

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра "Гидропневмоавтоматика и гидропневмопривод"

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Лабораторные работы (практикум)  
для студентов специальности  
"Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин"

Минск 2004

УДК [629.1.02/03.001.573+621.9.06-83.001.573](075.8)

ББК 34.447

С 21

Составители:

А.И. Сафонов, А.С. Поварехо, С.Н. Новицкий

Рецензент А.И. Рахлей

В издании освещены вопросы моделирования характеристик гидравлических насосов, систем подрессоривания, пневматических и гидравлических систем, механического привода с фрикционными элементами. Изложены основные теоретические положения, необходимые для составления математической модели, и указаны численные значения исходных данных, необходимых для реализации модели.

ISBN 985-479-149-1

© Сафонов А.И., Поварехо А.С.,  
Новицкий С.Н., составление, 2004

## Лабораторная работа № 1

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АКСИАЛЬНО-ПОРШНЕВОГО НАСОСА С РЕГУЛЯТОРОМ МОЩНОСТИ

*Цель работы:* получить навыки моделирования характеристики насоса.

#### Общие сведения

Рабочие характеристики аксиально-поршневых насосов переменной подачи представляют собой совокупность зависимостей подачи насоса  $Q_n$ , мощности  $N$  и коэффициента полезного действия  $\eta$  от давления  $p_n$ , полученных при постоянной частоте вращения  $n = \text{const}$ , построенных на основании опытных данных для различных параметров регулирования.

Характеристика регулирования мощности вида  $Q_n = f(p_n)$  состоит из двух участков. Первый участок, на котором давление изменяется от 0 до  $p_N$ , соответствует плавному снижению подачи от  $Q_{\text{max}}$  до  $Q_N$  в связи с ростом внутренних утечек. Началу второго участка соответствует давление настройки клапана  $p_N$ , при котором регулятор мощности начинает изменять рабочий объем насоса за счет наклона шайбы управляющим золотником. Регулирование происходит по принципу постоянства установленной мощности насоса  $N_{\text{уст}}$ , определяемой как произведение потока  $Q_n$  и давления в напорной магистрали  $p_n$  с учетом коэффициента полезного действия  $\eta_n$ , т.е.  $N_{\text{уст}} = p_n \cdot Q_n / \eta_n = \text{const}$ . Окончание этого участка соответствует максимальному давлению насоса  $p_{\text{max}}$ , установленному предохранительным клапаном.

Таким образом, подача насоса определяется в зависимости от давления в напорной магистрали по характеристике вида  $Q_n = f(p_n)$ . Однако для дальнейшего использования данной характеристики в моделях гидроприводов целесообразно ее представление в обратной зависимости  $p_n = f(Q_n)$ , которую можно описать тремя различными аналитическими выражениями (рис. 1.1).

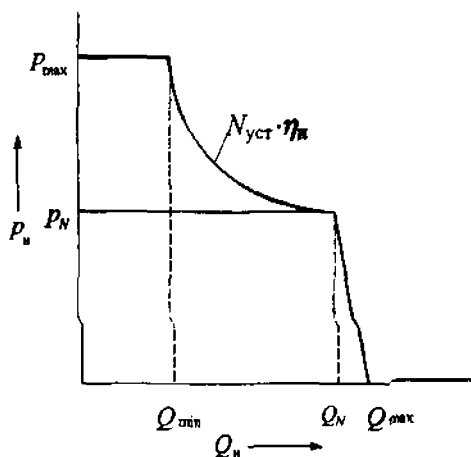


Рис. 1.1. Характеристика регулирования аксиально-поршневого насоса с регулятором мощности

Первый участок  $0 - Q_{\min}$ :

$$p_n = p_{\max}$$

Второй участок  $Q_{\min} - Q_N$ :

$$p_n = N_{\text{уст}} \cdot \eta_{\text{н вкл}} / Q_n \quad (1.1)$$

Величина  $\eta_{н \text{ var}}$  имеет непостоянное значение и изменяется в зависимости от подачи и давления. Однако, используя характеристики насосов (рис. 1.2), можно с достаточной степенью точности описать закон изменения КПД насоса с помощью линейной зависимости:

$$\eta_{н} = \frac{1}{N_{уст}} \left( P_{max} \cdot Q_{min} + \frac{P_N \cdot Q_N - P_{max} \cdot Q_{min}}{Q_N - Q_{min}} \cdot (Q_{н} - Q_{min}) \right).$$

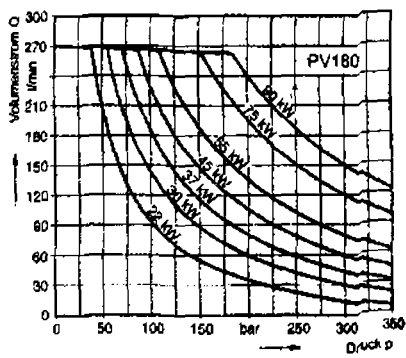
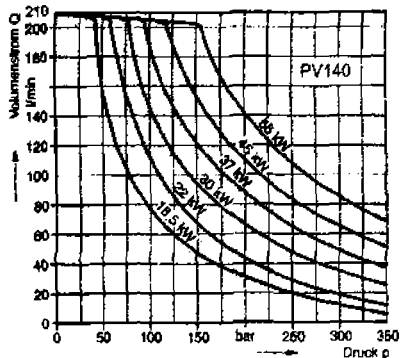
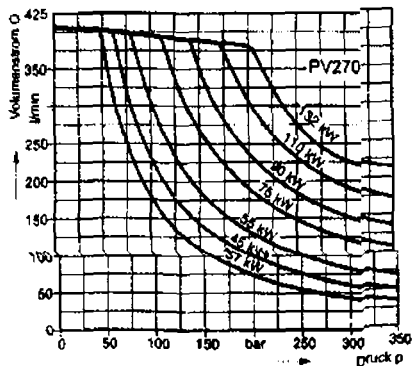
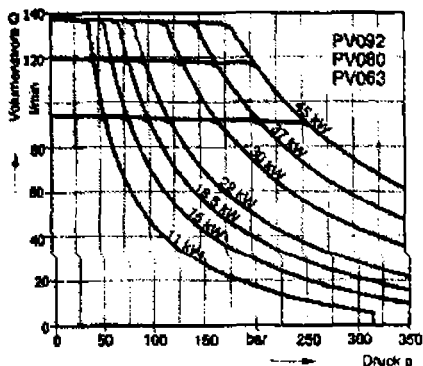


Рис. 1.2. Характеристики регулирования аксиально-поршневых насосов фирмы "Park er" с регулятором мощности

Подставив полученное выражение в формулу (1.1), получим

$$p_n = \frac{1}{Q_n} \left( p_{\max} \cdot Q_{\min} + \frac{p_N \cdot Q_N - p_{\max} \cdot Q_{\min}}{Q_N - Q_{\min}} \cdot (Q_n - Q_{\min}) \right).$$

Третий участок  $Q_N - Q_{\max}$ :

$$p_n = p_N - (p_N - p_0) \frac{Q_n - Q_N}{Q_{\max} - Q_N}.$$

Таким образом, рассмотренная модель насоса может быть использована в дальнейшем при разработке математических моделей различных гидроприводов.

### *Задание*

1. Составить программу для расчета характеристики регулирования аксиально-поршневого насоса.
2. Задав шаг изменения подачи, просчитать математическую модель насоса с заданными характеристиками. (Показатели  $Q_{\min}$ ,  $Q_N$ ,  $Q_{\max}$ ,  $p_N$ ,  $p_{\max}$  определяются по характеристике рис. 1.2).
3. По полученным результатам построить характеристику насоса.
4. Оформить отчет, содержащий математическую модель, распечатку программы, график характеристики насоса.

### Варианты заданий

№ вар.	Модель насоса фирмы "Parker"	Мощность регулирования $N_{уст}$ кВт	№ вар.	Модель насоса фирмы "Parker"	Мощность регулирования $N_{уст}$ кВт
1	PV 140	22	7	PV 270	90
2	PV 140	37	8	PV 270	55
3	PV 140	55	9	PV 270	37
4	PV 180	90	10	PV 092	45
5	PV 180	45	11	PV 080	30
6	PV 180	30	12	PV 063	15

### Лабораторная работа №2

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКОНОВ ИЗМЕНЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

**Цель работы:** получить навыки моделирования законов изменения управляющих воздействий в динамических системах на примере моделирования законов включения золотниковых элементов.

#### *Общие сведения*

Золотниковые распределители являются неотъемлемой частью гидроприводов современных мобильных и технологических машин. Это гидроприводы

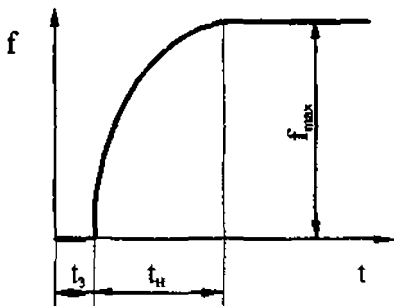
рулевого управления автомобилей, сцепления, коробок передач, тормозных механизмов и так далее.

С одной стороны, при моделировании золотниковых устройств осуществляется определение, на основе их конструктивных параметров, передаточной функции, связывающей приводное и развиваемое узлом усилие. Эти вопросы решаются при силовом расчете устройств с золотниковыми распределителями.

