$, где x - расстояние в сотнях километров, y_1, y_2, y_3 - стоимость перевозки в денежных единицах. Определите графически, каким видом транспорта экономически более выгодно перевозить груз на расстояние:

а) до 1000 км;

б) свыше 1000 км.

2.26. Небольшое предприятие перерабатывает некоторое комплексное сырье в два вида конечной продукции. Технологический процесс состоит из двух этапов. На первом этапе поступающее сырье перерабатывается в три промежуточных продукта, которые на втором этапе используются для изготовления требуемой конечной продукции. Выход промежуточных продуктов на 1 т сырья и расход этих продуктов на производство 1 т конечной продукции каждого вида (I и II) указаны в таблице. Оптовая цена 1 т конечной продукции I вида 55 ден. ед., II – 70 ден. ед. Найти:

1) План производства, при котором предприятие получит максимальную прибыль.

2) Предприятие решило увеличить выход второго промежуточного продукта. Найти его предельное значение, при котором прибыль перестанет расти.

Промежуточный продукт	Выход из 1 т сырья, кг	Расход на производство 1т конечного продукта	
		I вид	II вид
1	400	100	200
2	300	100	100
3	800	200	100

2.27. Фирма выпускает 2 вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используются два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 10 кг мороженого и месячные запасы исходных продуктов даны в таблице:

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 10 кг мороженого		Запас, кг
	сливочное	шоколадное	
молоко	8	5	4000
наполнители	4	8	3650

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в месяц.

Отпускная цена 1 кг сливочного мороженого 16 ден. ед., шоколадного – 14 ден. ед. Определить:

1) Количество мороженого каждого вида, которое должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

2) Предельно допустимые месячные запасы молока и наполнителей в месяц, не влияющие на рост прибыли.

3) Диапазон разницы в покупательском спросе между сливочным и шоколадным мороженым не влияющем на прибыль.

4) Диапазон покупательского спроса на шоколадное мороженое, не влияющее прибыль.

Ответы

2.1. $x+y-3=0$; $x+y+7=0$.

2.2.1) $2x-y-5=0; 1{,}7\cdot\sqrt{5}$; 2) $x+2y=0$; 3) $3x+y-5=0; x-3y-5=0$

2.3. $x-5y+7=0$ $\left(-\frac{16}{13};\frac{15}{13}\right)$.

2.4. 1) $3x-2y-6=0$; 2) $27x-14y-63=0$.

2.5. 1) 6; $y=-3x$ - медиана; $x+3y=0$ - высота; 2) $\frac{1}{4}$ $y=\frac{1}{2}x$ - медиана; $-2x+y=0$ - высота;.

2.6. $5x-4y+20=0$; $5x+4y-20=0$; $5x+4y+20=0$; $5x-4y-20=0$.

2.7. С=- 12. 2.8. А=3.

2.9. 1) В= - 3; 2) В=3.

2.10. 1) $x+5y+1=0$; 2) $x+7y-7=0$; 3) $x-y+22=0$.

2.11. 1) $\varphi=-\operatorname{arctg}\frac{22}{5}$, $d=\frac{1}{\sqrt{29}}$; 2) $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, $d=\frac{5}{\sqrt{2}}$;

2) $\varphi=-\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, $d=\frac{19}{5\sqrt{5}}$.

2.12. 1) $2x-3y-3=0$; 2) $3x-y+3=0$.

2.13. $5x-3y-25=0$; $5x-3y+9=0$.

2.14. 1) Q(8, 0); 2) Q(-6, 3); 3) Q(7, 3); 4) Q(-2, 3).

2.15. $x-2y+1=0$; $5x-3y-10=0$; $4x+y-11=0$.

2.16. $O\left(4, \frac{7}{3}\right)$. 2.17. $O\left(-\frac{1}{2}, \frac{21}{4}\right)$.

2.18. 1) $\frac{10}{\sqrt{26}}$; 2) $\frac{7}{\sqrt{2}}$.

2.19. $3x+4y+6=0$; $3x+4y-34=0$.

2.20. $x+2y-7=0$; $2x-y-24=0$; $x+2y+23=0$.

2.21. $2x-y=0$; $x+2y-3=0$.

2.24. Начиная с 1000 км.

2.25. а) первым; б) третьим.

2.26. 1) (2, 1); 2) до 400 кг.

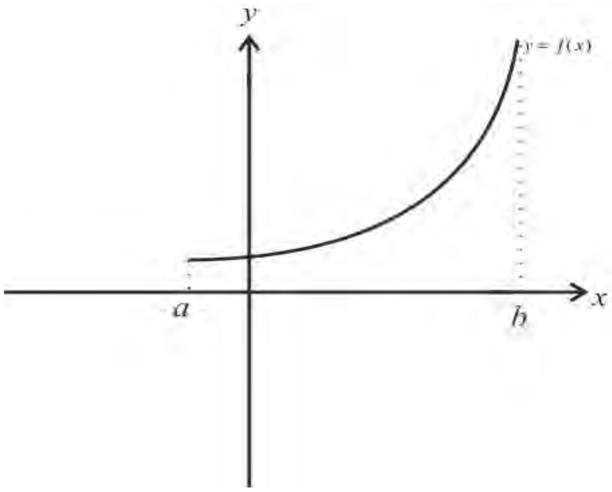
2.27. 1) (312,5; 300);
2) молока – 432,079 кг, наполнители – 392,5 кг;
3) (12,5; 500);
4) (300; 456,25).

3. Исследование функций с помощью производных.

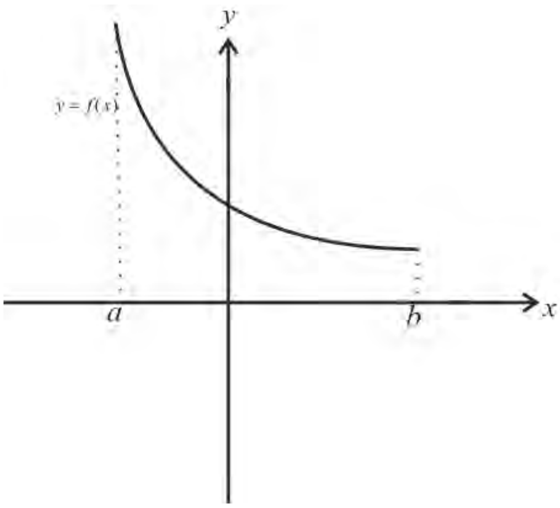
Определение 3.1. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на интервале (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ($\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$).

Функция $y = f(x)$ называется неубывающей (невозрастающей) на интервале (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ ($\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$).

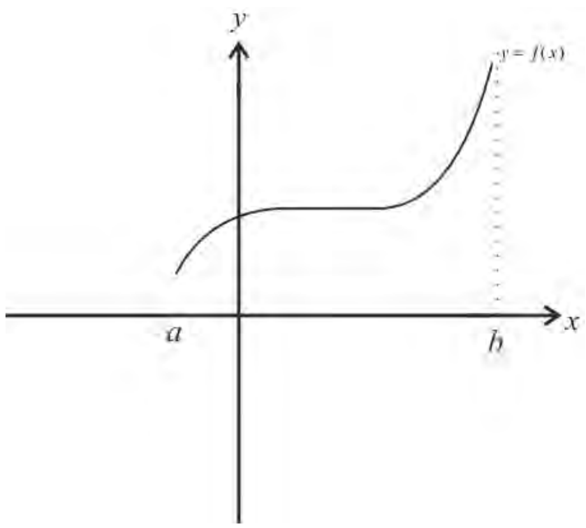
Возрастает:



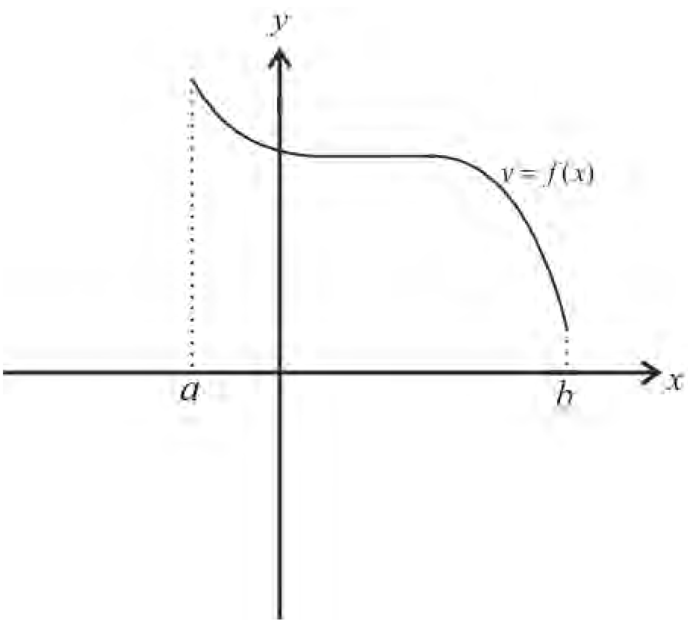
Убывает:



Неубывает:



Невозрастает:



Функции из определения 1 называются монотонными.

