

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра "Гидропневмоавтоматика и гидропневмопривод"

**А.И. Сафонов**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ,  
МЕХАНИЗМОВ И СИСТЕМ**

Учебное пособие

Рекомендовано редакционно-издательским советом для студентов  
Белорусского национального технического университета

Минск 2005

УДК [629.1.02/.03.001.537+621.9.06-83.001.573](075.8)  
ББК 34.447  
С 21

**Рецензенты:**  
**А.Э. Павлович, С.В. Харитончик**

Сафонов А.И.  
С 21 Математическое моделирование технических устройств, механизмов  
и систем: Учебное пособие / А.И. Сафонов. – Мн.: БНТУ, 2005. – 112 с.

ISBN 985-479-155-6.

В издании освещены вопросы теории моделирования, изложены методы построения математических моделей рабочих процессов, узлов, механизмов и систем транспортных и технологических машин, а также рассмотрены вопросы анализа математических моделей и состояния технических систем.

УДК [629.1.02/.03.001.537+621.9.06-83.001.573](075.8)  
ББК 34.447

ISBN 985-479-155-6

© Сафонов А.И., 2005

## **Введение**

Современные условия создания конкурентоспособной технической продукции характеризуются сокращением сроков ее создания при повышении качества и, как следствие, сокращением сроков и качества выполнения проектно-конструкторских работ. Их выполнение, в свою очередь, напрямую обеспечивается применением новых технологий проектирования, базирующихся на современном аппарате математического моделирования.

Математическое моделирование процессов, происходящих в узлах, агрегатах и системах мобильных и технологических машин, используется в процессе автоматизированного проектирования относительно давно. Однако в настоящее время, в связи с широкой доступностью мощных ЭВМ, можно существенно повысить адекватность и универсальность разрабатываемых математических моделей благодаря более детальному описанию процессов и, как следствие, быстро и качественно определить столь необходимые в общем процессе проектирования структуру и внутренние параметры разрабатываемой системы.

Актуальность задач разработки и использования математических моделей в процессах исследования, совершенствования и проектирования мобильных и технологических машин привела к необходимости создания данного специального курса, целью которого является изучение методов построения и анализа математических моделей машин, технических устройств, механизмов и систем.

## 1. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

### 1.1. Основные понятия процесса моделирования и проектирования технических объектов

Основополагающими понятиями данного курса являются "*объект моделирования*", "*модель*", "*моделирование*".

*Объект моделирования* – выделенная по определенным правилам часть окружающего мира с целью его изучения.

*Моделирование* – процесс замещения объекта моделирования некоторой его моделью и проведения исследований на полученной модели.

*Модель* – физический или абстрактный образ моделируемого объекта, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать физические свойства и характеристики объекта.

Различают *физическое* (предметное) и *математическое* (абстрактное) моделирование. В ходе *физического моделирования* изготавливается макетный или опытный образец технического объекта и проводятся его испытания по определению выходных параметров, характеристик и степени надежности. Основной недостаток такого метода – большие временные и материальные затраты.

*Математическое моделирование* – универсальный метод абстрактного моделирования, позволяющий посредством математических символов и зависимостей описать работу; определить выходные характеристики, показатели эффективности и качества, оптимальную структуру и параметры объекта моделирования. Математическое моделирование, в отличие от физического, характеризуется отсутствием материалоемкости, малыми объемами испытаний и доводочных работ.

Таким образом, *математическая модель* – это совокупность математических объектов и отношений между ними, адекватно отображающая физические свойства создаваемого объекта, а процесс формирования математической модели и использования ее для анализа и синтеза называется *математическим моделированием*. В качестве совокупности математических объектов и отношений, т.е. в качестве математической модели, могут выступать системы дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных), системы алгебраических уравнений, простые алгебраические выражения, матрицы и др.

Следует отметить, что математическое моделирование является одним из основных компонентов системы проектирования в целом и неразрывно связано с технологией этого процесса, которая, в свою очередь, предусматривает выполнение взаимосвязанных процедур *анализа* и *синтеза*.

*Анализ* технического объекта – изучение выходных характеристик объекта с заданными конструктивными (внутренними) параметрами и структурой.

*Синтез* технического объекта – определение конструктивных (внутренних) параметров и структуры объекта, обеспечивающих заданные выходные характеристики и алгоритм функционирования системы.

## 1.2. Структура математической модели

Структура математической модели определяется *компонентами, параметрами, функциональными зависимостями, ограничениями и целевой функцией*.

*Компонентами* математической модели являются различного рода уравнения, описывающие отдельные структурные элементы, составляющие объект моделирования. Реализация математической модели сложного объекта на базе

компонентов, описывающих типовые элементы данного объекта, позволяет осуществлять модульный принцип построения математической модели, что снижает затраты на разработку и повышает точность решения.

Количественное выражение свойств и элементов систем и внешней среды, в которой должен функционировать объект, осуществляется с помощью величин, называемых *параметрами*, которые представляются вектором *выходных*, вектором *внутренних*, вектором *внешних* и вектором *входных* параметров.

*Внутренние параметры* описывают конструктивные параметры объекта моделирования. *Внешние* описывают среду, окружающую объект. *Входные* характеризуют воздействие на объект моделирования, *выходные* – состояние объекта, определяемое входными, внешними и внутренними параметрами.

Примером выходных параметров мобильной машины в целом являются скорость движения, касательная сила тяги, тяговый КПД и др.; внутренних параметров – мощность двигателя, число передач, передаточные числа трансмиссии, КПД трансмиссии, конструктивные параметры машины и т.д.; внешних параметров – уклон дороги, состояние дороги (коэффициент сцепления), сопротивление движению (агрегатирование, профили дороги) и т.д.

*Функциональные зависимости* отражают взаимосвязь между компонентами модели и описывают изменения параметров объекта моделирования в целом в соответствии с алгоритмом функционирования.

*Ограничения* представляют собой задаваемые пределы изменения параметров, которые вводятся либо разработчиком математической модели, либо определяются объектом моделирования в силу присущих ему свойств.

*Целевая функция* отображает цель моделирования. Достижение экстремума данной функции позволяет определить оптимальную структуру и внутренние параметры объекта при заданных ограничениях.

### 1.3. Классификация математических моделей и требования, предъявляемые к ним

В зависимости от *степени абстрагирования* при описании физических свойств технической системы различают три иерархических уровня: *метауровень*, *макроуровень*, *микроуровень*.

*Метауровень* соответствует начальным стадиям проектирования (научно-технический поиск и прогнозирование; разработка концепции и технического решения). Для построения математических моделей метауровня используют методы теории графов, теории автоматического управления, теории массового обслуживания и т.д.

На *макроуровне* объект моделирования рассматривают как динамическую систему с сосредоточенными параметрами. Математические модели макроуровня представляют собой систему однородных дифференциальных уравнений и используются при определении параметров технического объекта и его элементов.

На *микроуровне* объект представляется как сплошная среда с распределенными параметрами. Для описания работы таких объектов используют дифференциальные уравнения в частных производных. На микроуровне проектируют неделимые по функциональному признаку элементы системы (рамы, панели, корпусные детали и др.).

По *форме представления* моделей различают инвариантную, алгоритмическую и графическую.

В *инвариантной* форме математическая модель представляется системой уравнений (дифференциальных, алгебраических) без учета метода решения этих уравнений.

В *алгоритмической* форме соотношения модели связаны с выбранным численным методом решения и записаны в виде алгоритма.

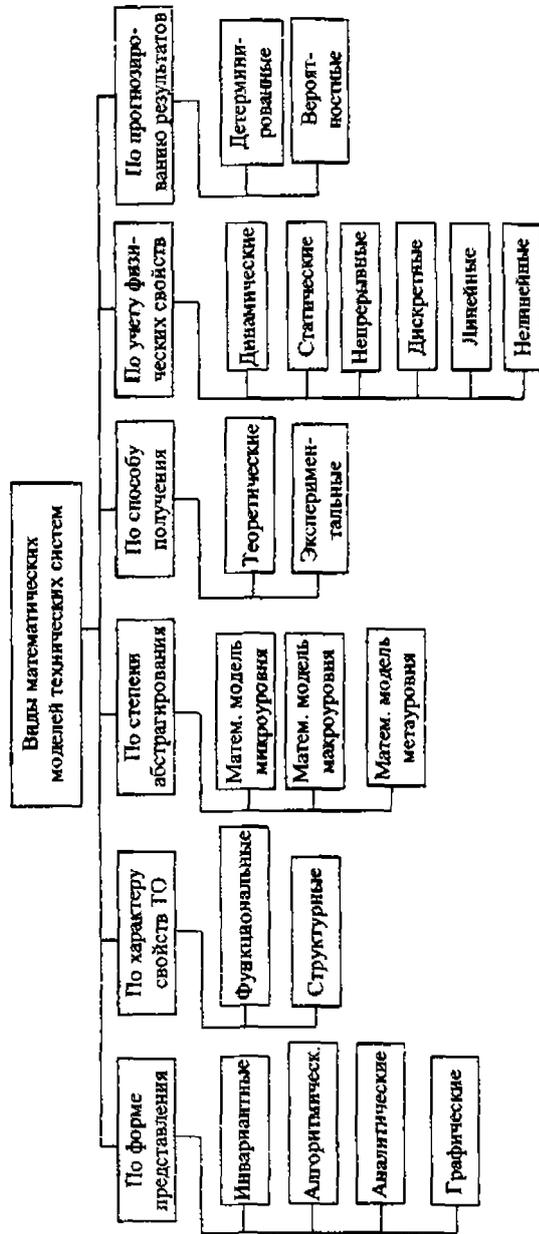


Рис. 1.1. Классификация математических моделей

*Аналитическая* форма математической модели представляет собой явные зависимости искомых переменных от заданных величин (зависимости выходных параметров объекта от внутренних и внешних). Такие модели получают на основе физических законов или в результате прямого интегрирования исходных дифференциальных уравнений (используя табличные интегралы).

*Графическая* модель представляется в виде эквивалентных динамических схем, графов, диаграмм и т.п.

По характеру отображаемых свойств объекта математические модели делятся на функциональные и структурные.

*Структурные* математические модели отображают только структуру объектов и используются в решении задач структурного синтеза. Структурные модели имеют форму таблиц, матриц и графов и широко применяются на метауровне при выборе технического решения.

*Функциональные* модели описывают процессы функционирования технических объектов и представляют собой систему уравнений. Они учитывают структурные и функциональные свойства объекта и позволяют решать задачи как параметрического, так и структурного синтеза. Их используют на всех иерархических уровнях, стадиях и этапах проектирования. На метауровне функциональные модели позволяют решать задачи прогнозирования, на макроуровне – выбора структуры и оптимизации внутренних параметров технического объекта, на микроуровне – оптимизации параметров неделимых элементов и несущих конструкций.

По способу получения функциональные математические модели делятся на теоретические и экспериментальные.

*Теоретические* модели получают на основе описания физических процессов функционирования объекта, а *экспериментальные* – на основе изучения "поведения" объекта во внешней среде без учета физических процессов.

При построении теоретических моделей используют *физический* (применение законов физики, Ньютона, Гука и др.) и *формальный* (применение общематематических принципов, уравнений Лагранжа 2-го рода и др.) подходы.

Экспериментальные модели всегда формальны и не учитывают физические свойства, а лишь устанавливают связь между отдельными параметрами, которыми можно варьировать.

Экспериментальные модели адекватно описывают исследуемые процессы лишь в ограниченной области факторного пространства, в которой осуществлялось изменение параметров. Поэтому в отличие от физических, экспериментальные модели носят частный характер.

Функциональные математические модели могут быть *линейными* и *нелинейными*.

*Линейные модели* содержат только линейные функции фазовых переменных и их производных. Математические модели большинства реальных технических объектов включают нелинейные функции фазовых переменных или их производных и называются *нелинейными*.

Если при моделировании учитываются инерционные свойства объекта и (или) изменение во времени параметров объекта, то модель называют *динамической*. В противном случае модель *статическая*. Динамическая модель в общем случае представлена системой дифференциальных уравнений, а статическая – системой алгебраических уравнений.

Достаточно часто воздействия внешней среды и внутренние параметры системы носят случайный характер. В этих случаях необходимо применение *вероятностных* математических моделей, позволяющих оценивать происходящие в объекте процессы вероятностными и статистическими характеристиками: вероятностью событий, корреляционной функцией, математическим ожиданием, дисперсией и др. Такие модели достаточно сложны и применяются на заключительных этапах проектирования. В отличие от них *детерминированные*

математические модели характеризуются взаимно однозначным соответствием между внешним воздействием на систему и ее реакцией на это воздействие.

Следует отметить, что ко всем математическим моделям предъявляются *требования* адекватности, экономичности и универсальности.

Модель считается *адекватной*, если отражает исследуемые свойства с приемлемой точностью, которая, в свою очередь, оценивается степенью совпадения значений выходных параметров, полученных в процессе моделирования, с истинными их значениями. Так, относительная погрешность  $i$ -го выходного параметра определяется выражением

$$\varepsilon_i = \frac{\bar{y}_i - y_i}{y_i},$$

где  $\bar{y}_i$  – значение  $i$ -го выходного параметра, полученное в процессе моделирования;  $y_i$  – значение того же параметра, полученное при испытаниях технического объекта.

Погрешность по всей совокупности  $m$  учитываемых выходных параметров можно оценить выражением

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2}.$$

*Экономичность* математической модели характеризуется затратами времени и вычислительных ресурсов при ее разработке и реализации. Иногда в качестве показателей экономичности используют размерность системы уравнений, количество используемых параметров и т.п.

*Универсальность* математической модели характеризует полноту отображения свойств реального объекта. Как правило, математическая модель отражает лишь некоторые из них.

Требования, предъявляемые к математической модели, являются противоречивыми, что затрудняет их одновременное выполнение, поэтому в каждом конкретном случае целесообразно рассматривать особенности решаемой задачи.

#### **1.4. Технология математического моделирования**

Как правило, математическое моделирование включает два основных процесса:

- 1) *разработка* модели;
- 2) *реализация* модели, т.е. проведение машинного эксперимента с использованием разработанной модели с целью получения интересных результатов.

В рамках этих двух процессов следует выделить следующие этапы, определяющие деятельность исследователя при моделировании.

**Определение целей и задач моделирования.** Правильная постановка задачи, как правило, так же важна, как и ее решение. Недостаточное внимание к этому этапу приводит к непроизводительным затратам на последующих стадиях моделирования.

На этом этапе разработчик должен определить: для каких целей разрабатывается модель; где и как модель будет использоваться; кем она будет использоваться (уровень знаний, квалификация пользователя); на какие вопросы должна давать ответы.

**Определение объекта моделирования,** предполагающее:

- 1) определение принципов функционирования объекта моделирования, что позволяет выделить группу сходных по функциональным признакам объектов, для моделирования которых может быть использована одна модель;

2) определение границ объекта моделирования, т.е. того, что относится к объекту моделирования и что относится к окружающей среде; определение некоторого набора элементов и взаимосвязей, подлежащих моделированию.

**Вербальное (словесное) описание объекта моделирования**, включающее:

- 1) описание объекта моделирования;
- 2) описание внешней среды, взаимодействующей с объектом моделирования;
- 3) описание алгоритма функционирования объекта моделирования;
- 4) описание взаимодействия объекта моделирования с внешней средой.

**Разработка концептуальной модели.** Для достаточно простых моделей этапы разработки вербального и концептуального описаний во многом совпадают. Для более сложных объектов целесообразно:

- 1) уточнить общий замысел разработки;
- 2) общую задачу моделирования разбить на подзадачи и установить приоритет их решений;
- 3) выполнить декомпозицию объекта моделирования в соответствии с целями моделирования и структурой объекта моделирования;
- 4) описать компоненты, параметры, функциональные зависимости, ограничения, целевые функции.

**Формальное описание объекта моделирования** в терминах конкретной области знаний (теоретическая механика, термодинамика и т.д.). При этом необходимо определить области знаний, используемые для описания объекта моделирования; законы, постулаты, понятия этих областей знаний; характер этих законов (теоретические или экспериментальные); параметры, используемые в описании; пределы изменения параметров, критические значения, источники получения точности; наличие связей между параметрами.

***Преобразование формального описания в математическую модель.***

При этом, как уже отмечалось, могут использоваться два подхода: формальный и физический.

***Алгоритмизация и программная реализация модели на ЭВМ.***

***Испытание математической модели*** включает следующие этапы.

1. ***Задание исходной информации для испытания модели***, которая зависит от типа модели. В случае если объект моделирования существует, исследователь может провести необходимые испытания и получить необходимую информацию. При моделировании проектируемых систем, когда нет возможности получить данные экспериментальным путем, используются результаты испытаний прототипов. В случае отсутствия прототипов используются экспертные оценки параметров модели.

2. ***Верификация исходной модели***, заключающаяся в доказательстве соответствия алгоритма функционирования модели ее замыслу, как правило, в процессе ее комплексной отладки. Заказчик разрабатывает для этого собственные тесты.

3. ***Проверка адекватности математической модели***. В случае неудовлетворительной адекватности осуществляется калибровка математической модели, цель которой состоит в уменьшении неточностей в описании, обусловленных ошибочной или недостаточно подробной формулировкой компонентов модели. В ходе калибровки производятся глобальные (добавление программ описания процессов, компонентов модели и т.д.) и локальные изменения (изменение компонента). При этом изменения начинаются с более простых и заканчиваются более сложными.

***Исследование свойств математической модели***, проводимое после достижения требуемого уровня адекватности математической модели и предполагающее оценку:

- 1) *границ моделирования*, определяющих допустимые изменения параметров, при которых модель сохраняет свои свойства;
- 2) *погрешностей моделирования*, оцениваемых во всей области моделирования, т.к. их значения в различных точках могут существенно отличаться;
- 3) *времени решения и вычислительных ресурсов*;
- 4) *устойчивости математической модели*, под которой понимается степень ее нечувствительности к изменению входных величин;
- 5) *чувствительности математической модели*, т.е. диапазона изменения отклика при изменении каждой входной величины.

*Упрощение модели.* Первоначальные упрощения модели выполняются на этапах составления концептуальной модели и формального описания. Однако нередко после испытаний математической модели возникает необходимость ее упрощения с целью повышения экономичности. Для упрощения пользуются одним из нижеперечисленных приемов.

*Понижение пространственной размерности задачи*, существенно упрощающее не только разработку, но и эксплуатацию модели. При снижении пространственной размерности задачи на единицу объем вычислений сокращается на 2...3 порядка.

*Предположение процесса независимым от времени*, т.е. переход от динамической модели к статической. Этот подход можно использовать и для процессов, зависящих от времени. При этом динамическое состояние объекта моделируется как совокупность его статических состояний в различные периоды времени.

*Введение более жестких предположений и ограничений*, касающихся структуры модели, отдельных ее элементов, характера взаимодействий между ними, окружающей среды и ее взаимодействия с объектом моделирования.

*Исключение некоторых переменных или объединение их.*

*Замена нелинейных зависимостей линейными.*

*Замена переменных константами.*

Во всех случаях необходимо выполнить анализ влияния вводимых изменений на адекватность модели.

## **2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА МАКРОУРОВНЕ**

### **2.1. Объекты проектирования и построение динамических систем технических объектов на макроуровне**

В отличие от микроуровня, где объектами проектирования являются детали машин (валы, корпуса и т.д.), на *макроуровне* объект имеет сложную неоднородную структуру, состоящую из этих элементов. При этом реальная динамическая система с *распределенными* параметрами, с целью упрощения математического описания, представляется совокупностью материальных объектов, выделенных из сплошной среды, т.е. дискретными (разделенными) элементами с усредненными постоянными параметрами. Такую систему называют *системой с сосредоточенными параметрами*.

Дискретный элемент может обладать инерционными, упругими и диссипативными свойствами.

Математическая модель динамической системы с сосредоточенными параметрами является системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида  $dV/dt = F(V, t)$ .

Таким образом, объектом проектирования на макроуровне являются системы, состоящие из взаимодействующих дискретных элементов.

Построение математической модели технического объекта осуществляется на основе его динамической схемы. *Динамическая схема* – это абстрактное

графическое отображение основных физических свойств технического объекта и его связи с внешней средой. При составлении динамической схемы (выделения дискретных элементов из сплошной среды) могут использоваться метод *типовых элементов* и метод *сосредоточенных масс*.

