

Белорусский национальный технический университет

УДК 539.3

**ЛЕОНЕНКО**  
**Денис Владимирович**

**СОБСТВЕННЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ  
ТРЕХСЛОЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ,  
СВЯЗАННЫХ С УПРУГОЙ СРЕДОЙ**

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук  
по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Минск, 2011

Работа выполнена в УО «Белорусский государственный университет транспорта»

Научный консультант

**Старовойтов Эдуард Иванович,**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, зав. кафедрой строительной  
механики УО «Белорусский  
государственный университет транспорта»

Официальные оппоненты:

**Чигарев Анатолий Власович,**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, зав. кафедрой теоретической  
механики Белорусского национального  
технического университета

**Мейш Владимир Федорович,**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, ведущий научный сотрудник  
отдела динамики и устойчивости сплошных  
сред Института механики  
им. С.П.Тимошенко НАН Украины

**Можаровский Валентин Васильевич,**  
доктор технических наук, профессор,  
профессор кафедры вычислительной  
математики и программирования  
УО «Гомельский государственный  
университет им. Ф. Скорины»

Оппонирующая организация

**УО «Белорусский государственный  
университет», г. Минск**

Защита состоится 17 июня 2011 г. в 14.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.05.07 при Белорусском национальном техническом университете по адресу: 220013, г. Минск, пр. Независимости, 65, корп. 6, ауд. 419, тел. 292-24-04.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского национального технического университета.

Автореферат разослан \_\_\_ мая 2011 г.

Ученый секретарь совета  
по защите диссертаций,  
канд. физ.-мат. наук, доцент

В.А. Нифагин

## **ВВЕДЕНИЕ**

Широкое применение в авиа-, ракето-, машино-, приборостроении и строительстве многослойных конструкций приводит к необходимости разработки методов их расчета на различные виды и типы нагрузок.

В последнее время значительное распространение получили трехслойные конструкции, которые состоят из двух несущих слоев и заполнителя, обеспечивающего их совместную работу. В условиях деформации изгиба эти конструкции оказываются наиболее рациональными, то есть близкими оптимальным с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость. Несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, служат для образования монолитной конструкции, обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями и защиту от внешних тепловых, радиационных и вибрационных воздействий.

В настоящее время мало изучено динамическое поведение трехслойных элементов конструкций, взаимодействующих с упругими средами. Решению указанной проблемы и посвящена диссертация, поэтому ее тема представляется актуальной.

### **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

#### **Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами**

Тема диссертации соответствует п.12.1. «Физические и математические методы и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, новых технологий, экономики и социальных наук» Перечня приоритетных направлений фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы, утвержденного Постановлением Совета Министров РБ 19.04.2010 г. № 585.

Работа входила составной частью в следующие республиканские и международные научно-технические программы:

1. ГПОФИ «Поверхность-52» «Исследование механического поведения слоистых металлополимерных систем при терморadiационном воздействии», № ГР 20023366, 1.01.2002 – 31.12.2005.
2. Проект Т03М-014 «Расчеты трехслойных элементов конструкций на упругом основании и при локальных воздействиях», БРФФИ, № ГР 20032999, 15.04.2003–15.04.2005.
3. Проект № Т04Р – 028 «Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций», БРФФИ, № 20043876, 03.04.2004–30.04.2006.
4. ГБТ НИР № 3574 «Создание математической модели динамического поведения слоистых стержней при локальных воздействиях», МО, № ГР 20052518, 1.01.2005–31.12.2005.

5. ГBT НИР № 3580 «Создание математической модели деформирования трехслойных систем на упругом основании», МО, № ГР 20052520, 03.01.2005–31.12.2006.

6. Проект Т05М–012 «Напряженно-деформированное состояние металлополимерных пластин с легким наполнителем, покоящихся на упругом основании», БРФФИ, № ГР 20051963, 01.04.2005–31.03.2007.

7. Проект № Т05К–139 «Динамика металлокомпозитных элементов конструкций», БРФФИ, № ГР 20051962, 01.04.2005–31.03.2007.

8. Проект Т06Р–114 (4328) «Динамическое деформирование упругих тел при контактном взаимодействии», БРФФИ, № ГР 20066861, 01.04.2006–31.03.2008.

