УДК 624.072.327

Изгиб и кручение тонкостенных стержней

Гриценко О.О., Хремли Е.А.
(Научный руководитель – Башкевич И.В.)
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Основным признаком тонкостенного стержня является характерное отношение его геометрических размеров. В поперечном сечении одно из измерений (толщина) существенно меньше другого – срединной длины контура s. Последняя в свою очередь намного меньше, чем длина стержня l:

Тонкостенный стержень в силу геометрических соотношений обнаруживает свойства, существенно отличающие его от стержней сплошного сечения. При некоторых видах загружения не соблюдается гипотеза плоских сечений, происходит так называемая депланация сечения за счет неравномерной деформации стержня вдоль его оси [1].

При кручении тонкостенных стержней и вообще стержней с некруглым поперечным сплошным сечением, поперечные сечения плоские до деформации, искривляются по некоторой поверхности w(x, y, z), что называется депланацией сечения (рисунок 1). По характеру формирования депланаций сечения по длине стержня, различают два типа кручения стержней: свободное и стесненное.

Если депланация во всех поперечных сечениях одинакова по длине стержня или иначе w(x, y, z) = w(x, y), т.е. она является постоянной и не зависит от z, то такое кручение называется свободным. При переменных депланациях по длине стержня кручение называется стесненным.

При свободном кручении в поперечных сечениях стержня возникают только касательные напряжения, а при стесненном кручении, наряду с касательными возникают и нормальные напряжения. Эффект от неравномерной депланации сечения по его длине наиболее существенен для стержней открытого профиля.

$\delta < s < l$ $s = h + 2b.$

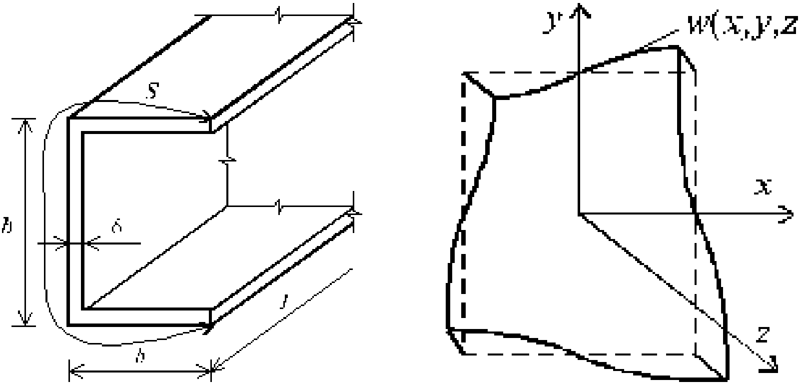

Рисунок 1 – Тонкостенный стержень

Так, например, при закручивании балки все сечение будет поворачиваться относительно продольной оси, а полки будут изгибаться в своей плоскости. Вследствие изгиба полок в них появятся нормальные напряжения, которые сведутся к двум парам, плоскости которых параллельны и расположены на расстоянии h друг от друга. Таким образом, система возникающих нормальных напряжений может быть характеризована величиной момента каждой пары M и расстоянием между плоскостями пар. Произведение моментов одной пары на расстояние между плоскостями представляет собой бимомент – система усилий, статически эквивалентная нулю, а поэтому величина его не может быть найдена из уравнения равновесия. Для его определения необходимо получить выражение угла закручивания Q в функции от координаты z, а это достигается интегрированием дифференциального уравнения углов закручивания.

Для учета данного явления необходимо ввести определение секториальной координаты, равной удвоенной площади, очерчиваемой радиус-вектором PA при движении точки A по контуру от начала отсчета 0 до некоторого значения дуги s. Причем при движении против хода часовой стрелки площадь считается положительной, а при движении по ходу – отрицательной.

При поперечном изгибе или кручении всегда существует такая точка, относительно которой момент от касательных сил, возникающих в поперечном сечении, равен нулю. Т. е. существует такая ось, параллельная оси стержня, что произвольная система сил, действующая в любой проходящей через эту ось плоскости, не вызывает кручения. След этой оси на плоскости поперечного сечения образует точку, называемую центром изгиба. Для сечений, имеющих две оси симметрии, центр изгиба или центр кручения совпадают с центром тяжести.

Положение центра изгиба (или кручения) не зависит от действующих на стержень сил, а зависит только от формы и размеров поперечного сечения тонкостенного стержня.

Эпюра ω, построенная при полюсе, в качестве которого взят центр изгиба, носит название эпюры главной секториальной площади [2, 3].

Поместим радиус-вектор с началом в центре изгиба. Начинаем очерчивать контур швеллера: для определения координаты точки В движемся против хода часовой стрелки, описывая при этом прямоугольный треугольник, удвоенная площадь которого и будет являться ординатой эпюры в точке В. Для определения координаты точки С требуется совершить уже проделанный путь со знаком «+», а затем по ходу часовой стрелки (в отрицательном направлении) переместиться в точку С, ордината которой является разностью удвоенных площадей очерченных треугольников (рисунок 2) на практике определяются в следующей порядке:

1) Выбирается положение полюса Р и строится эпюра секториальной площади относительно принятого полюса.

2) Определяется величина секториально-линейного момента $S_{\omega 0y}$ относительно полюса Р: $S_{\omega 0y} = \int \omega y dA$.

3) Вычисляется момент инерции I_x относительно оси x-x и координаты центра изгиба по формуле: $a_x = -S_{\omega 0y}/I_x$.