*Метод типовых элементов* основан на выделении типовых элементов технического объекта, предназначенных для выполнения определенных функций (золотниковый клапан, дроссель, насос и др.). Имея библиотеку математических моделей типовых элементов и зная структуру технического объекта, можно составить полную математическую модель.

*Метод сосредоточенных масс* применим для технических объектов, у которых масса распределена в пространстве неравномерно. (Пример. Трансмиссия автомобиля с сосредоточенными массами (маховик, шестерня, колеса), соединенных деталями, имеющими малые радиальные размеры и массу и обладающими существенными упругими свойствами (валы, муфты, карданные передачи и др.)).

При построении динамических схем методом сосредоточенных масс выделяют:

1) *инерционные элементы* – сосредоточенные массы, обладающие инерционными свойствами и способные накапливать кинетическую энергию;

2) *упругие, диссипативные, фрикционные, трансформаторные* элементы, посредством которых осуществляется взаимодействие сосредоточенных масс.

*Упругие элементы* отображают упругие свойства системы и обладают способностью накапливать потенциальную энергию.

*Диссипативные элементы* отображают свойства рассеивания энергии конструктивными элементами объекта, обусловленные силами внутреннего трения и пропорциональные скорости перемещения взаимодействующих сосредоточенных масс (или сосредоточенных масс относительно внешней среды, например, движение жидкости в трубопроводе).

*Фрикционные элементы* отображают физические свойства фрикционных механизмов технических объектов.

*Трансформаторные элементы* отражают безынерционные преобразования параметров потока энергии, осуществляемые техническими устройствами, называемыми трансформаторами.

Состояние сосредоточенных масс характеризуется *фазовыми координатами*, позволяющими определить их положение либо скорости в многомерном фазовом пространстве. В механике фазовые координаты выбирают в качестве *обобщенных*. Их количество равно числу степеней свободы системы. Направления фазовых координат выбирают исходя из положительного направления потока передаваемой через систему энергии. При этом учитываются *ограничения*, наложенные объектами внешней среды на свободу перемещения сосредоточенных масс, которые называются *связями*.

Различают связи: геометрические (позиционные) и кинематические; удерживающие и недерживающие (виртуальные); стационарные и нестационарные; голономные и неголономные. Математическому описанию ограничений соответствуют уравнения связей, каждое из которых лишает материальную систему одной степени свободы. При этом соответственно уменьшается количество независимых (обобщенных) координат системы. Если выбирают фазовые координаты, отображающие только перемещение сосредоточенных масс, то необходимость в составлении уравнений связи отпадает.

Для обозначения элементов в динамических схемах используются кинематические и принципиальные схемы.

Примером динамической схемы является рис. 2.1.

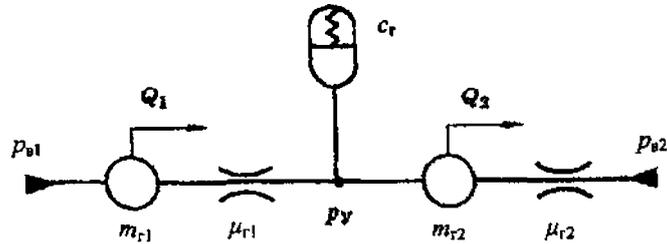


Рис. 2.1. Динамическая схема участка гидропривода:  $m_{r_i}$  – сосредоточенные массы (инерционные элементы);  $\mu_{r_i}$  – диссипативные элементы;  $c_r$  – упругий элемент;  $Q_i$  – фазовые координаты

## 2.2. Компонентные и топологические уравнения систем

Состояние простого (обладающего одним физическим свойством) элемента характеризуется одной фазовой координатой и одной фазовой переменной. Тогда физическое свойство элемента, представляющее собой взаимосвязь между ними, называется *компонентным уравнением*.

Для получения полной математической модели технической системы необходимо объединить все компонентные уравнения элементов в общую систему уравнений. Объединение осуществляется на основе физических законов, выражающих условия равновесия и непрерывности фазовых координат и переменных. Уравнения этих законов называют *топологическими уравнениями*. Они описывают характер взаимодействия между простыми элементами, устанавливая соотношение между фазовыми координатами и между фазовыми переменными.

Условия равновесия записываются для фазовых координат  $I_k$ :

$$\sum_k I_k = 0,$$

– а условия непрерывности для фазовых переменных  $U_i$  :

$$\sum_i U_i = 0.$$

Математическая модель технического объекта, составленная на основе компонентных и топологических уравнений, представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Исполнительными функциями в них являются фазовые координаты  $I_k$  и переменные  $U_i$ , а независимой переменной – время  $t$ .

Таким образом, поскольку для *механических систем* поступательное движение характеризуется линейной скоростью  $v$  и силой  $F$ , а вращательное – угловой скоростью  $\omega$  и моментом  $M$ , они принимаются в качестве фазовых координат и переменных:

- фазовая координата –  $v$ , м/с, или  $\omega$ , рад/с;
- фазовая переменная –  $F$ , Н, или  $M$ , Н·м.

*Параметрами*, характеризующими элементы механической системы, являются: – для инерционного элемента – масса  $m$ , кг, или момент инерции  $J$ , кг·м<sup>2</sup>;

- для упругого элемента – коэффициент жесткости  $c$ , Н/м или Н·м/рад;
- для диссипативного элемента – коэффициент демпфирования  $\mu$ , Н·с/м,

Н·м·с/рад.

Тогда *компонентными уравнениями* механической системы будут:

- для инерционного элемента (на основе 2-го закона Ньютона):

для поступательно движущегося

$$F_n = m \frac{dV_n}{dt};$$

и для вращательно движущегося

$$M_n = J \cdot \frac{d\omega_n}{dt};$$

– для упругого элемента по закону Гука

$$F_y = c\Delta,$$

где  $\Delta$  – деформация упругого элемента:  $\Delta = x_1 - x_2$ ;

$x_1, x_2$  – перемещение узлов или сосредоточенных масс;

– для диссипативного элемента (закон Ньютона для вязкого трения):

– для поступательно движущегося

$$F_d = \mu \cdot v_d;$$

– для вращательно движущегося

$$F_d = \mu \cdot \omega_d.$$

Так как упругие и диссипативные элементы соединяют между собой сосредоточенные массы, то перемещение и скорость этих элементов  $x_y, \varphi_y, v_d, \omega_d$  можно представить следующим образом:

$$x_{yj} = x_i - x_{i+1},$$

$$v_{dk} = v_i - v_{i+1},$$

где  $x_i, x_{i+1}, v_i, v_{i+1}$  – перемещения и скорости  $i$ -й и  $i+1$  сосредоточенных масс, соединенных  $j$ -м упругим и  $k$ -м диссипативным элементами.

### *Топологические уравнения механической системы*

Первое является уравнением равновесия и выражает принцип *равновесия* Даламбера: геометрическая сумма всех сил, приложенных к телу, включая силу инерции, равна нулю:

– для поступательно движущегося

$$\sum_i F_i = 0;$$

– для вращательно движущегося

$$\sum_i M_i = 0.$$

Количество этих топологических уравнений равно числу степеней свободы системы.

Второе топологическое уравнение определяет условие непрерывности фазовых координат и выражает принцип сложения скоростей: геометрическая сумма абсолютной, относительной и переменной скоростей равна нулю:

$$\sum_k v_k = 0; \quad \sum_k \omega_k = 0.$$

Для гидравлической системы фазовой координатой и фазовой переменной соответственно являются: расход  $Q$ , м<sup>3</sup>/с, и давление  $p$ , Па, тогда компонентное уравнение, отображающее инерционные и диссипативные свойства жидкости (на основании уравнения Навье-Стокса):

$$p = p_u + p_n = m_r \frac{dQ}{dt} + \mu_r Q,$$

где 1-е слагаемое – потери давления на разгон жидкости; 2-е – потери давления на преодоление трения;  $m_r$  – коэффициент инерционного элемента,  $m_r = \rho \cdot l / A$ , кг/м<sup>4</sup>;  $A$  – площадь трубопровода;  $\mu_r$  – коэффициент диссипативного элемента  $\mu_r = 2\xi \cdot l / A$ , Н·с/м<sup>5</sup>;  $\xi$  – коэффициент линеаризации вязкого трения жидкости.

Компонентное уравнение упругого элемента (уравнение Гука)

$$p_y = c_r \int Q_y dt,$$

где  $Q_y$  – изменение расхода, обусловленное сжимаемостью жидкости,  $Q_y = Q_1 - Q_2$ ;  $Q_1, Q_2$  – расходы в узлах;  $c_r$  – коэффициент жесткости, Н/м<sup>5</sup>,  $c_r = E / (A \cdot l)$ ;  $E$  – модуль объемной упругости жидкости, Н/м<sup>2</sup>.

Фазовые переменные  $p_n, p_y, p_d$  характеризуют взаимодействие выделенных дискретных элементов и определяют потери давления источника на преодоление сил инерции, деформацию жидкости и преодоление сил внутреннего трения жидкости.

Коэффициенты  $m_r, c_r, \mu_r$  являются параметрами соответствующих элементов гидравлической системы.

Топологические уравнения гидравлической системы имеют вид

$$\sum_i p_i = 0; \quad \sum_k Q_k = 0,$$

первое выражает условие равновесия давлений, действующих на сосредоточенные массы, а второе – условие непрерывности потоков жидкости.

### 2.3. Метод сосредоточенных масс в формировании математической модели

Для формирования полной математической модели технического объекта на основе компонентных и топологических уравнений наиболее широкое применение получил *метод сосредоточенных масс*.

*Основные положения метода:*

1) в качестве обобщенных координат системы используются фазовые координаты сосредоточенных масс, т.е.  $x_j$  или  $\dot{x}_j$ ;

2) исходным топологическим уравнением системы является уравнение равновесия фазовых переменных (сил, давления).

Тогда полная математическая модель будет представлять систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dv_j}{dt} = (\bar{F}_{\text{вн}j} + \bar{F}_{y_j} + \bar{F}_{\text{д}j})/m_j,$$

где  $F_{\text{вн}j}$  – внешние силы, приложенные к  $j$ -й сосредоточенной массе или с учетом компонентных уравнений (см. предыдущий раздел):

$$\frac{dv_j}{dt} = [\bar{F}_{\text{вн}} + c_i(x_{j+1} - x_j) + \mu_k(\dot{x}_{j+1} - \dot{x}_j)]/m_j.$$

Пример:

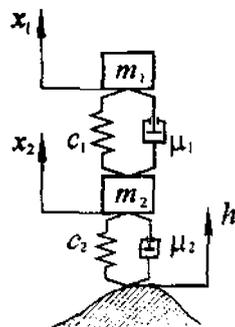


Рис. 2.2. Динамическая схема системы поддресоривания

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt} = \left[ \frac{F_{y1}}{c_1(x_2 - x_1) + \mu_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)} \right] \frac{1}{m_1};$$

$$\frac{d\dot{x}_2}{dt} = \left[ -\frac{F_{y1}}{c_1(x_2 - x_1) + \mu_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)} + \frac{F_{y2}}{c_2(h - x_2) - \mu_2(\dot{h} - \dot{x}_2)} - \frac{F_{d1}}{\mu_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)} + \frac{F_{d2}}{\mu_2(\dot{h} - \dot{x}_2)} \right] \frac{1}{m_2},$$

где  $h$  – функция микропрофиля поверхности дороги.

Если параметры элементов  $m$ ,  $c$ ,  $\mu$  постоянны, то математическая модель линейна. Однако в реальных системах они зависят от фазовых координат и модель оказывается нелинейной. Но это не препятствует построению математической модели узловым методом, так как нелинейности вводятся после ее формирования.

#### 2.4. Уравнения Лагранжа II рода в формировании математической модели технических объектов

Уравнения Лагранжа II рода применяют при моделировании более сложных систем, если они рассматриваются как системы с сосредоточенными параметрами.

Данные уравнения для систем с голономными связями имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы;  $q_i$  – обобщенная координата;  $\dot{q}_i$  – обобщенная скорость;  $Q_i$  – обобщенная сила;  $n$  – число степеней свободы системы.

В качестве обобщенных координат выбирают независимые между собой переменные, которые позволяют полностью определить состояние исследуемой системы. Обычно в качестве обобщенных координат принимают величины, производные по времени от которых представляют собой фазовые координаты. Например, для механических систем обобщенными координатами выбирают линейные и угловые перемещения. В этом случае обобщенные силы сохраняют свой физический смысл и представляют собой силы и вращающие моменты.

Каждой обобщенной координате  $q_i$  соответствует своя обобщенная сила  $Q_i$ . Работу всех обобщенных сил на возможных перемещениях системы (виртуальную работу) можно вычислить по формуле

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \delta W_i = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta q_i, \quad (2.2)$$

где  $\delta q_i$  – вариация  $i$ -й обобщенной координаты;  $\delta W_i$  – работа  $i$ -й обобщенной силы на возможном перемещении.

Из формулы (2.2) следует, что обобщенные силы представляют собой коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении для виртуальной работы.

Так как вариации обобщенных координат  $\delta q_i$  независимы, то, вычисляя работу всех приложенных к системе сил на одном из возможных перемещений  $\delta q_i$ , а все остальные вариации в формуле (2.2) полагая равными нулю, легко определить каждую обобщенную силу  $Q_i$  в отдельности.

При стационарной структуре системы кинетическая энергия представляется одной квадратичной формулой:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \dot{q}_i^2,$$

где  $m_i$  – параметры инерционных элементов системы.

Обобщенные силы можно разделить на потенциальные  $Q_n$ , диссипативные  $Q_n$  и произвольные  $Q^*$ .

Силы называются потенциальными, если существует положительно определенная функция обобщенных координат, удовлетворяющая следующим равенствам:

$$Q_{ni} = -\partial \Pi / \partial q_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$  – потенциальная энергия системы.

Потенциальная энергия может быть представлена квадратичной формой:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n c_j \cdot q_j^2,$$

где  $c_i$  – параметры упругих элементов системы.

Обобщенные силы называются диссипативными, если существует положительно определенная функция обобщенных скоростей, удовлетворяющая следующим равенствам:

$$Q_{di} = -\partial\Phi/\partial\dot{q}_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\Phi$  – диссипативная функция Рэлея:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mu_k \cdot \dot{q}_k^2,$$

где  $\mu_k$  – элемент матрицы параметров диссипативных элементов системы.

Обобщенная сила  $Q_i$ , соответствующая  $i$ -й обобщенной координате, равна алгебраической сумме произвольной  $Q_i^*$ , потенциальной  $Q_{pi}$  и диссипативной  $Q_{di}$  составляющих:

$$Q_i = Q_i^* - (\partial\Pi/\partial q_i) - (\partial\Phi/\partial\dot{q}_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Подставим значение  $Q_i$  в уравнение (2.1), опуская индекс (\*) при составляющей  $Q_i^*$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.3)$$

Обобщенная сила  $Q_i$ , фигурирующая в этом уравнении, определяется с учетом работы источников всех внешних воздействий, а также некоторых внут-

ренных источников, которые не могут быть отнесены к упругим и диссипативным элементам (например, силы кулоновского трения в механических системах).

Математическая модель, получаемая на основе уравнений Лагранжа второго рода, представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\bar{F}(\ddot{q}, \dot{q}, \bar{q}, t) = 0.$$

В эту систему входит  $n$  дифференциальных уравнений второго порядка, где  $n$  – число степеней свободы системы.

Процедура получения математической модели на основе уравнений Лагранжа второго рода включает следующие операции:

1) составление динамической модели технического объекта (при этом выделяются инерционные, упругие, диссипативные, трансформаторные и фрикционные элементы, определяются источники внешних воздействий);

2) определение возможных перемещений элементов системы с учетом наложенных позиционных голономных связей и введение обобщенных координат  $q_i$ , количество которых должно соответствовать числу степеней свободы системы  $n$ ;

3) составление выражений для вычисления кинетической  $T$  и потенциальной  $\Pi$  энергий и диссипативной функции Рэля  $\Phi$ ;

4) составление выражения для вычисления виртуальной работы  $\delta W$  источников внешних воздействий, определение обобщенных сил  $Q_i$ ;

5) выполнение операций дифференцирования, предусмотренных уравнением (2.3), и формирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

При плоском движении твердого тела кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий в переносном (поступательном) и относительном (вращательном) движениях:

$$T = 0,5mv^2 + 0,5J\omega^2,$$

где  $m$  – масса твердого тела;  $v$  – скорость центра масс тела;  $J$  – момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через центр масс;  $\omega$  – угловая скорость вращения тела относительно этой оси.

Кинетическая энергия сосредоточенной массы жидкости в дискретном элементе – участке трубопровода

$$T = 0,5m_r Q^2,$$

где  $m_r$  – коэффициент массы, кг/м<sup>4</sup>;  $Q$  – расход, м<sup>3</sup>/с.

Потенциальная энергия упругого элемента

$$P = 0,5c\Delta^2,$$

где  $c$  – параметр упругого элемента (характеризует его способность накапливать потенциальную энергию);  $\Delta = q_1 - q_2$ ;  $q_1, q_2$  – обобщенные координаты инерционных элементов, соединяемых данным упругим элементом.

Для механической системы  $\Delta$  представляет собой величину деформации упругого элемента (линейную или угловую), для гидравлической – изменение объема жидкости упругого элемента.

Диссипативная функция определяется по формуле

$$\Phi = 0,5\mu \dot{\Delta}^2,$$

где  $\mu$  – параметр диссипативного элемента;  $\dot{\Delta} = \dot{q}_1 - \dot{q}_2$ ;  $q_1, q_2$  – обобщенные скорости (фазовые координаты), характеризующие состояние инерционных элементов, соединяемых данным диссипативным элементом.

Для механической системы  $\dot{\Delta}$  представляет собой относительную скорость движения взаимодействующих сосредоточенных масс, для гидравлической – скорость движения сосредоточенной массы жидкости в дискретном участке трубопровода.

Рассмотрим пример построения математической модели объекта на основе уравнений Лагранжа второго рода. Объектом моделирования является трансмиссия мобильной машины, динамическая схема которой представлена на рис.2.3, где  $J_1$  – момент инерции двигателя;  $J_2$  – момент инерции КПП и дифференциала;  $J_3$  – момент инерции колеса;  $M_1, M_2$  – соответственно момент двигателя и момент сил, развиваемых в контакте шин с дорогой.

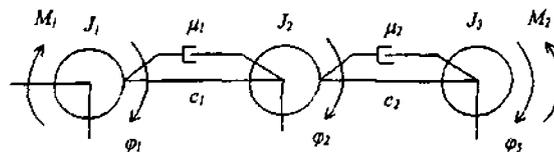


Рис. 2.3. Динамическая схема трансмиссии мобильной машины

В качестве обобщенных координат выбираются углы поворота сосредоточенных масс  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ .

Тогда кинетическая энергия системы

$$T = \sum_{i=1}^3 T_i = 0,5 \sum_{i=1}^3 J_i \dot{\varphi}_i^2 = 0,5(J_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + J_3 \cdot \dot{\varphi}_3^2).$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \sum_{j=1}^2 \Pi_j = 0,5 \sum_{j=1}^2 c_j \Delta_j^2 = 0,5(c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + c_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_3)^2).$$

Диссипативная функция системы

$$\Phi = 0,5(\mu_1 \cdot (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2 + \mu_2 \cdot (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3)^2).$$

Виртуальная работа источников внешних воздействий, выраженная через вариации обобщенных координат:

$$\delta W = M_1 \delta \varphi_1 + M_2 \delta \varphi_3.$$

Используем выражения  $T$ ,  $\Pi$ ,  $\Phi$  и на основе уравнений Лагранжа получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = M_1 - c_1(\varphi_1 - \varphi_2) - \mu_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2);$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = c_1(\varphi_1 - \varphi_2) - c_2(\varphi_2 - \varphi_3) + \mu_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \mu_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3);$$

$$J_3 \ddot{\varphi}_3 = -M_2 + c_2(\varphi_2 - \varphi_3) + \mu_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3).$$

## 2.5. Метод типовых элементов в формировании математической модели

Во многих отраслях техники объекты состоят из некоторого конечного набора типовых конструктивных элементов. Каждый такой элемент имеет определенное функциональное назначение и выполняется в виде автономного объекта, завершено в конструктивном отношении. При наличии таких элементов они могут быть положены в основу структурирования объектов при их математическом описании. Структуру объекта составляют типовые элементы, имеющие соответствующие математические описания, которые используются для получения полной математической модели технического объекта.

