БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 539.3

КРУШЕВСКИ ТАТЬЯНА

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ИЗГИБА ПЛАСТИН

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Минск, 2011

Работа выполнена в Белорусском государственном университете (БГУ)

Научный руководитель:	Журавков Михаил Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, первый проректор Белорусского государственного университета
Официальные оппоненты:	Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой строительной механики, УО «Белорусский государственный университет транспорта», Митюшев Владимир Викторович, кандидат физико-математических наук, профессор математических наук, Краковский педагогический университет (г. Краков, Польша); Университет им. Пьера и Марии Кюри (г. Париж, Франция)
Оппонирующая организация:	УО «Белорусский государственный технологический университет», г. Минск

Защита состоится «21» июня 2011 года в 16 часов на заседании совета Д 02.05.07 по защите диссертаций при Белорусском национальном техническом университете по адресу 220013, г. Минск, пр-т Независимости 65, 1-й корпус, ауд. 202, тел. ученого секретаря 292-24-04.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского национального технического университета.

Автореферат разослан «20» мая 2011 г.

Ученый секретарь совета по защите Д 02.05.07,
кандидат физико-математических наук, доцент __________________ Нифагин В.А.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи математической теории упругости для конечных тел, к которым относятся и пластины, являются сложными для построения аналитического решения и, как правило, в большинстве случаев не имеют замкнутого решения. Поэтому для расчета пластин, т. е. тел, у которых один размер (толщина) значительно меньше двух других, применяют различные приближенные методы, основанные на введении определенных гипотез. Наиболее распространенные и популярные методы решения задач теории пластин и оболочек основаны на подходах и методах вариационного исчисления.

Задачи динамики пластин, связанные с исследованием собственных частот колебаний пластин, принадлежат к числу важных как в теоретическом отношении, так и с практической точки зрения. Их актуальность вызвана постоянно растущей необходимостью использования результатов новых научных исследований в современных отраслях науки и техники, а также формированием наглядных физических представлений о динамике пластин. В то же время, до настоящего времени известно не так много случаев применения аналитических подходов к решению динамических задач теории пластин. Вместе с тем, возможности и средства современных символьных вычислений делают доступным построение численно-аналитических решений сложных динамических задач и позволяют выполнять математическое моделирование и изучение колебаний упругих пластин.

Настоящая работа посвящена разработке на основе метода конечных элементов методик численно-символьного решения задач динамики пластин. Кроме того, в диссертации выполнено сравнение результатов решения некоторых задач динамической теории пластин, полученных в рамках технической, уточненной и точной постановках. Актуальность выполненных исследований обусловлена также рассмотрением прикладной задачи вычисления собственных частот колебаний одного типа пластин, как модельной задачи изучения процессов голосообразования.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами

Исследования в рамках диссертационной работы выполнялись в рамках задания 2.20 «Моделирование и решение нового класса контактных задач механики ответственных узлов и систем современных машин и оборудования для обеспечения их заданной долговечности; разработка методологии и средств многоцелевых ускоренных испытаний материалов, элементов конструкций, моделей узлов трения и силовых систем в условиях комплексного нагружения, механической усталости, трения и изнашивания. Разработка модели и построение метода аналитического решения задачи определения параметров контакта и исследования напряженного состояния для силовых систем», в рамках ГКПНИ «Механика», № ГР20061791, научный руководитель – д. физ. - мат. наук М. А. Журавков, организация исполнитель – Белорусский государственный университет.

Цель и задачи исследования

Целью работы являлось построение численно-аналитических решений некоторых классов задач вычисления собственных частот изгиба пластин в различных постановках на основе вариационных методов и компьютерной реализации метода конечных элементов.

Для достижения поставленной цели рассматривались различные задачи колебания теории пластин в технической, уточненной и точной постановках. Применялся метод конечных элементов, который можно использовать практически к пластинам любой формы. В качестве численных реализаций метода рассмотрены пластины прямоугольной и эллиптической формы, а также эллиптическая пластина со специальным вырезом.

Принятая в диссертации методология основана на использовании энергетических методов решения задач механики, записанных применительно к упругим пластинам. Основными методами, использованными в работе, являются:

- метод конечных элементов;
- метод двойных рядов Фурье;
- операторный метод.

В работе также использованы современные возможности компьютерной математики для выполнения символьных и численных вычислений.