4) Определяется секториальная площадь относительно центра изгиба и вычисляется секториальный момент инерции по формуле:

$$I_\omega = \int \omega^2 \, dA.$$

Своей задачей поставим определение дополнительных нормальных напряжений от депланации сечения при стеснённом кручении:

$$\sigma_w = B/I_w \bullet \omega.$$

Рассмотрим наиболее распространенный на практике случай балки на двух опорах с равномерно распределенной нагрузкой в вертикальной плоскости.

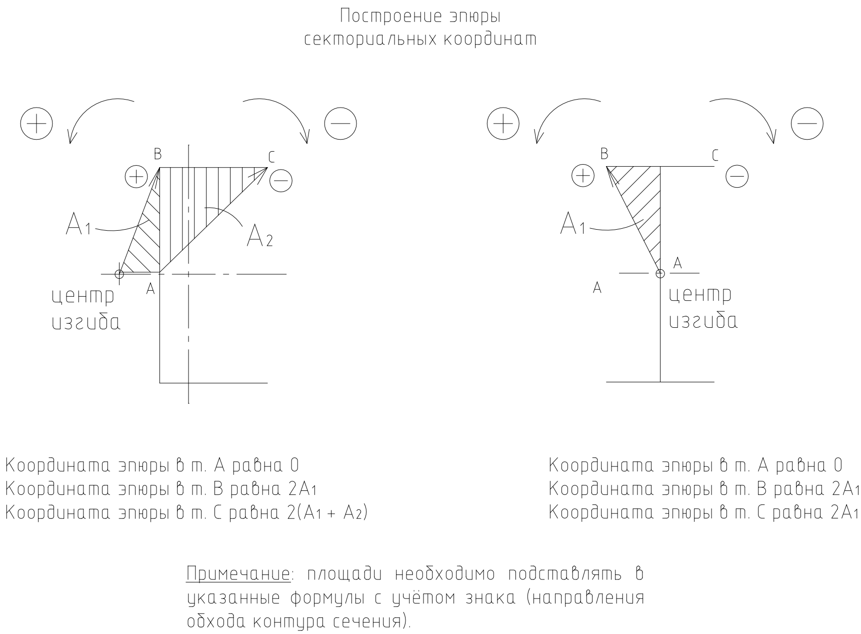

Рисунок 2 – Построение эпюр секториальных координат

В качестве примера рассмотрим прогон пролетом 5 м из гнутого равнополочного швеллера 400х100х8 из стали С255, для которого R_y = 250 МПа.

Геометрические характеристики профиля: I_x = 9381,44 см^4; W_x = 469,07 см^3.

Для двухопорной балки максимальный изгибающий момент от нагрузки q = 9,4 кН/м составит:

$$M_{расч} = (q\, l^2)/8 = (9{,}40 \cdot 5^2)/8 = 29{,}3 \text{ кНм}.$$

Тогда нормальные напряжения в сечении элемента от момента составят:

$$\sigma_u = M_{расч}/W_x = 0{,}0293 \ / \ 0{,}0004691 = 63 \text{ МПа}.$$

Определим секториальный момент инерции (см. алгоритм ранее):

$$I_\omega = \int \omega^2 \, dA = 102\ 296 \text{ см}^6.$$

Величину бимомента для балки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой, определяем по формуле:

$$B = \frac{q \cdot e}{\alpha^2}\left[1 - \frac{ch\,\alpha\left(\frac{l}{2} - z\right)}{ch\frac{\alpha l}{2}}\right] = \frac{9.4 \cdot 10^3 \cdot 0.046}{0.000059^2}\left[1 - \frac{ch\,0.0059\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right)}{ch\frac{0.0059 \cdot 5}{2}}\right] = 1346 \text{ Нм}^2,$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{G \cdot I_k}{E \cdot I_\omega}} = \sqrt{\frac{0.79 \cdot 10^5 \cdot 9.38}{206 \cdot 10^9 \cdot 102296}} = 0.0059,$

$G = 0{,}79 \cdot 105$ МПа – модуль сдвига стали;

$I_k = 0{,}37 \cdot t^3 \cdot \sum b_i = 0.37 \cdot 0.8^3 \cdot (9.5 \cdot 2 + 40) = 9.38 \text{ см}^4$- момент инерции сечения при свободном кручении;

b_i – ширина i-го элемента сечения;

t – толщина элементов сечения, постоянная для всех в рассматриваемом случае;

e = |ax + x0| = 4,6 см – эксцентриситет приложения нагрузки относительно центра изгиба.

Тогда дополнительные нормальные напряжение, вызванное депланацией сечения, составят:

$$\sigma_w = (B \cdot \omega)/I_w = 176.6 \text{ МПа}.$$

Суммарные напряжения в сечении тонкостенного гнутого профиля составляют:

$$\sigma = \sigma_u + \sigma_w = 63 + 176.6 = 239{,}1 \text{ МПа} < Ry = 250 \text{ МПа}.$$

Таким образом, нормальные напряжения от депланации могут быть в разы больше нормальных напряжений от изгибающего момента. Для снижения величины дополнительных напряжений от кручения, возможна постановка раскрепления в третях балки от смещения в горизонтальной плоскости. Данное действие позволяет значительно снизит величину дополнительных напряжений от кручения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов, В.З. Тонкостенные упругие стержни / В.В. Власов. – М.: Физматгиз, 1959.

2. Смирнов, А.Ф. Сопротивление материалов / А.Ф. Смирнов. – 3-е изд. – М.: «Высшая школа», 1975.

3. Карякин, Н.И. Основы расчета тонкостенных конструкций / Н.И. Карякин. – М.: «Высшая школа», 1960.