С другой стороны, золотниковые распределители являются управляемыми элементами, осуществляющими связь отдельных компонентов гидропривода, и при их моделировании необходимо описать закон изменения управляющего воздействия как функцию времени, в частности, закон изменения приводного усилия перемещения органа управления или закон изменения проходного сечения золотникового распределителя.

С достаточной для инженерных расчетов точностью закон изменения задающего воздействия или проходного сечения может быть представлен в виде следующих зависимостей.

1. Экспоненциальный закон, который аналитически записывается в следующем виде:



$$f = 0, \quad \text{если } t \leq t_3;$$

$$f = f_{\max} \cdot (1 - e^{-k(t-t_3)}), \quad \text{если } t > t_3,$$

где  $f_{\max}$  — максимальная площадь (при полном открытии) проходного сечения;  
 $k$  — коэффициент, зависящий от темпа включения распределителя.

Рис. 2.1. Экспоненциальный закон изменения задающего воздействия



Коэффициент  $k$  подбирается в соответствии с моделируемым темпом включения узла таким образом, чтобы за время  $t_3+t_n$  моделируемый параметр достигал 90...95% своего максимального значения.

2. **Линейный закон**, который аналитически можно представить в виде (рис. 2.2)

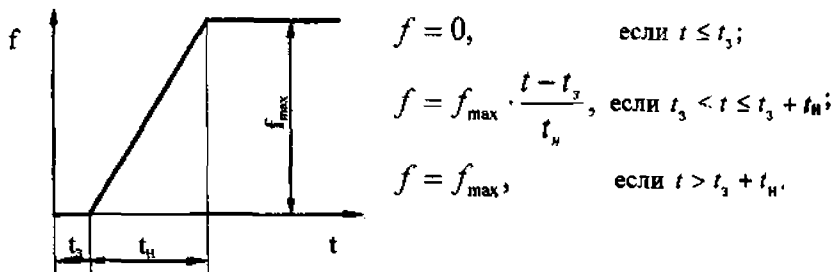


Рис. 2.2. Линейный закон изменения задающего воздействия

3. **Синусоидальный закон**, который аналитически можно представить в виде

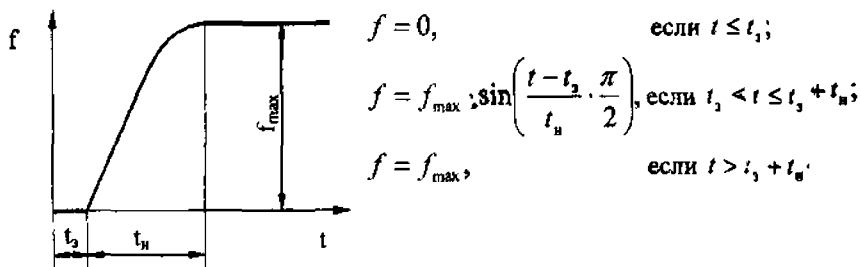


Рис. 2.3. Синусоидальный закон изменения задающего воздействия

### Задание

1. Составить программу для моделирования законов включения золотникового распределителя.

2. Просчитать модель включения золотникового распределителя с заданными характеристиками, приняв во внимание в приведенных зависимостях  $t_3$  (время запаздывания включения узла).

3. Построить график заданного закона включения.

4. Оформить отчет, содержащий математическую модель, распечатку программы, результаты расчета и построенный по ним график.

### Варианты заданий

№ п/п	Закон включения	$f_{\text{max}}$ , $10^{-6} \text{ м}^2$	$t_3$ , с	$t_n$ , с
1	Линейный	100	0,1	0,5
2	Экспоненциальный	100	0,1	0,5
3	Синусоидальный	150	0,15	0,4
4	Экспоненциальный	150	0,15	0,4
5	Линейный	500	0,05	0,25
6	Синусоидальный	500	0,05	0,25
7	Линейный	300	0,3	0,7
8	Экспоненциальный	300	0,3	0,7
9	Синусоидальный	150	0,1	0,5
10	Экспоненциальный	200	0,2	0,7
11	Линейный	300	0,3	1,0
12	Синусоидальный	350	0,15	1,5

## Лабораторная работа №3

### ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ТАБЛИЧНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ

*Цель работы:* получить навыки применения линейной интерполяции при моделировании с использованием таблично заданных функций.

#### Общие сведения

Сравнительно большое количество зависимостей, используемых при моделировании динамических систем мобильных машин имеют сложный характер или получены в результате проведения экспериментальных исследований. Зачастую отсутствует возможность аналитического описания поведения этой функции или оно имеет громоздкий вид. В этом случае функции задаются табличным способом, при котором значения функции задаются при дискретных значениях аргумента. В частности, при моделировании динамических систем мобильных машин широко используется аппроксимация функций для описания упругих и диссипативных характеристик связей в трансмиссии, характеристик шин, пропускных способностей клапанов пневмо- и гидросистем, КПД машин и узлов и т.д. В процессе моделирования необходимо при некотором заданном значении аргумента найти соответствующее значение функции.

*Аппроксимация функции  $f(x)$*  осуществляется путем приближенной ее замены более простой функцией  $\varphi(x)$ , которую можно легко вычислить при любом значении аргумента  $x$  в заданном интервале его изменения. Пусть функция  $f(x)$  задана таблицей значений с произвольным шагом аргумента:

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$f(x)$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	...	$y_n$

Нахождение значений функции  $f(x)$  при некотором значении аргумента  $x$  осуществляется путем ее интерполяции или экстраполяции. *Интерполяция* – нахождение приближенных значений табличной функции при аргументе  $x$ , не совпадающих с узловыми (т.е. заданными в таблице), однако в пределах  $x_0 \leq x \leq x_n$ . Если функция вычисляется вне интервала  $[x_0, x_n]$ , то процесс нахождения функции называется *экстраполяцией*. Под *линейной интерполяцией (экстраполяцией)* понимают замену исходной функции линейной аппроксимирующей функцией вида  $\varphi(x) = a + b \cdot x$ , где  $a$  и  $b$  определяются значениями функции в узловых точках.

Тогда значения функции, заданной таблично, при любых значениях аргумента определяются согласно выражениям:

1) при  $x_0 \leq x \leq x_n$

$$f(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x - x_i).$$

В данном выражении значение аргумента  $x$  принадлежит интервалу  $[x_i, x_{i+1}]$ .

2) при  $x > x_n$

$$f(x) = y_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \cdot (x - x_n);$$

3) при  $x < x_0$

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x_0 - x).$$

### Задание

1. Составить подпрограмму, позволяющую осуществить линейную интерполяцию (экстраполяцию) функции, заданной таблично.
2. Определить значения функции в заданных точках согласно заданию.
3. Построить график рассматриваемой функции.
4. Оформить отчет, содержащий математическую модель интерполяции, распечатку программы и результатов расчета, график функции с нанесенными на него значениями, найденными в заданных точках.

### Варианты заданий

1. Зависимость коэффициента трения покоя  $f_n$  от давления  $p$

$f_n$	2,500	2,000	1,570	1,300	1,070	0,875	0,760
$p$ , МПа	0,0125	0,0250	0,0500	0,0750	0,1000	0,1250	0,1500

Заданные точки:  $p = 0,01; 0,04; 0,11; 0,16$  МПа.

2. Зависимость коэффициента крутильной жесткости шпильки 11,2-20  $C_\beta$  от давления воздуха  $p_w$ :

$C_\beta$ , кН · м/рад	71,5	82,0	91,0	93,0	95,0	96,0	95,0	94,5	92,5
$p_w$ , МПа	0,08	0,11	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20

Заданные точки:  $p_w = 0,05; 0,1; 0,175; 0,22$  МПа.

3. Зависимость восстанавливающей силы  $P_{кр}$  упругого элемента от его деформации  $\delta x$ :

$P_{кр}, \text{кН}$	0	2,5	4,0	5,0	6,2	8,0	10,2	14,0	28,0
$\delta x \cdot 10^{-3}, \text{м}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16

Заданные точки:  $\delta x = 1; 2,5; 14,3; 17,1$ .

4. Изменение радиуса качения  $r_k$  шины 13,6R38 от величины нормального прогиба  $h_z$ :

$r_k, \text{м}$	0,770	0,751	0,749	0,744	0,741	0,739	0,738	0,735	0,733
$h_z \cdot 10^{-3}, \text{м}$	0	10	20	30	40	50	60	70	80

Заданные точки:  $h_z = 5; 15; 75; 86 \text{ мм}$ .

5. Зависимость потери давления  $\Delta p$  от расхода  $Q$  для гидрораспределителя:

$\Delta p, \text{МПа}$	0,1	0,25	0,4	0,7	1,0	1,4	2,3	3,5
$Q, \text{л/мин}$	10	100	150	200	250	300	400	500

Заданные точки:  $Q = 50; 120; 170; 220; 270; 350; 450; 550 \text{ л/мин}$ .

6. Зависимость допустимого давления  $p$  на входе в насос от частоты вращения вала  $n/n_{\text{ном}}$

$p$ , МПа	0,027	0,028	0,035	0,039	0,046	0,06
$n/n_{\text{ном}}$	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0

Заданные точки:  $n/n_{\text{ном}} = 0,05; 0,15; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 1,2$ .