В соответствии с основной целью в диссертации ***выполнены следующие исследования и рассмотрены такие классы задач*:**

1. Разработана методика и построено аналитическое решение задач по определению собственных частот колебаний пластин в рамках новой уточненной постановки. При этом точно выполняются краевые условия на торцах пластинки. Решены тестовые задачи определения собственных частот прямоугольной шарнирно–опертой пластинки. Дано сравнение результатов полученных в соответствии с предложенной уточненной постановкой и в рамках технической теории. Выполнено решение задач для защемленных эллиптических пластинок в уточненной и технической постановках.

2. Построена методика решения задач динамики изгиба изотропных пластин в рамках предложенной новой «точной постановке». Выведены операторные уравнения бесконечно высокого порядка. Рассмотрены некоторые примеры решения задач в предложенной «точной постановке» и выполнено сравнение полученных результатов с результатами в технической и уточненной постановках.

3. В технической постановке на основе уравнения Софи-Жермен решена новая задача определения собственных частот изгибных колебаний эллиптической пластинки с угловым вырезом применительно к моделированию процесса голосообразования, как результата упругих колебаний голосовых связок при прохождении воздуха. Построена матрица расчетных уравнений и определены некоторые частоты основного тона и обертонов. Выполнены исследования и получены прикладные результаты.

Объектом исследования являлись упругие пластины.

Предмет исследования – напряженно-деформированное состояние пластин и их собственные частоты колебаний.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

***Новыми результатами, выносимыми на защиту, являются*:**

1. Построение «уточненной теории» динамики изгиба пластин, что позволило более точно вычислить частоты высшего порядка по сравнению с результатами технической теории. Построение аналитического решения задачи определения собственных частот изгиба пластин в новой уточненной постановке.

2. Построение разрешающего дифференциального уравнения динамики изгиба изотропных пластин бесконечно высокого порядка в операторном виде и получение аналитического решения задачи динамики изгиба изотропных пластин для построенного уравнения (в «точной постановке») для определения частот собственных изгибных колебаний.

3. Разработка, на основе вариационного подхода с привлечением МКЭ, методики для нахождения собственных частот изгибных колебаний пластин произвольной формы.

4. Решение новой задачи определения собственных частот изгибных колебаний эллиптической пластинки с угловым вырезом применительно к моделированию процесса голосообразования.

Личный вклад соискателя

Представленные в работе новые научные результаты получены автором лично. Научный руководитель М.А. Журавков принимал участие в постановке задач и обсуждении полученных результатов. Другим соавторам научных публикаций принадлежат результаты, не вошедшие в работу. Общие теоретические основы вариационного метода представлены на базе приведенных литературных источников при помощи научного руководителя диссертации профессора М. А. Журавкова и профессора А. Е. Крушевского.

Апробация результатов диссертации

Материалы диссертации докладывались на следующих международных и республиканских научных конференциях: *Int. Symp. Hearing Diagnostics and Reabilitation Problems in Baltic Republics* в 1993 году в Литве; *8th World Congress of the International Reabilitation Medicine Association* в 1997 году в Киото (Япония); *Engineering and education* в 2006 и 2008 годах в Кракове (Польша); *Int. Conf. on Modelling and Optimization of Structures, Processes and Systems* (IC-MOSPS'07, Durban) в 2007 году в ЮАР. Кроме того, соискатель в течение 2006–2009 гг. выступал на научных семинарах кафедры теоретической и прикладной механики БГУ.

Опубликованность результатов

Основные положения диссертации опубликованы в 12 работах, включающих: 7 статей в научных журналах (1,3 а.л.), 4 статьи в сборнике материалов конференции, 1 тезисы доклада на научной конференции. Общий объем публикаций по теме диссертации составляет (1,6 а.л.). Три работы выполнены без соавторов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографического списка и четырех приложений. Диссертация изложена на 92 с., из которых 9 с. занимают 25 иллюстраций, 14 с. – список использованных библиографических источников, включающий 188 наименований, содержит 4 приложения на 30 страницах.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе выполнен анализ математических основ технической теории пластин. Отмечены достоинства и обращено внимание на противоречия технической теории. Выполнено решение и анализ тестовых задач о нахождении спектра собственных частот прямоугольной шарнирно-опертой, заделанной по контуру эллиптической, треугольной и других пластин. Рассмотрены решения некоторых задач, связанных с вынужденными колебаниями пластин.