Этот метод широко применяется при проектировании гидроприводов, однако его можно использовать и в других областях техники.

В табл. 2.1 приведен набор структурных элементов. Он обладает высокой гибкостью и позволяет составить динамическую модель любого гидропривода.

Математические модели типовых элементов можно получить различными методами, однако наиболее удобно воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода.

Воздействия на элемент, как внутренние, так и внешние, не принимаются во внимание при построении его (элемента) математической модели. Взаимодействия элементов будут учтены топологическими уравнениями, а для внешних воздействий составляются отдельные стандартные математические описания.

В табл. 2.1 указаны физические свойства, которыми наделены типовые элементы, и даны математические описания этих свойств. В формулах приняты следующие обозначения параметров и фазовых переменных:  $m$ ,  $J$ ,  $J_n$ ,  $J_m$  – масса и моменты инерции соответствующих дискретных инерционных элементов;  $A$  – площадь поперечного сечения гидромагистрالی;  $\mu_{лн}$ ,  $\mu_{нн}$  – коэффициенты соответственно линейных и нелинейных потерь в гидрוליнии;  $\mu$  – коэффициент

вязкого трения;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\varepsilon$  – коэффициент расхода дросселя;  $A_{др}$  – площадь сечения дросселя;  $\zeta$  – коэффициент местного сопротивления;  $a_w, b_w$  – коэффициенты гидромеханических потерь;  $c_r$  – коэффициент жесткости гидравлического упругого элемента;  $c_n$  – коэффициент жесткости пружины;  $x$  – координата сосредоточенной массы, взаимодействующей с упругим элементом;  $W$  – количество масс, взаимодействующих с данным упругим элементом;  $\dot{x}, \ddot{x}$  – скорость и ускорение сосредоточенной массы;  $i$  – передаточное отношение дифференциала.

Значения  $\mu_{rn}$  и  $\mu_{rn}$  определяются по формулам

$$\mu_{rn} = 25,2 \cdot \rho \cdot v \cdot l / A; \quad \mu_{rn} = 0,443 \cdot \lambda_t \cdot \rho \cdot l / \sqrt{A} + 0,5 \cdot \zeta \cdot \rho.$$

Площадь сечения переменного дросселя может зависеть от факторов управления  $A_{др} = f(x_k, p_k, t)$ , где  $x_k$  – координата регулирующего органа дросселя;  $p_k$  – управляющее давление;  $t$  – время.

Для построения математической модели системы необходимо использовать компонентные уравнения типовых элементов из табл. 2.1 и топологические уравнения, выражающие условия равновесия и непрерывности фазовых переменных. *Топологические уравнения составляются для узлов взаимодействия элементов.* Как следует из табл. 2.1, каждый элемент представляет собой двухполюсник и содержит два узла, отмеченные цифрами 1 и 2. Исключение составляет лишь гидравлический безынерционный упругий элемент, отображающий упругие свойства газожидкостной смеси и трубопроводов, который содержит только один узел.

В гидромеханической системе взаимодействие типовых элементов осуществляется посредством рабочей жидкости, поэтому в качестве топологического уравнения используется уравнение баланса расходов жидкости в узлах

взаимодействия элементов, выражающее условие непрерывности фазовых координат:

$$\left( \sum_{i=1}^w Q_i \right)_j = 0, \quad j = \overline{1, w},$$

где  $Q_i$  – расход жидкости  $i$ -го элемента, взаимодействующего с  $j$ -м узлом.

Давление жидкости в каждом узле взаимодействия одинаково для всех типовых элементов, примыкающих к данному узлу.

Расход  $Q_i$  можно выразить через скорость потока жидкости  $\dot{x}_i$  и площадь его поперечного сечения  $A_i$ :  $Q_i = A_i \dot{x}_i$ . Тогда уравнение непрерывного потока для  $j$ -го узла принимает вид

$$\sum_{i=1}^w A_i \dot{x}_i = 0. \quad (2.4)$$

Топологическое уравнение (2.4) эквивалентно уравнению позиционной связи

$$\sum_{i=1}^w A_i x_i = 0. \quad (2.5)$$

Наличие позиционных связей системы приводит к избыточности координат и переопределенности системы уравнений, поэтому избыточность желательно исключить следующим образом.

Так как число степеней свободы меньше общего числа координат на количество связей, то в соответствии с уравнением (2.5) при наличии одной связи можно записать:

$$\sum_{i=1}^s A_i x_i + A_j x_j = 0,$$

где  $s$  – число степеней свободы рассматриваемой подсистемы;  $x_i$  – независимая обобщенная координата;  $x_j$  – зависимая обобщенная координата.

№	Элементы	Обозначения элементов	Физические свойства элементов и их мат. описание		
			инерционные	диссипативные	Упругие
1	2	3	4	5	6
1	Инерционный механический		$J\dot{\varphi}, m\ddot{x}$		
2	Упругий механический				$c_n(x_1 - x_2)$ $c_o(\varphi_1 - \varphi_2)$
3	Диссипативный механический			$\mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ $\mu(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$	
4	Разветвленный механический (дифференциал)			$\mu \cdot (\varphi_1 - i\varphi_2 - (1-i)\varphi_3)$	$c \cdot (\varphi_1 - i\varphi_2 - (1-i)\varphi_3)$
5	Участок гидромагистрали		$m\ddot{x}$	$(\mu_{tr}\dot{x} + \mu_{tr}x^2 \text{sign}\dot{x})/A$	
6	Безынерционный участок гидромагистрали			$(\mu_{tr}\dot{x} + \mu_{tr}x^2 \text{sign}\dot{x})/A$	
7	Безынерционный упругий гидравлический				$c_r \sum_{j=1}^n (\pm A_j x_j)$

Окончание табл. 2.1

1	2	3	4	5	6
8	Гидроцилиндр		$m\ddot{x}$	$\mu\dot{x}$	
9	Дроссель гидравлический			$\frac{A\rho}{2} \left( \frac{A\dot{x}}{\varepsilon \cdot A_{dp}} \right)^2 \text{sign}\dot{x}$	
10	Обратный клапан гидравлический			$0,5\zeta \cdot \rho \cdot A\dot{x}^2 \text{sign}\dot{x}$	
11	Насос, мотор гидравлический		$J_n\dot{\varphi}_n$ $J_m\dot{\varphi}_m$	$a_o\dot{\varphi}_n$ $b_o\dot{\varphi}_m$	

Тогда для определения зависимой координаты  $x$ , получим выражение

$$x_j = \sum_{i=1}^s (A_i \cdot x_i) / A_j. \quad (2.6)$$

Далее, имея математическое описание стандартных элементов, составим дифференциальные уравнения их движения вида

$$F_n + F_a + F_y = F_o,$$

где  $F_o$  – сила внешнего воздействия.

Следует отметить, что в качестве обобщенных координат  $x_i$  можно использовать координаты только типовых элементов, которые обладают инерционными свойствами (см. табл. 2.1). Математическое описание остальных элементов должно осуществляться с использованием обобщенных координат инерционных элементов.

На рис. 2.4 дана динамическая модель фрагмента гидропривода. Узлы взаимодействия входящих в них элементов обозначены  $y_i$ .

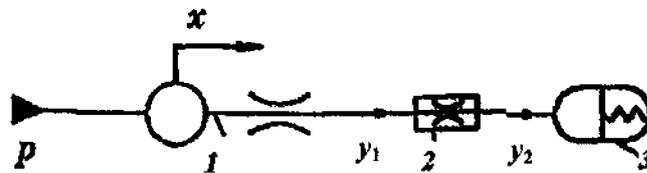


Рис. 2.4. Динамическая модель гидропривода, состоящая из взаимодействующих типовых элементов

Фрагмент включает три типовых элемента: участок гидромагистрали 1, постоянный дроссель 2 и безынерционный упругий элемент 3.

Поскольку система имеет только один инерционный элемент, то состояние всех элементов ветви определяется координатой этой сосредоточенной массы жидкости в участке трубопровода  $x$ . Так как в данной системе используется одна независимая координата  $x$ , то отсутствует необходимость исключения зависимой координаты  $x_j$  в уравнении (2.6). Используем координату  $x$  и площадь поперечного сечения участка трубопровода  $A$  в моделях всех элементов ветви:

$$m \cdot \ddot{x} + (\mu_{rn} \cdot \dot{x} + \mu_{rn} \cdot \dot{x}^2 \cdot \text{sign } \dot{x}) \cdot A = A \cdot (p - p_{y1}),$$

$$\frac{A \cdot \rho}{2} \cdot \left( \frac{A \cdot \dot{x}}{\varepsilon \cdot A_{dp}} \right)^2 \cdot \text{sign } \dot{x} = A \cdot (p_{y1} - p_{y2}),$$

$$A \cdot c_r \cdot x = A \cdot p_{y2}.$$

Решая совместно уравнения этих элементов, получаем дифференциальное уравнение рассматриваемой ветви:

$$\frac{1}{A} m \ddot{x} + \mu_{rn} \dot{x} + \left[ \mu_{rn} \dot{x}^2 + \frac{\rho}{2} \cdot \left( \frac{A \cdot \dot{x}}{\varepsilon \cdot A_{dp}} \right)^2 \right] \cdot \text{sign } \dot{x} + c_r x = p.$$

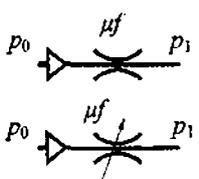
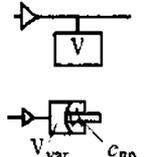
## 2.6. Методика построения математической модели пневмопривода

Так же, как и при математическом моделировании на макроуровне механических и гидравлических систем, пневматическую систему стремятся при-

вести к дискретному виду, идеализируя наиболее существенные свойства и связи, пренебрегая менее существенными. Так, менее объемные части системы представляются в виде пневмосопротивлений, лишенных объема, а элементы систем, объем которых превалирует над сопротивлением, принимаются за емкости, характеризуемые только объемом.

Такой подход позволяет выявить типовые элементы (аналогично методу типовых элементов) с характерными для них параметрами, которые можно использовать для построения математических моделей пневматических систем (табл. 2.2). Однако их математическое описание представляет собой компонентные уравнения, связывающие давление не с объемным расходом  $Q$  (как это было в гидросистемах), а с массовым расходом  $dm/dt$ . Это объясняется значительной сжимаемостью и переменной плотностью воздуха.

Таблица.2.2

Элементы и их обозначение	Физические свойства элементов и их математическое описание
<p>1. Дроссель</p> 	<p>диссипативные</p> $\frac{dm}{dt} = \mu \cdot f \cdot v_{кр} \cdot \frac{p_0}{R \cdot T} \cdot \varphi(\sigma)$ $\frac{dm}{dt} = \mu \cdot f_{var} \cdot v_{кр} \cdot \frac{p_0}{R \cdot T} \cdot \varphi(\sigma)$
<p>2. Емкость</p> 	<p>упругие</p> $\frac{dm}{dt} = \frac{V}{k \cdot R \cdot T} \cdot \frac{dp}{dt}$ $\frac{dm}{dt} = \frac{1}{k \cdot R \cdot T} \cdot \left( k \cdot p \cdot \frac{dV}{dt} + V \cdot \frac{dp}{dt} \right)$

В табл. 2.2:  $\mu$  – коэффициент пропускной способности пневмосопротивления;  $f$  – площадь поперечного сечения пневмосопротивления или трубопровода;  $\nu_{кр} = 340$  м/с – критическая скорость воздуха;  $R$  – газовая постоянная воздуха;  $T$  – абсолютная температура воздуха;  $k = 1,4$  – коэффициент адиабаты воздуха;  $V$  – объем емкости;  $\sigma$  – безразмерное давление;  $\varphi(\sigma)$  – гиперболическая функция расхода.

Гиперболическая функция расхода равна:

$$\varphi(\sigma) = A - \frac{1 - \sigma}{B - \sigma} = A \frac{P_0 - P_1}{B P_0 - P_1},$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные коэффициенты, характеризующие сдвиг асимптот гиперболы:  $A = 0,654$ ,  $B = 1,13$ .

На основе принципиальной схемы и анализа работы системы, используя типовые элементы с сосредоточенными характеристиками, составляют динамическую схему. При ее математическом описании используются уравнения элементов (см. табл. 2.2), объединяемые топологическими уравнениями непрерывности массовых расходов в узле, т.е.

$$\sum \left( \frac{dm}{dt} \right)_j = 0.$$

Таким образом, математическое описание звена "дрессель-емкость" постоянного объема можно определить, приравняв массовый расход через дрессель и расход емкости в точке 1 (рис. 2.5, а).

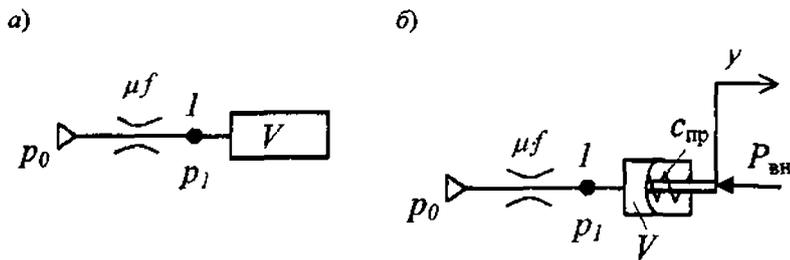


Рис. 2.5. Динамическая схема пневматического звена "дрозель-емкость":  
 а) емкость постоянного объема; б) емкость переменного объема

Тогда для наполнения емкости

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{k \cdot \mu \cdot f \cdot v_{сп} \cdot p_0}{V} \cdot A \cdot \frac{p_0 - p_1}{B \cdot p_0 - p_1};$$

для сброса давления из емкости

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{k \cdot \mu \cdot f \cdot v_{сп} \cdot p_1}{V} \cdot A \cdot \frac{p_1 - p_0}{B \cdot p_1 - p_0}.$$

Переходный процесс пневмоцепи с переменным объемом (рис. 2.5, б) исполнительного органа описывается следующими дифференциальными уравнениями:

наполнение

$$\frac{V}{k} \cdot \frac{dp_1}{dt} + p_1 \frac{dV}{dt} = \mu \cdot f \cdot v_{сп} \cdot p_0 \cdot A \cdot \frac{p_0 - p_1}{B \cdot p_0 - p_1}; \quad (2.7)$$

сброс давления

$$\frac{V}{k} \cdot \frac{dp_1}{dt} + p_1 \frac{dV}{dt} = -\mu \cdot f \cdot v_{sp} \cdot p_1 \cdot A \cdot \frac{p_1 - p_0}{B \cdot p_1 - p_0}, \quad (2.8)$$

где объем емкости и его изменение по времени можно описать соотношениями

$$V = V_0 + F_{н.д} \cdot y; \quad dV/dt = F_{н.д} \cdot dy/dt,$$

где  $F_{н.д}$  – площадь поршня или диафрагмы;  $y$  – перемещение штока;  $V_0$  – начальный объем.

Составив топологическое уравнение равновесия для упругого элемента (пружины) пневмокамеры, получим

$$c_{пр} \cdot y + P_{вн} = p_1 \cdot F_{н.д},$$

где  $P_{вн}$  – внешняя сила, задаваемая линейной или нелинейной характеристикой.

Выразив из полученного равенства координату  $y$  и используя ее при описании  $V$  и  $dV/dt$  в уравнениях (2.7) и (2.8), получим:

наполнение

$$\frac{dp_1}{dt} \left( \frac{V_0}{k} + p_1 \cdot \frac{F_{н.д}^2}{c_{пр}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{k} \right) - \frac{F_{н.д}}{c_{пр} \cdot k} \cdot P_{вн} \right) = \mu \cdot f \cdot v_{sp} \cdot p_0 \cdot A \cdot \frac{p_0 - p_1}{B \cdot p_0 - p_1},$$

сброс давления

$$\frac{dp_1}{dt} \left( \frac{V_0}{k} + p_1 \cdot \frac{F_{н.д}^2}{c_{пр}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{k} \right) - \frac{F_{н.д}}{c_{пр} \cdot k} \cdot P_{вн} \right) = -\mu \cdot f \cdot v_{sp} \cdot p_1 \cdot A \cdot \frac{p_1 - p_0}{B \cdot p_1 - p_0}.$$

## 2.7. Упрощение динамических систем

### *Механические системы*

Так как все валы трансмиссий вращаются с различными угловыми скоростями, то составление математических моделей подобных систем и их реализация очень трудоемки. С целью упрощения этих операций, после определения по известным формулам действительных значений моментов инерции и податливостей деталей, составляют динамическую схему механизма, все параметры которой приводят к одному валу. В этом случае эквивалентная система должна быть адекватна реальной, т.е.

1) из равенства кинетических энергий

$$\frac{J_{\text{пр}} \cdot \omega_{\text{пр}}^2}{2} = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$

определим приведенный момент инерции

$$J_{\text{пр}} = J \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_{\text{пр}}} \right)^2,$$

где  $J$ ,  $\omega$ ,  $J_{\text{пр}}$ ,  $\omega_{\text{пр}}$  – моменты инерции и угловая скорость соответственно действительные и на валу приведения;

2) из равенства потенциальных энергий

$$\frac{1}{2} c_{\text{пр}} \varphi_{\text{пр}}^2 = \frac{1}{2} c \varphi^2,$$

определяем приведенную жесткость:

$$c_{np} = c \cdot \left( \frac{\varphi}{\varphi_{np}} \right)^2 = c \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_{np}} \right)^2,$$

где  $c$  – действительная жесткость;  $\varphi_{np}$ ,  $\varphi$  – соответственно углы поворота вала приведения и действительного вала;

3) из равенства диссипативных функций

$$\mu_{np} = \mu \cdot \left( \frac{\varphi}{\varphi_{np}} \right)^2 = \mu \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_{np}} \right)^2.$$

Таким образом, динамическая схема приведенной системы остается такой же, но численные значения инерционных, упругих и диссипативных параметров будут равны соответственно  $J_{np}$ ,  $c_{np}$ ,  $\mu_{np}$ .

С целью упрощения в многозвенных динамических системах сокращают количество звеньев. Степень упрощения при этом зависит от задач исследования и параметров системы.

Одним из методов упрощения является сведение *вырожденных* динамических схем к *регулярным*.

*Вырожденные* схемы в отличие от регулярных характеризуются неправильным размещением элементов, т.е. нарушением чередований инерционных элементов с упругими и диссипативными.

Вырожденные модели должны быть преобразованы и приведены к регулярным до составления математического описания и до проведения упрощения и сокращения числа степеней свободы системы.

Вырожденная цепная модель (рис. 2.6, а) приводится к регулярной цепной (рис. 2.7, а), а вырожденная разветвленная (рис. 2.6, б) – к регулярной кольцевой (рис. 2.7, б) следующим образом.

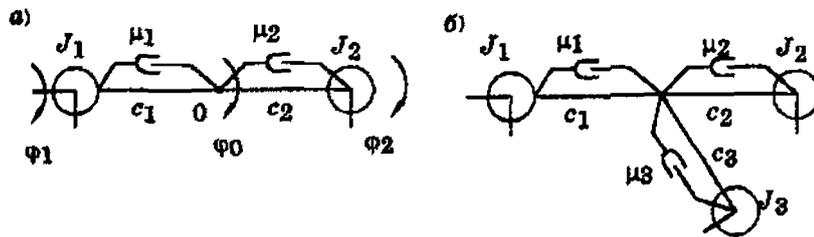


Рис. 2.6. Вырожденные динамические схемы

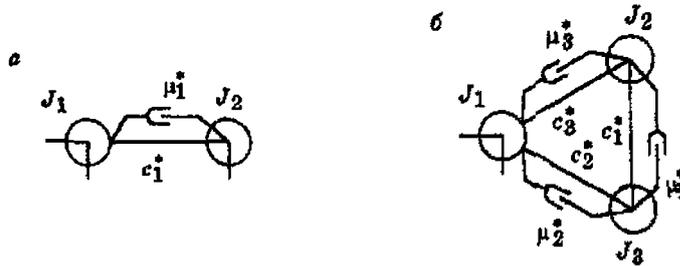


Рис. 2.7. Регулярные динамические схемы

Компонентные уравнения упругих элементов цепной модели без учета диссипативных элементов

$$M_{y_1} = c_1(\varphi_1 - \varphi_0),$$

$$M_{y_2} = c_2(\varphi_0 - \varphi_2),$$

решая их совместно, получим

$$\frac{M_{y1}}{c_1} + \frac{M_{y2}}{c_2} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (2.9)$$

Из условий равновесия моментов

$$M_{y1} = M_{y2} = M_{y1}^*,$$

где  $M_{y1}^*$  – момент в упругом элементе регулярной модели. Тогда из выражения (2.9)

$$M_{y1}^* = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} (\varphi_1 - \varphi_2),$$

где  $\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = c_1^*$  – эквивалентная жесткость.