Теорема 3.1. Для того, чтобы дифференцируемая на интервале (a,b) функция $y = f(x)$ не убывала (не возрастала) на этом интервале необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0 (f'(x) \leq 0), \forall x \in (a,b)$.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим случай, когда $f(x)$ не убывает и докажем, что производная $f'(x)$ необходимо ≥ 0.

Пусть $x_0 < x \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Пусть $x < x_0 \Rightarrow f(x) \le f(x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$.

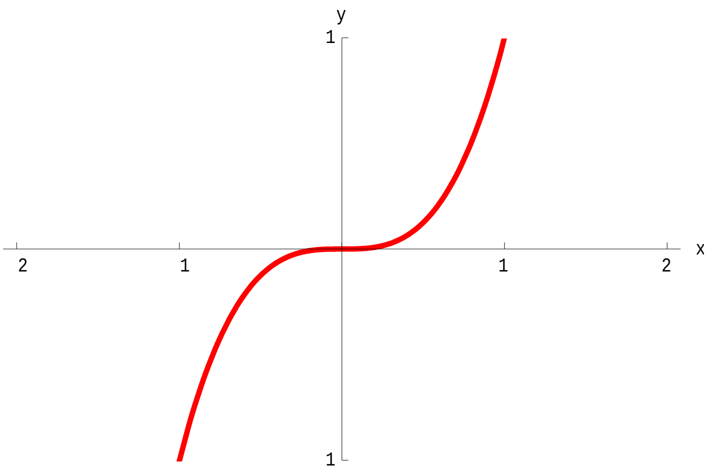
Таким образом $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Рассмотрим случай, когда $f'(x) \ge 0$ и докажем, что этого достаточно для того, чтобы функция не убывала. Пусть $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$. Тогда по теореме Лагранжа (теорема 4 § 12) $\exists$ точка $c \in (x_1, x_2)$ такая, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$; $f'(c) \ge 0; x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \ge 0$ что и требовалось доказать.

Теорема 3.2. Для того, чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция $y = f(x)$ возрастала (убывала) на этом интервале достаточно, чтобы $f'(x) > 0 (f'(x) < 0), \forall x \in (a, b)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству достаточности в теореме 3.1. Нужно заметить, что условие $f'(x) > 0 (f'(x) < 0)$ не является необходимым для возрастания (убывания) функции.

Пример 3.1. Рассмотрим функцию $y = x^3$. Она возрастает на промежутке $(-1; 1)$. Но условие $f'(x) > 0$ не выполнено в точке $x_0 = 0$: $f'(x) = 3x^2$; $f'(0) = 0$.



Теорема 3.3. (необходимое условие экстремума).

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум(см. определение 1 §12 из [5]). Тогда ее производная в этой точке равна 0 или не существует.

Доказательство. Если производная $f'(x)$ в точке x_0 не существует, то все доказано. Предположим, что $f'(x_0)$ - существует. Тогда по теореме Ферма(теорема 1 §12 из [5]) $f'(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

Определение 3.2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и производная $f'(x_0)$ равна 0 или не существует. Тогда точка x_0 называется критической точкой для функции $y = f(x)$ или точкой возможного экстремума.

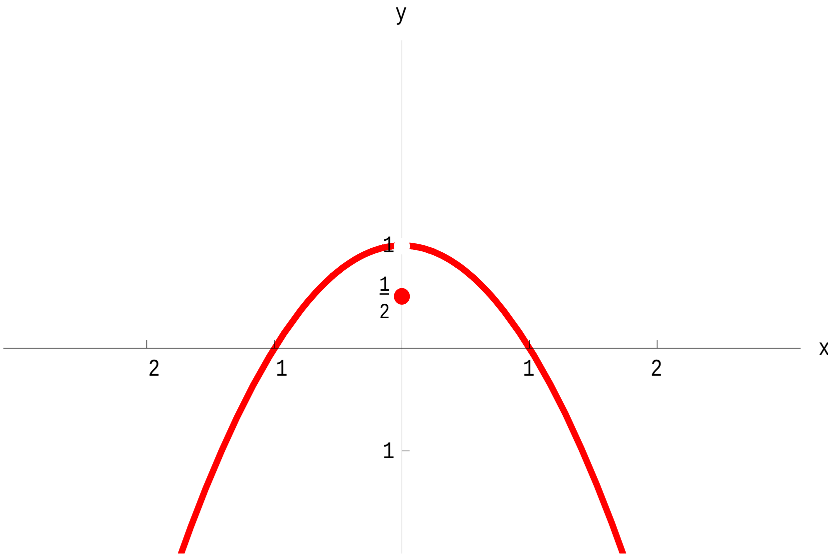
Замечание. Для непрерывной функции любая точка локального экстремума будет критической. Наоборот – не верно.

Пример 3.2. Для функции $y = x^3$, точка $x_0 = 0$ - критическая, но не является точкой локального экстремума.

Для функции $y = \begin{cases} x;\ x < -1 \\ 1 - x^2;\ -1 \le x \le 1 \\ x - 1;\ x > 1 \end{cases}$

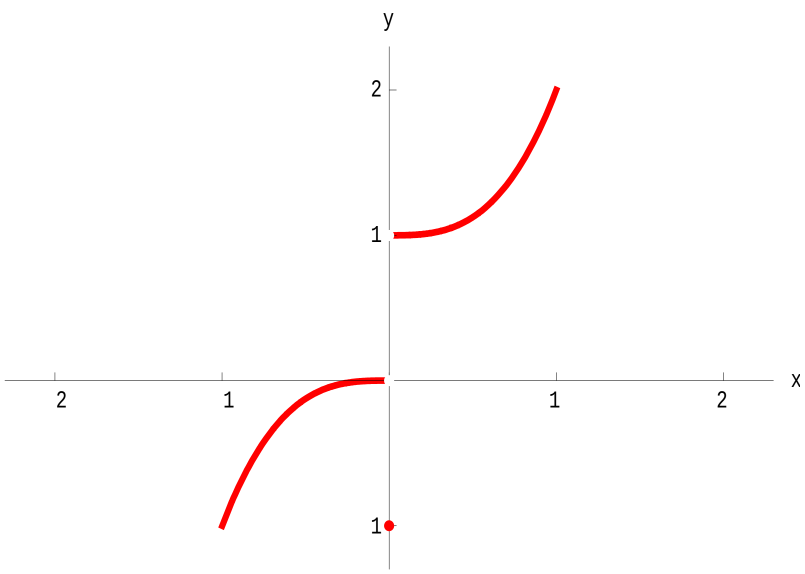
точка $x_0 = 0$- критическая и локальный максимум; $x_0 = 1$ - критическая и локальный минимум (постройте график функции).

Для функции $y = \begin{cases} 1 - x^2,\ x \ne 0 \\ \dfrac{1}{2},\ x = 0 \end{cases}$



точка $x_0 = 0$ - локального минимума, производная y' в точке x_0 не существует. Точка x_0 не является критической(в точке x_0 - разрыв 1-ого рода).

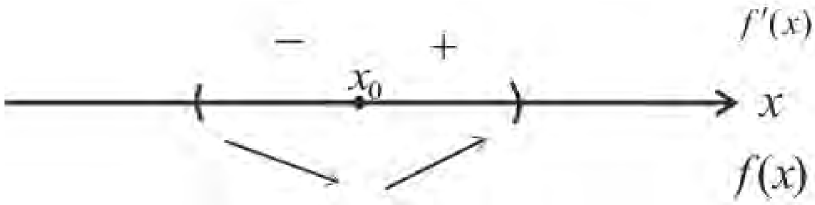
Для функции $y = \begin{cases} x^3; x < 0 \\ -1; x = 0 \\ 1 + x^3; x > 0 \end{cases}$



точка $x_0 = 0$ - точка локального минимума. Точка x_0 не является критической(в точке x_0 - разрыв 1-ого рода).

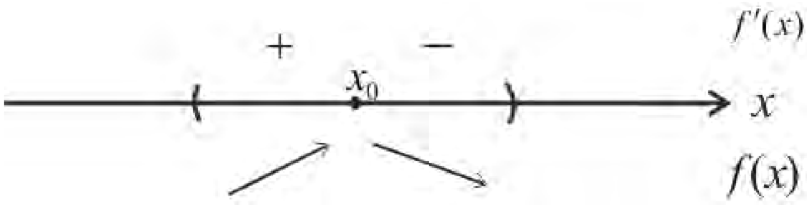
Теорема 3.4. (достаточное условие экстремума функции). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ своей критической точки x_0 за исключением может быть самой точки x_0.