7. Зависимость объемного КПД  $\eta_v$  шестеренного насоса от частоты вращения  $n$ :

$\eta_v$	0,80	0,83	0,86	0,88	0,9	0,915	0,93	0,94	0,95
$n$ , об/мин	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500

Заданные точки:  $n = 400; 650; 800; 1100; 1300; 1600; 1800; 2100; 2400; 2600$  об/мин.

8. Зависимость объемного КПД  $\eta_v$  шестеренного насоса от кинематической вязкости  $\nu$ :

$\eta_v$	0,85	0,9	0,92	0,94	0,955	0,965	0,97	0,975
$\nu$ , мм <sup>2</sup> /с	25	50	75	100	125	150	175	200

Заданные точки:  $\nu = 20; 40; 60; 90; 110; 140; 160; 180; 210$  мм<sup>2</sup>/с.

9. Зависимость объемного КПД  $\eta_v$  пластинчатого насоса от давления  $p$ :

$\eta_v$	0,99	0,97	0,95	0,92	0,89	0,86	0,82
$p$ , МПа	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5

Заданные точки:  $p = 2; 4; 6; 8; 11; 14; 16; 18$  МПа.

10. Зависимость полного КПД  $\eta$  аксиально-поршневого насоса от давления  $p$ :

$\eta_v$	0,75	0,82	0,89	0,92	0,94	0,93	0,92	0,91
$p$ , МПа	2,5	5	10	15	20	25	30	32,5

Заданные точки:  $p = 2; 4; 7; 12; 18; 22; 28; 35$  МПа.

#### Лабораторная работа № 4

### МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ПОДРЕССОРИВАНИЯ МАШИН

**Цель работы:** получение навыков построения математических моделей систем поддрессоривания тягово-транспортных машин с линейными и нелинейными характеристиками и реализации их на ЭВМ с помощью численных методов.

#### Общие сведения

Одним из основных эксплуатационно-технических показателей транспортных средств является плавность хода. Она характеризуется способностью машины двигаться по неровностям микро- и макропрофиля пути на различных скоростях,



не вызывая при этом неприятных ощущений у водителя и пассажиров, а также снижая динамические нагрузки на остова транспортно-тяговых машин.

Любая мобильная машина представляет собой сложную систему, состоящую из поддрессоренных и неподдрессоренных масс, связанных различного рода упругими элементами. К поддрессоренной массе машины относятся все ее элементы, вес которых передается на упругие устройства подвески. К неподдрессоренным массам – элементы конструкции машины, вес которых не воспринимается упругими устройствами подвески.

Основное влияние на колебательную систему машины оказывают неровности микропрофиля пути, которые относятся к непрерывно действующим возмущениям и проявляют свое влияние в зависимости от скорости движения. Под воздействием внешних возмущений поддрессоренные и неподдрессоренные массы машины совершают вертикальные (подпрыгивание), угловые (галопирование, дифферент, крен) и горизонтальные (продольные – подергивание, рыскание) колебания.

Основным параметром, определяющим свойства подвески, является полный ход (полный прогиб), который состоит из хода отбоя и хода сжатия. Ход отбоя – перемещение оси колеса от нижнего ограничителя до положения, соответствующего статической нагрузке. Ход сжатия – перемещение оси колеса от статического положения до верхнего ограничителя.

При расчетах плавности хода основной задачей является выбор конструкции (гидравлическая, пневматическая, гидропневматическая, механическая) и параметров подвески, обеспечивающих необходимый уровень плавности хода при определенных характеристиках дорожных условий, виде агрегатирования и скорости движения. Наиболее часто при исследованиях плавности хода рассматривают колебания масс в вертикальных плоскостях (продольной и поперечной) как оказывающих основное влияние на плавность хода машины.

Работа подвески в математических моделях оценивается упругими характеристиками и демпфирующими свойствами. При исследованиях широко применяются как линейные, так и нелинейные модели подвесок. Нелинейность уп-

ругой характеристики подвески улучшает плавность хода и достигается применением комбинации нескольких упругих элементов одного или различных типов (ограничители хода, дополнительные рессоры и т.д.). Интенсивность рассеивания энергии колебаний в подвеске зависит от типа гидравлического амортизатора и сухого трения между листами рессор.

Модель подвески и шины с линейной характеристикой приведена на рис. 4.1 и включает параметры:  $M$  и  $m$  – подрессоренная и неподрессоренная массы;  $y$ ,  $z$  – вертикальные перемещения подрессоренной и неподрессоренной массы;  $c_n$ ,  $c_{ш}$  – жесткости подвески и шины соответственно;  $k_n$ ,  $k_{ш}$  – коэффициенты демпфирования амортизатора подвески и шины соответственно;  $\Delta_i$ ,  $\Delta'_i$  – деформации и скорости деформаций упругих и демпфирующих элементов подвески и шины. Возмущающие воздействия на систему оказывает микро- и макропрофиль дороги, задаваемый некоторой функцией времени  $h(t)$ . Характеристики изменения восстанавливающих  $F_{вi}$  и демпфирующих  $F_{дi}$  сил представлены соответствующими графиками (4.1 б, 4.1 в).

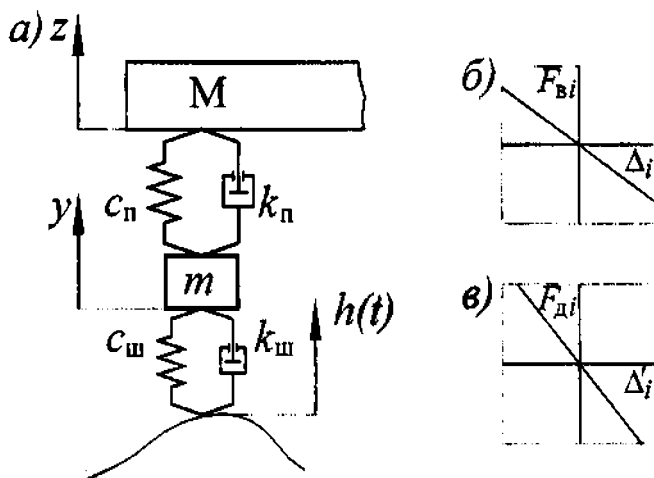


Рис. 4.1. Расчетная схема подвески с линейными характеристиками

Математическая модель подвески с ~~линейными~~ характеристиками (см. рис. 4.1) имеет вид

$$M \cdot z'' = -k_n \cdot (z' - y') - c_n \cdot (z - y);$$

$$m \cdot y'' = k_n \cdot (z' - y') + c_n \cdot (z - y) - k_w \cdot (y' - h') - c_w \cdot (y - h).$$

Закон изменения  $h(t)$  задается исследователем в зависимости от дорожного фона или требований нормативных документов.

При моделировании подвески с нелинейными характеристиками следует иметь в виду, что приведенные в данной математической модели коэффициенты упругости и демпфирования  $c_n$ ,  $c_w$ ,  $k_n$ ,  $k_w$  являются функционально зависимыми от соответствующих деформаций и их скоростей.

### *Задание*

1. Составить математическую модель подвески в соответствии с заданием.
2. Составить программу для анализа колебаний подрессоренной и неподдресоренной масс при заданном законе изменения возмущающего воздействия.
3. По результатам моделирования построить зависимости перемещений и скоростей подрессоренной и неподдресоренной масс при наезде объекта на заданную неровность.
4. Оформить отчет, содержащий математическую модель, распечатку программы, графики зависимостей согласно п. 3.

Варианты заданий

Таблица 4.1

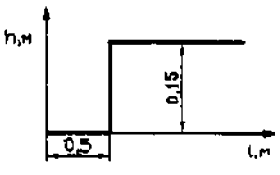
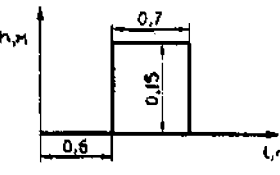
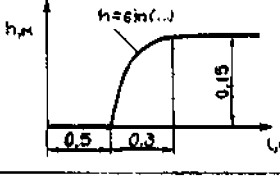
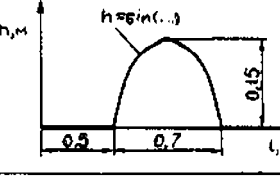
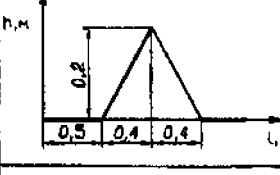
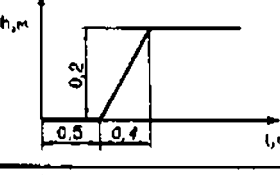
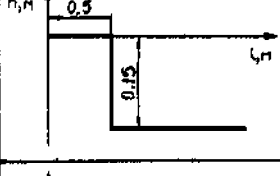
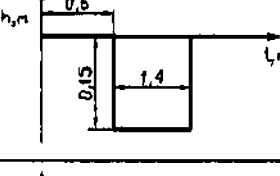
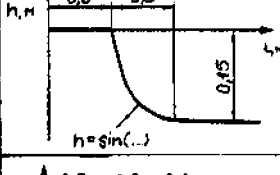
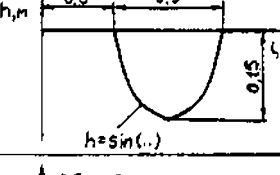
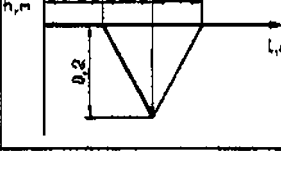
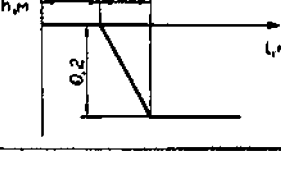
Исходные данные для расчета

№ вар.	Массы		Упругие характеристики		Демпфирующие характеристики	
	неподрес- соренная $m$ , т	поддрессо- ренная $M$ , т	подвески $c_n \cdot 10^6$ , Н/м	шины $c_{ш} \cdot 10^6$ , Н/м	подвески $k_n \cdot 10^3$ , Н·с/м	шин $k_{ш} \cdot 10^3$ , Н·с/м
1	0,5	3	0,2	4,0	20	1,0
2	0,5	3	0,2	1,0	70	1,0
3	0,5	3	0,2	3,5	30	1,5
4	0,8	4	0,4	1,5	60	1,5
5	0,8	4	0,4	3,0	40	2,0
6	0,8	4	0,4	1,0	50	2,0
7	1,0	5	0,6	2,5	25	2,5
8	1,0	5	0,6	2,0	65	2,5
9	1,0	5	0,6	1,5	35	3,0
10	1,2	6	0,8	3,5	55	3,0
11	1,2	6	0,8	2,0	45	3,5
12	1,2	6	0,8	1,0	30	3,5

Примечание: начало отсчета координат принять по нижней границе микроне-  
ровности дороги.