Таким образом, математическая модель имеет вид

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = -c_1^* (\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = c_1^* (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Преобразование моделей при учете диссипативных элементов значительно усложняется, т.к. условие равновесия принимает вид

$$M_{y1} + M_{d1} = M_{y2} + M_{d2}.$$

Однако в проектировочных расчетах с достаточной степенью точности принимают

$$\frac{\mu_1}{c_1} = \frac{\mu_2}{c_2},$$

тогда

$$\mu_1^* = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2},$$

где  $\mu_1^*$  – эквивалентный коэффициент демпфирования.

В этом случае математическая модель принимает вид

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = -c_1^* (\varphi_1 - \varphi_2) - \mu_1^* (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2),$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = c_1^* (\varphi_1 - \varphi_2) + \mu_1^* (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2).$$

Аналогичные выражения для определения коэффициентов  $c^*$  и  $\mu^*$  получаются для разветвленной модели:

$$c_1^* = \frac{c_2 \cdot c_3}{c_1 + c_2 + c_3}; \quad c_2^* = \frac{c_1 \cdot c_3}{c_1 + c_2 + c_3}; \quad c_3^* = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2 + c_3}.$$

При выполнении условий

$$\frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_3} = \frac{c_1}{c_2 + c_3}; \quad \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_3} = \frac{c_2}{c_1 + c_3}; \quad \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{c_3}{c_1 + c_2}$$

эквивалентные коэффициенты демпфирования примут вид

$$\mu_1^* = \frac{\mu_2 \cdot \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}; \quad \mu_2^* = \frac{\mu_1 \cdot \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}; \quad \mu_3^* = \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}.$$

Тогда математическая модель регулярной кольцевой системы примет вид

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = -c_2^*(\varphi_1 - \varphi_3) - c_3^*(\varphi_1 - \varphi_2) - \mu_2^*(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3) - \mu_3^*(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2);$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = c_3^*(\varphi_1 - \varphi_2) - c_1^*(\varphi_2 - \varphi_3) + \mu_3^*(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \mu_1^*(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3);$$

$$J_3 \ddot{\varphi}_3 = c_1^*(\varphi_2 - \varphi_3) + c_2^*(\varphi_1 - \varphi_3) + \mu_1^*(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) + \mu_2^*(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3).$$

В практике также для упрощения динамических систем широко используется *метод парциальных частот*, позволяющий выявить элементы модели, создающие высокие собственные частоты. Эти элементы можно исключить и произвести перераспределение значений их параметров между другими элементами модели таким образом, чтобы  $T$  и  $\Pi$  системы не изменились.

Метод предусматривает деление системы на отдельные подсистемы, называемые *парциальными системами*, частоты свободных колебаний которых называются *парциальными частотами*.

Парциальная система может представлять собой:

- 1) один инерционный элемент и все примыкающие к нему упругие диссипативные элементы;
- 2) один упругий элемент с сопутствующим ему диссипативным и все примыкающие к нему инерционные элементы.

Схемы простейших парциальных систем приведены на рис. 2.8.

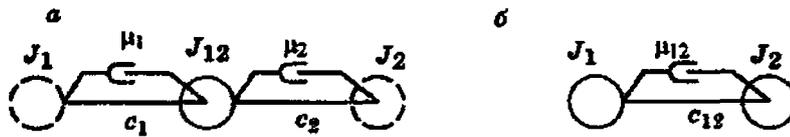


Рис. 2.8. Простейшие парциальные системы

Взаимная замена парциальных систем позволяет осуществить упрощение динамической модели.

Замена основана на следующих соответствиях:

$$\underbrace{\frac{J_1}{(J_1 + J_2)}}_{J_{12}} = \frac{c_1}{c_1 + c_2}; \quad \underbrace{\frac{J_2}{(J_1 + J_2)}}_{J_{12}} = \frac{c_2}{c_1 + c_2};$$

$$J_{12} = J_1 + J_2; \quad c_{12} = c_1 \cdot c_2 / (c_1 + c_2);$$

$$\mu_{12} = \mu_1 \cdot \left( \frac{c_2}{c_1 + c_2} \right)^2 + \mu_2 \cdot \left( \frac{c_1}{c_1 + c_2} \right)^2.$$

Частоты простейших парциальных систем определяются по формулам

$$\omega = \sqrt{(c_1 + c_2) / J_{12}}; \quad \omega = \sqrt{c_{12} (J_1 + J_2) / (J_1 \cdot J_2)}.$$

С целью унификации вычислений при преобразованиях более сложных парциальных систем ограничиваются преобразованием одномассовых парциальных систем. В этом случае определяются их частоты и удаляются сосредоточенные массы, входящие в парциальную систему с наивысшей частотой, а

значение ее инерционного параметра перераспределяется на примыкающие сосредоточенные массы.

Парциальная частота  $k$ -й парциальной системы определяется по формуле

$$\omega_k = \sqrt{\sum_{j=1}^N c_j / J_k},$$

где  $N$  – число  $j$ -х упругих элементов, соединяющих  $k$ -ю сосредоточенную массу с другими массами системы.

При выполнении условия

$$\omega_k = \omega_k^{\max}$$

$k$ -я сосредоточенная масса удаляется. При этом количество масс системы и число ее степеней свободы уменьшается на единицу.

#### *Пневматический привод.*

При необходимости упрощения сложную динамическую схему (рис. 2.9, а) пневмопривода приводят к эквивалентной, используя два способа. При первом способе не учитываются емкости малого объема, а два последовательно соединенных сопротивления заменяются одним эквивалентным (рис. 2.9, б):

$$\mu_3 f_3 = \frac{\mu_1 \cdot f_1 \cdot \mu_2 \cdot f_2}{\sqrt{(\mu_1 \cdot f_1)^2 + (\mu_2 \cdot f_2)^2}}.$$

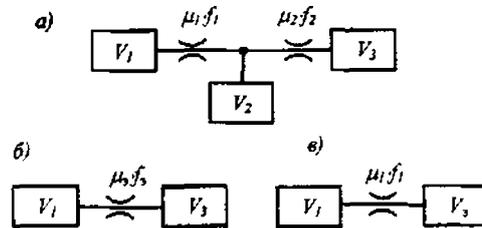


Рис. 2.9. Динамическая схема пневмопривода: а – расчетная; б, в – эквивалентные

Используя второй способ приведения, принимаем, что давление в соединенных емкостях одинаково, т.е. соединяющий их дроссель оказывает малое сопротивление. В этом случае объемы этих емкостей суммируются:  $V_3 = V_2 + V_3$  (рис. 2.9, в), а сопротивление  $\mu_2 f_2$  исключается.

## 2.8. Моделирование нелинейных систем

Нелинейной называется система, процессы функционирования которой описываются нелинейными дифференциальными уравнениями (содержащими нелинейные функции фазовых координат (переменных) и (или) их производных). Нелинейные свойства наиболее характерны для упругих и диссипативных, трансформируемых и фрикционных элементов технической системы:

$$\mu_r = f(Q); c_r = f(p); c_y = f(x); \mu_d = f(\dot{x}),$$

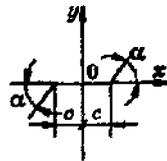
где  $\mu_r, c_r$  – коэффициенты демпфирования и жесткости гидростолба;  $c_y, \mu_d$  – коэффициенты жесткости и демпфирования подвески и шины.

Если нелинейность элемента обусловлена зависимостью его параметра от фазовых переменных и координат, алгоритм формирования математической модели не отличается от рассматриваемых ранее. В этом случае необходимо лишь на каждом шаге интегрирования изменять значения параметров элементов. Так, например, динамическая схема поддресоривания (см. раздел 2.3) содержит упругие и диссипативные элементы с характеристиками  $c_1$ ,  $c_2$  и  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , которые в свою очередь могут представлять собой нелинейные зависимости вида  $c_1 = f(x_1, x_2)$ ,  $c_2 = f(x_2, \dot{h})$ ,  $\mu_1 = f(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ ,  $\mu_2 = f(\dot{x}_2, \dot{h})$ . Тогда для решения системы дифференциальных уравнений, описывающих данную динамическую схему, необходимо задать начальные условия  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$  и на каждом шаге интегрирования вычислять значения нелинейных функций  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ .

Для автоматизации формирования математической нелинейной системы используют стандартные функции, описывающие *типовые нелинейные характеристики* элементов.

*Нелинейные элементы с однозначными (статическими) характеристиками:*

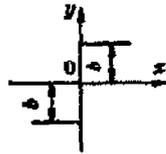
#### 1. Зона нечувствительности



$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leq c; \\ k(x - c) & \text{при } x > c; \\ k(x + c) & \text{при } x < -c, \end{cases}$$

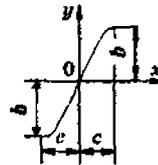
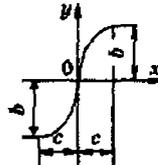
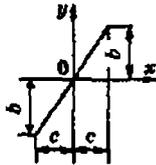
где  $k = \operatorname{tg} \alpha$ .

## 2. Идеальный релейный



$$y = \begin{cases} b & \text{при } x \geq 0; \\ -b & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

## 3. Зона насыщения (ограничение выходной координаты y)

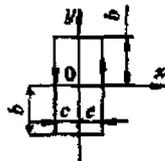


$$y = \begin{cases} kx & \text{при } |x| \leq c; \\ b & \text{при } x > c; \\ -b & \text{при } x < -c; \end{cases} \quad y = \begin{cases} b(1 - e^{-kx}) & \text{при } x \geq 0, \\ -b(1 - e^{-k|x|}) & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad \text{где } k = f(c),$$

$$y = \begin{cases} b \sin\left(\frac{x \pi}{c}\right) & \text{при } |x| \leq c; \\ b & \text{при } x > c; \\ -b & \text{при } x < -c. \end{cases}$$

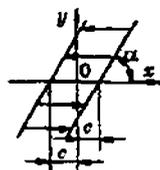
*Нелинейные элементы с неоднозначными динамическими характеристиками:*

1. Релейный с гистерезисом (характеристика двухпозиционного распределителя).



$$y = \begin{cases} -b & \text{при } x \leq c, \quad \dot{x} > 0; \\ b & \text{при } x > c, \quad \dot{x} > 0; \\ b & \text{при } x \geq -c, \quad \dot{x} < 0; \\ -b & \text{при } x < -c, \quad \dot{x} < 0. \end{cases}$$

## 2. Люфт, зазор или сухое трение.



$$y = \begin{cases} k(x-c), & \dot{x} > 0; \\ k(x+c), & \dot{x} < 0, \end{cases}$$

где  $k = \operatorname{tg} \alpha$ .

## 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОЧИХ ПРОЦЕССОВ, УЗЛОВ, МЕХАНИЗМОВ И СИСТЕМ МОБИЛЬНЫХ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН

### 3.1. Моделирование характеристик дизельных двигателей и гидронасосов

Наиболее простая модель для определения характеристики двигателя  $M_{дв} = f(\omega)$ , т.е. его крутящего момента от угловой скорости коленвала, основана на представлении его (двигателя) одним инерционным звеном с угловой скоростью  $\omega_{дв}$ , инерционной характеристикой  $J_{дв}$  и внешним воздействием  $M_{дв} = f(\omega_{дв})$ .

Характеристика (рис. 3.1) зависимости  $M_{дв}(\omega)$  разбивается на три участка:

1. Безрегуляторная ветвь, описываемая следующей аналитической зависимостью:

$$M_{дв} = M_0 + (M_{*} - M_0) \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega_{*} - \omega_0}.$$

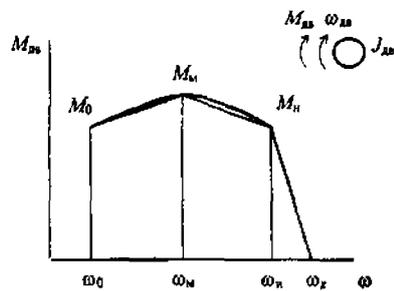


Рис.3.1. Характеристика дизельного двигателя

2. Корректорная ветвь ( $\omega_m - \omega_n$ )

$$M_{дв} = M_n - (M_n - M_m) \cdot \frac{\omega - \omega_m}{\omega_n - \omega_m}.$$

3. Регуляторная ветвь ( $\omega_n - \omega_x$ )

$$M_{дв} = M_n \cdot \frac{\omega_x - \omega}{\omega_x - \omega_n},$$

где  $M_n, M_m, M_0$  – номинально, максимально и минимально устойчивый моменты двигателя;  $\omega_x, \omega_n, \omega_m, \omega_0$  – угловые скорости соответственно на холостом ходу при номинальном, максимальном и минимально устойчивом крутящих моментах двигателя.

Рабочие характеристики объемных гидромашин также представляют собой компонентные уравнения, в частности, для насоса уравнение имеет вид  $Q_n = f(p_n)$ .

Как видно из рис. 3.2, характеристику насоса можно разделить на два характерных участка и описать соответствующими аналитическими зависимостями.

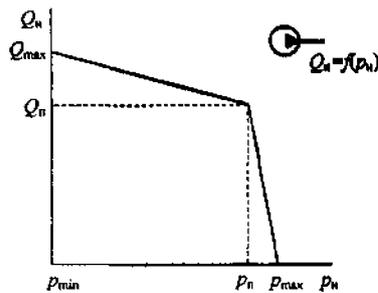


Рис. 3.2. Характеристика насоса с предохранительным клапаном

*1-й участок:* изменение давления от  $p_{\min}$  до  $p_n$  соответствует линейному снижению подачи от  $Q_{\max}$  до  $Q_n$  в связи с ростом утечек и описывается следующей зависимостью:

$$Q_n = Q_{\max} - (Q_{\max} - Q_n) \cdot \frac{p_n - p_{\min}}{p_n - p_{\min}}. \quad (3.1)$$

*2-й участок,* на котором подача резко снижается от  $Q_n$  до 0 и соответствует режиму работы предохранительного клапана, описываемого следующей зависимостью:

$$Q_n = Q_n \cdot \frac{p_{\max} - p_n}{p_{\max} - p_n}, \quad (3.2)$$

где  $Q_{\max}$ ,  $Q_{\Pi}$  – максимальная подача и подача насоса, соответствующая давлению  $p_{\Pi}$ ;  $p_{\min}$ ,  $p_{\max}$ ,  $p_{\Pi}$  – минимальное и максимальное давления насоса и давление срабатывания клапана.

Для насоса с регулятором мощности (рис. 3.3) характерны три участка, первый и третий из которых можно описать аналогичными зависимостями (3.1) и (3.2), заменив в выражении (3.1)  $Q_{\Pi}$  на  $Q_N$ , а  $p_{\Pi}$  на  $p_N$ , где  $p_N$  и  $Q_N$  – значения, соответствующие началу работы регулятора мощности.

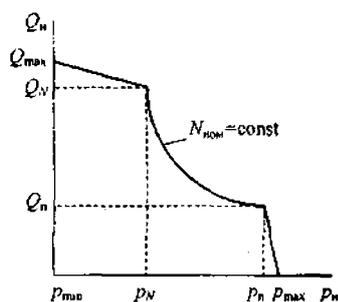


Рис. 3.3. Характеристика насоса с регулятором мощности

Участок 2, характеризующий работу регулятора мощности при постоянном номинальном значении  $N_{\text{ном}}$  и изменении давления от  $p_N$  до  $p_n$ , можно описать исходя из соотношения

$$N_{\text{ном}} = p_n \cdot Q_n / \eta_0,$$

где  $\eta_0$  – объемный КПД насоса.

Тогда

$$Q_n = \frac{N_{\text{ном}}}{p_n} \cdot \eta_0. \quad (3.3)$$

Однако объемный КПД насоса не постоянен и зависит, как известно, от давления. Эту зависимость с достаточной степенью точности можно представить линейным аналитическим описанием:

$$\eta_0 = \frac{1}{N_{ном}} \left[ p_N Q_N - \frac{p_N Q_N - p_n Q_n}{p_n - p_N} (p_n - p_N) \right].$$

Подставив полученное выражение в формулу (3.3), получим

$$Q_n = \frac{1}{p_n} \left[ p_N Q_N - \frac{p_N Q_N - p_n Q_n}{p_n - p_N} (p_n - p_N) \right].$$

### 3.2. Моделирование технических объектов с фрикционными элементами

В системах приводов рабочих органов машин широкое применение находят фрикционные механизмы, предназначенные для соединения, торможения и блокирования отдельных звеньев. Динамические схемы различных звеньев, содержащих фрикционный элемент, приведены на рис. 3.4.

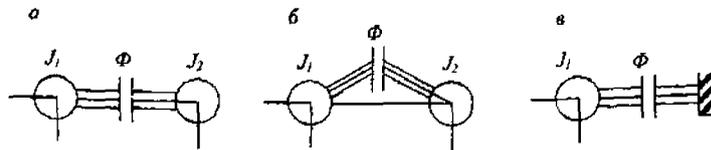


Рис. 3.4. Динамические схемы звеньев с фрикционными элементами:  
а – соединительный; б – блокированный; в – тормозной

Соединительный фрикционный элемент широко используется в трансмиссиях мобильных машин в качестве сцепления; блокировочный – в виде соответствующей муфты блокировки дифференциалов; тормозной – в качестве тормозных механизмов колес или мостов.

Работу фрикционного элемента и ее математическое описание рассмотрим на примере сцепления мобильной машины. Как известно, сцепление служит для передачи крутящего момента от двигателя к трансмиссии, кратковременного переключения передач, а также плавного разгона машины, снижающего нагрузки в узлах трансмиссии при резких изменениях режимов движения. Динамическая схема, позволяющая моделировать работу трансмиссии в процессе включения муфты сцепления, представлена на рис. 3.5.

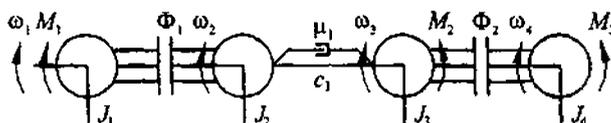


Рис. 3.5. Динамическая схема трансмиссии мобильной машины

На схеме:  $J_1$  – момент инерции двигателя и ведущих частей сцепления;  $J_2$  – приведенный момент инерции ведомых частей сцепления и деталей трансмиссии;  $J_3$  – приведенный момент инерции ходовой части;  $J_4$  – приведенный момент инерции машины в целом:  $J_4 = m \cdot r_k^2 / i_{\text{тп}}^2$ , где  $m$  – масса машины;  $r_k$  – радиус качения ведущего колеса;  $i_{\text{тп}}$  – передаточное отношение трансмиссии;  $M_1$  – момент двигателя;  $M_2$  – момент сопротивления качению,  $M_2 = mg \cdot f \cdot r_k$ , где  $f$  – коэффициент сопротивления качению;  $M_3$  – момент сопротивления воздуха и скатывающей силы (на подъеме);  $M_{\phi 1}$  – момент трения сцепления транс-

миссии,  $M_{\phi_1} = f(t)$ ;  $M_{\phi_2}$  – момент трения сцепления ведущих колес с дорогой;  $\mu_1, c_1$  – характеристики трансмиссии.

Процесс работы фрикциона разбивают на два основных этапа: процесс буксования муфты и замкнутое состояние.