а) Пусть при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+» :



Тогда x_0 - точка локального минимума .

Пусть при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «+»на «–» :



Тогда x_0 - точка локального максимума.

б) Пусть при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знака. Тогда x_0 не является точкой локального экстремума.

Доказательство следует из теоремы 2. При этом важно, чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывна в точке x_0 (см. пример 2), а также то, что x_0 - изолированная критическая точка.

Теорема 3.5. (второе достаточное условие экстремума функции).

Пусть x_0 - стационарная точка для функции $y = f(x)$, то есть $f'(x_0) = 0$. Пусть $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$). Тогда x_0 - точка локального минимума (локального максимума).

Доказательство. Запишем формулу Тейлора 2-ого порядка для функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \qquad (1)$$

(см. теорему 1 §14 из [5]).

$f'(x_0) = 0$, поэтому из (1) следует:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2!} + \frac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2}. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что $\exists$ окрестность точки x_0, такая что знак $f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком $f''(x_0)$, $\forall x$ из этой окрестности, что и требовалось доказать.

Теорема 3.6. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 n производных, причем

$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

1) если n – четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 - точка локального минимума;

2) если n – четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 - точка локального максимума;

3) если n – нечетное, то в точке x_0 локального экстремума нет.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.

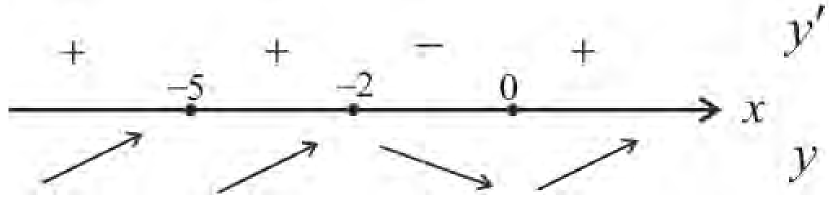
Пример 3.3. Исследовать на экстремум функцию $y = x^2(5 + x)^3$.

Решение. Функция непрерывна $\forall x \in R$.

$y' = 2x(5 + x)^3 + 3x^2(5 + x)^2 = x(5 + x)^2(2(5 + x) + 3x) =$

$= x(5 + x)^2(10 + 5x)$.

Найдем критические точки: $x(5 + x)^2(10 + 5x) = 0$; $x = 0$; $x = -5$; $x = -2$.



$x = -2$ - точка локального максимума: $y(-2) = 108$;

$x = 0$ - точка локального минимума; $y(0) = 0$.

$x = -5$ - не является точкой экстремума.

При исследовании функции на экстремум точки разрыва(если они есть) также наносят на числовую прямую. При переходе через эти точки может изменятся направление возрастания (убывания) функции.

Упражнение 3.1. Исследовать на экстремум функции:

1) $y = x^3(7+x)^4$;

2) $y = x^4(7+x)^3$;

3) $y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Замечание. При решении ряда технических и экономических задач приходится находить не локальные, а глобальные экстремумы(наибольшие и наименьшие значения функций на некотором множестве). Из теоремы Вейерштрасса(см.теорему 1 §11 из [5]) следует, что для непрерывной функции $y = f(x)$ заданной на отрезке a, b глобальные min и max существуют. При этом точки c_1 и c_2 – глобального min и max лежат либо на концах отрезка a, b, либо являются критическими для функции $f(x)$.

Пример 3.4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ на отрезке $0, 3$.

Решение. Функция непрерывна $\forall x \in R$. Найдем критические точки:

$y' = 3x^2 - 8x + 4 = 0$.

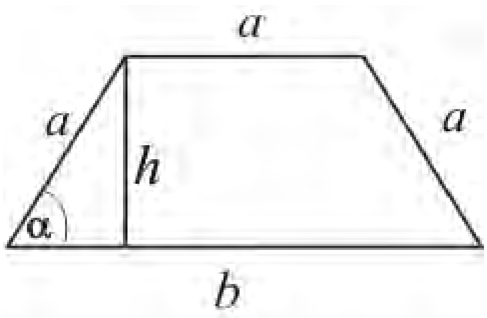
$x_1 = 2;\ x_2 = \dfrac{2}{3}$ - критические точки.

$x_3 = 0;\ x_4 = 3$ - концы отрезка.

$y(2) = 0;\ y\left(\dfrac{2}{3}\right) = 1\dfrac{5}{27};\ y(0) = 0;\ y(3) = 3$

$y_{\max} = y(3) = 3;\ y_{\min} = y(2) = y(0) = 0$.

Пример 3.5. Боковые стороны и меньшее основание трапеции $=a$. Найти длину большего основания, при котором площадь трапеции – наибольшая.

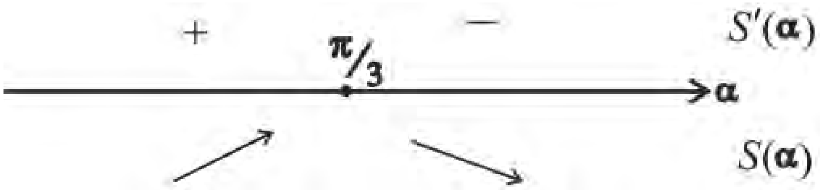


$$S=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h=\frac{1}{2}(a+(a+2a\cos\alpha))\cdot a\cdot\sin\alpha$$

$$S(\alpha)=a^2(1+\cos\alpha)\cdot\sin\alpha$$

$$S'(\alpha)=a^2((1+\cos\alpha)\cos\alpha-\sin^2\alpha)=a^2(\cos\alpha+\cos2\alpha)=2a^2\cos\frac{3}{2}\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2};$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ - критическая точка для функции $S(\alpha)$.



$x=\dfrac{\pi}{3}$ - точка локального максимума.

$S\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=a^2\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a^2\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ - наибольшее значение площади, при этом $b=a+2a\cos\alpha=a+2a\cos\dfrac{\pi}{3}=2a$ -длина большего основания.

Определение 3.3. Пусть функция $y=y(x)$ дифференцируема, определена для $x\geq 0$ и принимает неотрицательные значения. Тогда функция

$$E_x\ y\ =y'\cdot\frac{x}{y} \tag{3}$$

называется эластичностью функции *y* по переменной *x*.

Пример 3.6. Пусть $y=\dfrac{1}{x}$. Найдем $E_x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

По формуле (3): $E_x\left[\dfrac{1}{x}\right]=\left(\dfrac{1}{x}\right)'\cdot\dfrac{x}{y}=-x^{-2}\cdot\dfrac{x}{1/x}=-1.$

Замечание. Из формулы (3) следует, что

$$E_x\ y\ =\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}, \tag{4}$$

поэтому эластичность – безразмерна и не зависит от единиц измерения переменной *x* и функции *y*.

Из (4) следует, что

$$E_x\ y\ \approx \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}\ - \qquad (5)$$

то есть $E_x\ y$ задает приближенный процентный прирост функции *y*, когда *x* прирастает на 1%.

Пример 3.7. Пусть $y=\frac{1}{x}$, $E_x\left[\frac{1}{x}\right]=-1$(см. пример 6).

Вычислим $\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$, когда *x* увеличивается на 1%(с *x* до 1,01*x*).

$\Delta y=\frac{1}{1,01x}-\frac{1}{x}=\frac{-0,01}{1,01x}$, поэтому

$$\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\left(\frac{-0,01}{1,01x}\Big/\frac{1}{x}\right)\div\ 0,01x/x\ =-\frac{1}{1,01}=\frac{100}{101}\approx -0,99.$$

Упражнение 3.2. $y=x^2$, найти:

1) $E_x\left[x^2\right]$ (по формуле (3));

2) $\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$ (по формуле (5)) и сравнить результаты.

Упражнение 3.3. Пусть $y=x$. Проверить, что $E_x\ x\ =1$.

Пример 3.8. Пусть $y=y(x)$ - дифференцируема. Найдем $E_x\ x\cdot y$. По формуле (3):

$E_x\ x\cdot y\ =(x\cdot y)'\cdot\frac{x}{xy}=(y+xy')\frac{x}{xy}=1+y'\cdot\frac{x}{y}=1+E_x\ y$, то есть

$$E_x\ x\cdot y\ =E_x\ y\ +1. \qquad (6)$$

Замечание. Так как $x>0,\ y>0$, то из формулы (5) следует, что $E_x\ y\ >0$, если $y(x)$ - возрастает и $E_x\ y\ <0$, если $y(x)$ - убывает. Верно и наоборот. Поэтому из формулы (6) следует, что при $E_x\ y\ <-1$ функция

$f(x)=x\cdot y(x)$ - убывает, а при

$E_x\ y\ >-1\ \ f(x)=x\cdot y(x)$ - возрастает.