Во второй главе получено разрешающее дифференциальное уравнение шестого порядка в частных производных для исследования динамики пластин. Подход основан на реализации МКЭ при условии точного выполнения краевых условий на торцах пластинки. При этом в качестве аппроксимирующих функций использованы полиномы Лежандра, а в качестве вариаций – обычные линейные члены степенного ряда. Для вывода расчетных уравнений использовано вариационное уравнение равновесия элементарного столбика с учетом инерционных членов во всех трех направлениях.

Построенное уравнение динамики изгиба пластин в уточненной технической постановке имеет вид:

$$-\frac{\gamma_2 h^2 \Delta\Delta_1\Delta_2 W_0}{720}+\frac{1}{6}\left[\frac{\gamma\Delta_2(6\Delta_1-\Delta)}{10}-\frac{\gamma_2^2\Delta\Delta_1}{2\gamma}\right]W_0+\frac{\rho\partial^2 W_0}{Gh\partial t^2}=$$

$$=\frac{q}{Gh^3}+\frac{(\gamma-1)\Delta\Delta_2 qh}{720G}-\gamma\left[\frac{\Delta_2}{10}-\frac{\gamma_2(\gamma-1)\Delta}{12\gamma^2}\right]\frac{q}{Gh}-\frac{\gamma}{6G}\left(\frac{\Delta_2}{20}-\frac{3}{\gamma h^2}\right)\left(\partial_x x_z+\partial_y y_z\right).$$

Показано, что если в полученном уравнении пренебречь слагаемыми, незначительными при малой толщине пластинки, то приходим к уравнению Софи-Жермен технической теории изгиба пластин.

Разработаны методики решения задач определения собственных частот колебаний пластинок различных форм и граничных условий: прямоугольных шарнирно-опертых; эллиптических, заделанных по контуру в предложенной уточненной (по сравнению с технической теорией) постановке.

Выполнено сравнение полученных результатов с результатами, построенными по технической теории. Решены некоторые задачи о вынужденных колебаниях пластин в уточненной постановке.

Так, например, выполнено решение задачи определения собственных частот прямоугольной пластинки в уточненной постановке. Показано, что если значение низшей частоты по уточненной теории изменяется все же незначительно (приблизительно на 3%), то высшие частоты изменяются существенно.

В третьей главе построена методика решения задач динамики изгиба пластин в точной постановке. Под точной постановкой понимаем постановку краевых задач при условии точного выполнения краевых условий на торцах пластинки и выполнения в интегральной форме условий равновесия внутри тела.

Для выполнения этих условий решение задачи строится в виде ряда Фурье по координате z с привлечением полиномов Лежандра для устранения неполноты ряда Фурье на концах отрезка $\left(-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)$, а именно:

$$u=\frac{2z}{h}U_1+\sum_{i=1}^{\infty}U_{is}\sin\frac{2\pi iz}{h},$$

$$v=\frac{2z}{h}V_1+\sum_{i=1}^{\infty}V_{is}\sin\frac{2\pi iz}{h},$$

$$w=W_0+\frac{1}{2}\left(\frac{12z^2}{h^2}-1\right)W_2+\sum_{i=1}^{\infty}W_{ic}\sin\frac{2\pi iz}{h},$$

где U_1, U_{is}, V_1, V_{is}, W_0, W_2, W_{ic} – функции координат x, y и времени t.

В результате выведена система дифференциальных уравнений, состоящая из четырех вариационных уравнениях на вариациях

$$\Delta u=\sin\frac{2\pi iz}{n},\quad \Delta v=\sin\frac{2\pi iz}{n},\quad \Delta w_0=1,\quad \Delta u=\cos\frac{2\pi iz}{n}$$

и трех уравнений связей, выражающих собой равновесие пластинки на ее торцах. В результате исключения всех неизвестных функций кроме функции $W_0(x,y)$ в разложении ряда Фурье при z^0, получено разрешающее дифференциальное уравнение бесконечно высокого порядка.

Полученное разрешающее уравнение можно рассматривать как результат приведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной. Оно справедливо при любой толщине пластинки. Показано, что при малой толщине приходим к технической теории. Построено трансцендентное уравнение для собственных частот прямоугольной шарнирно-опертой пластинки и определены некоторые первые частоты.