В замкнутом состоянии элементов сцепления трансмиссии движение масс системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} (J_1 + J_2) \cdot \ddot{\phi}_2 &= M_1 - c_1(\phi_2 - \phi_3) - \mu_1(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3); \\ J_3 \cdot \ddot{\phi}_3 &= -M_2 + c_1(\phi_2 - \phi_3) + \mu_1(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3) - M_{\phi_2}; \\ J_4 \cdot \ddot{\phi}_4 &= M_{\phi_2} - M_3. \end{aligned} \quad (3.4)$$

При буксующей муфте сцепления трансмиссии число степеней свободы системы возрастает на единицу и система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} J_1 \cdot \ddot{\phi}_1 &= M_1 - M_{\phi_1}; \\ J_2 \cdot \ddot{\phi}_2 &= M_{\phi_1} - c_1(\phi_2 - \phi_3) - \mu_1(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3); \\ J_3 \cdot \ddot{\phi}_3 &= -M_2 + c_1(\phi_2 - \phi_3) + \mu_1(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3) - M_{\phi_2}; \\ J_4 \cdot \ddot{\phi}_4 &= M_{\phi_2} - M_3. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Условие замыкания, а следовательно, перехода от системы (3.5) к системе (3.4) определим из режима работы муфты сцепления трансмиссии (рис. 3.6), на

котором отражено изменение во времени угловых скоростей ведущих  $\omega_1$  и ведомых  $\omega_2$  частей сцепления, а также момента  $M_{\phi}$ , передаваемого сцеплением.

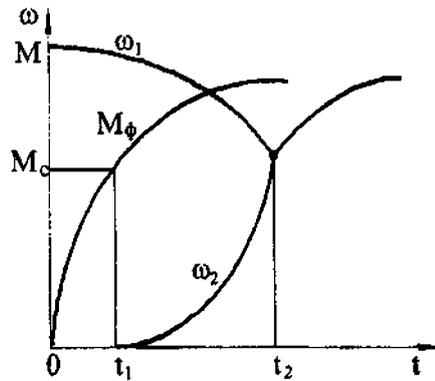


Рис. 3.6. Характеристики, отражающие процесс включения муфты сцепления трансмиссии

Период  $0 - t_1$  характеризуется нарастанием сжимающих фрикцион сил, благодаря чему момент фрикциона  $M_{\phi}$  нарастает до некоторого значения  $M_c$ , равного моменту сопротивления движению. В результате этого угловая скорость ведомых частей начинает расти (период  $t_1 - t_2$ ). Угловая скорость ведущих частей при этом так же, как и на участке  $0 - t_1$ , снижается. Окончание периода  $t_1 - t_2$  характеризуется замыканием ведущих и ведомых частей, т.е.  $\omega_1 = \omega_2$ , что является условием прекращения буксования.

Таким образом, условие перехода от системы (3.5) к системе (3.4) будет следующим:

$$\left| 1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon = 0,01$  – относительная погрешность.

При включении сцепления нагрузки в элементах трансмиссии значительно возрастают, что может привести к буксованию колес. Этот процесс моделируется работой фрикционного элемента  $\Phi_2$ . Значение момента этого элемента  $M_{\Phi_2}$  определяется так:

$$M_{\Phi_2} = r_k \cdot N(\Phi_4) \cdot \varphi(\delta),$$

где  $r_k$  – радиус качения колеса;  $N(\Phi_4)$  – нагрузка на ведущий мост, изменяющаяся от ускорения машины;  $\varphi(\delta)$  – коэффициент сцепления, зависящий от покрытия дороги и буксования  $\delta$  ведущих колес.

Буксование ведущих колес определяется следующим образом:

$$\delta = 1 - \frac{v_d}{v_r} = 1 - \frac{\Phi_4}{\Phi_3}.$$

Закон изменения момента трения в муфте сцепления  $M_{\Phi_1} = f(t)$  (см. рис. 3.6) с достаточной степенью точности можно определить по экспоненциальной зависимости:

$$M_{\Phi_1} = M_{\Phi_{1\max}} (1 - e^{-kt}),$$

где  $k$  – коэффициент быстродействия:  $k = 5/t_b$ ,  $t_b$  – время включения,  $M_{\Phi_{1\max}}$  – максимально возможный момент передаваемый муфтой:  $M_{\Phi_{1\max}} = (2...3)M_{дв.н}$ ,  $M_{дв.н}$  – номинальный момент двигателя.

### 3.3. Моделирование технических объектов с трансформаторными элементами

*Трансформаторные элементы* отражают безынерционное преобразование характеристик потока энергии (скорости, моменты и т.п.). В технических объектах используются механические (зубчатые) и гидравлические (гидрообъемные и гидродинамические) трансформаторы.

Физические свойства трансформатора характеризуются: передаточным числом  $i$  или отношением  $i = 1/u$ , КПД  $\eta$  и коэффициентом трансформации  $K$ .

*Передаточное отношение* трансформаторного элемента

$$i = \omega_2 / \omega_1,$$

где  $\omega_1, \omega_2$  – соответственно угловые скорости на входе и выходе элемента.

*Коэффициент трансформации* определяется следующим образом:

$$K = M_2 / M_1,$$

где  $M_1, M_2$  – соответственно момент на входе и выходе элемента.

*КПД трансформаторного элемента* определяется отношением полезной мощности  $P_2$  на выходе и затраченной  $P_1$  на входе:

$$\eta = |P_2 / P_1| = |M_2 \omega_2 / (M_1 \omega_1)| \quad \text{или} \quad \eta = |K \cdot i|.$$

Составим математическую модель технического объекта, содержащего два трансформаторных (зубчатые передачи) элемента ТЭ<sub>1</sub>, ТЭ<sub>2</sub>, динамическая схема которого приведена на рис. 3.7.

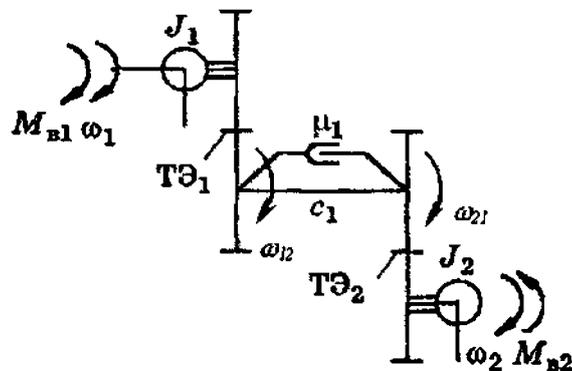


Рис. 3.7. Динамическая схема трансмиссии с зубчатыми передачами:  
 $J_1$  – момент инерции двигателя;  $J_2$  – момент инерции рабочего механизма

В тяговом режиме энергия двигателя передается рабочим механизмам машины. В тормозном режиме, наоборот, двигатель поглощает энергию, накопленную рабочим органом.

Если технический объект не содержит трансформаторных элементов, математическая модель не меняется при переходе с одного режима на другой. В объектах с трансформаторными элементами возникает необходимость учета потерь в этих элементах. Величина этих потерь пропорциональна моментам в примыкающих к трансформаторному элементу упругом и диссипативном элементах. Но так как знаки этих моментов изменяются в зависимости от режима работы объекта, а энергия потерь всегда отрицательна, то эта особенность должна быть учтена в математической модели.

Так как КПД трансформаторного элемента равен  $\eta = |P_{\text{вых}} / P_{\text{вх}}|$ , то для ТЭ<sub>1</sub> и ТЭ<sub>2</sub> можно записать:

1) для тягового режима

$$\eta_1 = \left| \frac{(M_{y1} + M_{a1}) \cdot \omega_{12}}{M_{s1} \cdot \omega_1} \right|, \quad \eta_2 = \left| \frac{M_{s2} \cdot \omega_2}{(M_{y1} + M_{a1}) \cdot \omega_{21}} \right|,$$

где  $M_{s1}, M_{s2}$  – эквивалентные моменты реакций соответственно на ТЭ<sub>1</sub> и ТЭ<sub>2</sub>.

Следовательно:

$$M_{s1} = \left| \frac{M_{y1} + M_{a1}}{\eta_1 \cdot u_1} \right|, \quad M_{s2} = \left| (M_{y1} + M_{a1}) \cdot u_2 \eta_2 \right|; \quad (3.6)$$

2) для тормозного режима входы и выходы трансформаторных элементов поменяются местами, в связи с чем уравнения (3.6) примут вид

$$M_{s1} = \left| \frac{(M_{y1} + M_{a1}) \cdot \eta_1}{u_1} \right|, \quad M_{s2} = \left| \frac{(M_{y1} + M_{a1}) \cdot u_2}{\eta_2} \right|. \quad (3.7)$$

Сравнивая соответствующие уравнения (3.6) и (3.7), можно заключить, что зависимость  $M_{si}$  от  $\eta_i$  определяется знаком момента  $M_y$  упругого элемента ("+" – тяговый режим; "-" – тормозной), т.е.  $\text{sign } M_y$ .

Таким образом, можно составить систему дифференциальных уравнений:

$$J_1 \frac{d\phi_1}{dt} = M_{s1} - M_{a1} = M_{s1} - \frac{M_{y1} + M_{a1}}{u_1 \cdot \eta_1 \cdot \text{sign} M_{y1}}; \quad (3.8)$$

$$J_2 \frac{d\phi_2}{dt} = -M_{s2} + M_{a2} = -M_{s2} + (M_{y1} + M_{a1}) \cdot u_2 \cdot \eta_2 \cdot \text{sign} M_{y1}$$

Так как

$$M_{y1} = c_1 \cdot (\varphi_{12} - \varphi_{21}) = c_1 \cdot (\varphi_1/u_1 - \varphi_2 u_2),$$

$$M_{\mu 1} = \mu_1 \cdot (\dot{\varphi}_{12} - \dot{\varphi}_{21}) = \mu_1 \cdot (\dot{\varphi}_1/u_1 - \dot{\varphi}_2 u_2),$$

система (3.8) примет вид

$$\frac{d\dot{\varphi}_1}{dt} = \left[ M_{\mu 1} - \left( c_1 \cdot \left( \frac{1}{u_1^2} \varphi_1 - \frac{u_2}{u_1} \cdot \varphi_2 \right) + \mu_1 \cdot \left( \frac{1}{u_1^2} \dot{\varphi}_1 - \frac{u_2}{u_1} \cdot \dot{\varphi}_2 \right) \right) \cdot \frac{1}{\eta_1^{\text{sign} M_{y1}}} \right] \cdot \frac{1}{J_1},$$

$$\frac{d\dot{\varphi}_2}{dt} = \left[ -M_{\mu 2} + \left( c_1 \cdot \left( \frac{u_2}{u_1} \cdot \varphi_1 - u_2^2 \varphi_2 \right) + \mu_1 \cdot \left( \frac{u_2}{u_1} \cdot \dot{\varphi}_1 - u_2^2 \dot{\varphi}_2 \right) \right) \cdot \eta_2^{\text{sign} M_{y1}} \right] \cdot \frac{1}{J_2}.$$

В отличие от механических параметры гидродинамических трансформаторов существенно зависят от скоростных и нагрузочных режимов их работы (рис. 3.8).

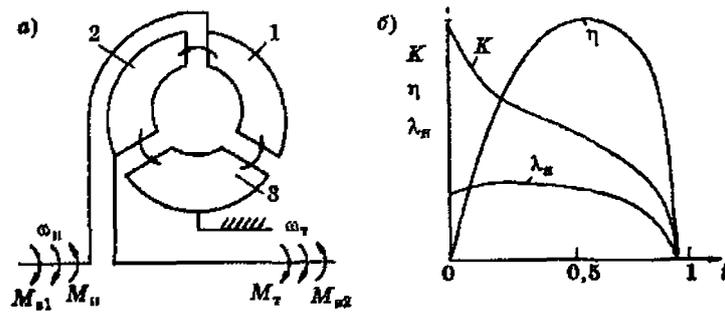


Рис. 3.8. Принципиальная схема и характеристики гидродинамического трансформатора: 1, 2, 3 – насосные, турбинные и реакторные колеса трансформатора

Преобразующие свойства выражаются функциями  $K = f(i)$ ,  $\eta = f(i)$ , определяемыми выражениями:

$$K = M_t / M_n, \quad (3.9)$$

$$i = \omega_t / \omega_n,$$

$$\eta = K \cdot i,$$

где  $M_n$ ,  $\omega_n$ ,  $M_t$ ,  $\omega_t$  – вращающий момент и угловая скорость соответственно насосного и турбинного колеса.

В свою очередь,  $M_n$  равен:

$$M_n = \lambda_n \rho \cdot \omega_n^2 D_n^5, \quad (3.10)$$

где  $\lambda_n$  – коэффициент нагрузочной способности ГДТ;  $\rho$  – плотность жидкости;  $D_n$  – активный диаметр трансформатора.

Динамическая схема гидродинамического привода с ГДТ ТЭ<sub>1</sub> и зубчатой передачей ТЭ<sub>2</sub> представлена на рис. 3.9.

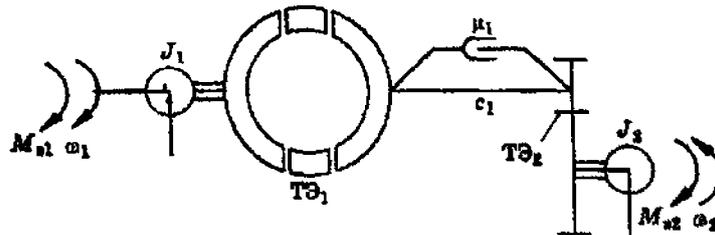


Рис. 3.9. Динамическая схема гидродинамической трансмиссии

Система дифференциальных уравнений, описывающих его работу, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\varphi}_1}{dt} &= \left[ M_{a1} - (c_1 \cdot (\varphi_1 \cdot i_1 - \varphi_2 \cdot u_2) + \mu_1 \cdot (\dot{\varphi}_1 \cdot i_1 - \dot{\varphi}_2 \cdot u_2)) \cdot \frac{1}{K_1} \right] \cdot \frac{1}{J_1}; \\ \frac{d\dot{\varphi}_2}{dt} &= \left[ -M_{a2} + (c_1 \cdot (\varphi_1 \cdot i_1 \cdot u_2 - \varphi_2 \cdot u_2^2) + \mu_1 \cdot (\dot{\varphi}_1 \cdot i_1 \cdot u_2 - \dot{\varphi}_2 \cdot u_2^2)) \cdot \eta_2^{\text{sign} M_{y1}} \right] \cdot \frac{1}{J_2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Согласование нагрузочной характеристики ГДТ, определяемой выражением (3.10), с характеристикой нагружения механической части, т.е. упругого и диссипативного элемента, соответствует условию

$$M_{\tau} = M_{y1} + M_{a1} = c_1 \cdot (\varphi_1 \cdot i_1 - \varphi_2 \cdot u_2) + \mu_1 \cdot (\dot{\varphi}_1 \cdot i_1 - \dot{\varphi}_2 \cdot u_2).$$

Подставляя это соотношение и выражение (3.10) в формулу (3.9), получим

$$K_1 = \frac{M_{y1} + M_{a1}}{\lambda_u \cdot \rho \cdot \dot{\varphi}_1^2 \cdot D_e^3},$$

так как  $K_1 = f_1(i_1)$ , а  $\lambda_u = f_2(i_1)$ , то можно записать нелинейное алгебраическое уравнение

$$f_1(i_1) \cdot f_2(i_1) = \frac{M_{y1} + M_{a1}}{\rho \cdot \dot{\varphi}_1^2 \cdot D_e^3}.$$

Решение полученного уравнения осуществляется относительно передаточного отношения  $i_1$  на каждом шаге интегрирования с дальнейшим использованием его, а также  $K_1 = f_1(i_1)$  в решении системы (3.11).

### 3.4. Моделирование систем поддрессирования машин при плоском движении

Как известно, число степеней свободы твердого тела при плоском движении равно трем: переносное поступательное движение центра масс на координатной плоскости и относительное вращательное движение. Однако при решении практических задач достаточно часто рассматривают движение центра масс твердого тела как прямолинейное или равномерное вдоль одной из осей. В этом случае принимают во внимание две степени свободы: переносное поступательное вдоль оси и относительное вращательное. Примером такого движения может служить движение мобильной машины при условии  $v_x = \text{const}$ , совершающей колебательные движения. На рис. 3.10 приведена динамическая схема, используемая при анализе вертикальных и угловых колебаний кузова машины и их воздействий на водителя.

Наложенные на систему связи позволяют массам  $m_1, m_2, m_4$  (переднего, заднего мостов и водителя) совершать только поступательное движение относительно центра масс вдоль оси  $O_z$ , поэтому их состояние характеризуется фазовыми координатами  $z_1, z_2, z_4$ . Для описания движения массы  $m_3$  при  $v_x = \text{const}$  используются фазовая координата  $z_3$  – координата перемещения центра масс кузова относительно оси  $O_z$  и  $\varphi$  – угловое перемещение относительно вращения вокруг оси  $O_x$ . Таким образом, общее число степеней свободы, а следовательно, дифференциальных уравнений системы должно равняться пяти.

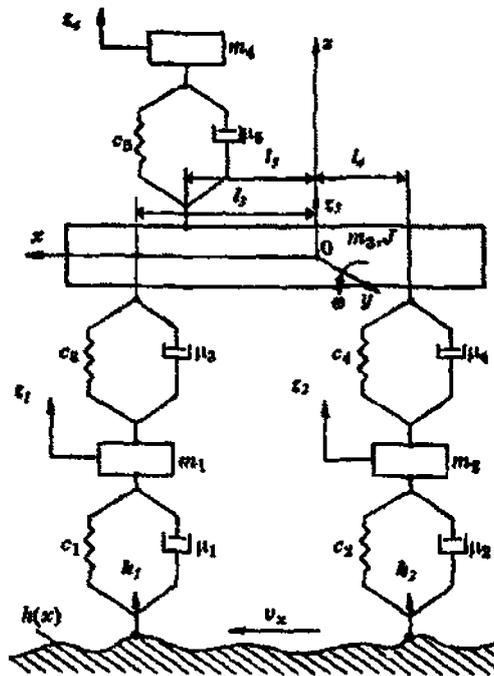


Рис. 3.10. Динамическая схема системы поддресоривания  
мобильной машины

Составим математическую модель системы, используя уравнения Лагранжа 2-го рода, предварительно определив  $T$ ,  $\Pi$  и  $\Phi$  системы :

$$T = \frac{1}{2} [m_1 \dot{z}_1^2 + m_2 \dot{z}_2^2 + m_4 \dot{z}_4^2 + m_3 \dot{z}_3^2 + J\dot{\varphi}^2],$$

$$\Pi = \frac{1}{2} [c_1 (h_1 - z_1)^2 + c_2 (h_2 - z_2)^2 + c_3 (z_1 - z_3 + \varphi \cdot l_3)^2 + c_4 (z_2 - z_3 - \varphi \cdot l_4)^2 + c_5 (z_3 - z_4 - \varphi \cdot l_5)^2],$$

$$\Phi = \frac{1}{2} [\mu_1 (\dot{h}_1 - \dot{z}_1)^2 + \mu_2 (\dot{h}_2 - \dot{z}_2)^2 + \mu_3 (\dot{z}_1 - \dot{z}_3 + \dot{\varphi} \cdot l_3)^2 + \\ + \mu_4 (\dot{z}_2 - \dot{z}_3 - \dot{\varphi} \cdot l_4)^2 + \mu_5 (\dot{z}_3 - \dot{z}_4 - \dot{\varphi} \cdot l_5)^2]$$

Дифференцируя полученные выражения соответствующим образом, получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\dot{z}_1}{dt} = [c_1(h_1 - z_1) - c_3(z_1 - z_3 + \varphi \cdot l_3) + \mu_1(\dot{h}_1 - \dot{z}_1) - \mu_3(\dot{z}_1 - \dot{z}_3 + \dot{\varphi} \cdot l_3)] \frac{1}{m_1},$$

$$\frac{d\dot{z}_2}{dt} = [c_2(h_2 - z_2) - c_4(z_2 - z_3 - \varphi \cdot l_4) + \mu_2(\dot{h}_2 - \dot{z}_2) - \mu_4(\dot{z}_2 - \dot{z}_3 - \dot{\varphi} \cdot l_4)] \frac{1}{m_2},$$

$$\frac{d\dot{z}_3}{dt} = [c_3(z_1 - z_3 + \varphi \cdot l_3) + c_4(z_2 - z_3 - \varphi \cdot l_4) - c_5(z_3 - z_4 - \varphi \cdot l_5) + \\ + \mu_3(\dot{z}_1 - \dot{z}_3 + \dot{\varphi} \cdot l_3) + \mu_4(\dot{z}_2 - \dot{z}_3 - \dot{\varphi} \cdot l_4) - \mu_5(\dot{z}_3 - \dot{z}_4 - \dot{\varphi} \cdot l_5)] \frac{1}{m_3},$$

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = [-c_3(z_1 - z_3 + \varphi \cdot l_3) \cdot l_3 + c_4(z_2 - z_3 - \varphi \cdot l_4) \cdot l_4 + c_5(z_3 - z_4 - \varphi \cdot l_5) \cdot l_5 - \\ - \mu_3(\dot{z}_1 - \dot{z}_3 + \dot{\varphi} \cdot l_3) \cdot l_3 + \mu_4(\dot{z}_2 - \dot{z}_3 - \dot{\varphi} \cdot l_4) \cdot l_4 + \mu_5(\dot{z}_3 - \dot{z}_4 - \dot{\varphi} \cdot l_5) \cdot l_5] \frac{1}{J},$$

$$\frac{d\dot{z}_4}{dt} = [c_5(z_3 - z_4 - \varphi \cdot l_5) + \mu_5(\dot{z}_3 - \dot{z}_4 - \dot{\varphi} \cdot l_5)] \frac{1}{m_4},$$

где  $J$  – момент инерции кузова массой  $m_3$ , равный

$$J = m_3' \cdot l_3^2 + m_3'' \cdot l_4^2,$$

$m_3', m_3''$  – часть массы кузова, приходящаяся соответственно на передний и задний мост.