Предположим, что $y=y(x)$ - возрастает($E_x\ y\ >0$).

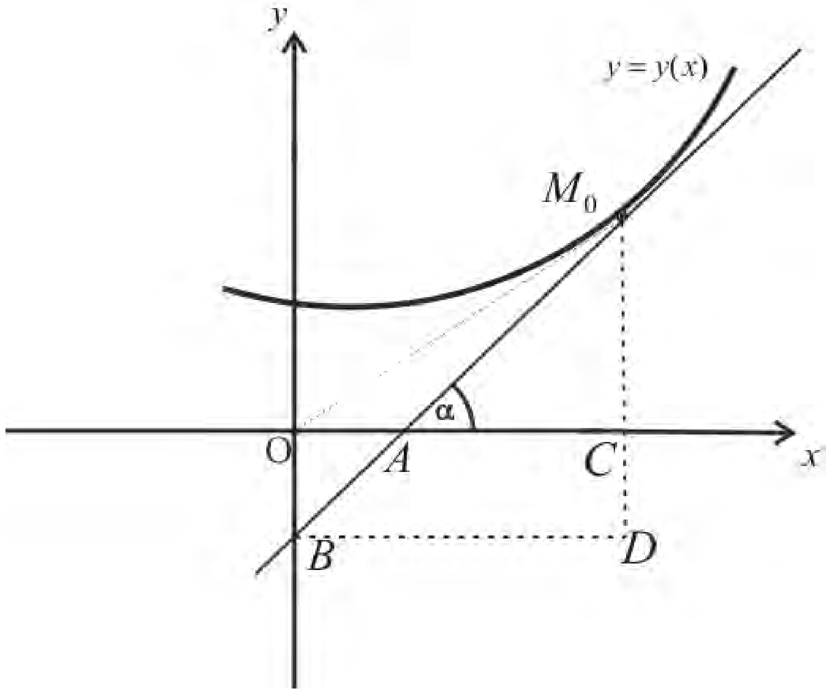


Рис. 3.1. $y = y(x)$ - возрастает ,$E_x\ y > 1$.

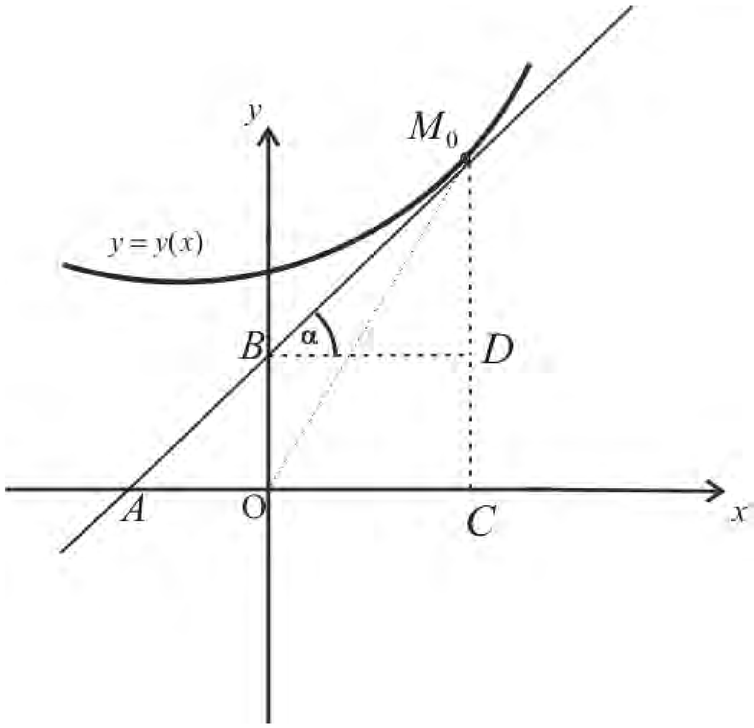


Рис. 3.2. $y = y(x)$ - возрастает ,$E_x\ y < 1$.

Тогда $y'(M_0) = \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{|M_0D|}{|BD|}$ и

$$E_x\ y = \frac{|M_0D|}{|BD|} \cdot \frac{|BD|}{|M_0C|} = \frac{|M_0D|}{|M_0C|} = \frac{|M_0B|}{|M_0A|} \qquad (7)$$

(как сходственные стороны подобных треугольников M_0BD и M_0AC). Если касательная проходит через начало координат(совпадает с прямой OM), то

$E_x \; y \; =1$ и формула (7) также выполняется(В – точка пересечения касательной с осью Oy, A – с осью Ox).

Предположим, что $y = y(x)$ - убывает($E_x \; y \; <0$).

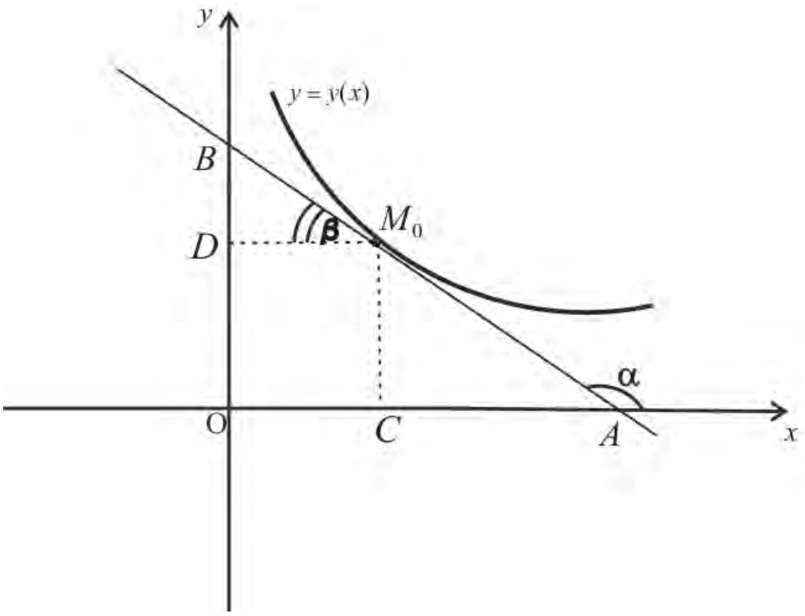
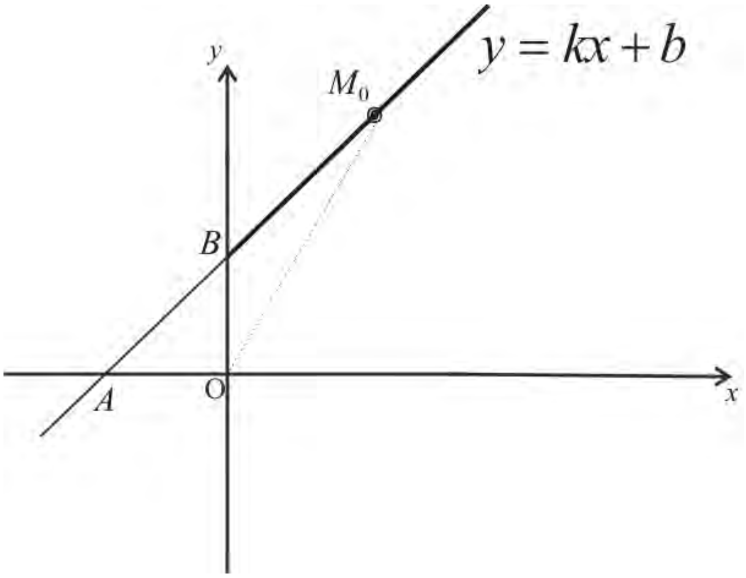


Рис. 3.3. $y = y(x)$ - убывает.