9. ГКПНИ «Механика 2.26». Исследование на моделях контактных взаимодействий узлов машиностроительных транспортных конструкций и напряженно-деформированного состояния их элементов с целью повышения технического ресурса. Исследование колебаний трехслойных элементов конструкций, связанных с деформируемым основанием», № ГР 20063128, 2.01.2006 – 31.12.2010.

10. Проект Ф07М–040 «Упругопластическое деформирование трехслойных стержней на упругом основании с несжимаемым и сжимаемым наполнителями» БРФФИ, № ГР 20072443, 01.04.2007–31.03.2009.

11. Проект Ф08Р–227 «Динамика и контактное взаимодействие однородных и неоднородных оболочек», БРФФИ, № ГР 20082020, 01.04.2008–31.03.2010.

12. ГBT НИР № 5908 «Разработка математической модели нелинейного деформирования прямоугольной трехслойной пластины, связанной с упругим основанием», МО, № ГР 20090884, 1.01.2009 – 31.12.2010.

13. Проект Т09М–014 «Деформирование композиционных трехслойных пластин с ортогогрными несущими слоями», БРФФИ, № ГР 20091505, 15.04.2009–31.03.2011.

14. Проект Ф10Р–084 «Динамика и контактное взаимодействие однородных и неоднородных оболочек», БРФФИ, 01.04.2010–31.03.2012.

### **Цель и задачи исследования**

*Целью* настоящей работы является создание новой общей методологии, позволяющей рассчитывать напряженно-деформированное состояние (НДС) трехслойных элементов конструкций, связанных с упругими инерционными и безынерционными средами Винклера или Пастернака, при собственных колебаниях и действии динамических силовых нагрузок различного вида (внезапных, импульсных, резонансных) и способа приложения (распределенных, локальных, сосредоточенных), включая тепловые и радиационные воздействия.

*К задачам* следует отнести: постановку начально-краевых задач по расчету НДС упругих и вязкоупругих трехслойных элементов конструкций, связанных с упругими инерционными и безынерционными средами Винклера и Пастернака, при динамических воздействиях; разработку методов их реше-

ния и получение аналитических решений для трехслойных цилиндрических оболочек, пластин и стержней; численное исследование зависимости параметров колебаний от граничных условий, геометрических и механических характеристик материалов слоев, величины и вида нагрузки, характеристик и моделей упругих сред, температурных и радиационных воздействий.

*Объектом исследования* являются упругие и вязкоупругие трехслойные несимметричные по толщине элементы конструкций (оболочки вращения, цилиндрические оболочки, стержни, круговые пластины), связанные с упругой средой.

*Предмет исследования* – параметры колебаний и НДС трехслойных элементов конструкций, связанных с упругой средой, при различных динамических силовых нагрузках, включая терморadiационные воздействия.

### **Положения, выносимые на защиту**

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми, они включают:

- механико-математические модели колебаний трехслойных элементов конструкций (оболочек вращения, цилиндрических оболочек, круговых пластин, стержней) в упругой среде, содержащие вывод уравнений движения в усилиях и перемещениях, формулировки начальных и граничных условий, отличающиеся учетом реакций внешних инерционных и безынерционных сред Винклера и Пастернака, воздействием температурных и радиационных полей;
- аналитические решения начально-краевых задач о собственных колебаниях трехслойных цилиндрических оболочек (объемная, плоская и радиальная инерционные модели), круговых пластин и стержней, связанных с инерционными и безынерционными средами Винклера и Пастернака, позволившие получить формулы для расчета собственных частот и построить системы базисных и собственных функций;
- численный параметрический анализ собственных частот колебаний трехслойных элементов конструкций, установивший их зависимость от упругих и геометрических характеристик слоев, удельной массы, коэффициентов жесткости и сдвига упругой среды;
- аналитические решения начально-краевых задач о вынужденных колебаниях трехслойных цилиндрических оболочек, круговых пластин и стержней, связанных с внешними безынерционными или инерционными средами, позволившие получить формулы для расчета перемещений, деформаций и напряжений при действии непрерывных и локальных (распределенных, погонных, сосредоточенных) внезапно приложенных, импульсных, резонансных нагрузок;
- численный параметрический анализ вынужденных колебаний, установивший зависимость напряженно-деформированного состояния трехслойных элементов конструкций от геометрических и механических характеристик слоев, величины, вида и формы нагрузки, характеристик и моделей упругого основания, граничных условий;