### **3.5. Математическое моделирование пневматических приводов технических объектов**

Наиболее характерным и всеобъемлющим примером пневматического привода может являться пневматическая система автомобиля или трактора, которая в общем случае содержит питающую часть (компрессор, регулятор давления, ресивер) и пневмопривод тормозной системы (тормозные краны, ускорительные клапаны, распределители, тормозные камеры).

В задачи моделирования питающей части входит:

- определение времени наполнения ресивера;
- определение конструктивных параметров регулятора давления, обеспечивающих требуемый диапазон регулирования;
- определение устойчивости работы регулятора.

Моделирование работы питающей части пневмопривода основано на математических описаниях типовых пневмоэлементов, топологических уравнениях взаимосвязи, а также нагрузочной характеристике компрессора.

Динамическая схема питающей части представлена на рис. 3.11 и предусматривает режимы работы регулятора давления.

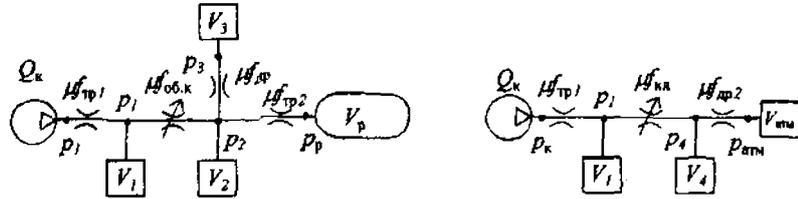


Рис. 3.11. Динамическая схема питающей части пневмопривода: а) наполнение ресивера; б) работа компрессора без нагрузки; где  $V_1$  – объем входной камеры регулятора;  $V_2$  – объем выходной камеры в направлении к ресиверу;  $V_3$  – объем камеры регулирования;  $V_4$  – объем выходной камеры, связанной с атмосферой;  $\mu_{тр1}$  – характеристики сопротивлений трубопровода;  $\mu_{об,к}$  – характеристика обратного клапана;  $\mu_{др}$ ,  $\mu_{др2}$  – характеристики дросселирующих отверстий;  $\mu_{кл}$  – характеристика разгрузочного клапана

Период работы питающей части между двумя срабатываниями регулятора на верхнем и нижнем пределе регулирования состоит из следующих этапов:

- срабатывание регулятора на нижнем пределе ( $p_3 \approx 0,6$  МПа) с дальнейшей работой компрессора под нагрузкой (рис. 3.11, а);
- срабатывание регулятора на верхнем пределе ( $p_3 \approx 0,7$  МПа) с последующей работой компрессора без нагрузки (рис. 3.11, б).

Как известно, массовая подача воздуха компрессором определяется произведением его объемной подачи и плотности воздуха, т.е.  $dm/dt = Q_v \rho$ . Из уравнения состояния воздуха следует, что  $\rho = p/RT$ , где  $p$  – давление воздуха,  $T$  – температура воздуха,  $R$  – газовая постоянная. Тогда

$$\frac{dm}{dt} = \frac{Q_k \cdot p_k}{RT} \quad (3.12)$$

Так как массовая подача компрессора (3.12) равняется расходу через дроссель  $\mu f_{\text{тр1}}$ , то можно записать

$$\frac{Q_k \cdot p_k}{RT} = \frac{\mu f_{\text{тр1}} \cdot v_{\text{кр}}}{RT} \cdot p_k \cdot A \frac{p_k - p_1}{B p_k - p_1}. \quad (3.13)$$

Далее используем линеаризованную характеристику компрессора (рис. 3.10) вида  $Q_k = f(p_k)$  и ее математическое описание

$$Q_k = Q_{\text{max}} - \frac{Q_{\text{max}} - Q_{\text{min}}}{p_{\text{max}} - p_{\text{min}}} \cdot (p_k - p_{\text{min}}). \quad (3.14)$$

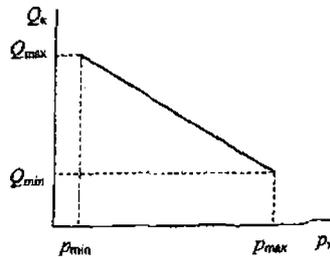


Рис. 3.12. Характеристика компрессора

Подставляя выражение (3.14) в зависимость (3.13), получаем нелинейное алгебраическое уравнение

$$Q_{\text{max}} - \frac{Q_{\text{max}} - Q_{\text{min}}}{p_{\text{max}} - p_{\text{min}}} \cdot (p_k - p_{\text{min}}) = \mu f_{\text{тр1}} \cdot v_{\text{кр}} \cdot A \frac{p_k - p_1}{B p_k - p_1}, \quad (3.15)$$

которое решается в дальнейшем относительно  $p_k$  на каждом шаге интегрирования системы дифференциальных уравнений.

В свою очередь, система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \frac{k \cdot v_{\text{вп}} \cdot A}{V_1} \left( \mu f_{\text{вп1}} \cdot p_k \frac{p_k - p_1}{Bp_k - p_1} - \mu f_{\text{обк}} \cdot p_1 \frac{p_1 - p_2}{Bp_1 - p_2} \right); \\ \frac{dp_2}{dt} &= \frac{k \cdot v_{\text{вп}} \cdot A}{V_2} \left( \mu f_{\text{обк}} \cdot p_1 \frac{p_1 - p_2}{Bp_1 - p_2} - \mu f_{\text{вп}} \cdot p_2 \frac{p_2 - p_3}{Bp_2 - p_3} - \mu f_{\text{вп2}} \cdot p_2 \frac{p_2 - p_p}{Bp_2 - p_p} \right); \\ \frac{dp_3}{dt} &= \frac{k \cdot v_{\text{вп}} \cdot A}{V_3} \cdot \mu f_{\text{вп}} \cdot p_2 \frac{p_2 - p_3}{Bp_2 - p_3}; \\ \frac{dp_p}{dt} &= \frac{k \cdot v_{\text{вп}} \cdot A}{V_p} \cdot \mu f_{\text{вп2}} \cdot p_2 \frac{p_2 - p_p}{Bp_2 - p_p}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Приняв начальные значения для первого режима работы  $p_1 = p_{\text{атм}} = 0,1$  МПа,  $p_2 = p_3 = p_p = 0,6$  МПа, решаем систему дифференциальных уравнений (3.16) совместно с уравнением (3.15). При этом учитывается, что для автотракторных компрессоров  $Q_{\text{max}}$  соответствует  $p_{\text{min}} = p_{\text{атм}} = 0,1$  МПа, а  $Q_{\text{min}}$  соответствует  $p_{\text{max}} = 0,8$  МПа.

Кроме того, условие открытия обратного клапана можно представить зависимостью

$$\mu f_{\text{обк}} = \begin{cases} \mu f_{\text{обк max}}, & \text{если } (p_1/p_2 - 1) > \epsilon; \\ 0, & \text{если } (p_1/p_2 - 1) \leq \epsilon. \end{cases}$$

Для второго режима работы (см. рис. 3.11,б) система дифференциальных уравнений примет вид

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{k \cdot v_{сп} \cdot A}{V_1} \left( \mu f_{к1} \cdot p_k \frac{p_k - p_1}{Bp_k - p_1} - \mu f_{к1} \cdot p_1 \frac{p_1 - p_4}{Bp_1 - p_4} \right);$$

$$\frac{dp_4}{dt} = \frac{k \cdot v_{сп} \cdot A}{V_4} \left( \mu f_{к1} \cdot p_1 \frac{p_1 - p_4}{Bp_1 - p_4} - \mu f_{к2} \cdot p_4 \frac{p_4 - p_{атм}}{Bp_4 - p_{атм}} \right); \quad (3.17)$$

$$\frac{dp_{атм}}{dt} = \frac{k \cdot v_{сп} \cdot A}{V_{атм}} \cdot \mu f_{к2} \cdot p_4 \frac{p_4 - p_{атм}}{Bp_4 - p_{атм}}.$$

Задав начальные значения  $p_1 = 0,7$  МПа;  $p_4 = p_{атм} = 0,1$  МПа, решаем систему (3.17) совместно с уравнением (3.15).

Далее рассмотрим пример математической модели пневмопривода тормозной системы (рис. 3.13), в упрощенном варианте включающей ресивер, тормозной кран и тормозную камеру.

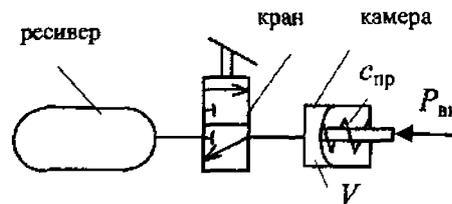


Рис. 3.13. Принципиальная схема пневматического привода тормозной системы

Проведя анализ работы тормозной системы, можно выделить две фазы, которые будут отличаться математическим описанием: фаза торможения и фаза оттормаживания. Соответствующие динамические схемы приведены на рис. 3.14.

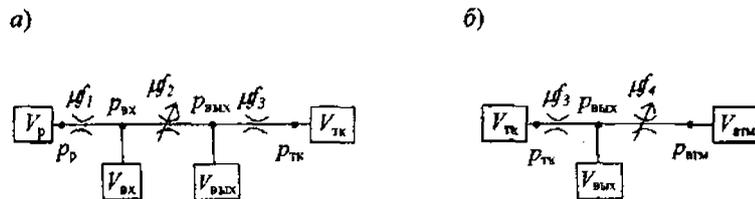


Рис. 3.14. Динамическая схема пневматического привода тормозной системы:  $V_p, V_{tk}, V_{bx}, V_{vbx}$  – объемы соответственно ресивера, тормозной камеры, входной полости крана, выходной полости крана;  $\mu f_1, \mu f_2, \mu f_3, \mu f_4$  – характеристики дросселирующих отверстий и клапанов

Используя рассмотренную ранее методику, составляем систему дифференциальных уравнений, описывающих работу привода.

Фаза торможения:

$$\frac{dp_p}{dt} = -\frac{k \cdot v_{kp} \cdot A}{V_p} \cdot \mu f_1 \cdot p_p \frac{p_p - p_{bx}}{Bp_p - p_{bx}} \quad (\text{"-" соответствует сбросу давления из ресивера});$$

$$\frac{dp_{bx}}{dt} = \frac{k \cdot v_{kp} \cdot A}{V_{bx}} \left( \mu f_1 \cdot p_p \frac{p_p - p_{bx}}{Bp_p - p_{bx}} - \mu f_2 \cdot p_{bx} \frac{p_{bx} - p_{vbx}}{Bp_{bx} - p_{vbx}} \right);$$

$$\frac{dp_{vbx}}{dt} = \frac{k \cdot v_{kp} \cdot A}{V_{vbx}} \left( \mu f_2 \cdot p_{bx} \frac{p_{bx} - p_{vbx}}{Bp_{bx} - p_{vbx}} - \mu f_3 \cdot p_{vbx} \frac{p_{vbx} - p_{tk}}{Bp_{vbx} - p_{tk}} \right);$$

$$\frac{dp_{т.к}}{dt} = \frac{k \cdot v_{кр} \cdot A}{V_{т.к}} \cdot \mu f_3 \cdot p_{вмк} \frac{p_{вмк} - p_{т.к}}{B p_{вмк} - p_{т.к}}$$

При математическом описании тормозной камеры как емкости переменного объема последнее уравнение системы примет вид

$$\frac{dp_{т.к}}{dt} \left( \frac{V_0}{k} + (p_{т.к} - p_{атм}) \cdot \frac{F_{пл}^2}{c_{пр}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{k} \right) - \frac{F_{пл}}{c_{пр} \cdot k} p_{вн} \right) = \mu f_3 v_{кр} p_{вмк} A \cdot \frac{p_{вмк} - p_{т.к}}{B \cdot p_{вмк} - p_{т.к}},$$

где  $c_{пр}$ ,  $F_{пл}$  – жесткость возвратной пружины и площадь диафрагмы.

Фаза оттормаживания:

$$\frac{dp_{т.к}}{dt} = - \frac{k \cdot v_{кр} \cdot A}{V_{т.к}} \cdot \mu f_3 \cdot p_{т.к} \frac{p_{т.к} - p_{вмк}}{B p_{т.к} - p_{вмк}};$$

$$\frac{dp_{вмк}}{dt} = \frac{k \cdot v_{кр} \cdot A}{V_{вмк}} \left( \mu f_3 \cdot p_{т.к} \frac{p_{т.к} - p_{вмк}}{B p_{т.к} - p_{вмк}} - \mu f_4 \cdot p_{вмк} \frac{p_{вмк} - p_{атм}}{B p_{вмк} - p_{атм}} \right);$$

$$\frac{dp_{атм}}{dt} = \frac{k \cdot v_{кр} \cdot A}{V_{атм}} \cdot p_{вмк} \frac{p_{вмк} - p_{атм}}{B p_{вмк} - p_{атм}}.$$

### 3.6. Математическое моделирование гидроприводов технических объектов

В общем случае большинство гидроприводов различных систем (тормозная и гидронавесная системы, системы включения сцепления и управления трансмиссией, и т.д.) можно представить унифицированными фрагментами

динамических схем, приведенных на рис. 3.15, которые отличаются принятыми допущениями и, как следствие, адекватностью отражаемых процессов. При составлении их математического описания использовалась *методика типовых элементов*.

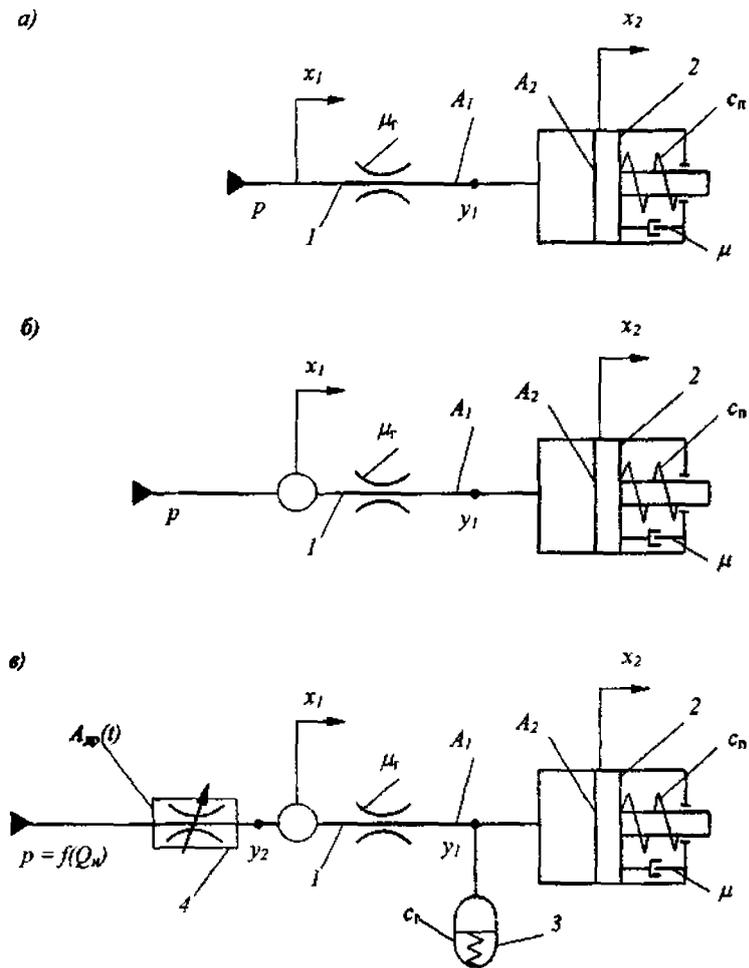


Рис. 3.15. Динамические схемы гидроприводов

Схема на рис. 3.15,а содержит один элемент, обладающий инерционными свойствами (механический подвижный элемент 2). Остальные элементы безинерционные, поэтому математическое описание ветви можно составить, используя только одну независимую обобщенную координату  $x_2$ .

Выпишем уравнения всех компонентов ветви:

$$(\mu_{rn} \cdot \dot{x}_1 + \mu_{rn} \cdot \dot{x}_1^2 \cdot \text{sign } \dot{x}_1) \cdot A_1 = A_1 \cdot (p - p_{y1}),$$

$$m \cdot \ddot{x}_2 + \mu \cdot \dot{x}_2 = A_2 \cdot p_{y1} - c_n \cdot x_2,$$

где  $p_{y1}$  – давление жидкости в узле взаимодействия  $y_1$ ;  $A_1$ ,  $A_2$  – площадь трубопровода и поршня соответственно.

Используя топологическое уравнение  $\dot{x}_1 = (A_2/A_1) \cdot \dot{x}_2$  и решая совместно компонентные уравнения, получаем дифференциальное уравнение ветви:

$$\frac{1}{A_2} (m \ddot{x}_2 + \mu \dot{x}_2 + c_n x_2) + \mu_{rn} \frac{A_2}{A_1} \dot{x}_2 + \mu_{rn} \frac{A_2^2}{A_1^2} \cdot \dot{x}_2^2 \cdot \text{sign } \dot{x}_2 = p.$$

Для фрагмента схемы на рис.3.15, б аналогичные выкладки приводят к уравнению ветви:

$$\frac{1}{A_2} \left[ \left( m_1 \frac{A_2^2}{A_1^2} + m_2 \right) \ddot{x}_2 + \mu \dot{x}_2 + c_n x_2 \right] + \mu_{rn} \frac{A_2}{A_1} \dot{x}_2 + \mu_{rn} \frac{A_2^2}{A_1^2} \cdot \dot{x}_2^2 \cdot \text{sign } \dot{x}_2 = p.$$

Таким образом, несмотря на то, что в рассматриваемой ветви два инерционных элемента, получено одно дифференциальное уравнение с одной неиз-

вестной  $x_2$ , принятой в качестве независимой обобщенной координаты. Значение координаты  $x_1$  определяется из уравнения связи:  $x_1 = (A_2/A_1) \cdot x_2$ .

Если функционально законченные элементы, обладающие инерционными свойствами, разделены между собой упругим элементом, отражающим сжимаемость жидкости, их координаты оказываются независимыми. Так, динамическая модель ветви гидромеханической системы, представленная на рис.3.15,в, имеет две степени свободы, и для ее математического описания необходимо использовать две независимые координаты  $x_1$  и  $x_2$ . Уравнения компонентов ветви примут вид

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (\mu_{rn} \dot{x}_1 + \mu_{rn} \cdot \dot{x}_1^2 \cdot \text{sign } \dot{x}_1) \cdot A_1 = A_1 \cdot (p_{y2} - p_{y1});$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + \mu \cdot \dot{x}_2 = A_2 \cdot p_{y1} - c_n \cdot x_2;$$

$$c_r \cdot (x_1 \cdot A_1 - x_2 \cdot A_2) = A_1 \cdot p_{y1};$$

$$\frac{A_1 \cdot \rho}{2} \cdot \left( \frac{A_1 \cdot \dot{x}_1}{\varepsilon \cdot A_{sp}} \right)^2 \cdot \text{sign } \dot{x}_1 = A_1 \cdot (p - p_{y2}).$$

Решая совместно полученные выражения, в результате получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{A_1} \cdot m_1 \cdot \ddot{x}_1 + \mu_{rn} \cdot \dot{x}_1 + \left[ \mu_{rn} + \frac{\rho}{2} \cdot \left( \frac{A_1}{\varepsilon \cdot A_{sp}} \right)^2 \right] \cdot \dot{x}_1^2 \cdot \text{sign } \dot{x}_1 + c_r \cdot \left( x_1 - \frac{A_2}{A_1} \cdot x_2 \right) = p;$$

$$\frac{1}{A_2} \cdot (m_2 \cdot \ddot{x}_2 + \mu \cdot \dot{x}_2 + c_n \cdot x_2) + c_r \cdot \left( \frac{A_2}{A_1} \cdot x_2 - x_1 \right) = 0.$$

## 4. АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И СОСТОЯНИЙ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 4.1. Качественный анализ математических моделей

В общем случае *анализ заключается* в решении систем уравнений, составляющих математическую модель технического объекта, и определении по результатам решения показателей качества и эффективности.