Сравнение с результатами технической и уточненной теории показывает, что только самая низшая частота в достаточной мере точно определяется по приближенным теориям. Если по технической теории при каждой волне, определяемой множителями $\sin\dfrac{\pi mx}{a}\sin\dfrac{\pi ny}{b}$, находим одну собственную частоту, по уточненной теории две частоты, то точная теория определяет бесчисленное число частот на основе построенного трансцендентного уравнения.

Для решения построенной математической задачи применяется МКЭ с треугольным конечным элементом с девятью степенями свободы. Для этой цели привлекаются полные полиномы третьей степени, содержащие десять членов, а для устранения неопределенности в выборе слагаемых используется метод ортогонализации полинома к нулевой базисной функции, которая обращается в нуль в узлах со всеми частными производными первого порядка.

Разработанная методика пригодна для расчета пластин любой формы и включает следующие этапы:

1) выбор глобальной системы координат и составления уравнений сторон треугольника;

2) выбор локальной системы координат и построение базисных функций;

3) преобразование энергетического функционала в локальной системе координат;

4) вычисление коэффициентов жесткости и коэффициентов инерции;

5) компоновка матрицы жесткости и мер инерции расчетных уравнений;

6) решение системы уравнений и нахождение искомых частот.

В четвертой главе на основе метода конечных элементов (МКЭ) разработана схема определения частот собственных изгибных колебаний эллиптической, заделанной по контуру, пластинки со свободным угловым вырезом. Показано, что данная задача может быть использована как модельная для изучения процесса голосообразования при прохождении воздуха через голосовые связки.

Математически задача сводится к решению уравнения Софи-Жермен

$$D\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q$$

при следующих краевых условиях:

• на эллиптическом контуре w=0, $\dfrac{\partial w}{\partial n} = 0$,

• на свободном вырезе $\dfrac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0,\ \dfrac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial n \partial s^2} = 0,$

где w – прогиб пластинки, ν – коэффициент Пуассона, n – нормаль, s – контурная координата.

Для решения поставленной задачи используется энергетический метод на основе принципа Даламбера в положении амплитудного отклонения системы

$$\frac{\partial U_0}{\partial r_k} - \frac{p^2 \partial L}{2\partial r_k},$$

где U_0 – потенциальная энергия деформации при амплитудных отклонениях; r_k – обобщенная координата; p – круговая частота собственных колебаний; L – сумма произведений элементарных масс, составляющих систему, на квадрат их амплитудных отклонений.

Для пластины потенциальная энергия деформации выражается интегралом

$$U_0 = \frac{1}{2}\iint D\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\right\}dxdy,$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ – цилиндрическая жесткость пластины; $L = \iint \rho h w^2 dxdy$, ρ – плотность материала пластины; w – прогиб пластины. Интегралы берутся по всей площади пластины. Решение строится в виде ряда

$$w(x,y) = c_1 w_1(x,y) + c_2 w_2(x,y) + \ldots + c_n w_n(x,y),$$

где $w_1, w_2, \ldots, w_n$ – функции, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям; $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – коэффициенты, определяемые из условия минимума энергии.

В качестве конечного элемента принимаем треугольный элемент, имеющий по три степени в каждом узле

$$\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Для аппроксимирующих функций используем полиномы 3-й степени

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3.$$

Поскольку полином 3-й степени имеет десять коэффициентов, а требуется девять по числу степеней свободы треугольного элемента, то вводим дополнительную функцию $\Psi(x,y)$, которая обнуляется на контуре треугольника, а неизвестные коэффициенты при этой функции находятся из условия ортогональности и соответствующих полиномов.

Суммарная матрица жесткости определяется как условие минимума потенциальной энергии для всей пластины, состоящей из отдельных треугольников. В эту сумму входят неизвестные прогибы и углы поворота внутренних и внешних узлов. Так как потенциальная энергия представляет собой квадратичную форму относительно неизвестных величин (прогибов и углов поворота), то, находя частные производные по неизвестным коэффициентам и приравнивая их к нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений статики изгиба пластинки. Внешние силы не включаются в энергию, так как в данной работе решается задача о собственных частотах, для чего составляется суммарная матрица мер инерции.

Подсчитаны низшие частоты в зависимости от угла выреза и выполнено сравнение с данными спектрограммы голоса.

Результаты вычислений показали, что частоты колебаний зависят нелинейно от угла раскрытия голосовых складок с различной степенью нелинейности. Причем нижние частоты связаны с углом раскрытия «слабой нелинейностью», а высшие — «сильной». С увеличением угла α все частоты, как основного тона, так и обертонов увеличиваются нелинейно (рисунок 1).