- постановки и аналитические решения начально-краевых задач о тепловом, радиационном и терморadiационном ударах по круговой трехслойной пластине, скрепленной с упругим основанием Винклера, моделирующие возникновение свободных колебаний за счет терморadiационных воздействий (лазерных, нейтронных) и позволившие провести численный анализ зависимостей параметров колебаний от величины температурных и радиационных потоков;
- постановки и аналитические решения начально-краевых задач о вынужденных колебаниях линейно вязкоупругих круговых трехслойных пластин, скрепленных с упругими безынерционными и инерционными основаниями Винклера и Пастернака, позволившие учесть демпфирующую способность материалов слоев, воздействие температурного поля и провести численный анализ параметров колебаний.

### **Личный вклад соискателя**

Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Научный консультант принимал участие в выборе направлений исследования и анализе полученных результатов. Другим соавторам принадлежат результаты, не вошедшие в работу.

### **Апробация результатов диссертации**

Основные результаты работы докладывались и получили одобрение на:

- XII–XVII Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Москва, 2006–2011);
- XXI Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред» (Санкт-Петербург, 2005);
- X Белорусской Математической конференции (Гродно, 2008);
- Международной конференции «Интегральные уравнения и их применения» (Одесса, 2005);
- VI–VIII Международных конференциях «Импульсные процессы в механике сплошных сред» (Николаев, 2005, 2007, 2009);
- V, VI Международных симпозиумах по трибофатике (Иркутск, 2005, Минск, 2010);
- Второй Всероссийской конференции по волновой динамике машин и конструкций (Нижний Новгород, 2007);
- III, IV Белорусских конгрессах по теоретической и прикладной механике (Минск, 2007, 2009);
- I, II Международных конференциях по математической физике и ее приложениям (Самара, 2008, 2010);
- II Международной конференции «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела» (Казань, 2009);

- Международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений» (Москва, 2009);
- Международном научном симпозиуме по проблемам механики деформируемых тел (Москва, 2011);
- XXXVI, XXXVIII, XLII Республиканских научно-методических семинарах «Научно-методические основы применения информационных технологий в преподавании механики и научных исследованиях» (Минск, 2005, 2007, 2011);
- Международных научно-практических конференциях: II конференции «Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса» (Гомель, 2008); «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, 2005, 2010); «Полимерные композиты и трибология» (Поликомтриб) (Гомель, 2005, 2009); «Чрезвычайные ситуации: теория, практика, инновации» (Гомель, 2006); «Инновации в машиностроении» (Минск, 2010);
- конференциях молодых ученых – IV, V Гомельская региональная «Новые функциональные материалы, современные технологии и методы исследования» (Гомель, 2008, 2010); «Новые материалы, оборудование и технологии в промышленности» (Могилев, 2010);
- научных семинарах по механике в УО «БелГУТ» и УО «БНТУ».

#### **Опубликованность результатов диссертации**

По теме диссертации опубликовано 87 работ, в том числе монографий – 2, статей в научных изданиях, включенных в перечень ВАК – 43 (12 переведены за рубежом), статей в сборниках – 9, материалов конференций – 18, тезисов – 15. Общее количество страниц опубликованных материалов – 1280 (74 авт. л.), из них 620 (36 авт. л.) – личный вклад автора.

#### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, семи глав, заключения, библиографического списка, приложений. Объем диссертации составляет 352 страницы машинописного текста, включая 111 страниц с 197 иллюстрациями и 10 таблицами, библиографический список из 251 наименования на 22 страницах, 3 приложения на 20 с.

### **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

#### **1 КОЛЕБАНИЯ СЛОИСТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ (ОБЗОР ПУБЛИКАЦИЙ)**

Теория слоистых, в том числе трехслойных, элементов конструкций интенсивно начала разрабатываться в конце 40-х годов XX века. В это время появляются первые труды по механике многослойных сред (А.В. Дятлов, С.Г. Лехницкий, Н.Г. Ченцов). К настоящему времени издано несколько тысяч работ по теории слоистых элементов конструкций. Существенный вклад в развитие теории слоистых конструкций внесли А.Я Александров, С.А. Амбарцумян, В.В. Болотин, В. В. Васильев, К. З. Галимов, А.Л. Гольденвейзер,

А.Г. Горшков, Э.И. Григолюк, Я.М. Григоренко, В.И. Королев, Л.М. Куршин, Х.М. Муштари, Ю.Н. Новичков, Б.Л. Пелех, А.П. Прусаков, А.В. Розе, Ю.М. Тарнапольский, В.П. Тамуж, С.П. Тимошенко, А.П. Чулков, М.Р. Bieniek, А.М. Freudenthal, J.K. Ebsioglu, А.С. Eringen, J.I. Foss, W.F. Freiberger, W.S. Hemp, E.J. Plantema, E. Reissner, J. Solvey и др.