*Основными задачами анализа* являются выявление *функциональной работоспособности* объекта и оценка выполнения *технических требований* к объекту.

В свою очередь, функциональная работоспособность системы определяется ее *устойчивостью*, т.е. способностью системы возвращаться в исходное состояние *равновесия* после *исчезновения* внешних воздействий.

Оценка степени выполнения технических требований осуществляется на основе *показателей качества* процесса функционирования, которые характеризуют способность системы удерживать выходные параметры в заданных пределах и на всех режимах работы.

Предварительный *качественный анализ* математической модели при использовании соответствующих методов позволяет без решения системы уравнений оценить физические свойства технической системы, ее устойчивость и характер переходных процессов, обосновать необходимость упрощения, а также выбрать метод численного решения модели.

Одним из методов качественного анализа математической модели является использование матрицы, элементами которой являются коэффициенты системы дифференциальных уравнений.

Если описывающие математическую модель дифференциальные уравнения представляют собой систему линейных однородных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dv_i}{dt} = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n,$$

то их аналитическое решение можно представить в виде

$$v_i = \sum_{j=1}^n v_{ij} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot e^{\lambda_j t}, \quad i = 1, n, \quad (4.1)$$

где  $c_{ij}$  – постоянная интегрирования;  $\lambda_j$  – собственные значения матрицы  $A$  постоянных коэффициентов  $a_{ij}$ ;  $n$  – суммарный порядок системы уравнений.

Собственные значения  $\lambda_j$  находят, составив определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.2)$$

Раскрывая этот определитель, получают полином степени  $n$ , называемый характеристическим:

$$b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n = 0, \quad (4.3)$$

где  $b_i$  – коэффициенты полинома.

Корни полинома и являются собственными значениями  $\lambda_j$ .

Для вычисления собственных значений существует множество *прямых и итерационных* методов.

В *прямых* методах (методы Крылова, Леверье и др.) по определенному правилу вычисляются коэффициенты  $b_i$  полинома, после чего с помощью какого-либо численного метода находятся собственные значения  $\lambda_j$ , как корни этого полинома.

В *итерационных* методах (метод Якоби и др.) коэффициенты характеристического полинома непосредственно не вычисляются, а в ходе некоторой итерационной последовательности находятся одно или несколько собственных значений  $\lambda_j$ . Эти методы более трудоемки и чаще реализуются на ЭВМ.

Полученные таким образом *собственные значения* характеристического уравнения характеризуют важнейшие свойства физической системы и свойства уравнений математической модели. Они позволяют оценить устойчивость системы без решения системы дифференциальных уравнений, определить качественный характер переходных процессов, а также жесткость (степень обусловленности) системы.

Так, к жестким, т.е. плохо обусловленным системам дифференциальных уравнений, относят те, у которых коэффициент обусловленности

$$\mu = \frac{|\lambda_j|_{\max}}{|\lambda_j|_{\min}} \geq 10^5; \quad j \in [1; n],$$

где  $|\lambda_j|_{\max}$  и  $|\lambda_j|_{\min}$  – максимальные и минимальные по модулю показатели из спектра собственных значений.

Плохо обусловленные системы, как правило, необоснованно сложные, решение которых затруднено и сопровождается повышенными погрешностями. Такие системы требуют упрощения.

Следует отметить, что большинство реальных физических систем нелинейно, но на ранних стадиях проектирования для их описания можно применять системы линеаризованных дифференциальных уравнений и оценивать устойчивость также по спектру собственных значений  $\lambda_j$ . Линеаризацию осуществляют путем разложения нелинейной функции в ряд Тейлора, в результате которой матрица  $A$  коэффициентов системы содержит элементы, являющиеся частными производными от нелинейной вектор-функции  $\vec{F}(\vec{v}) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  по фазовым координатам системы в точке фазового пространства, соответствующей исходному режиму, т.е.  $v_j = v_{j0}$ :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v_1} & \frac{\partial f_1}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial v_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_1} & \frac{\partial f_2}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial v_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial v_1} & \frac{\partial f_n}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial v_n} \end{bmatrix}.$$

Среди множества корней  $\lambda_j$  полинома могут быть вещественные корни  $\lambda_j = \alpha_j$ , комплексные  $\lambda_j = \alpha_j \pm i\omega_j$ , мнимые  $\lambda_j = \pm i\omega_j$  и нулевые  $\lambda_j = 0$ . Рассмотрим их влияние на характер переходного процесса, определяемого слагаемыми в выражении (4.1).

Как видно из рис. 4.1, характеристики  $b$ -г в отличие от характеристики  $a$  несут колебательный характер с частотой колебаний, определяемой мнимой частью корней  $\omega_j$ , однако сходимость процесса (затухание) во всех случаях определяется прежде всего знаком вещественной части  $\alpha_j$ .

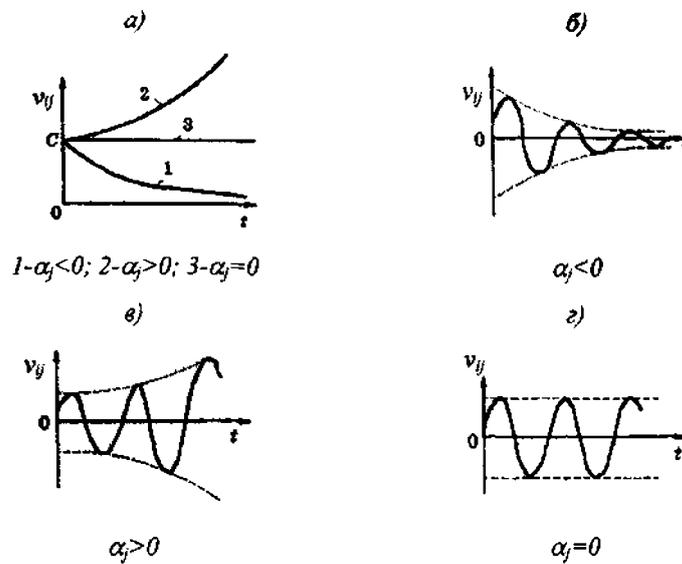


Рис. 4.1. Графики свободного движения: а – при вещественных корнях полинома; б-г – при комплексных корнях полинома

Таким образом, условие устойчивости линейной системы имеет вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_j t},$$

$$\text{где } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_j t} = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha_j < 0; \\ \text{не существует либо равен } c, & \text{при } \alpha_j = 0; \\ \infty & \text{при } \alpha_j > 0, \end{cases}$$

т.е.: 1. Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы вещественные части всех собственных значений  $\lambda_j$  системы уравнений математической модели были отрицательны.

2. Если в спектре  $\lambda_j$  имеется хотя бы одно значение с положительной вещественной частью, система будет неустойчивой.

3. Если хотя бы одно значение  $\lambda_j$  нулевое или имеется пара мнимых собственных значений, а вещественные части всех остальных собственных значений отрицательны, то линейная система находится на границе устойчивости.

Кроме того, среди колебательных систем выделяют такие, у которых  $|\omega_j| \gg |\alpha_j|$  для некоторых собственных значений  $\lambda_j$ . Такие системы называются *многoperiodными*, так как они имеют медленно затухающие переходные процессы. Если же все собственные значения  $\lambda_j$  имеют только вещественные корни, то характер переходных процессов называется *апериодическим*.

В том случае когда система дифференциальных уравнений, составляющая математическую модель, неоднородна, т.е.

$$\frac{dv_i}{dt} = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n + f_i(t), \quad (4.4)$$

то оценку качества переходного процесса осуществляют также по общему решению (4.1) однородного дифференциального уравнения (однородное уравнение получают из неоднородного, приравнивая к нулю вектор-функцию  $\bar{F}(t)$  внешних воздействий), т.к. характер изменения переходной составляющей зависит только от физических свойств самой системы, описываемых однородной системой.

Кроме того, оценку устойчивости можно осуществлять, используя алгебраические критерии устойчивости Гурвица, Рауса и др.

В частности, критерий по Гурвицу определяет устойчивость системы по положительному знаку коэффициента  $b_0$  и всех диагональных определителей, полученных из определителя Гурвица, составленного из коэффициентов  $b_j$  характеристического уравнения (4.3):

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & b_7 & \dots & 0 \\ b_0 & b_2 & b_4 & b_6 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & b_5 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{vmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\text{т.е. } b_0 > 0; \quad \Delta_1 = b_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 \\ b_0 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix} > 0; \dots; \quad \Delta_n > 0.$$

Условие, при котором система находится на границе устойчивости:  $b_n \cdot \Delta_{n-1} = 0$ , т.е.  $b_n = 0$  или  $\Delta_{n-1} = 0$ .

**Пример.** Оценить устойчивость двухмассовой системы поддресоривания, математическая модель которой рассмотрена в разделе 2.3. В качестве исходных данных для расчета принять следующие значения  $m_1 = 5 \cdot 10^3$  кг;  $m_2 = 1 \cdot 10^3$  кг;  $c_1 = 1 \cdot 10^6$  Н/м;  $c_2 = 2 \cdot 10^6$  Н/м;  $\mu_1 = 30 \cdot 10^3$  Н·с/м;  $\mu_2 = 3,0 \cdot 10^3$  Н·с/м.

Система неоднородных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt} = [c_1 \cdot (x_2 - x_1) + \mu_1 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)] \cdot \frac{1}{m_1};$$

$$\frac{dx_2}{dt} = [-c_1 \cdot (x_2 - x_1) + c_2 \cdot (h - x_2) - \mu_1 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \mu_2 \cdot (h - \dot{x}_2)] \cdot \frac{1}{m_2}.$$

Преобразуем уравнения к виду (4.4), введя замену  $z_1 = v_1 = \dot{x}_1$ ,  
 $z_2 = v_2 = \dot{x}_2$ ,  $z_3 = F_{v_1} = c_1(x_2 - x_1)$ ,  $z_4 = F_{v_2} = c_2(h - x_2)$ .

$$\frac{dz_1}{dt} = -\frac{\mu_1}{m_1} z_1 + \frac{\mu_1}{m_1} z_2 + \frac{1}{m_1} z_3;$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{\mu_1}{m_2} z_1 - \frac{\mu_1 + \mu_2}{m_2} z_2 - \frac{1}{m_2} z_3 + \frac{1}{m_2} z_4 + \frac{\mu_2}{m_2} v_h;$$

$$\frac{dz_3}{dt} = -c_1 z_1 + c_1 z_2;$$

$$\frac{dz_4}{dt} = -c_2 z_2 + c_2 v_h.$$

Матрица коэффициентов однородной системы дифференциальных уравнений примет вид

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\mu_1}{m_1} & \frac{\mu_1}{m_1} & \frac{1}{m_1} & 0 \\ \frac{\mu_1}{m_2} & -\frac{\mu_1 + \mu_2}{m_2} & -\frac{1}{m_2} & \frac{1}{m_2} \\ -c_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение системы получаем, раскрывая определитель вида (4.2):

$$\lambda^4 + 38\lambda^3 + 3,215 \cdot 10^3 \lambda^2 + 10,6 \cdot 10^3 \lambda + 0,4 \cdot 10^6 = 0. \quad (4.6)$$

Далее, составив определитель Гурвица вида (4.5)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 38 & 10,6 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 1 & 3,215 \cdot 10^3 & 0,4 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 38 & 10,6 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3,215 \cdot 10^3 & 0,4 \cdot 10^6 \end{vmatrix},$$

определяем  $b_0$  и диагональные определители:  $b_0 = 1$ ;  $\Delta_1 = 38$ ;  $\Delta_2 = 111,57 \cdot 10^3$ ;  $\Delta_3 = 605,042 \cdot 10^6$ ;  $\Delta_4 = 242,0168 \cdot 10^{12}$ .

Таким образом, все полученные значения положительны, что свидетельствует об устойчивости системы.

Для более детального качественного анализа математической модели необходимо найти корни характеристического уравнения (4.6), являющиеся собственными значениями  $\lambda_j$  системы.

Решая полином (4.6) 4-й степени итерационным методом вычисления (методом Ньютона) и используя при этом выражения для комплексных чисел, получаем

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -0,9644 \pm i \cdot 11,4823; \\ \lambda_{3,4} &= -18,0356 \pm i \cdot 51,8398. \end{aligned}$$

Таким образом, качественный анализ математической модели по собственным значениям характеристического уравнения указывает на:

- 1) устойчивость системы, так как все вещественные значения корней  $\alpha_j < 0$ ;
- 2) хорошую обусловленность системы, так как

$$\mu = \frac{|\lambda_j|_{\max}}{|\lambda_j|_{\min}} = \sqrt{\frac{\alpha_{3,4}^2 + \omega_{3,4}^2}{\alpha_{1,2}^2 + \omega_{1,2}^2}} \approx 4,76 < 10^5;$$

3) быстро затухающие колебания переходного процесса, так как

$$\frac{|\omega_{3,4}|}{|\alpha_{3,4}|} \approx 11,9, \quad \frac{|\omega_{1,2}|}{|\alpha_{1,2}|} \approx 2,87.$$

#### 4.2. Моделирование и анализ статических состояний

Режим функционирования системы называется *статическим*, если при постоянных внешних воздействиях система находится в установившемся равновесном состоянии и ее фазовые координаты при этом постоянны.

В процессе проектирования технической системы решаются следующие *задачи статики*: определение положений устойчивого равновесия системы; анализ распределения фазовых координат и переменных на установившихся режимах работы; определение начальных условий, необходимых для интегрирования системы дифференциальных уравнений; определение начальных и конечных условий при оценке качества переходных процессов по переходным характеристикам и др.

Существующие подходы в решении поставленных задач различаются используемыми математическими моделями и методами решения систем уравнений.

Математическая модель статического состояния представляет собой систему линейных или нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\bar{F}(\bar{V})=0. \quad (4.7)$$

Но статическое состояние системы можно определить и на основе исходной математической модели, представляющей собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}(\bar{V}), \quad (4.8)$$

численное решение которых при неизменных внешних воздействиях через конечный отрезок времени  $t_n$  приводит к стационарной точке  $\bar{V}^*$  (к ее координатам), в которой  $d\bar{V}/dt = 0$ .

Более экономичным является подход, основанный на применении системы (4.7), уравнения которой могут быть получены из исходной системы (4.8) в предположении, что  $d\bar{V}/dt = 0$ . Для решения полученных систем алгебраических уравнений существует множество эффективных численных методов.

Различают прямые и итерационные методы решений. К итерационным относят методы (метод простой итерации, Зейделя, Ньютона и др.) нахождения последовательности векторов  $\bar{V}_0, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_k$ , которая сходится к точному решению. При этом осуществляется переход из  $k$ -й точки фазового пространства переменных  $\bar{V}$  в  $(k+1)$ -ю, называемый *итерацией*. Способ перехода определяется алгоритмом итерационного метода и отличается сходимостью итераций  $(\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{V}_k = \bar{V}^*)$  и скоростью сходимости к точному решению.

При плохой обусловленности системы уравнений, характерной для математической модели технических объектов, скорость сходимости итераций и точность получаемых результатов низки. В этом случае применяют прямые методы решения, одним из которых является метод Гаусса, представляющий пря-

ное нахождение неизвестных  $n$ -мерного вектора  $\bar{X}$  системы линейных алгебраических уравнений вида

$$A\bar{X} = \bar{B},$$

где  $A$  – квадратная матрица коэффициентов  $a_{ij}$ ;  $\bar{B}$  – вектор свободных членов.

**Пример.** Проанализируем статическое состояние линейной системы путем определения геометрических координат и усилий в упругих элементах в состоянии покоя системы, математическая модель которой рассмотрена в теме "Уравнения Лагранжа 2-го рода".

Полагая  $\ddot{\varphi}_i = 0$  и  $\dot{\varphi}_i = 0$ , систему дифференциальных уравнений преобразуем в систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных геометрических координат  $\varphi_i$ :

$$M_1 - c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = 0;$$

$$c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - c_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) = 0;$$

$$-M_2 + c_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) = 0.$$

Задавшись значениями внешних воздействий  $M_1$  и  $M_2$ , определяем координаты  $\varphi_{10}$ ,  $\varphi_{20}$ ,  $\varphi_{30}$  и далее силы в упругих элементах  $M_{y10}$ ,  $M_{y20}$ , согласно выражения  $M_{y,i0} = c_i \cdot (\varphi_{i,0} - \varphi_{(i+1),0})$ .

Параметры компонентов реальной физической системы обычно непостоянны и представляют собой некоторые нелинейные функции фазовых координат и их производных. Если, как указывалось ранее, эти зависимости можно линеаризовать без существенного ущерба для точности определения выходных

параметров технической системы, то при проектировании целесообразно использовать линейные модели. Однако во многих случаях линеаризация недопустима из-за больших погрешностей и искажения физической сущности моделируемых процессов. В этом случае используют нелинейные математические модели, анализ которых сопряжен с определенными особенностями, в частности с определением матрицы  $A$  (см. предыдущую тему) в частных производных, элементы которой, в свою очередь, непостоянны в отличие от линейных систем.

Задачами статического анализа таких систем так же, как систем, описываемых линейными уравнениями, является определение параметров, обеспечивающих заданные значения, т.е. для гидросистем, определение диаметров трубопроводов, дросселей, площадей проходных сечений регулирующей и распределительной аппаратуры, подачи насосов и др., обеспечивающих заданные значения расходов и давлений в различных точках гидромагистрали. В ходе анализа механических систем исследуется возможность обеспечения необходимых усилий и перемещений рабочих органов машины или механизма.

Математическая модель статических состояний нелинейных технических систем представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений, решение которой может осуществляться различными итерационными методами.

**Пример.** Определить давление и расходы жидкости в установившемся режиме гидросистемы, схема которой приведена на рис. 3.15 (без возвратной пружины). Так как статическое состояние системы достигается при постоянных внешних воздействиях (подача, давление насоса и потребителей постоянны), то

$$\frac{dQ_i}{dt} = 0 \text{ или } \frac{dx_i}{dt} = 0 \text{ и } \frac{dp_{y_i}}{dt} = 0.$$

Тогда система нелинейных алгебраических уравнений примет вид

$$\mu_{rn} \cdot \dot{x}_1 + \left( \mu_{rn} \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{\rho}{2} \left( \frac{A_1 \cdot \dot{x}_1}{\varepsilon \cdot A_{sp}} \right)^2 \right) \operatorname{sign} \dot{x}_1 + c_r \left( x_1 - \frac{A_2}{A_1} \cdot x_2 \right) = p_n; \quad (4.9)$$

$$\frac{\mu}{A_2} \cdot \dot{x}_2 - c_r \left( x_1 - \frac{A_2}{A_1} \cdot x_2 \right) = 0.$$

Обозначив давление, создаваемое упругим элементом через

$$p_y = c_r \left( x_1 - \frac{A_2}{A_1} \cdot x_2 \right),$$

а также учитывая, что

$$\frac{dp_y}{dt} = c_r \left( \dot{x}_1 - \frac{A_2}{A_1} \cdot \dot{x}_2 \right) = 0,$$

запишем систему (4.9) в виде

$$\mu_{rn} \cdot \dot{x}_1 + \left( \mu_{rn} + \frac{\rho}{2} \left( \frac{A_1}{\varepsilon \cdot A_{sp}} \right)^2 \right) \cdot \dot{x}_1^2 \cdot \operatorname{sign} \dot{x}_1 + p_y = p_n,$$

$$\frac{\mu}{A_2} \cdot \dot{x}_2 - p_y = 0,$$

$$\dot{x}_1 - \frac{A_2}{A_1} \cdot \dot{x}_2 = 0.$$

Полученную систему решают относительно  $\dot{x}_1, \dot{x}_2 (Q_1, Q_2)$  и  $p_y$ , задавшись давлением  $p_n$  насоса и параметрами привода  $\mu_{гн}, \mu_{тн}, \varepsilon, A_1, A_{др}, c_r$ , либо относительно неизвестных параметров привода, задавшись расходами  $Q_1$  и  $Q_2$ .