Тогда аналогично: $y'(M_0) = \mathrm{tg}\,\alpha = -tg\,\beta = -\dfrac{|BD|}{|DM_0|}$ и

$$E_x \; y \; = -\frac{|BD|}{|DM_0|} \cdot \frac{|DM_0|}{|M_0C|} = -\frac{|BD|}{|M_0C|} = -\frac{|M_0B|}{|M_0A|}. \qquad (8)$$

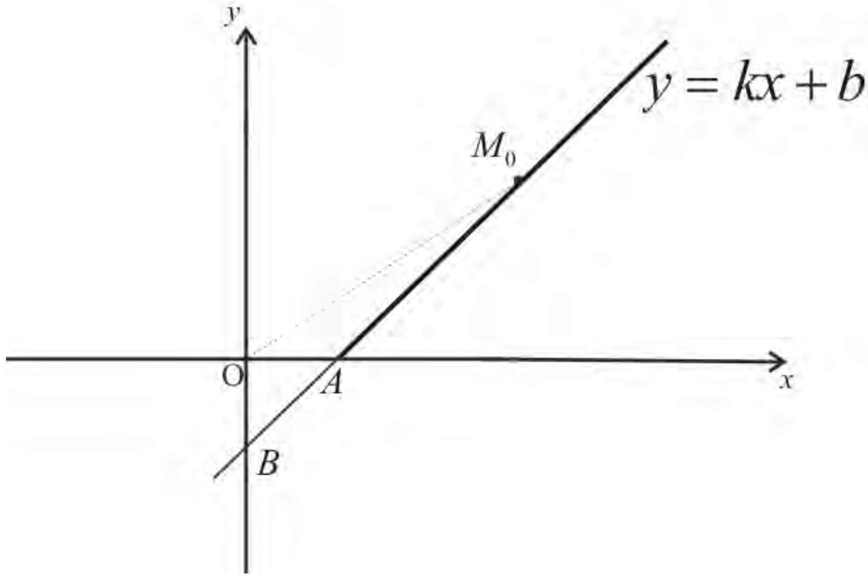
В частности, если $y = kx + b,\ k > 0,\ b > 0$:



$E_x \; kx+b \; (M_0) = \dfrac{|M_0B|}{|M_0A|} < 1, E_x \; kx+b$ - возрастает , $E_x \; kx+b \; (0) = 0$,

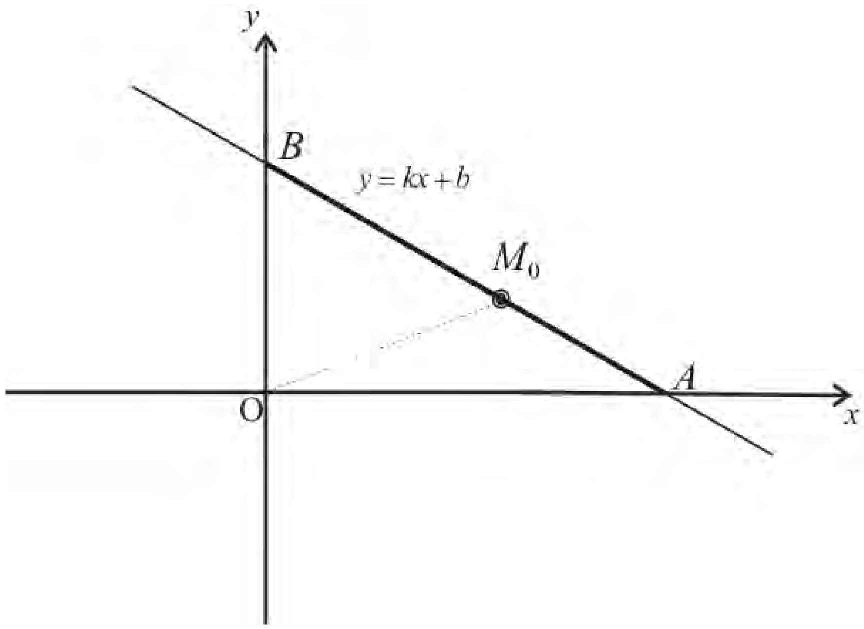
$\lim\limits_{x\to+\infty} E_x \; kx+b \; =1.$

Если $y = kx + b,\ k > 0,\ b < 0$:



$$E_x\ kx+b\ (M_0) = \frac{|M_0B|}{|M_0A|} > 1,$$ $E_x\ kx+b$ - убывает, $\lim\limits_{x\to -\frac{b}{k}+0} E_x\ kx+b\ = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} E_x\ kx+b\ = 1$.

Если $y = kx + b,\ k < 0,\ b > 0$:



$E_x\ y$ - убывает, $E_x\ kx+b\ (B) = 0$,

$\lim\limits_{x\to -\frac{b}{k}-0} E_x\ kx+b\ = -\infty$, если M_0 – середина отрезка AB, то $E_x\ kx+b\ = -1$.

Упражнение 3.4. Проверить полученные результаты с помощью формулы (3).

Пример 3.9. Пусть $y = a \cdot x^b$, тогда по формуле (3):

$$E_x\ y\ = \frac{(a \cdot x^b)' \cdot x}{y} = \frac{abx^{b-1} \cdot x}{a \cdot x^b} = b, \qquad (9)$$

то есть для функции $y = a \cdot x^b$ эластичность постоянна и равна b.

Упражнение 3.5. Пусть $y = a \cdot e^{kx}$; проверить, что

$$E_x\left[a \cdot e^{kx}\right] = kx. \qquad (10)$$

В экономике эластичность используется, например, при исследовании зависимости объема спроса от цены.

Спрос - количество продукта D(p), которое можно купить по данной цене p (p- цена единицы продукта). При этом в нормальных условиях функция D(p) – убывающая(по низким ценам удается продать товаров больше, чем по высоким) и функция $E_p\ D$, будучи безразмерной, удобно описывает изменение объема спроса при изменении цены.

Пример 3.10. $D(p) = \frac{100}{p^2} + 1$. Найти 1) Скорость изменения спроса при цене $p = 10$ у.е.; 2) Эластичность спроса по цене при цене 10 у.е.

Решение. 1) $D'(p) \approx -\frac{200}{p^3} = -\frac{1}{5} = -0,2$.

$$2)\ E_p\ D\ = \frac{-\frac{200}{p^3} \cdot p}{D(p)} = \frac{-\frac{1}{5} \cdot 10}{\frac{100}{10^2} + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$D'(p) = -0,2 \Rightarrow$ при увеличении цены на 1 у.е. спрос уменьшится примерно на - 0,2(ед.).

Точное значение. $D(11) - D(10) = \left(\frac{100}{121} + 1\right) - 2 = -\frac{21}{121} = -0,17$ (ед.)

$E_p\ D\ = -1 \approx \dfrac{\Delta D / D}{\Delta p / p} \Rightarrow$ при увеличении цены на 1%, спрос уменьшится на 1%(спрос снижается в том же темпе, что и растет цена).

Определение 3.4. Спрос D(p), для которого $E_p\ D\ < -1$ называется эластичным(D(p) изменяется большими темпами, чем изменяется цена).

Спрос D(p), для которого $-1 < E_p\ D\ < 0$ называется неэластичным(D(p) изменяется меньшими темпами, чем изменяется цена).

Упражнение 3.6. $D(p) = 6 - 2p$. Найти 1) скорость изменения спроса.

2) $E_p \; D$. Проанализировать результат, построить график D(p). Найти точку на графике, соответствующую значению $E_p \; D \; = -1$.

Проделать аналогичные выкладки для $D(p) = \dfrac{1}{p}$ и $D(p) = \dfrac{1}{p^2}$.

Наряду с функцией $D(p)$ рассмотрим также функцию $R(p) = p \cdot D(p)$ - суммарные расходы потребителя на покупку товара. Тогда (см. формулу(6))

$$E_p \; R \; = E_p \; D \; +1, \tag{7}$$

и если $E_p \; D \; < -1$(высокая эластичность), то $E_p \; R \; < 0 \Rightarrow$ функция $R(p)$ - убывает, а если $-1 < E_p \; D \; < 0$(низкая эластичность), то $E_p \; R \; > 0 \Rightarrow$ функция $R(p)$ - возрастает.

При $E_p \; D \; = -1$. $E_p \; R \; = 0$ и если $E_p \; D \; = -1 \;\; \forall \, p$, то суммарные расходы не изменяются.

Упражнение 3.7. Спрос на товар, продаваемый фирмой задается функцией $D(p) = 50 - 10p$, $0 \le p \le 5$, p - цена единицы продукта.

1) Найти совокупный доход фирмы при p=1, 2, 3, 4, 5. Определить при каком значении p доход – максимальный.

2) Построить графики функций $D(p)$ и $R(p) = p \cdot D(p)$, $0 \le p \le 5$.

Упражнение 3.8. При тарифе на водоснабжение 0,25 у.е./м^3 расход воды на 1 человека по стране составляет 2,14 м^3/месяц, а при тарифе 0,5 у.е./м^3 – 2,01 м^3/месяц. 1) Считая зависимость спроса $D(p)$ от цены *p* линейной, написать формулу $D(p)$;

2) Найти скорость изменения спроса $D'(p)$;

3) Найти эластичность спроса по цене $E_p \; D$ при $p = 0,7$ у.е./м^3.