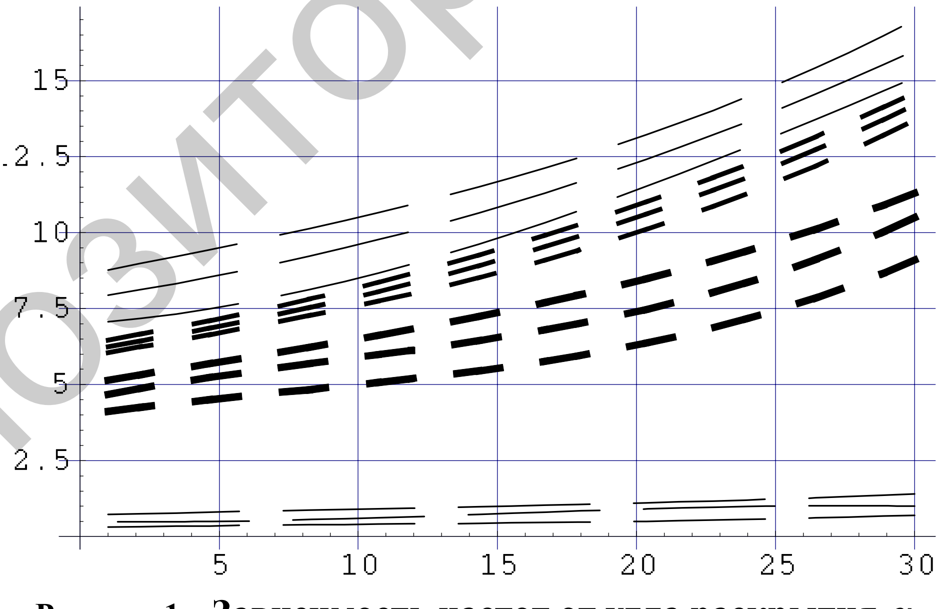

Рисунок 1 – Зависимость частот от угла раскрытия α

Для вычисления частот собственных колебаний составлена программа в пакете *Mathematica*.

Вычисленные частоты образуют несколько групп, внутри которых частоты мало отличаются друг от друга, что подтверждается на спектрограммах голоса.

1. Если низшие частоты зависят от угла раскрытия складок почти линейно, то

высшие частоты имеют явно нелинейную зависимость от угла α и изменяются достаточно быстро.

2. Все частоты увеличиваются с увеличения угла α, что объясняется увеличением жесткости системы.
3. Все частоты прямо пропорциональны толщине складок h и квадратному корню из модуля Юнга E (напряжение складок) и обратно пропорциональны квадратному корню из плотности складок ρ.

$$\omega = \sqrt{\frac{qD}{\rho h}} = h\sqrt{\frac{qE}{12\rho(1-\mu^2)}}.$$

В данной задаче угол раскрытия голосовых складок α берется равным: 0°, 10°, 20°, 30°, где

$$q = \frac{\rho h \omega^2}{D}, \quad S = \sqrt{q},$$

то есть q – прямо пропорционально ω (частоте).

На основании полученных числовых результатов построены графики изменения величин, пропорциональных частотам в зависимости от угла α раскрытия голосовых складок. Графики изменения частот от угла α показывают, что спектр собственных частот распадается на группы частот мало отличающихся друг от друга. Так, например, группа низших частот достаточно изолирована от группы высших частот. Этот факт обнаруживается на спектрограммах, полученных с помощью различных спектроанализаторов, где спектр распадается на отдельные группы. Это означает, что сила звука тем выше, чем ближе тон звука к какой-то группе спектра частот. Это объясняется явлением резонанса.

Кроме специфических выводов подтверждаются и известные выводы о зависимости частоты при данном угле раствора от напряжения складок, плотности и других величин. Например, чем больше натяжение складок, которое характеризуется модулем Юнга E, тем выше частоты.

Ранее записанная формула для ω подтверждает, что частота вибрации голосовых складок пропорциональна жесткости системы, характеризуемой величиной h, и обратно пропорциональна квадратному корню из ее плотности ρ.