Таблица 4.2

## Характеристики микронеровностей

Номер варианта	Вид единичной неровности	Номер варианта	Вид единичной неровности
1		2	
3		4	
5		6	
7		8	
9		10	
11		12	

## Лабораторная работа №5

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПНЕВМОСИСТЕМ

**Цель работы:** получение навыков построения математических моделей пневматических систем транспортных и технологических машин и реализации их на ЭВМ с помощью численных методов.

#### *Общие сведения*

Реальные динамические системы являются системами с распределенными параметрами, т.е. характеризуются несколькими свойствами, которые к тому же пространственно распределены по всему объекту.

Например, для пневматических систем трубопроводы характеризуются объемом и сопротивлением, которое они оказывают движению рабочего агента, причем последнее свойство превалирует. Емкости также характеризуются объемом и сопротивлением, обусловленным, в частности, трением газа о стенки емкости. Однако наиболее существенной характеристикой для них является объем.

При решении задач на макроуровне систему стремятся привести к дискретному виду. Переход от реального объекта к его математической модели связан с идеализацией наиболее существенных для него свойств и связей, при этом менее существенными свойствами каждого элемента пренебрегают.

Используется следующий подход при идеализации пневмосистем. Менее объемные части системы полагаются вовсе лишенными объема и представляются в виде пневмосопротивлений, лишенных объема, а элементы систем, объем которых превалирует над сопротивлением движению в них рабочего агента,

принимаются за емкости, характеризующиеся только объемом. Зачастую объемы сопротивлений относят к емкостям, связываемым данными сопротивлениями.

Данный подход позволяет выявить указанные ниже типовые элементы, которые можно использовать для построения математических моделей гидропневматических систем.

### *Типовые звенья пневматических систем*

#### *1. Генераторы энергии*



$$\frac{dm}{dt} = Q \cdot \rho,$$

где  $Q$  – объемный расход воздуха;  $\rho$  – плотность воздуха.

Массовый расход воздуха, поступающего в выходную полость компрессора, можно представить как

$$\frac{dm}{dt} = \rho \cdot Q_k = \frac{p_k \cdot Q_k}{R \cdot T}, \quad (5.1)$$

где  $Q_k$  – объемная подача компрессора.

С другой стороны,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{V_k}{k \cdot R \cdot T} \cdot \frac{dp_k}{dt}, \quad (5.2)$$

где  $p_k$ ,  $V_k$  – давление и объем выходной полости компрессора.

Приравняв правые части уравнений (5.1) и (5.2), получаем дифференциальное уравнение для определения давления на выходе компрессора:

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{k \cdot p_k \cdot Q_k}{V_k}$$

Линеаризованная объемная подача компрессора в зависимости от противодействия на выходе определяется по формуле

$$Q_k = Q_{\max} - \frac{Q_{\max} - Q_{\min}}{p_{\max} - p_{\min}} \cdot (p_k - p_{\min}),$$

где  $Q_{\max}$  – максимальная подача при заданном минимальном противодействии на выходе компрессора (обычно  $Q_{\max}$  задается для  $p_{\min} = 1 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ );  $Q_{\min}$  – минимальная подача при заданном максимальном противодействии на выходе компрессора (обычно для автомобильных компрессоров  $Q_{\min}$  задается для  $p_{\max} = 7 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ ).

## 2. Сопротивления



$$\frac{dm}{dt} = \mu \cdot f \cdot v_{\text{сп}} \cdot \frac{p_0}{R \cdot T} \cdot \varphi(\sigma)$$



$$\sigma = \frac{p_1}{p_0}; \quad \varphi(\sigma) = A - \frac{1 - \sigma}{B - \sigma} = A \frac{p_0 - p_1}{B p_0 - p_1}$$





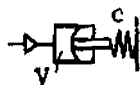
Линейный закон аналитически имеет следующий вид:

Открытие клапана	Закрытие клапана
$\mu f = 0$ , если $t \leq t_3$ ; $\mu f = \mu f_{\max} \cdot \frac{t - t_3}{t_n}$ , если $t_3 < t \leq t_3 + t_n$ ; $\mu f = \mu f_{\max}$ , если $t > t_3 + t_n$	$\mu f = \mu f_{\max}$ , если $t \leq t_3$ ; $\mu f = \mu f_{\max} \cdot (1 - \frac{t - t_3}{t_n})$ , если $t_3 < t \leq t_3 + t_n$ ; $\mu f = 0$ , если $t > t_3 + t_n$

### 3. Емкости



$$\frac{dm}{dt} = \frac{V}{k \cdot R \cdot T} \cdot \frac{dp}{dt},$$

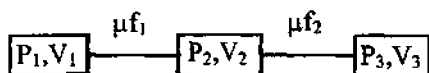


$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{k \cdot R \cdot T} \cdot \left( k \cdot p \cdot \frac{dV}{dt} + V \cdot \frac{dp}{dt} \right),$$

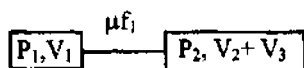
где  $k$  – коэффициент адиабаты воздуха;  $V$  – объем емкости.

С целью снижения затрат на моделирование осуществляют упрощение динамической системы, приводящее к уменьшению числа дифференциальных уравнений.

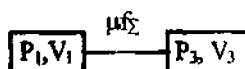
Для упрощения используются следующие подходы, которые рассмотрим на примере пневматической системы, расчетная схема которой включает три емкости:



1) Если имеет место существенная разница в пропускных способностях связей, например  $\mu f_1 \ll \mu f_2$ , то сопротивлением связи емкостей  $V_2$  и  $V_3$  пренебрегают и осуществляют объединение данных емкостей.



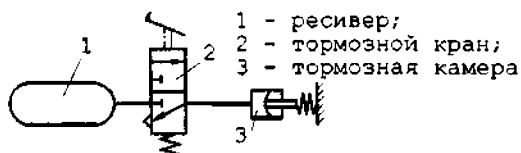
2) Если имеет место существенная разница в объемах емкостей, например  $V_2 \ll V_1$  и  $V_2 \ll V_3$ , то объемом емкости  $V_2$  пренебрегают и осуществляют объединение пневмосопротивлений:



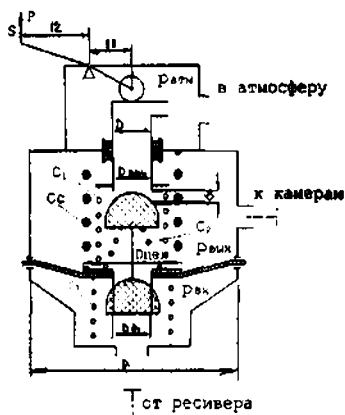
где  $\mu f_{\Sigma} = \mu f_1 \cdot \mu f_2 / (\mu f_1 + \mu f_2)$ .

Рассмотрим пример составления математической модели пневматической тормозной системы, включающей ресивер, тормозной кран и тормозные камеры.

Принципиальная схема тормозной системы имеет вид



Основным регулирующим органом тормозной системы является тормозной кран.

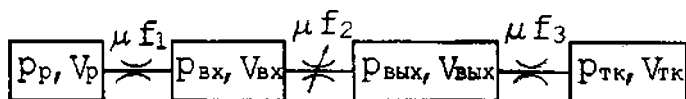


При воздействии на тормозную педаль происходит перемещение штока тормозного крана (по схеме вниз). При этом перекрывается связь выходной полости, связанной с тормозными камерами, с атмосферой, и она связывается через впускной клапан со впускной полостью тормозного крана, связанной с ресивером. При

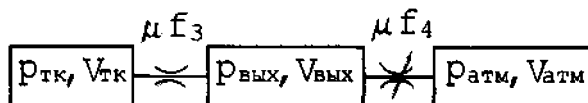
отпуске тормозной педали шток перемещается вверх, впускной клапан закрывается, разъединяя впускную и выпускную полости. Открывается атмосферный клапан, связывающий выпускную полость тормозного крана, а значит, и тормозные камеры с атмосферой.

Проведя анализ работы тормозной системы, можно выделить для моделирования две фазы, которые будут отличаться математическим описанием: фаза торможения и фаза оттормаживания.