Аналогично функции спроса $D(p)$ - где *p* – цена единицы продукции, можно определить функцию предложения S(p). Предложение – количество продукта S(p), которое можно купить по данной цене *p* (p- цена единицы продукта). При этом в нормальных условиях функция S(p) – возрастающая(продавцы предложат больше единиц товара при высоких ценах и меньше при низких). Цена товара, когда $S(p) = D(p)$ называется равновесной.

Упражнение 3.9. Для функции спроса $D(p) = 50 - 10p$ и функции предложения $S(p) = 8 + 11p$ найти точку рыночного равновесия. Вычислить $E_x \; D$ и $E_x \; S$ в точке p. Сделать чертеж.

Определение 3.5. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема и определена для $x > 0$. Функция

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x)}{x} \tag{8}$$

называется функцией средних значений для функции $f(x)$.

Замечание. $\overline{f}(x)$ используют, если $f(x)$ задает некоторые суммарные значения (затраты, доход) в зависимости от *x* (объема производства, объема продаж). Тогда $\overline{f}(x)$ задает затраты (доход) на единицу продукции. При этом $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ называется предельными затратами (предельным доходом), а равенство

$$\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+o(\Delta x) \qquad (9)$$

(см. формулу (5) § 6) показывает, что $f'(x)$ приблизительно равно приращению Δf функции $f(x)$, когда $\Delta x = 1$.

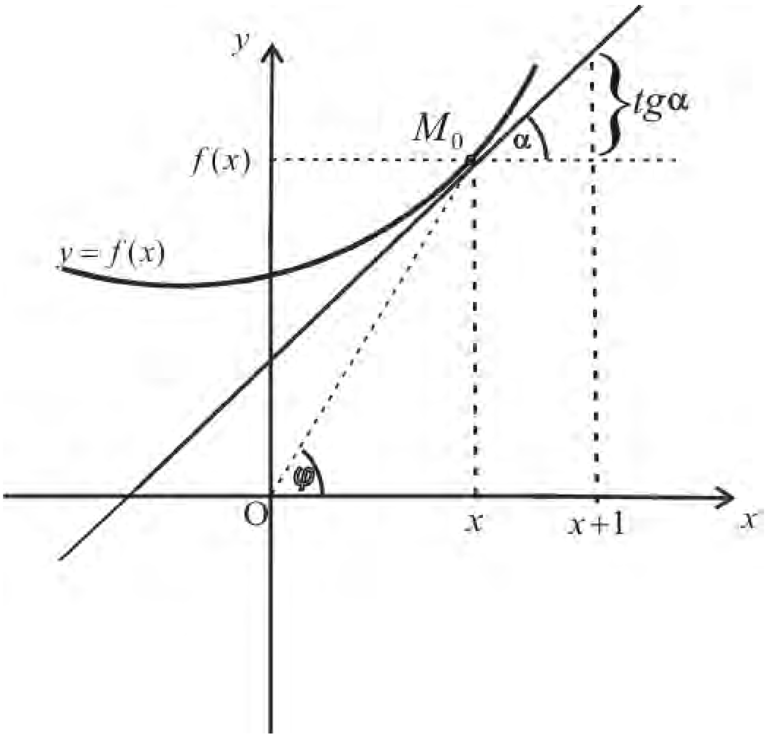


Рис. 3.4. $\operatorname{tg}\varphi=\overline{f}(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$.

Замечание. $\overline{f}(x)=f'(x)$, если касательная в точке $(x, f(x))$ проходит через начало координат.

Пример 3.11. Полные издержки производства задаются формулой $C(q)=60q+0,2q^3+50$, где q – количество товара. Найти:

1) Средние издержки $\overline{C}(q)$;

2) Предельные издержки; построить графики $C'(q)$ и $\overline{C}(q)$.

3) Найти $C'(5)$ и $C(6)-C(5)$.

4) Товар продается по цене $p=90+\dfrac{50}{q}$ за единицу товара. Найти максимальную прибыль.

Решение. 1) $\overline{C}(q)=\dfrac{C(q)}{q}=60+0,2q^2+\dfrac{50}{q}$.

2) $C'(q)=60+0,6q^2$.

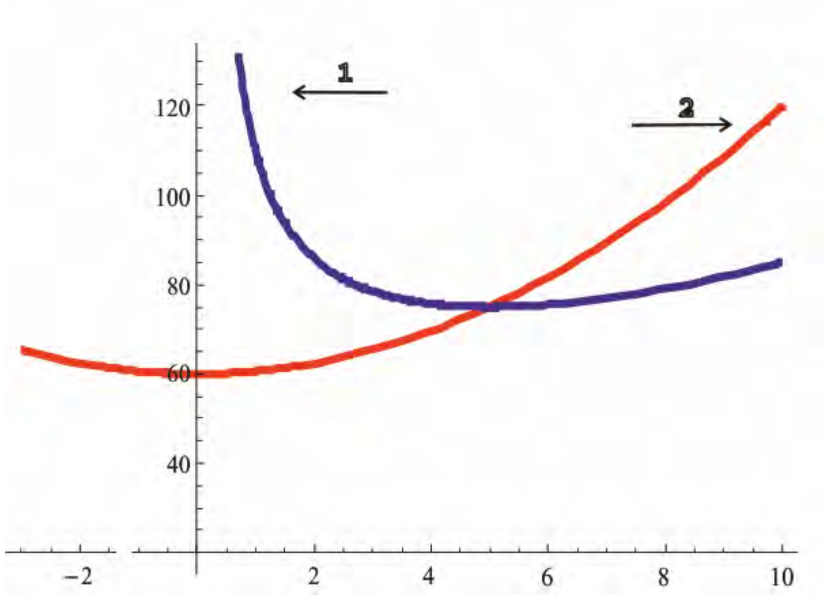


Рис. 3.5. Графики функций 1- $\overline{C}(q)=60+0,2q^2+\dfrac{50}{q}$; 2- $C'(q)=60+0,6q^2$.

3) $C'(5)=75;\ C(6)=453,2;\ C(5)=375;\ C(6)-C(5)=78,2$.

4) $\Pi(q)=p\cdot q-C(q)=30q-0,2q^3$ -прибыль от продажи q единиц изделий; $\Pi'(q)=30-0,6q^2=0$; $q=5\sqrt{2}$ - точка локального максимума, $\Pi(5\sqrt{2})=100\sqrt{2}$.

Замечание. Из формулы (8) следует, что $f(x)=x\cdot\overline{f}(x)$.

Предположим, что $f(x)$ - дважды дифференцируема, тогда

$$f'(x)=\overline{f}(x)+x\cdot(\overline{f}(x))' \tag{10}$$

$$f''(x)=2\overline{f}'(x)+x(\overline{f}(x))''. \tag{11}$$

И если $f'(x_0)=\overline{f}(x_0)$, то из (10) следует, что x_0 - критическая точка функции $\overline{f}(x)$ $(\overline{f}'(x_0)=0)$. Из (11) следует, что $f''(x_0)=x_0\cdot(\overline{f})''(x_0)$, поэтому, если $f''(x_0)>0$ ($f(x)$ - вогнута в такой точке), то x_0 - точка локального минимума для функции $\overline{f}(x)$, а если $f''(x_0)<0$ ($f(x)$ - выпукла в такой точке), то x_0 - точка локального максимума для функции $\overline{f}(x)$ (см. рисунок 5).

Задания к п.3.

Упражнение 3.1. Найти экстремумы функций:

1. $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$. 2. $y=\dfrac{x^2}{(x+2)^2}$. 3. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

4. $y=1-\ln^3 x$. 5. $y=x+2\operatorname{arcctg}x$. 6. $y=1+\ln^2 x$.

7. $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. 8. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$. 9. $y=e^{\frac{3}{5-x}}$.

10. $y=\dfrac{e^{3x}+2}{e^{2x}}$. 11. $y=\dfrac{x}{x^2-6x-16}$. 12. $y=x\cdot\ln^2 x$.

13. $y=(x+2)\cdot x^{\frac{2}{3}}$. 14. $y=x-\operatorname{arctg}x$.

15. $y=\begin{cases} x^2 \ \textit{при} \ x\ge 0, \\ -x \ \textit{при} \ x<0. \end{cases}$ 16. $y=\begin{cases} x^2+2 \ \textit{при} \ x\ge 0, \\ -x \ \textit{при} \ x<0. \end{cases}$

Упражнение 3.2. Определить коэффициенты p и q квадратного трехчлена $y=x^2+px+q$ так, чтобы он имел минимум $y=3$ при $x=1$.

Упражнение 3.3. Доказать справедливость неравенств:

1. $x>\ln(1+x)$. 2. $x^4-2x^2>5$ при $x\in(-1;0)$.

3. $\dfrac{x}{x^2-6x-16}<0$. 4. $\operatorname{arctg}x>x$ при $x\in(0;+\infty)$. 5. $\ln^3 x>1$.