Полученные результаты подтверждают миоэластическую (упругую) теорию колебания голосовых складок и не подтверждают нейрохроматическую теорию, которая утверждает, что колебания голосовых складок строго подчинены только нервным импульсам, исходимым из мозгового центра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполненных исследований в диссертационной работе получены следующие результаты:

1. На основе полиномов Лежандра построена уточненная теория динамики изгиба пластин при точном выполнении краевых условий на торцах пластинки, причем разрешающее уравнение включает производные шестого порядка, что позволяет уточнить частоты собственных колебаний высшего порядка по сравнению с результатами технической теории. Показано, что если в полученном уравнении пренебречь слагаемыми, не существенными при малой толщине пластинки, то приходим к уравнению технической теории изгиба пластин в стандартной постановке [2, 7]. Построено аналитическое решение задачи определения собственных частот изгиба пластин в уточненной (по сравнению с технической теорией) постановке. Разработанное решение предусматривает точное выполнение краевых условий на торцах пластинки. На основе МКЭ разработан алгоритм и численная схема определения частот собственных изгибных колебаний пластин в уточненной постановке.

2. На основе рядов Фурье с дополнительными членами в виде полиномов Лежандра построено разрешающее дифференциальное уравнение динамики изгиба изотропных пластин бесконечно высокого порядка в операторном виде. Получено аналитическое решение задачи динамики изгиба изотропных пластин для построенного уравнения (в «точной постановке») для определения частот собственных изгибных колебаний. Точное уравнение значительно расширило спектр частот собственных изгибных колебаний, что позволило по-новому строить динамические задачи изгиба пластин. Приведенные примеры показывают возможности применения операторного уравнения при определении собственных частот изгибных колебаний прямоугольной шарнирно–опертой изотропной пластинки [5, 6, 8].

3. Разработана, на основе вариационного подхода с привлечением МКЭ, методика для нахождения собственных частот изгибных колебаний пластин произвольной формы [3, 4, 9].

4. Решена новая задача определения собственных частот изгибных колебаний эллиптической пластинки с угловым вырезом. Результаты решения данной задачи использованы при моделировании процесса голосообразовании [1].

5. Построена новая механико-математическая модель процесса исследования голосообразования. Выполнены прикладные исследования, показана связь частот колебаний с процессом голосообразования, получены важные прикладные практические результаты. Показана связь частот колебаний с процессом голосообразования [1, 10, 11, 12].

Рекомендации по практическому использованию результатов диссертации

Результаты диссертационной работы могут быть использованы при совершенствовании подходов и методов решения задач теорий плит; при развитии и создании инженерных прикладных расчетных методик для различных конструкций, механизмов и сооружений, которые можно рассматривать в рамках теорий плит.

Результаты диссертационной работы рекомендуется использовать в практике работы научно-исследовательских учреждений, связанных с моделированием, исследованием и проектированием различных конструкций в плиточном приближении.

Результаты исследований будут использованы при чтении спец. курсов студентам механико-математического факультета по построению механико-математических моделей при изучении разнообразных сложных явлений и процессов.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах и сборниках

1. Tiedtke, T. Determination of eigenvalues of the loading oscillations of elliptic plate with a corner cutout / T. Tiedtke // Problems of modern techniques in aspect of engineering and education / eds.: P. Kurtyka [et al.]. – Cracow, PU IT, 2008. – P. 201–205.

2. Журавков, М.А. Вынужденные колебания прямоугольной шарнирно-опертой пластинки в уточненной постановке / М.А. Журавков, T. Tiedtke // Вестник БГУ. Серия 1. – 2008. – №1. – С.110–112.

3. Tiedtke, T. Periodic load of elastic rectangular plate / T. Tiedke // Problems of modern techniques in aspect of engineering and education. – Pedagogical University CRACOW, 2007. – P. 85–88.

4. Крушевский, А.Е. Вычисление некоторых частот изгибных колебаний прямоугольной шарнирно опертой пластинки в точной постановке / А.Е. Крушевский, T. Tiedtke // Теоретическая и прикладная механика: межвед. сб. науч.-метод. статей. – Минск, 2006. – № 20. – С. 25–27.

5. Крушевский, А.Е. Построение теории изгиба пластин в точной постановке / А.Е. Крушевский, T. Tiedtke // Теоретическая и прикладная механика: межвед. сб. науч.-метод. статей. – Минск, 2005. – № 19. – С. 106–109.

6. Крушевский, А.Е. Исследование частотного уравнения изгибных колебаний прямоугольной шарнирно опертой пластинки в точной постановке / А.Е. Крушевский, Т.А. Лудеманн // Машиностроение: сб. науч. трудов. – Минск: УП «Технопринт», 2001. – Вып. 17. – С. 327–329.