## 2 МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Рассматриваются колебания непологой трехслойной оболочки вращения средней толщины в упругой среде. В тонких изотропных несущих слоях толщиной  $h_k$  принимаются гипотезы Кирхгофа–Лява, в относительно толстом заполнителе ( $h_3 = 2c$ ) учитывается работа поперечного сдвига и обжатие по толщине. Для него справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты. На границах между слоями используются условия непрерывности перемещений, на срезах торцов – жесткая мембрана. Деформации малые.

За искомые функции принимаются  $u_\alpha^k, w^k$  – тангенциальные перемещения и прогибы точек срединной поверхности несущих слоев. Уравнения движения трехслойной оболочки и силовые граничные условия следуют из вариационного принципа Лагранжа с учетом работы сил инерции:

$$\delta A - \delta W = \delta A_I, \quad (2.1)$$

где  $\delta A$  – вариация работы внешних сил

$$\delta A = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \sum_{k=1}^2 \left[ \left( (q_\alpha^k + q_{\alpha r}^k) \left( \delta u_\alpha^k + \frac{(-1)^{k+1} h_k}{2} \delta \psi_\alpha^k \right) + (q_3^k + q_{3r}^k) \delta w^k \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + (-1)^{k+1} k_1 (c + h_k) \right) \left( 1 + (-1)^{k+1} k_2 (c + h_k) \right) \right] H_1 H_2 dx_1 dx_2,$$

$\delta W$  – вариация работы внутренних сил упругости

$$\delta W = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left[ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^k \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{kz} (1 + k_1 z) (1 + k_2 z) dz + \right. \\ \left. + \int_{h_3} \left( 2\sigma_{\alpha 3}^3 \delta \varepsilon_{\alpha 3}^{3z} + \sigma_{33}^3 \delta \varepsilon_{33}^{3z} \right) (1 + k_1 z) (1 + k_2 z) dz \right] H_1 H_2 dx_1 dx_2,$$

$\delta A_I$  – вариация работы сил инерции

$$\delta A_I = \sum_{k=1}^3 \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_{h_k} \left[ \rho_k \left( \ddot{w}^{kz} \delta w^{kz} + \ddot{u}_\alpha^{kz} \delta u_\alpha^{kz} \right) \right] (1 + k_1 z) (1 + k_2 z) H_1 H_2 dz dx_1 dx_2.$$

Здесь  $l_\alpha$  – линейный размер оболочки в направлении оси  $x_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ );  $H_\alpha, k_\alpha$  – коэффициенты Ламе и главные кривизны срединной поверхности заполнителя;  $q_\alpha^k, q_3^k$  – распределенные внешние нагрузки приложенные к наружным поверхностям несущих слоев;  $q_{\alpha r}^k, q_{3r}^k$  – реакция упругой среды; суммирование производится по повторяющимся греческим индексам;  $\rho_k$  – плотность.



После соответствующих преобразований из вариационного уравнения (2.1) получим шесть уравнений движения трехслойной оболочки вращения, связанной с упругой средой ( $k = 1, 2$ ;  $i = 1, 2, 3$ ), в усилиях