I фаза – торможение



II фаза – оттормаживание



Для расчета пневмоцепей используется закон узлов, который формулируется так: алгебраическая сумма мгновенных массовых расходов в узле равна нулю, при этом массовый расход  $dm/dt$  положительный, если движение потока направлено к узлу, и отрицательный – от узла.

При определении узлов необходимо иметь в виду, что они отделяются друг от друга сопротивлениями. В емкостных узлах в отличие от безъемкостных к сумме расходов добавляется расход на емкость, подключенную к узлу.

Таким образом, математическое описание вышеприведенных фаз работы тормозной системы имеет вид:

I фаза – торможение:

$$\frac{dp_p}{dt} = -\frac{E \cdot \mu f_1}{V_p} \cdot p_p \cdot \frac{p_p - p_{вх}}{B \cdot p_p - p_{вх}};$$

$$\frac{dp_{вх}}{dt} = \frac{E \cdot \mu f_1}{V_{вх}} \cdot p_p \cdot \frac{p_p - p_{вх}}{B \cdot p_p - p_{вх}} - \frac{E \cdot \mu f_2}{V_{вх}} \cdot p_{вх} \cdot \frac{p_{вх} - p_{вых}}{B \cdot p_{вх} - p_{вых}};$$

$$\frac{dp_{\text{ВЫХ}}}{dt} = \frac{E \cdot \mu f_2}{V_{\text{ВЫХ}}} \cdot p_{\text{ВК}} \cdot \frac{p_{\text{ВК}} - p_{\text{ВЫХ}}}{B \cdot p_{\text{ВК}} - p_{\text{ВЫХ}}} - \frac{E \cdot \mu f_3}{V_{\text{ВЫХ}}} \cdot p_{\text{ВЫХ}} \cdot \frac{p_{\text{ВЫХ}} - p_{\text{ТК}}}{B \cdot p_{\text{ВЫХ}} - p_{\text{ТК}}};$$

$$\frac{dp_{\text{ТК}}}{dt} = \frac{E \cdot \mu f_3}{V_{\text{ТК}}} \cdot p_{\text{ВЫХ}} \cdot \frac{p_{\text{ВЫХ}} - p_{\text{ТК}}}{B \cdot p_{\text{ВЫХ}} - p_{\text{ТК}}}.$$

II фаза – отгормаживание:

$$\frac{dp_{\text{ТК}}}{dt} = -\frac{E \cdot \mu f_3}{V_{\text{ТК}}} \cdot p_{\text{ТК}} \cdot \frac{p_{\text{ТК}} - p_{\text{ВЫХ}}}{B \cdot p_{\text{ТК}} - p_{\text{ВЫХ}}};$$

$$\frac{dp_{\text{ВЫХ}}}{dt} = \frac{E \cdot \mu f_3}{V_{\text{ВЫХ}}} \cdot p_{\text{ТК}} \cdot \frac{p_{\text{ТК}} - p_{\text{ВЫХ}}}{B \cdot p_{\text{ТК}} - p_{\text{ВЫХ}}} - \frac{E \cdot \mu f_4}{V_{\text{ВЫХ}}} \cdot p_{\text{ВЫХ}} \cdot \frac{p_{\text{ВЫХ}} - p_{\text{ВТМ}}}{B \cdot p_{\text{ВЫХ}} - p_{\text{ВТМ}}};$$

$$\frac{dp_{\text{ВТМ}}}{dt} = \frac{E \cdot \mu f_4}{V_{\text{ВТМ}}} \cdot p_{\text{ВЫХ}} \cdot \frac{p_{\text{ВЫХ}} - p_{\text{ВТМ}}}{B \cdot p_{\text{ВЫХ}} - p_{\text{ВТМ}}}.$$

В данных уравнениях  $E = A \cdot k \cdot v_{\text{кр}} = 0,654 \cdot 1,4 \cdot 340 = 311,3 \text{ м/с}$ ;  $B = 1,13$ .

### Задание

1. Составить математическую модель пневматической системы в соответствии с вариантом задания.
2. Составить программу для анализа динамических процессов в моделируемой пневмосистеме при заданном законе изменения возмущающего воздействия.
3. По результатам моделирования построить зависимости давления в емкостях от времени.
4. Оформить отчет, содержащий математическую модель, распечатку программы, графики зависимостей согласно п. 3.

Варианты заданий

Таблица 5.1

Торможение

№ вар.	$V_p, \cdot 10^{-3} \text{ M}^3$	$V_{\text{вх}}, \cdot 10^{-3} \text{ M}^3$	$V_{\text{вых}}, \cdot 10^{-3} \text{ M}^3$	$V_{\text{тк}}^*, \cdot 10^{-3} \text{ M}^3$	$\mu f_1, \cdot 10^{-5} \text{ M}^2$	$\mu f_3, \cdot 10^{-5} \text{ M}^2$	Характеристика переменного пневмосопротивления		
							$\mu f_{2\text{max}}, \cdot 10^{-5} \text{ M}^2$	$t_{\text{н}}, \text{ с}$	Вид закона
1	20	0,10	0,12	0,5	0,25	0,28	0,20	0,1	Л
2	40	0,08	0,10	0,8	0,25	0,28	0,18	0,2	Л
3	60	0,12	0,08	1,0	0,25	0,28	0,22	0,3	Л
4	20	0,10	0,12	0,5	0,25	0,28	0,20	0,1	Э
5	40	0,08	0,10	0,8	0,25	0,28	0,18	0,2	Э
6	60	0,12	0,08	1,0	0,25	0,28	0,22	0,3	Э

Таблица 5.2

Оттормаживание

№ вар.	$V_{\text{вых}}, \cdot 10^{-3} \text{ M}^3$	$V_{\text{тк}}^*, \cdot 10^{-3} \text{ M}^3$	$V_{\text{гнл}}, \cdot 10^{-3} \text{ M}^3$	$\mu f_3, \cdot 10^{-5} \text{ M}^2$	Характеристика переменного пневмосопротивления		
					$\mu f_{4\text{max}}, \cdot 10^{-5} \text{ M}^2$	$t_{\text{н}}, \text{ с}$	Вид закона
7	0,12	0,5	1,0	0,28	0,20	0,1	Л
8	0,10	0,8	1,0	0,28	0,18	0,2	Л
9	0,08	1,0	1,0	0,28	0,22	0,3	Л
10	0,12	0,5	1,0	0,28	0,20	0,1	Э
11	0,10	0,8	1,0	0,28	0,18	0,2	Э
12	0,08	1,0	1,0	0,28	0,22	0,3	Э

В качестве начальных условий принять давление в ресивере 0,8 МПа. Давления в остальных емкостях определяются из условий функционирования тормозной системы.

**Примечание\*** – тормозная камера может моделироваться как емкость переменного объема; указанное значение принимать как начальный объем пневмокамеры при  $P_{\text{тк}} = 0$ . В этом случае преподавателем дополнительно задается силовая характеристика пневмокамеры.

Вид закона для моделирования переменного пневмосопротивления: Л – линейный; Э – экспоненциальный.

## Лабораторная работа №6

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОСИСТЕМ

**Цель работы:** получение навыков построения математических моделей гидравлических систем мобильных и технологических машин и реализации их на ЭВМ с помощью численных методов.

#### *Общие сведения*

Для составления математической модели гидропривода реальный привод (рис. 6.1) заменяется динамической схемой. Сложность динамической схемы и, следовательно, математической модели будет зависеть от принятых при ее разработке допущений: свойства жидкости, ее плотность, вязкость, количество



нерастворенного в ней воздуха не изменяются во время переходного процесса, жидкость является однородной, и ее кавитация и утечки исключаются, нестационарность потока жидкости не оказывает влияния на величину потерь давления, жидкость является несжимаемой, силы трения при перемещении гидродвигателей и потери в сливных трубопроводах пренебрежимо малы.

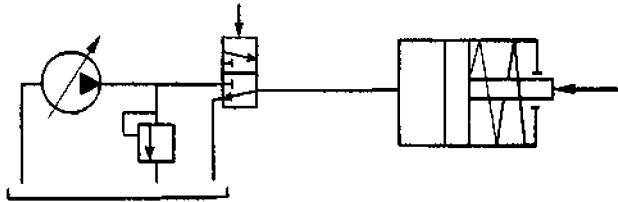


Рис. 6.1. Принципиальная схема гидропривода

В общем случае большинство гидроприводов различных систем (тормозная и гидронавесная системы, системы включения сцепления и управления трансмиссией и т.д.) можно представить достаточно унифицированными фрагментами динамических схем, приведенных на рис. 6.2, которые отличаются принятыми допущениями и, как следствие, адекватностью отражаемых процессов. При составлении их математического описания использовалась методика типовых функционально законченных элементов.

Схема на рис. 6.2,а содержит один элемент, обладающий инерционными свойствами (механический подвижный элемент 2). Остальные элементы безынерционные, поэтому математическое описание ветви можно составить, используя только одну независимую обобщенную координату  $x_2$ .