Для качественного анализа данной системы можно воспользоваться методикой, рассмотренной в предыдущей теме, предварительно определив матрицу  $A$  коэффициентов системы в частных производных от нелинейной вектор-функции:

$$A = \begin{bmatrix} \mu_{гн} + 2\mu_{тн} + \rho \left( \frac{A_1}{\varepsilon \cdot A_{др}} \right)^2 \cdot |\dot{x}_1| & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\mu}{A_2} & -1 \\ 1 & -\frac{A_2}{A_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица в данном случае переменная, так как ее элементы зависят от фазовой координаты системы  $\dot{x}_1$ .

### 4.3. Моделирование и анализ переходных процессов

Для технической системы наиболее характерно функционирование в условиях непрерывно изменяющихся возмущающих и управляющих внешних воздействий (внешняя среда, система управления объектом и т.п.). Состояние системы при этом оказывается неустановившимся. Это состояние характеризуется изменением во времени фазовых координат системы. Такой режим работы системы, описываемый дифференциальными уравнениями, называют динамическим, а переход из одного установившегося состояния в другое – *переходным*

*процессом*. Моделирование переходного процесса позволяет исследовать быстродействие, точность, динамичность, колебательность и другие свойства технической системы. Для численной оценки этих свойств вводится система *показателей качества* переходного процесса, которые наряду с показателями эффективности (производительность, экономичность и др.) являются выходными параметрами, определяющими технический уровень объекта.

Таким образом, задача анализа переходного процесса включает три этапа:

- интегрирование системы дифференциальных уравнений;
- определение показателей качества;
- оценка степени выполнения технических требований к проектируемой системе.

В зависимости от характера изменения вектора внешних воздействий и внутренних физических свойств технической системы ее математическая модель может быть детерминированной или вероятностной. В *детерминированной* модели переходного процесса задают одну или несколько переменных функций внешних воздействий, а остальные воздействия принимают постоянными. Причем переход от начального к конечному значению этой функции сопровождается в устойчивой технической системе переходом от начального установившегося статического состояния, когда вектор фазовых координат  $\vec{V}_0 = \text{const}$ , в новое (конечное)  $\vec{V}_\infty = \text{const}$  установившееся статическое состояние системы. Время  $t_n$  этого перехода, в течение которого  $\vec{V} = \text{var}$ , называется *временем переходного процесса*. Исходное же состояние системы, т.е. значение вектора  $\vec{V}_0$ , определяется из условия  $\dot{\vec{V}}_0 = 0$ . При этом используются методы статического анализа, изложенные в предыдущей теме.

Если компоненты вектора внешних воздействий непрерывно изменяются во времени, то техническая система будет находиться в непрекращающемся переходном процессе, что характерно для реальных объектов. Такая *вероятност-*

ная модель используется при анализе статистических характеристик, когда внешние воздействия представляются случайными функциями.

Так как математическая модель технической системы на макроуровне представляет собой систему как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений, то основным способом получения приближенного решения является применение численных методов интегрирования. Выбор того или иного метода (способа вычисления) влияет на точность получаемых результатов, устойчивость алгоритма вычислительного процесса, затраты машинного времени на решение задачи.

В общем виде алгоритм численного метода интегрирования представляет собой дискретизацию независимой переменной  $t$  с некоторым шагом  $h$  (шаг интегрирования), т.е.  $h = t_{k+1} - t_k$  и алгебраизацию системы дифференциальных уравнений. Интервал интегрирования  $T_k$  выбирают из условия завершения переходного процесса, т.е.  $T_k > t_n$ . Алгебраизация осуществляется заменой производных фазовых координат отношениями конечных разностей по выражению вида

$$\frac{dv_k}{dt} \approx \frac{v_{k+1} - v_k}{h},$$

где  $v_k$  и  $v_{k+1}$  – значения фазовой переменной в  $k$ -й и  $(k+1)$ -й точках дискретного временного пространства.

Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений вида  $\dot{\bar{V}} = \bar{F}(\bar{V}, t)$  преобразуется к виду

$$\bar{V}_{k+1} = \bar{V}_k + h \cdot \bar{F}(\bar{V}_k, t). \quad (4.10)$$

Полученное выражение соответствует простейшей итерационной формуле, предложенной Эйлером, и иллюстрирует переход от исходной системы дифференциальных уравнений к алгебраическим. Однако полученные значения вычисляются приближенно. Для оценки получаемой погрешности разложим вектор-функцию  $\bar{V}(t)$  в ряд Тейлора:

$$\bar{V}(t_{k+1}) = \bar{V}_k + \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot h + \frac{1}{2!} \frac{d^2\bar{V}_k}{dt^2} h^2 + \dots \quad (4.11)$$

Погрешность при использовании этой формулы определяется величиной остаточного члена ряда. Таким образом, порядок точности вычислений определяется порядком старшей производной, сохраняемой в ряде Тейлора. Поэтому при необходимости повышения порядка точности формулы численного интегрирования, полученной на основе ряда Тейлора, необходимо использовать численные методы, предусматривающие вычисление членов ряда с более высоким порядком производных. Так, сравнивая выражения (4.10) и (4.11), можно заметить, что формула Эйлера имеет первый порядок точности.

Помимо порядка точности методы классифицируются на одношаговые и многошаговые.

В *одношаговых* методах для определения  $\bar{V}_{k+1}$  используется только значение  $\bar{V}_k$  (в одной предыдущей точке, соответствующей моменту времени  $t_k$ ). В *многошаговых* методах для определения  $\bar{V}_{k+1}$  используются результаты нескольких  $p$  предыдущих шагов, т.е.  $\bar{V}_{k-j+1}$ , где  $j = 0, \dots, p$ , число  $p$  при этом называется порядком многошагового метода.

В практике проектирования технических объектов широко применяют методы Эйлера и Рунге-Кутты, относящиеся к одношаговым, построение алгоритмов которых осуществлено на основе ряда Тейлора. Методы отличаются по-

грешностью вычислений (остаточным членом ряда Тейлора), которая, в свою очередь, может значительно возрастать (накапливаться) с увеличением количества шагов и приводить тем самым к *неустойчивости вычислительного процесса*.

Устойчивость численного интегрирования помимо погрешности, заложенной в самом методе, связана с характером решаемой задачи, т.е. зависит и от конкретной системы дифференциальных уравнений. Так, один и тот же метод может быть эффективным при решении одной задачи и неприемлемым для решения другой. В этой связи условие устойчивости вычислительного алгоритма представляет собой взаимосвязь шага  $h$  интегрирования и собственных значений  $\lambda$ , матрицы коэффициентов системы дифференциальных уравнений и для одношаговых методов имеет вид

$$h < \frac{2}{|\lambda|_{\max}} \quad \text{для метода Эйлера;}$$

$$h < \frac{2,78}{|\lambda|_{\max}} \quad \text{для метода Рунге-Кутты 4-го порядка.}$$

Как видно из неравенства, для метода Рунге-Кутты условие немного "слабее", что объясняется степенью точности самого метода.

Следует отметить, что значение шага интегрирования должно быть оптимальным, так как чем меньше  $h$ , тем меньше погрешность вычислений, но при этом возрастает число шагов интегрирования  $N$ , что потребует повышенных вычислительных ресурсов.

В качестве примера определим максимальный шаг интегрирования методами Эйлера и Рунге-Кутты 4-го порядка системы дифференциальных уравнений, рассмотренной в разделе 4.1:

для метода Эйлера 
$$h_{\max} < \frac{2}{|\lambda|_{\max}} = \frac{2}{54,9} = 0,036;$$

для метода Рунге-Кутты 4-го порядка 
$$h < \frac{2,78}{|\lambda|_{\max}} = \frac{2,78}{54,9} = 0,05.$$

Как отмечалось ранее, следующим этапом за процессом интегрирования системы дифференциальных уравнений в анализе переходного процесса является определение показателей качества и оценка степени выполнения технических требований.

Любая фазовая координата  $v(t)$  технической системы может быть представлена двумя составляющими:

$$v(t) = v_y(t) + v_n(t),$$

где  $v_y(t)$  – вынужденная установившаяся составляющая, определяемая частным решением неоднородных дифференциальных уравнений;  $v_n(t)$  – переходная составляющая, характеризующая свободный переходной процесс и определяемая общим решением однородного дифференциальной уравнения (без правой части).

В этой связи различают две группы показателей:

- показатели качества переходного процесса;
- показатели, характеризующие вынужденную установившуюся составляющую, по которой определяют точность выполнения алгоритма функционирования в установившемся режиме.

Более подробно остановимся на первой группе. Наиболее часто качество переходного процесса оценивают по графику переходной характеристики.

*Переходной характеристикой*  $v_n(t)$  называют реакцию технической системы на ступенчатое воздействие вида

$$u(t) = \begin{cases} u_0, & t < 0; \\ u_1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Характеристику  $v_n(t)$  определяют посредством численного интегрирования системы дифференциальных уравнений. Эта характеристика представляет собой график изменения во времени некоторой фазовой координаты  $v$ , при переходе из одного (начального) установившегося статического состояния в другое (конечное). При этом начальные и конечные значения всех фазовых координат должны быть предварительно определены на основе методов анализа статических состояний.

Для оценки качества переходного процесса используют следующие показатели:

- *время переходного процесса*  $t_n$ , характеризующее длительность пребывания технической системы в неустановившемся состоянии (динамическом режиме);
- *коэффициент динамичности*  $k_n$ , характеризующий максимальное отклонение фазовой координаты от ее значения в установившемся конечном состоянии  $v_k$ ;
- *декремент колебаний*  $D$ , характеризующий скорость затухания колебаний в технической системе;
- *колебательность*  $K$ , определяющую число колебаний за время  $t_n$ ;
- *интегральные оценки*  $I$ , характеризующие отклонение графика переходного процесса от идеальной или эталонной характеристики.

Условие завершения переходного процесса примет вид

$$|v(t) - v_{\infty}| \leq \Delta, \quad (4.12)$$

где  $\Delta$  – величина, определяющая область изменения фазовой переменной  $v(t)$ , в которой можно пренебречь различием  $v(t)$  и  $v_{\infty}$ .

Величина  $\Delta$  называется коридором стабилизации и определяется по выражению

$$\Delta = \Delta v \cdot \varepsilon, \quad (4.13)$$

где коэффициент  $\varepsilon$  характеризует ширину коридора стабилизации, обычно  $\varepsilon = 0,05$ ;  $\Delta v = |v_{\infty} - v_0|$  – статическое отклонение.

Таким образом, время  $t_n$  переходного процесса определяют по графику переходной характеристики с нанесенными значениями  $\Delta$  исходя из условия (4.12), т.е.  $t_n$  равно интервалу времени от момента  $t_0$ , при котором осуществляется подача ступенчатого сигнала  $u(t)$ , до момента, соответствующего последнему пересечению переходной характеристикой линии коридора стабилизации  $\Delta$  (рис.4.2).

Время переходного процесса характеризует быстродействие технической системы. Чем меньше  $t_n$ , тем быстрее наступает стабилизация.

*Коэффициент динамичности* определяется по формуле

$$k_d = 1 + A_{\max} / \Delta v,$$

где  $A_{\max}$  – максимальная амплитуда отклонения фазовой координаты  $v$  от конечного установившегося ее значения  $v_{\infty}$ :

$$A_{\max} = |v_n - v_{\infty}|_{\max},$$

где  $v_{ji}$  –  $i$ -й экстремум фазовой координаты.

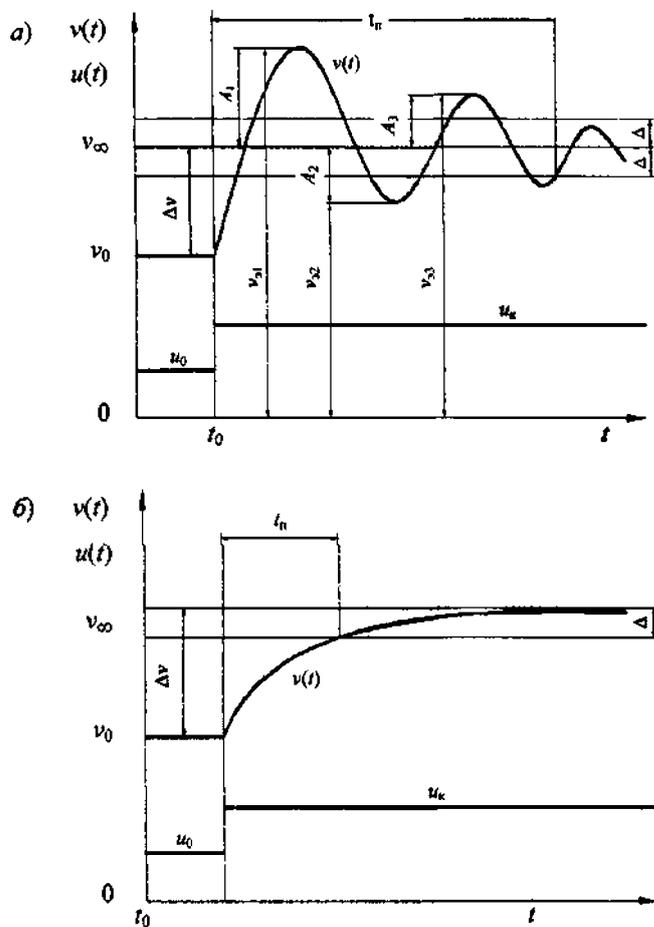


Рис. 4.2. Определение показателей качества переходных процессов:  
 а – при колебательных процессах; б – при аperiodических процессах

Значение  $k_z$  показывает, во сколько раз максимальное динамическое отклонение фазовой координаты в переходном процессе превышает статическое

отклонение  $\Delta v$ . Чем выше  $k_d$ , тем больше отклонение характеристик работы системы от оптимальных и тем хуже ее динамические свойства. В большинстве случаев при проектировании технических объектов принимают допустимое значение  $k_d = 1,25 \dots 1,45$ .

*Декремент колебаний* определяют по формуле

$$D = \frac{A_1}{A_2} = \frac{|v_{s1} - v_\infty|}{|v_{s2} - v_\infty|},$$

где  $A_1, A_2$  – амплитуды двух смежных отклонений фазовой координаты от значения  $v_\infty$ .

Чем выше  $D$ , тем быстрее затухают колебания.

Колебательность  $K$  определяется числом амплитудных значений  $v_s$  за время  $t_n$  (или числом полупериодов колебаний). Значение  $K$  не должно превышать 5.

В технических системах с апериодическими переходными процессами (рис. 4.2,б) фазовые координаты  $v$ , не достигают экстремальных значений, поэтому для них  $k_d = 1$ , а в связи с отсутствием колебаний  $D$  и  $K$  не оцениваются. Динамичность для таких процессов минимальна, но для многих реальных систем она недостижима.

*Интегральные оценки* позволяют обобщенно оценить быстродействие системы и отклонения ее фазовых координат от установившихся значений.

При этом используют интеграл вида

$$I, = \int_0^{t_n} |v(t) - v_\infty| dt. \quad (4.14)$$

Интеграл  $I$ , численно равен площади, ограниченной осью координат, графиком  $v(t)$  и линией  $v_\infty$  (заштрихованная площадь рис.4.3, а).

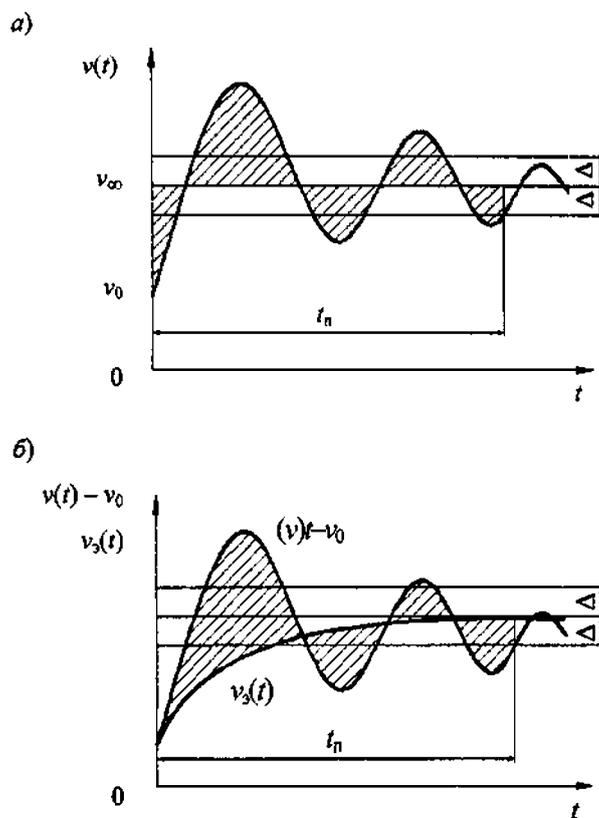


Рис. 4.3. Определение интегральных показателей качества переходных процессов: а – по формуле (4.14); б – по формуле (4.15)

Интегральные оценки также используют для определения степени соответствия получаемой переходной характеристики  $v(t)$  заданной эталонной характеристике  $v_3(t)$ :

$$I_2 = \int_0^{t_0} |v(t) - v_0 - v_s(t)| dt. \quad (4.15)$$

В этом случае интеграл  $I_2$  равен площади, ограниченной графиками  $v(t) - v_0$  и  $v_s(t)$  (заштрихованная площадь на рис. 4.3, б).

Очевидно, что при проектировании технических систем интегральные оценки необходимо минимизировать.

### Литература

1. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем. – Мн.: Дизайн ПРО, 1997.
2. Атаманов Ю.Е., Богдан Н.В. Методическое пособие по курсу "Математические модели узлов и агрегатов трактора". В 3 ч. Ч. 1. – Мн.: БПИ, 1992.
3. Метлюк Н.Ф., Автушко В.П. Динамика пневматических и гидравлических приводов автомобилей. – М.: Машиностроение, 1980.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
<b>1. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ .....</b>	<b>4</b>
1.1. Основные понятия процесса моделирования и проектирования технических объектов .....	4
1.2. Структура математической модели .....	5
1.3. Классификация математических моделей и требования, предъявляемые к ним .....	7
1.4. Технология математического моделирования .....	12
<b>2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА МАКРОУРОВНЕ .....</b>	<b>16</b>
2.1. Объекты проектирования и построение динамических систем технических объектов на макроуровне .....	16
2.2. Компонентные и топологические уравнения систем .....	19
2.3. Метод сосредоточенных масс в формировании математической модели .....	24
2.4. Уравнения Лагранжа II рода в формировании математической модели технических объектов .....	26
2.5. Метод типовых элементов в формировании математической модели .	33
2.6. Методика построения математической модели пневмопривода .....	39
2.7. Упрощение динамических систем .....	44
2.8. Моделирование нелинейных систем .....	52
<b>3. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОЧИХ ПРОЦЕССОВ, УЗЛОВ, МЕХАНИЗМОВ И СИСТЕМ МОБИЛЬНЫХ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН .....</b>	<b>55</b>
3.1. Моделирование характеристик дизельных двигателей и гидронасосов .....	55

3.2. Моделирование технических объектов с фрикционными элементами .....	59
3.3. Моделирование технических объектов с трансформаторными элементами .....	64
3.4. Моделирование систем поддресоривания машин при плоском движении .....	70
3.5. Математическое моделирование пневматических приводов технических объектов .....	73
3.6. Математическое моделирование гидроприводов технических объектов .....	79
<b>4. АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И СОСТОЯНИЙ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....</b>	<b>83</b>
4.1. Качественный анализ математических моделей .....	83
4.2. Моделирование и анализ статических состояний .....	92
4.3. Моделирование и анализ переходных процессов .....	97
Литература .....	109

**Учебное издание**

**САФОНОВ Андрей Иванович**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ,  
МЕХАНИЗМОВ И СИСТЕМ**

**Учебное пособие**

**Редактор Т.Н. Микулик**

---

Подписано в печать 21.01.2005.

Формат 60x84 1/16. Бумага типографская №2.

Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 5,1. Тираж 100. Заказ 510.

---

Издатель и полиграфическое оформление:

Белорусский национальный технический университет.

Лицензия № 023330/0056957 от 01.04.2004.

220013, Минск, проспект Ф. Скорины, 65.