$$L_i^k = L_{ii}^k, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned}
L_\alpha^k = & -\left(H_\gamma T_{\alpha\alpha}^k\right)_{,\alpha} + H_\gamma k_\alpha c_\alpha^k M_{\alpha\alpha}^k - \left(H_\gamma k_\alpha c_\alpha^k M_{\alpha\alpha}^k\right)_{,\alpha} + H_\gamma k_{\alpha,\alpha} c_\alpha^k M_{\alpha\alpha}^k - \\
& -H_{\alpha,\gamma} T_{\alpha\gamma}^k - H_{\alpha,\gamma} k_\alpha c_\alpha^k M_{\alpha\gamma}^k - \left(H_\alpha T_{\gamma\alpha}^k\right)_{,\gamma} + H_\alpha k_\alpha c_\alpha^k M_{\gamma\alpha}^k - \left(H_\alpha k_\alpha c_\alpha^k M_{\gamma\alpha}^k\right)_{,\gamma} + \\
& + H_\alpha k_{\alpha,\gamma} c_\alpha^k M_{\gamma\alpha}^k + H_{\gamma,\alpha} T_{\gamma\gamma}^k + H_{\gamma,\alpha} k_\alpha c_\alpha^k M_{\gamma\gamma}^k + H_\gamma B_{k\alpha,\alpha} M_{\alpha\alpha}^{3\pm} - \left(H_\gamma B_{k\alpha} M_{\alpha\alpha}^{3\pm}\right)_{,\alpha} - \\
& -H_{\alpha,\gamma} B_{k\alpha} M_{\alpha\gamma}^{3\pm} + H_\alpha B_{k\alpha,\gamma} M_{\gamma\alpha}^{3\pm} - \left(H_\alpha B_{k\alpha} M_{\gamma\alpha}^{3\pm}\right)_{,\gamma} + H_{\gamma,\alpha} B_{k\alpha} M_{\gamma\gamma}^{3\pm} \pm \\
\pm & c^{-1} H_\alpha H_\gamma B_{k\alpha} T_{\alpha 3}^3 - H_\alpha H_\gamma k_\alpha B_{k\alpha} M_{\alpha 3}^{3\pm} - \left(1 \pm 0,5 h_k c_\alpha^k k_\alpha\right) H_\alpha H_\gamma m_\alpha^k m_\gamma^k \left(q_\alpha^k + q_{\alpha r}^k\right), \\
L_3^k = & \left(H_1^{-1} H_2 c_1^k\right)_{,1} M_{11}^k - \left(H_1^{-1} H_2 c_1^k M_{11}^k\right)_{,11} - \left(H_1^{-1} H_{1,1} H_2 c_1^k M_{11}^k\right)_{,1} + \\
& + \left(H_{1,2} H_2^{-1} c_2^k M_{11}^k\right)_{,2} + H_1 H_2 k_1 T_{11}^k + \left(c_2^k\right)_{,1} M_{12}^k - \left(H_2^{-1} H_{2,1} c_2^k M_{12}^k\right)_{,2} - \\
& - \left(c_2^k M_{12}^k\right)_{,12} - \left(H_1^{-1} H_{1,2} c_1^k M_{12}^k\right)_{,1} + \left(c_1^k\right)_{,2} M_{21}^k - \left(H_1^{-1} H_{1,2} c_1^k M_{21}^k\right)_{,1} - \\
& - \left(c_1^k M_{21}^k\right)_{,12} - \left(H_2^{-1} H_{2,1} c_2^k M_{21}^k\right)_{,2} + \left(H_1 H_2^{-1} c_2^k\right)_{,2} M_{22}^k - \left(c_2^k H_1 H_2^{-1} M_{22}^k\right)_{,22} - \\
& - \left(H_1 H_2^{-2} A_{2,2} c_2^k M_{22}^k\right)_{,2} + \left(H_1^{-1} H_{2,1} c_1^k M_{22}^k\right)_{,1} + H_1 H_2 k_2 T_{22}^k \mp \left(H_2 D_{k1,1} M_{11}^{3\pm}\right)_{,1} \pm \\
& \pm \left(H_2 D_{k1} M_{11}^{3\pm}\right)_{,11} \mp \left(H_{1,2} D_{k2} M_{11}^{3\pm}\right)_{,2} + \frac{1}{2} H_1 H_2 k_1 M_{11}^{3\pm} \mp \left(H_2 D_{k2,1} M_{12}^{3\pm}\right)_{,2} \pm \\