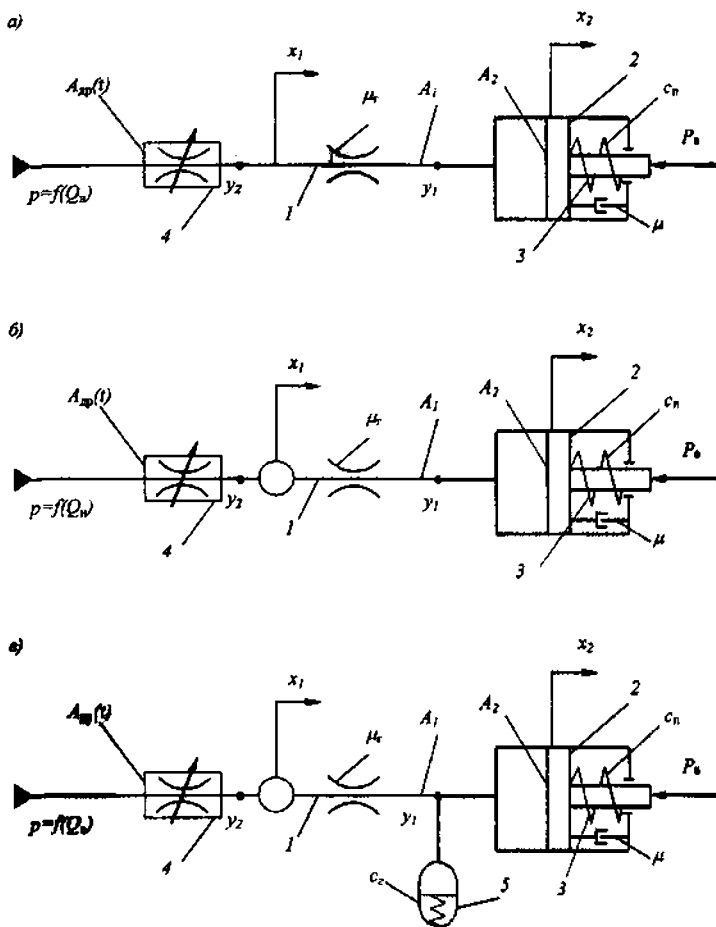


Рис. 6.2. Динамические схемы гидропривода

Запишем уравнения всех элементов привода:

для 1-го элемента (гидролиния):

$$(\mu_{гн} \cdot \dot{x}_1 + \mu_{гн} \cdot \dot{x}_1^2 \cdot \text{sign } \dot{x}_1) \cdot A_1 = A_1 \cdot (p_{y2} - p_{y1});$$

для 2-го элемента (поршень):

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + \mu \cdot \dot{x}_2 = A_2 p_{y1} - F_n - P_n;$$

для 3-го элемента (пружина):

$$c_n \cdot x_2 = F_n;$$

для 4-го элемента (дроссель):

$$\frac{A_1 \cdot \rho}{2} \left( \frac{A_1 \cdot \dot{x}_1}{\varepsilon \cdot A_{др}} \right)^2 \cdot \text{sign } \dot{x}_1 = A_1 \cdot (p - p_{y2}),$$

где  $p$  – давление насоса;  $p_{yi}$  – давления жидкости в узлах взаимодействия;  $F_n$  – усилие возвратной пружины;  $P_n$  – внешняя сила;  $A_1, A_2, A_{др}$  – площади трубопровода, поршня и дросселя соответственно;  $c_n$  – жесткость гидролинии и пружины соответственно;  $m_2$  – приведенная масса поршня;  $\mu_{гл}, \mu_{нл}$  – коэффициенты линейных и нелинейных гидравлических потерь (демпфирования) в приводе;  $\mu$  – коэффициент демпфирования цилиндра;  $\varepsilon$  – пропускная способность дросселя.

Используя топологическое уравнение  $\dot{x}_1 = (A_2/A_1) \cdot \dot{x}_2$  и решая совместно компонентные уравнения, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{A_2} \cdot (m_2 \cdot \ddot{x}_2 + \mu \cdot \dot{x}_2 + c_n \cdot x_2 + P_n) + \mu_{тн} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \dot{x}_2 + \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \cdot \left( \frac{\rho}{2} \cdot \left( \frac{A_1}{\varepsilon \cdot A_{сп}} \right)^2 + \mu_{тн} \right) \cdot \dot{x}_2^2 \cdot \text{sign } \dot{x}_2 = p.$$

Для фрагмента схемы на рис. 6.2,б аналогичные выкладки приводят к уравнению

$$\frac{1}{A_2} \left[ \left( m_1 \cdot \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 + m_2 \right) \cdot \ddot{x}_2 + \mu \cdot \dot{x}_2 + c_n \cdot x_2 + P_n \right] + \mu_{тн} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \dot{x}_2 + \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \cdot \left( \frac{\rho}{2} \cdot \left( \frac{A_1}{\varepsilon \cdot A_{сп}} \right)^2 + \mu_{тн} \right) \cdot \dot{x}_2^2 \cdot \text{sign } \dot{x}_2 = p,$$

где  $m_1$  – масса жидкости.

Таким образом, несмотря на то, что в рассматриваемой ветви два инерционных элемента, получено одно дифференциальное уравнение с одной неизвестной  $x_2$ , принятой в качестве независимой обобщенной координаты. Значение координаты  $x_1$  определяется из уравнения связи  $x_1 = (A_2/A_1) \cdot x_2$ .

Если функционально законченные элементы, обладающие инерционными свойствами, разделены между собой упругим элементом, отражающим сжимаемость жидкости, их координаты оказываются независимыми. Так, динамическая модель ветви гидромеханической системы, представленная на рис. 6.2,в, имеет две степени свободы, и для ее математического описания необходимо использовать две независимые координаты  $x_1$  и  $x_2$ . Уравнения компонентов ветви примут вид

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (\mu_{\text{тр}} \cdot \dot{x}_1 + \mu_{\text{тр}} \cdot \dot{x}_1^2 \cdot \text{sign } \dot{x}_1) \cdot A_1 = A_1 \cdot (p_{y2} - p_{y1});$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + \mu \cdot \dot{x}_2 = A_2 \cdot p_{y1} - F_{\text{н}} - P_{\text{в}};$$

$$c_{\text{н}} \cdot x_2 = F_{\text{н}};$$

$$\frac{A_1 \cdot \rho}{2} \cdot \left( \frac{A_1 \cdot \dot{x}_1}{\varepsilon \cdot A_{\text{уп}}} \right)^2 \cdot \text{sign } \dot{x}_1 = A_1 \cdot (p - p_{y2});$$

$$c_{\text{г}} \cdot (x_1 \cdot A_1 - x_2 \cdot A_2) = A_1 \cdot p_{y1},$$

где  $c_{\text{г}}$  – жесткость гидролиний.

Решая совместно полученные выражения, в результате получаем систему дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{A_1} \cdot m_1 \cdot \ddot{x}_1 + \mu_{\text{тр}} \cdot \dot{x}_1 + \left[ \mu_{\text{тр}} + \frac{\rho}{2} \cdot \left( \frac{A_1}{\varepsilon \cdot A_{\text{уп}}} \right)^2 \right] \cdot \dot{x}_1^2 \cdot \text{sign } \dot{x}_1 + \\ + c_{\text{г}} \cdot \left( x_1 - \frac{A_2}{A_1} \cdot x_2 \right) = p; \\ \frac{1}{A_2} \cdot (m_2 \cdot \ddot{x}_2 + \mu \cdot \dot{x}_2 + c_{\text{н}} \cdot x_2 + P_{\text{в}}) - c_{\text{г}} \cdot \left( x_1 - \frac{A_2}{A_1} \cdot x_2 \right) = 0. \end{array} \right.$$

### **Задание**

1. Составить математическую модель гидравлической системы в соответствии с вариантом задания, используя математическое описание работы насоса  $p = f(Q_n)$  (лабораторная работа № 1). Данную характеристику использовать в виде функции вида  $p(Q_n)$ , где в качестве аргумента  $Q_n$  (подача насоса) применить:

- для схемы на рис. 6.2,в – расход в гидродвигателе, т.е.  $Q_n = A_1 \cdot dx_1 / dt$ ;
- для схем на рис 6.2,а,б – расход в гидроцилиндре, т.е.  $Q_n = A_2 \cdot dx_2 / dt$ .

2. Преобразовать систему полученных дифференциальных уравнений для решения методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

3. Составить программу для решения системы с целью дальнейшего анализа динамических процессов в моделируемой гидросистеме при заданном законе изменения возмущающего воздействия. Использовать математическое описание законов  $A_{др}(t)$  лабораторной работы № 2.

4. По результатам моделирования построить зависимости давления в гидроцилиндре  $p_{y1}$ , перемещения  $x_2$  и скорости  $dx_2 / dt$  поршня от времени.

5. Оформить отчет, содержащий математическую модель, распечатку программы, графики зависимостей согласно п. 4.

### **Варианты заданий**

1. Характеристики насоса и вид входного воздействия соответствуют вариантам заданий лабораторных работ № 1 и № 2.