Упражнение 3.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанных промежутках.

1. $y=x^3-3x^2+3x$ на $-1;2$.
2. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ на $(-\infty;+\infty)$.
3. $y=x\ln x$ на $1;e$.
4. $y=x^3$ на $-1;3$.
5. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ на $0;1$.
6. $y=2x^3+3x^2-12x+1$ на $-1;5$.
7. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ на $(-\infty;+\infty)$.
8. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ на $(-\infty;+\infty)$.
9. $y=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x$ на $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

10. $y=\sqrt{x-x^2}$ на $[0;1]$.

11. $y=(x-2)e^x$ на $[-2;1]$.

12. $y=(x+2)e^{1-x}$ на $[-2;2]$.

13. $y=4-e^{-x^2}$ на $[0;1]$.

14. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ на $[0;2]$.

15. $y=\dfrac{2x}{8+x}$ на $[0;4]$.

16. $y=\ln(9-x^2)$ на $[-2;2]$.

17. $y=e^{\frac{1}{6-x}}$ на $[0;2]$.

18. $y=x-\operatorname{arctg}x$ на $[0;1]$.

Упражнение 3.5. Положительное число a разложить на два положительных слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

Упражнение 3.6. Изгородью длиной l огородить прямоугольный участок наибольшей площади, примыкающей одной стороной к данной стене.

Упражнение 3.7. Заработная плата каждого сотрудника Q (рублей) и число x сотрудников фирмы связаны соотношением $Q=L-x^2-\dfrac{a}{x}$, где L и *a* – постоянные, характеризующие трудовые способности коллектива. Согласно «золотому правилу роста» x следует определять так, чтобы Q принимало наибольшее из возможных значений. При $L=1500$, $a=16000$ найти по указанному правилу оптимальной число сотрудников.

Упражнение 3.8. Сила действия кругового электрического тока на небольшой магнит, ось которого расположена перпендикулярно к плоскости круга, проходящего через его центр выражается формулой $F=\dfrac{cx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, где *a* – радиус круга, x – расстояние от центра круга до магнита $(0<x<+\infty)$, c – постоянная.

При каком значении x величина F будет наибольшей?

Упражнение 3.9. Из квадратного листа картона со стороной *a* сделать открытую коробочку наибольшей вместимости, вырезав по углам квадраты и загнув выступы получившейся фигуры.

Упражнение 3.10. Лампа висит над центром круглого стола радиусом R. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета будет наилучшей, если освещенность вычисляется по формуле $f=\dfrac{I\cos\varphi}{r^2}$, где φ - угол падения лучей, r – расстояние до источника, I – характеристика источника.

Упражнение 3.11. Проволоку длиной l предполагают разрезать на две части, из которых одну требуется согнуть в виде окружности, другую – в виде квадрата. При какой длине каждой из частей сумма площадей круга и квадрата, окажется наибольшей?

Упражнение 3.12. Рассчитать эластичность следующих функций при заданных значениях x_0 :

1) $y=\dfrac{3x-2}{x^2+4}$, $x_0=1$; 2) $y=x^4\cdot e^{-x^2}$, $x_0=2$;

3) $y=3\ln x-2$, $x_0=e$, $x_0=e^2$;

4) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$, $x_0=1$; 5) $y=\dfrac{3x^2-6x}{x-1}$, $x_0=3$;

6) $y=3x\cdot e^x$, $x_0=4$, $x_0=6$.

Упражнение 3.13. По заданной функции спроса $D(p)$ найти скорость изменения спроса при заданной цене p_0. Построить график $D(p)$. Найти точку на графике, соответствующую значению $E_p[D]=x$, если:

1) $D(p)=9-p$, $p_0=1$, $x=-1$;

2) $D(p)=30-0,5p$, $p_0=10$, $x=-1$;

3) $D(p)=-2p^2+4p$, $p_0=2$, $x=0$;

4) $D(p)=\dfrac{4}{p+2}$, $p_0=3$, $x=-0,5$;

5) $D(p)=\dfrac{p+1}{p+4}$, $p_0=1$, $x=0,3$.

Упражнение 3.14. Спрос на товар, продаваемый фирмой задается функцией $D(p)$. Найти совокупный доход фирмы при заданных значениях *p*. Определить, при каком значении *p* доход будет максимальным. Построить графики функций $D(p)$ и $R(p)=p\cdot D(p)$, $0\le p\le 10$, если:

1) $D(p)=40-2p$, $p_0=8$; 2) $D(p)=60-3p$, $p_0=3$;

3) $D(p)=200-25p$, $p_0=5$; 4) $D(p)=100-10p$, $p_0=1$;

5) $D(p)=300-30p$, $p_0=7$.

Упражнение 3.15. Дана функция спроса $D(p)$. Найти эластичность спроса относительно цены. Вычислить значение эластичности при указанном значении цены p_0.

1) $D(p)=\dfrac{2p^2}{4p+5}$, $p_0=20$;

2) $D(p)=10p^2+6p-\dfrac{1}{p}$, $p_0=10$;

3) $D(p)=\dfrac{4p}{p^2+6p-7}$, $p_0=16$;

4) $D(p)=120-4p$, $p_0=20$;

5) $D(p)=\dfrac{p+15}{p+4}$, $p_0=15$.

Упражнение 3.16. Даны функция спроса $D(p)$ и функция предложения $S(p)$. Найти: а) цену равновесия; б) эластичность спроса и предложения при этой цене; в) изменение спроса (%) при увеличении цены на 10% от цены равновесия, если:

1) $D(p)=30-0{,}9p$, $S(p)=16+1{,}2p$;

2) $D(p)=9-p$, $S(p)=1+p$;

3) $D(p)=200-5p$, $S(p)=50+p$;

4) $D(p)=36-2p$, $S(p)=3p-4$;

5) $D(p)=150-2p$, $S(p)=6p-250$.

Упражнение 3.17. Полные издержки производства задаются функцией $C(q)$. Найти:

а) Средние издержки $\overline{C}(q)$;

б) Предельные издержки $C'(q)$;

в) Найти $C'(q_0), C(q_0+1)-C(q_0-1)$ при заданном количестве товара q_0;

г) Товар продается по цене $p=20+\dfrac{3}{q}$ за единицу товара. Найти максимальную прибыль, если:

1) $C(q)=q^2+2q-5$, $q_0=5$; 2) $C(q)=50+0{,}5q^2$, $q_0=50$;

3) $C(q)=-10q+q^2$, $q_0=10$; 4) $C(q)=30+6q^2-28q$, $q_0=5$;

5) $C(q)=2q^3+5q+4$, $q_0=15$.

Упражнение 3.18.

При тарифе на электроснабжение $0{,}077$ $у.е./кВт\cdot ч$ расход на человека составлял 3394,25 кВт*ч, а при тарифе $0{,}094$ $у.е./кВт\cdot ч$ – 3298,62 кВт*ч.

1) Считая зависимость спроса $D(p)$ от цены *р* линейной, написать формулу $D(p)$;

2) Найти скорость изменения спроса $D'(p)$;

3) Найти эластичность спроса по цене $E_p\ D$.Является ли спрос эластичным?

Упражнение 3.19.

При тарифе на водоснабжение $0{,}25\,у.е./м^3$ расход на человека составлял 71 л/сутки, а при тарифе $0{,}5\,у.е./м^3$ расход на человека составлял 67 л/сутки.

1) Считая зависимость спроса $D(p)$ от цены *р* линейной, написать формулу $D(p)$;

2) Найти скорость изменения спроса $D'(p)$;

3) Найти эластичность спроса по цене $E_p\ D$. Является ли спрос эластичным?

Ответы

3.1. 1. $x=\frac{1}{2}$ - точка локального минимума, $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2}{4}$.

2. $x=0$ - точка локального минимума, $y(0)=0$.

3. $x=e$ - точка локального максимума, $y(e)=\frac{1}{e}$.

4. функция не имеет экстремумов, т.к. везде убывает.

5. $x_1=-1$ - точка локального максимума, $y(-1)=\frac{-2-\pi}{2}$; $x_2=1$ - точка локального минимума, $y(1)=\frac{2+\pi}{2}$.

6. $x=1$ - точка локального минимума, $y(1)=1$.

7. $x=0$ - точка локального минимума, $y(0)=\frac{\pi}{2}$.

8. $x_1=0$ - точка локального максимума, $y(0)=0$; $x_2=\sqrt[3]{4}$ - точка локального минимума, $y(\sqrt[3]{4})=\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$.

9. Функция не имеет экстремумов, т.к. везде возрастает.

10. $x=\ln\sqrt[3]{4}$ - точка локального минимума, $y(\ln\sqrt[3]{4})=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

11. Функция не имеет экстремумов, т.к. везде убывает.