7. Крушевский, А.Е. Уточненная теория динамики тонких пластин / А.Е. Крушевский, Т.А. Лудеманн // Машиностроение: сб. науч. трудов. – Минск: УП «Технопринт», 2000. – Вып. 16. – С. 225–229.

Материалы конференций

8. Журавков, М.А. Решение некоторых задач теории динамики изгиба пластин в точной постановке / М.А. Журавков, Т.А. Крушевская // Труды VI Междунар. симп. по трибофатике: в 2 ч. – 25.10 – 01.11.2010, Минск. – Минск: БГУ, 2010. – С. 327–332.

9. Zhuravkov, M.A. Definition of fundamental frequency of clamped plate in the specified statement / M. Zhuravkov, T. Tiedtke // Proceedings of the Int. Conf. on Modelling and Optimization of Structures. Processes and Systems (ICMOSPS'07, Durban) Eds. S. Adali, E.V. Morozov, V.V. Verijenko. – Durban (South Africa), 2007. – 4 p.

10. Kruschevskaja, I.I. Life activity limitations in the population with larinx diseases damaged by the Chernobyl disaster / I.I. Kruschevskaja, T.I. Zborovsky, T. Ludemann, H. Janzik // Materials of 8th World Congress of the international reabilitation medicine association. Aug. 31 – Sep. 4, 1997 – Kyoto (Japan), 1997. – P. 19–20.

11. Kruschevskaja, T. The construction of the Voice-Formation mathematical model, based of the theory of elastic plates / T. Kruschevskaja // Hearing diagnostics and reabilitation problems in Baltic republics: materials of International symposium, 16–17 Sept., 1993. – Kaunas (Lithuania), 1993. – P. 11–12.

Тезисы докладов

12. Крушевская, Т.А. Построение математической модели голосообразования / Т.А. Крушевская // Актуальные проблемы социально-гуманитарных и естественных наук: тезисы науч. конф., посвященной 70-летию университета: Сб. науч. трудов. – Минск: Вышэйшая школа, 1991. – С. 238–239.

РЭЗЮМЕ

Крушэўскі Таццяна

Вылікова-аналітычныя рашэнні некаторых класаў задач дынамікі выгібу пругкіх пласцін

Ключавыя словы: раўнанне Сафі-Жэрмен, тэорыя дынамікі пласцін, уласныя частоты выгібных ваганняў, прынцып віртуальных перасоўванняў, метад канечных элементаў, эліптычная пласціна з вуглавым выразам, мадэляванне голасаўтварэння.

Аб'екты даследавання: пругкія пласціны.

Мэта работы заключаецца ў распрацоўцы і выкарыстанні метаду ўласных частот выгібу пласцін адвольнай формы на аснове камп'ютэрнай рэалізацыі метаду канечных элементаў.

У дадзенай рабоце распрацаваны метад вызначэння ўласных частотаў выгібных ваганняў пласцін у розных пастаноўках. Па тэхнічнай пастаноўцы на аснове раўнання Сафі-Жэрмен рашаецца задача вызначэння ўласных частот выгібных ваганняў эліптычнай пласціны з вуглавым выразам прымяніцельна да мадэлі пабудовы працэсу голасаўтварэння. Для рашэння задачы выкарыстаны МКЭ з элементам у выглядзе трохвугольніка з дзевяццю ступенямі свабоды. Да пабудовы базісных функцый выкарастаны многасклады трэцяй ступені, створаныя з дзевяці складнікаў. Пабудавана матрыца разліковых раўнанняў і вызначаны пэўныя частоты галоўнага тону і обертонаў. Пры пабудове ўдакладнёнай тэорыі пласцін прапанаваны новы метад удакладнення, з якога як прыватны выпадак вынікае раўнанне Сафі-Жэрмен. Пры гэтым дакладна выконваюцца межавыя ўмовы на тарцах пласцін. У такой пастаноўцы рашаюцца задачы вызначэння ўласных частот прамавугольнай шарнірна абапёртай пласціны. Дадзена параўнанне вынікаў па ўдакладнёнай тэорыі і тэхнічнай тэорыі. Разгледжаны зашчэмленыя эліптычныя пласціны ва ўдакладнёнай і тэхнічнай пастаноўках. Разгледжаны пэўныя прыклады ў дакладнай пастаноўцы і прыведзены параўнанні з вынікамі тэхнічнай і ўдакладнёнай тэорый. Пабудавана матэматычная мадэль голасаўтварэння як вынік пругкіх ваганняў галасавых звязак пры праходжанні паветра.