## 2. Характеристики гидропривода.

№ варианта	Динамическая схема, рис.		Диаметр, мм		Приведенная масса, кг		Коэффициент жесткости		Коэффициенты потерь			Плотность жидкости $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Внешняя нагрузка $F_v$ , кН	Характеристики дросселя	
			трубопровода	поршня											
	жидкости $m_1$	поршня $m_2$	$c_r \cdot 10^9$	$c_n \cdot 10^5$	$\mu_{гп} \cdot 10^4$	$\mu_{гн} \cdot 10^3$	$\mu \cdot 10^3$	Коэффициент расхода $\epsilon$	Максимальное сечение $A_{др}$ , мм <sup>2</sup>						
1	20	80	9	25	1,0	2,0	3,0	4,0	0,3	900	1	0,65	300		
2	20	80	8	30	1,1	1,9	3,5	4,5	0,6	900	2	0,65	300		
3	20	80	7	35	1,2	1,8	4,0	5,0	0,9	880	3	0,68	300		
4	20	100	6	40	1,3	1,7	4,5	5,5	1,2	880	4	0,68	300		
5	20	100	5	45	1,4	1,6	5,0	6,0	1,5	860	5	0,70	300		
6	20	100	6	50	1,5	1,5	5,5	6,5	1,8	860	6	0,70	300		
7	25	110	7	55	1,6	1,4	6,0	7,0	2,1	840	7	0,72	490		
8	25	110	8	60	1,7	1,3	6,5	7,5	2,4	840	8	0,72	490		
9	25	110	9	65	1,8	1,2	7,0	8,0	2,7	820	9	0,75	490		
10	25	125	7	70	1,9	1,1	7,5	8,5	3,0	820	10	0,75	490		
11	25	125	6	75	2,0	1,0	8,0	9,0	3,3	800	11	0,75	490		
12	20	125	10	50	1,0	1,0	7,0	9,0	3,0	900	5	0,70	300		

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ФРИКЦИОННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В системах приводов рабочих органов машин широкое применение находят фрикционные механизмы, предназначенные для соединения, торможения и блокирования отдельных звеньев. Динамические схемы различных звеньев, содержащих фрикционный элемент, приведены на рис. 7.1.

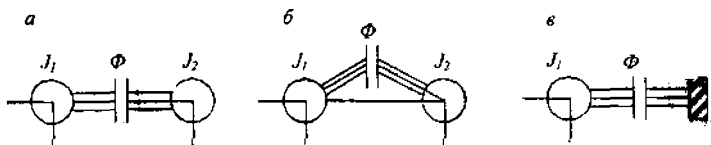


Рис. 7.1. Динамические схемы звеньев с фрикционными элементами:  
а – соединительный; б – блокированный; в – тормозной

Соединительный фрикционный элемент широко используется в трансмиссиях мобильных машин в качестве сцепления; блокировочный – в виде соответствующей муфты блокировки дифференциалов; тормозной – в качестве тормозных механизмов колес или мостов.

Работу фрикционного элемента и ее математическое описание рассмотрим на примере сцепления мобильной машины. Как известно, сцепление служит для передачи крутящего момента от двигателя к трансмиссии, кратковременного переключения передач, а также плавного разгона машины, снижающего нагрузки в узлах трансмиссии при резких изменениях режимов движения.



Динамическая схема, позволяющая моделировать работу трансмиссии в процессе включения муфты сцепления, представлена на рис. 7.2.

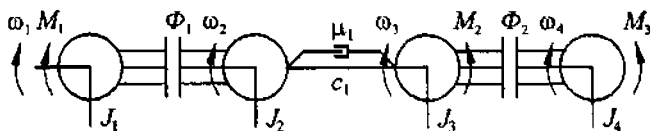


Рис. 7.2. Динамическая схема трансмиссии мобильной машины

На схеме:  $J_1$  – момент инерции двигателя и ведущих частей сцепления;  $J_2$  – приведенный момент инерции ведомых частей сцепления и деталей трансмиссии;  $J_3$  – приведенный момент инерции ходовой части;  $J_4$  – приведенный момент инерции машины в целом:  $J_4 = m \cdot r_k^2 / i_{тп}^2$ , где  $m$  – масса машины;  $r_k$  – радиус качения ведущего колеса;  $i_{тп}$  – передаточное отношение трансмиссии;  $M_1$  – момент двигателя;  $M_2$  – момент сопротивления качению,  $M_2 = mg \cdot f \cdot r_k$ , где  $f$  – коэффициент сопротивления качению;  $M_3$  – момент сопротивления воздуха и скатывающей силы (на подъеме);  $M_{\Phi 1}$  – момент трения сцепления трансмиссии,  $M_{\Phi 1} = f(t)$ ;  $M_{\Phi 2}$  – момент трения сцепления ведущих колес с дорогой;  $\mu_1, c_1$  – характеристики трансмиссии.

Процесс работы фрикциона разбивают на два основных этапа: процесс буксования муфты и замкнутое состояние.

В замкнутом состоянии элементов сцепления трансмиссии движение масс системы описывается уравнениями:

$$\begin{cases} (J_1 + J_2) \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_1 - c_1(\varphi_2 - \varphi_3) - \mu_1(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3); \\ J_3 \cdot \ddot{\varphi}_3 = -M_2 + c_1(\varphi_2 - \varphi_3) + \mu_1(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) - M_{\varphi_2}; \\ J_4 \cdot \ddot{\varphi}_4 = M_{\varphi_2} - M_3. \end{cases} \quad (7.1)$$

При буксующей муфте сцепления трансмиссии число степеней свободы системы возрастает на единицу, и система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_{\varphi_1}; \\ J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_{\varphi_1} - c_1(\varphi_2 - \varphi_3) - \mu_1(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3); \\ J_3 \cdot \ddot{\varphi}_3 = -M_2 + c_1(\varphi_2 - \varphi_3) + \mu_1(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) - M_{\varphi_2}; \\ J_4 \cdot \ddot{\varphi}_4 = M_{\varphi_2} - M_3. \end{cases} \quad (7.2)$$

Условие замыкания, а следовательно, переход от системы (7.2) к системе (7.1) определим из режима работы муфты сцепления трансмиссии (рис. 7.3), на котором отражено изменение во времени угловых скоростей ведущих  $\omega_1$  и ведомых  $\omega_2$  частей сцепления, а также момента  $M_{\varphi_1}$ , передаваемого сцеплением.

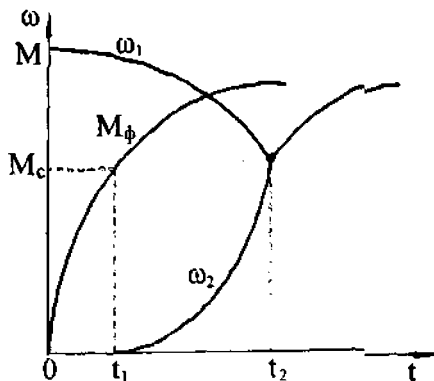


Рис. 7.3. Характеристики, отражающие процесс включения муфты сцепления трансмиссии

Период  $0 - t_1$  характеризуется нарастанием сжимающих фрикцион сил, благодаря чему момент фрикциона  $M_{\Phi 1}$  нарастает до некоторого значения  $M_{\Phi 0}$ , равного моменту сопротивления движению. В результате этого угловая скорость ведомых частей начинает расти (период  $t_1 - t_2$ ). Угловая скорость ведущих частей при этом так же, как и на участке  $0 - t_1$ , снижается. Окончание периода  $t_1 - t_2$  характеризуется замыканием ведущих и ведомых частей, т.е.  $\omega_1 = \omega_2$ , что является условием прекращения буксования.

Таким образом, условие перехода от системы (7.2) к системе (7.1) будет следующим:

$$\left| 1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon = 0,01$  – относительная погрешность.

При включении сцепления нагрузки в элементах трансмиссии значительно возрастают, что может привести к буксованию колес. Этот процесс моделируется работой фрикционного элемента  $\Phi_2$ . Значение момента этого элемента  $M_{\Phi 2}$  определяется:

$$M_{\Phi 2} = r_k \cdot N(\ddot{\varphi}_4) \cdot \varphi(\delta),$$

где  $r_k$  – радиус качения колеса;  $N(\ddot{\varphi}_4)$  – нагрузка на ведущий мост, изменяющаяся от ускорения машины;  $\varphi(\delta)$  – коэффициент сцепления, зависящий от покрытия дороги и буксования  $\delta$  ведущих колес.

С целью упрощения модели значения функции  $N(\ddot{\phi}_4)$  можно принять постоянными и равными статической нагрузке на ведущий мост:

$$N(\ddot{\phi}_4) = N_{\text{ст}} = \text{const}.$$

Буксование ведущих колес определяется:

$$\delta = 1 - \frac{v_d}{v_r} = 1 - \frac{\dot{\phi}_4}{\dot{\phi}_3}.$$

Значение коэффициента сцепления определяется по выражению

$$\varphi(\delta) = \varphi_{\text{max}} (1 - e^{-k\delta}),$$

где  $k = 13$  – показатель экспоненты.

Закон изменения момента трения в муфте сцепления  $M_{\phi 1} = f(t)$  (см. рис. 7.3) с достаточной степенью точности можно определить по экспоненциальной зависимости

$$M_{\phi 1} = M_{\phi 1 \text{max}} (1 - e^{-kt}),$$

где  $k$  – коэффициент быстрогодействия;  $k = 5/t_b$ ;  $t_b$  – время включения;

$M_{\phi 1 \text{max}}$  – максимально возможный момент, передаваемый муфтой;

$M_{\phi 1 \text{max}} = (2 \dots 3) M_{\text{дв.н}}$ ;  $M_{\text{дв.н}}$  – номинальный момент двигателя.

### Задание

1. Составить программу для моделирования механического привода с фрикционными элементами.
2. Построить графики изменения угловых скоростей инерционных звеньев  $J_1, J_2, J_3, J_4$  в функции от времени.
3. Оформить отчет, содержащий математическую модель, распечатку программы, результаты расчета и построенные по ним графики.