12. $x_1=\frac{1}{e^2}$ - точка локального максимума, $y\left(\frac{1}{e^2}\right)=4e^{-2}$; $x_2=1$ - точка локального минимума, $y(1)=0$.

13. $x_1=-\frac{4}{5}$ - точка локального максимума, $y(-\frac{4}{5})=\frac{12}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{25}}$; $x_2=0$ - точка локального минимума, $y(0)=0$.

14. Функция не имеет экстремумов, т.к. везде возрастает.

15. $x=0$ - точка локального минимума, $y(0)=0$

16. Функция не имеет экстремумов, т.к. в критической точке $x=0$ имеет разрыв 1-ого рода.

3.2. $p=-2,\ q=4$.

3.4. 1. $y_{наиб.}=y(2)=2, y_{наим.}=y(-1)=-7$.

2. $y_{наиб.}=y(1)=\frac{1}{2}, y_{наим.}=y(-1)=-\frac{1}{2}$.

3. $y_{наиб.}=y(e)=e, y_{наим.}=y(1)=0$.

4. $y_{наиб.}=y(3)=27, y_{наим.}=y(-1)=-1$.

5. $y_{наиб.}=y(0)=y(1)=1, y_{наим.}=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{5}$.

6. $y_{наиб.}=y(5)=266, y_{наим.}=y(1)=-6$.

7. $y_{наиб.}=y(0)=1$, наименьшего значения функция не достигает.

8. $y_{наиб.}=y\left(\frac{\pi k}{2}\right)=1, y_{наим.}=y\left(\frac{\pi(2k+1)}{4}\right)=\frac{1}{2}, k\in Z$.

9. $y_{наиб.}=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, наименьшего значения функция не достигает.

10. $y_{наиб.}=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}, y_{наим.}=y(0)=y(1)=0$.

11. $y_{наиб.}=y(-2)=-\frac{4}{e^2}, y_{наим.}=y(1)=-e$.

12. $y_{наиб.}=y(-1)=e^2, y_{наим.}=y(-2)=0$.

13. $y_{наиб.}=y(1)=4-\frac{1}{e}, y_{наим.}=y(0)=3$.

14. $y_{наиб.}=y(0)=1, y_{наим.}=y(2)=-1$.

15. $y_{наиб.}=y(4)=\frac{2}{3}, y_{наим.}=y(0)=0$.

16. $y_{наиб.}=y(0)=\ln 9, y_{наим.}=y(-2)=y(2)=\ln 5$.

17. $y_{наиб.}=y(2)=e^{\frac{1}{4}}, y_{наим.}=y(0)=e^{\frac{1}{6}}$.

18. $y_{наиб.}=y(1)=\frac{4-\pi}{4}, y_{наим.}=y(0)=0$.

3.5. $x=y=\frac{a}{2}$.

3.6. $S_{наиб.}=\frac{l^2}{16}$ при $x=\frac{l}{4}$ - сторона квадрата.

3.7. $x=20$.

3.8. $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

3.9. Сторона квадрата равна $\frac{a}{6}$.

3.10. $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

3.11. Если сделан только круг.

3.12. 1) $E_1[y]=2,6$; 2) $E_2[y]=-4, E_4[y]=-28$;

3) $E_e[y]=3, E_{e^2}[y]=0,75$; 4) $E_4[y]=\frac{1}{3}$;

5) $E_3[y]=2,5$;   6) $E_4[y]=5,\ E_6[y]=7$.

3.13. 1) $D'(1)=-1,\ E_p[D]=\dfrac{p}{p-9},\ M(4,5;\ 4,5)$;

2) $D'(10)=-0,5,\ E_p[D]=\dfrac{0,5p}{0,5p-30},\ M(30;\ 24)$;

3) $D'(2)=-4,\ E_p[D]=\dfrac{2p-2}{p-2},\ M(1;\ 2)$;

4) $D'(3)=-0,16,\ E_p[D]=\dfrac{-p}{p+2},\ M(2;1)$;

5) $D'(1)=0,12,\ E_p[D]=\dfrac{3p}{p^2+5p+4},\ M_1(1;\ 0,4), M_2(4;\ 0,625)$.

3.14. 1) $R(8)=192,\ R_{\max}(10)=200$;   2) $R(3)=153,\ R_{\max}(10)=300$;
3) $R(5)=375,\ R_{\max}(4)=400$; 4) $R(1)=90,\ R_{\max}(5)=250$;
5) $R(7)=630,\ R_{\max}(5)=750$.

3.15. 1) $E_p[D]=\dfrac{4p+10}{4p+5},\ E_{20}[D]\approx 1,06$. При увеличении цены доход возрастет;

2) $E_p[D]=\dfrac{20p^3+6p^2-1}{10p^3+6p^2-1},\ E_{10}[D]\approx 1,994$. При увеличении цены доход возрастет;

3) $E_p[D]=-\dfrac{p^2+7}{p^2+6p-7},\ E_{16}[D]\approx -0,765$. При увеличении цены доход уменьшается, при снижении цены доход возрастает;

4) $E_p[D]=\dfrac{p}{p-30},\ E_{20}[D]=-2$. Снижение цены на промежутке (15, 30) будет выгодным, т.к. приведет к увеличению дохода;

5) $E_p[D]=-\dfrac{11p}{p+15},\ E_{15}[D]=-5,5$. Снижение цены при $p\ge 1,5$ приведет к увеличению дохода.

3.16. 1) а) $p_0=\dfrac{20}{3}$; б) $E_{\frac{20}{3}}[D]=-0,25,\ E_{\frac{20}{3}}[S]=\dfrac{1}{3}$; в) спрос уменьшится на $2,5\%$;

2) а) $p_0=4$; б) $E_4[D]=-0,8,\ E_4[S]=0,8$; в) спрос уменьшится на 8% ;

3) а) $p_0=25$; б) $E_{25}[D]=-\dfrac{5}{3},\ E_{25}[S]=\dfrac{1}{3}$; в) спрос уменьшится на $\dfrac{50}{3}\%$;

4) а) $p_0=8$; б) $E_8[D]=-0,8,\ E_8[S]=1,2$; в) спрос уменьшится на 8%;

5) а) $p_0=50$; б) $E_{50}[D]=-2,\ E_{50}[S]=\dfrac{12}{11}$; в) спрос уменьшится на 20%.

3.17. 1) а) $\overline{C}(q)=q+2-\dfrac{5}{q}$, б) $C'(q)=2q+2$; в) $C'(5)=12$, $C(6)-C(4)=0$; г) $\Pi_{\max}(9)=89$;

2) а) $\overline{C}(q)=\dfrac{50}{q}+0{,}5q$, б) $C'(q)=q$; в) $C'(50)=50$, $C(51)-C(49)=100$; г) $\Pi_{\max}(20)=159$;

3) а) $\overline{C}(q)=-10+q$, б) $C'(q)=-10+2q$; в) $C'(10)=10$, $C(11)-C(9)=20$; г) $\Pi_{\max}(15)=228$;

4) а) $\overline{C}(q)=\dfrac{30}{q}+6q-28$, б) $C'(q)=12q-28$; в) $C'(5)=32$, $C(6)-C(4)=64$; г) $\Pi_{\max}(4)=69$;

5) а) $\overline{C}(q)=2q^2+5$, б) $C'(q)=6q^2+4$; в) $C'(15)=1355$, $C(16)-C(14)=2714$; г) $\Pi_{\max}(\sqrt{2{,}5})\approx 14{,}81$;

3.19.

$$1\, E_p[D]=\frac{-5625{,}3\cdot x}{-5625{,}3\cdot x+3827{,}4}$$

ЛИТЕРАТУРА

1.Кудрявцев,Л.Д. Краткий курс математического анализа. / Л.Д.Кудявцев. – М.: Наука, 1989.

2. Демидович,Б.П.Сборник задач по математическому анализу./ Б.П.Демидович. – М.: Наука, 1990.

3. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа./ Под ред.А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. – М.: Наука, 1981.-Т.1.

4. Математический анализ в вопросах и задачах./Под ред.В.Ф.Бутузова.- М.: Физматлит, 2001.

5.Матвеева,Л.Д., Рудый,А.Н. Математический анализ. Учебно-методическое пособие. /Л.Д.Матвеева,А.Н.Рудый/.-Минск,БНТУ,2016.

6.Матвеева,Л.Д.,Рудый,А.Н. Высшая математика. Курс лекций для студентов инженерно-технических и экономических специальностей. 1 семестр. /Л.Д.Матвеева, А.Н.Рудый/.-Минск,БНТУ,2013;Электронный учебный материал/ Регистрационный № БНТУ/ЭФ41-48.2013.