Вынікі могуць знайсці скарыстанне да якаснага і колькаснага аналізу ўласных частот ваганняў пласцін. Вынікі лікавых і сімвальных разлікавых можна скарыстаць на практыцы ў медыцыне для даследавання паталогій галасавых звязак.

РЕЗЮМЕ

Крушевски Татьяна

Численно-аналитические решения некоторых классов задач динамики изгиба пластин

Ключевые слова: уравнение Софи-Жермен, теория динамики пластин, собственные частоты изгибных колебаний, принцип виртуальных перемещений, метод конечных элементов, эллиптическая пластинка с угловым вырезом, моделирование голосообразования.

Объекты исследования: упругие пластины.

Цель работы заключается в разработке и применении метода вычисления собственных частот изгиба пластин произвольной формы на основе компьютерной реализации метода конечных элементов.

В настоящей работе разработаны методы определения собственных частот изгибных колебаний пластин в различных постановках. В технической постановке на основе уравнения Софи-Жермен решается задача определения собственных частот изгибных колебаний эллиптической пластинки с угловым вырезом применительно к модели построения процесса голосообразования. Для решения задачи использован МКЭ с элементом в виде треугольника с девятью степенями свободы. При построении базисных функций применены полиномы третьей степени, состоящие из десяти слагаемых. Построена матрица расчетных уравнений и определены некоторые частоты основного тона и обертонов. При построении уточненной теории пластин предлагается новый метод уточнения, из которого как частный случай следует уравнение Софи-Жермен. При этом точно выполняются краевые условия на торцах пластинки. В такой постановке решаются текстовые задачи определения собственных частот прямоугольной шарнирно–опертой пластинки. Дано сравнение результатов по уточненной теории и технической теории. Рассмотрены защемленные эллиптические пластинки в уточненной и технической постановке. Рассмотрены некоторые примеры в точной постановке и даны сравнения с результатами технической и уточненной теории. Построена математическая модель голосообразования, как результата упругих колебаний голосовых связок при прохождении воздуха.

Результаты могут быть использованы для качественного и количественного анализа собственных частот колебания пластин. Результаты численных и символьных расчетов могут быть применены на практике для исследования патологии голосовых связок в медицине.

SUMMARY

Kruschewsky Tatiana

Numerical and analytic solutions of some classes of problems of the dynamics of elastic plates bending

Key words: elastic plate equation, theory of plate dynamics, eigen frequencies of bending oscillations, principle of virtual displacements, finite element method, elliptical plate with an angle cut, model of the voice generation.

Main objects of investigation are elastic plates

The main objectives of the work is to develop and to apply a computational method for eigen frequencies of bending plates of arbitrary shapes basing on the computer realization of the finite element method.

In the present work, methods to determine eigen frequencies of bending oscillations of plates are developed in various statements. In technical statement, the problem of determination of the eigen frequencies of an elliptic plate with a cut has been solved by means of the elastic plate equation to construct a model of the voice generation. In order to solve the problem the finite element method based on a triangle with nine degrees of freedom is used. Polynomials of the third power consisting of ten terms are used to construct basic functions. The matrix of equations is explicitly constructed and some frequencies of the main tone and of high-tones are determined. A new method is proposed to the precise theory from which the elastic plate equation follows as a partial case. Moreover, the boundary conditions are exactly fulfilled. In such a statement the problems of determination of the eigen frequencies of a rectangular plates are solved. A comparison of the results in the precise theory and in the technical theory is presented. Fixed elliptical plates in the precise and in the technical theories are investigated. Some examples in the framework of the exact theory are considered and compared to the results of the precise and of the technical theories. A mathematical model of the voice generation is constructed as a result of the elastic oscillations of the vocal chords during the passing of air.

The obtained results can be used to qualitative and quantitative analysis of the eigen frequencies of bending oscillations of the plates. The results of numerical and symbolical computations performed in the present work can be applied to practical investigations of the pathology of vocal chords in medicine.

Научное издание

КРУШЕВСКИ Татьяна

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ИЗГИБА ПЛАСТИН

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Подписано в печать 18.05.2011.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 0,99. Уч.-изд. л. 0,72. Тираж 60. Заказ 489.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.