### Варианты заданий

№ вар.	Время включения сцепления $t_n, c$	Максимальное значение коэффициента сцепления $\varphi_{max}$	Момент инерции $J_4$ , приведенный к валу колеса, $кг \cdot м^2$	Статическая нагрузка на ведущий мост $N_{ст}, Н$	Масса машины, кг
1	0,5	0,83 (сухой асф.)	3596,6	99660	18000
2	1,0	0,83 (сухой асф.)	3596,6	99660	18000
3	1,5	0,83 (сухой асф.)	3596,6	99660	18000
4	0,5	0,64 (мокр. асф.)	3596,6	99660	18000
5	1,0	0,64 (мокр. асф.)	3596,6	99660	18000
6	1,5	0,64 (мокр. асф.)	3596,6	99660	18000
7	0,5	0,83 (сухой асф.)	5594,7	112710	28000
8	1,0	0,83 (сухой асф.)	5594,7	112710	28000
9	1,5	0,83 (сухой асф.)	5594,7	112710	28000
10	0,5	0,64 (мокр. асф.)	5594,7	112710	28000
11	1,0	0,64 (мокр. асф.)	5594,7	112710	28000
12	1,5	0,64 (мокр. асф.)	5594,7	112710	28000

Для всех вариантов заданий:

Момент на валу двигателя определяется по характеристике двигателя в зависимости от его угловой скорости и положения педали хода. В данной работе, для упрощения расчетов, значение момента двигателя может быть принято постоянным и равным  $M_1 = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}$  (данное значение должно быть приведено к валу колеса с учетом передаточного числа трансмиссии  $u = 11,03$ ). Моменты инерции и коэффициенты жесткости и демпфирования элементов трансмиссии (согласно рис. 7.2), приведенные к валу колеса, следует принять равными:  $J_1 = 166,8 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $J_2 = 7,3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $J_3 = 45,8 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $c_1 = 116646,0 \text{ Н/рад}$ ,  $\mu_1 = 122,0 \text{ Н}\cdot\text{с/рад}$ .

Момент сопротивления качению колес рассчитываем по выражению  $M_2 = mg \cdot f \cdot r_k$ , приняв значение коэффициента сопротивления качению  $f = 0,018$  и радиус колеса  $r_k = 0,447 \text{ м}$ .

Момент сопротивления воздуха и скатывающей силы от уклона дороги можно вычислить на основании массы машины и величины угла  $\alpha$  подъема дорожного полотна:  $M_3 = m \cdot g \cdot \sin \alpha$ , приняв значение  $\sin \alpha = 0,025$ . Силой сопротивления воздуха в сравнении с данной величиной можно пренебречь.

Начальные значения угловых скоростей инерционных масс следует принимать, ориентируясь на реальные условия разгона транспортного средства. Разгон, как правило, осуществляется с нулевой начальной скорости машины при номинальных оборотах двигателя, следовательно, угловые скорости  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и  $\omega_4$  можно принять равными нулю, а угловую скорость двигателя, приведенную к валу колеса,  $\omega_1 = 30 \text{ с}^{-1}$ .

*Примечание:* с целью обеспечения адекватного определения значения  $M_{\phi_2}$  в момент трогания с места и при скоростях движения, близких к нулю, в модели следует установить следующее ограничение: если  $\dot{\phi}_4 < 0,001$ , то  $M_{\phi_2} = c_1(\phi_2 - \phi_3)$ , то есть приравнять момент по сцеплению колес с дорогой с упругим моментом в трансмиссии.

## Лабораторная работа №8

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИЗЕЛЬНОГО ДВИГАТЕЛЯ

**Цель работы:** получить навыки моделирования характеристики дизельного двигателя.

#### *Общие сведения*

При моделировании работы различных систем мобильных машин, например, включения сцепления, переключения передач, разгона автомобиля и др., целесообразно момент двигателя задавать согласно внешней скоростной характеристике, представляющей собой графическую зависимость крутящего момента  $M_{дв}$  от угловой скорости его вала (рис. 8.1). Данная характеристика состоит из трех участков: перегрузочного (корректорного), на котором угловая скорость изменяется от минимально возможной  $\omega_0$  до  $\omega_m$ , соответствующей максимальному значению крутящего момента двигателя; рабочего — угловая скорость изменяется от  $\omega_m$  до  $\omega_n$ , соответствующего максимальному значе-

нию эффективной мощности; регуляторного, на котором частота вращения повышается от номинального значения  $\omega_n$  до значения  $\omega_{\max}$  при холостом ходе.

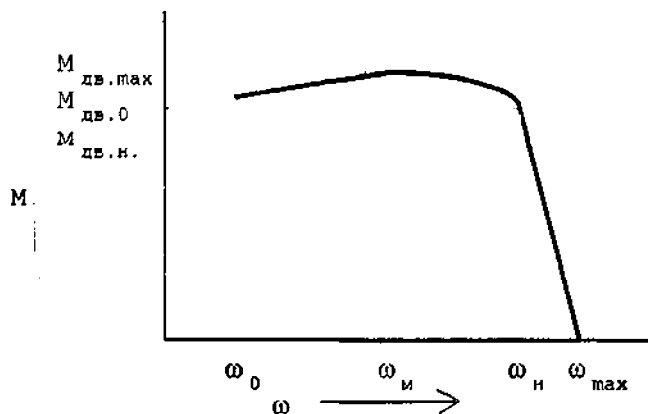


Рис. 8.1. Скоростная характеристика дизельного двигателя

Момент двигателя определяется в зависимости от угловой скорости коленчатого вала по трем различным аналитическим зависимостям:

*перегрузочная ветвь  $\omega_0 - \omega_и$*

$$M_{дв.} = M_{дв.н.} + (M_{дв. max} - M_{дв.н.}) \frac{\omega - \omega_0}{\omega_и - \omega_0};$$

*рабочая ветвь  $\omega_и - \omega_n$*

$$M_{дв.} = M_{дв. max} \cdot \left( 1 + \frac{\omega}{\omega_n} - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^{M_{дв. max} / M_{дв.н.}} \right);$$



регуляторная ветвь  $\omega_n - \omega_{\max}$

$$M_{\text{дв.}} = M_{\text{дв.н.}} \cdot \frac{\omega_{\text{max}} - \omega}{\omega_{\text{max}} - \omega_n}$$

### Задание

1. Составить программу для расчета скоростной характеристики дизельного двигателя.
2. Задав шаг изменения угловой скорости, просчитать математическую модель двигателя с заданными характеристиками.
3. По полученным результатам построить характеристику двигателя.
4. Оформить отчет, содержащий математическую модель, распечатку программы, график характеристики двигателя.

### Варианты заданий

№ п/п	Модель двигателя	$\omega_0$ , с <sup>-1</sup>	$\omega_m$ , с <sup>-1</sup>	$\omega_n$ , с <sup>-1</sup>	$\omega_{\text{max}}$ , с <sup>-1</sup>	$M_{\text{дв.0}}$ , Н·м	$M_{\text{дв.макс}}$ , Н·м	$M_{\text{дв.н}}$ , Н·м
1	Д-240	94	146	230	240	243	274	239
2	А-41Г	83	130	183	199	480	529	461
3	Д-160	62	89	130	141	1000	1029	938
4	СМД-17	104	146	199	214	422	470	384
5	СМД-62	73	162	219	235	612	637	584
6	Д-120	62	157	230	248	113	123	102
7	8ДВТ	62	133	193	209	1410	1529	1382
8	СМД-80	68	151	219	243	931	960	885
9	Д-245.1	94	146	230	240	348	381	323
10	Д-260.7	85	146	219	230	824	961	816

## Литература

1. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем. – Мн., 1997.
2. Атаманов Ю.Е., Богдан Н.В. Методическое пособие по курсу "Математические модели узлов и агрегатов трактора". В 3 ч. Ч. 1. – Мн.: БПИ, 1992.

## Содержание

Лабораторная работа № 1	
МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АКСИАЛЬНО-ПОРШНЕВОГО НАСОСА С РЕГУЛЯТОРОМ МОЩНОСТИ.....	3
Лабораторная работа № 2	
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКОНОВ ИЗМЕНЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ.....	7
Лабораторная работа № 3	
ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ТАБЛИЧНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ	11
Лабораторная работа № 4	
МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ПОДРЕССОРИВАНИЯ МАШИН.....	16
Лабораторная работа № 5	
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПНЕВМОСИСТЕМ.....	22
Лабораторная работа № 6	
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОСИСТЕМ.....	32
Лабораторная работа № 7	
МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ФРИКЦИОННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ.....	40
Лабораторная работа № 8	
МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИЗЕЛЬНОГО ДВИГАТЕЛЯ.	47
Литература.....	50

**Учебное издание**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Лабораторные работы (практикум)  
для студентов специальности

**"Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин"**

Составители: САФОНОВ Андрей Иванович  
ПОВАРЕХО Александр Сергеевич  
НОВИЦКИЙ Сергей Николаевич

---

Редактор Т.Н. Микулик

Подписано в печать 30.09.2004.

Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 2.

Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

---

Усл. печ л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,4. Тираж 100. Заказ 453.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.

Лицензия № 02330/0056957 от 01.04.2004.

220013, Минск, проспект Ф. Скорины, 65.