& \pm \left(H_2 D_{k2} M_{12}^{3\pm}\right)_{,12} \pm \left(H_{1,2} D_{k1} M_{12}^{3\pm}\right)_{,1} \mp \left(H_1 D_{k1,2} M_{21}^{3\pm}\right)_{,1} \pm \left(H_1 D_{k1} M_{21}^{3\pm}\right)_{,1} \pm \\
& \pm \left(H_{2,1} D_{k2} M_{21}^{3\pm}\right)_{,2} \mp \left(H_1 D_{k2,2} M_{22}^{3\pm}\right)_{,2} \pm \left(H_1 D_{k2} M_{22}^{3\pm}\right)_{,22} \mp \left(H_{2,1} D_{k1} M_{22}^{3\pm}\right)_{,1} + \\
& + \frac{1}{2} H_1 H_2 k_2 M_{22}^{3\pm} - c^{-1} \left(H_1 H_2 D_{k1} T_{13}^3\right)_{,1} \pm \left(H_1 H_2 k_1 D_{k1} M_{13}^{3\pm}\right)_{,1} - 0,5 \left(H_2 M_{13}^{3\pm}\right)_{,1} - \\
& - c^{-1} \left(H_1 H_2 D_{k2} T_{23}^3\right)_{,2} \pm \left(H_1 H_2 k_2 D_{k2} M_{23}^{3\pm}\right)_{,2} - 0,5 \left(H_1 M_{23}^{3\pm}\right)_{,2} \pm 0,5 c^{-1} H_1 H_2 T_{33}^3 - \\
& - H_1 H_2 m_1^k m_2^k \left(q_\alpha^k + q_r^k\right) \mp 0,5 h_k \left(\left(q_1^k + q_{1r}^k\right) c_1^k m_1^k m_2^k H_2\right)_{,1} \mp 0,5 h_k \left(\left(q_2^k + q_{2r}^k\right) c_2^k m_1^k m_2^k H_1\right)_{,2}, \\
L_{1\alpha}^k = & \ddot{u}_\alpha^k H_1 H_2 \left[ \rho_k \left( I_1^k + 2 k_\alpha c_\alpha^k I_3^k + \left( k_\alpha c_\alpha^k \right)^2 I_5^k \right) + \rho_3 \left( B_{k\alpha} \right)^2 I_2 \right] + \\
& + \ddot{u}_\alpha^p H_1 H_2 \rho_3 B_{k\alpha} B_{p\alpha} I_4 - \ddot{w}^k_{,\alpha} \left[ \rho_k H_\gamma \left( c_\alpha^k I_3^k + k_\alpha \left( c_\alpha^k \right)^2 I_5^k \right) \mp \rho_3 H_1 H_2 B_{k\alpha} D_{k\alpha} I_2 \right] \pm \\
& \pm \ddot{w}^p_{,\alpha} \rho_3 H_1 H_2 B_{k\alpha} D_{p\alpha} I_4, \\
L_{13}^k = & \ddot{w}^k H_1 H_2 \left[ \rho_k I_1^k + (1/4) \rho_3 I_2 \right] + (1/4) \ddot{w}^p H_1 H_2 \rho_3 I_4 + \\
& + \sum_{\alpha=1}^2 \ddot{u}_\alpha^k \left[ \rho_k H_\gamma c_\alpha^k \left( I_3^k + k_\alpha c_\alpha^k I_5^k \right) \mp \rho_3 H_1 H_2 D_{k\alpha} B_{k\alpha} I_2 \mp \rho_3 H_1 H_2 D_{p\alpha} B_{k\alpha} I_4 \right] - \\
& - \sum_{\alpha=1}^2 \ddot{u}_\alpha^k \left[ \rho_k \left( H_\gamma c_\alpha^k \left( I_3^k - k_\alpha c_\alpha^k I_5^k \right) \right)_{,\alpha} \pm \rho_3 H_1 H_2 I_2 D_{k\alpha} B_{k\alpha,\alpha} \pm \right. \\
& \left. \pm \rho_3 \left( H_1 H_2 D_{k\alpha} I_2 \right)_{,\alpha} B_{k\alpha} \pm \rho_3 \left( H_1 H_2 D_{p\alpha} I_4 \right)_{,\alpha} B_{k\alpha} \pm \rho_3 H_1 H_2 I_4 D_{p\alpha} B_{k\alpha,\alpha} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\alpha=1}^2 \ddot{w}^k_{,\alpha} \left( \rho_k H_\gamma H_\alpha^{-1} (c_\alpha^k)^2 I_5^k \mp \rho_3 H_1 H_2 (D_{k\alpha})^2 I_2 \pm \rho_3 H_1 H_2 D_{k\alpha} D_{p\alpha} I_4 \right) - \\
& - \sum_{\alpha=1}^2 \ddot{w}^k_{,\alpha} \left[ \rho_k \left( H_\gamma H_\alpha^{-1} (c_\alpha^k)^2 I_5^k \right)_{,\alpha} \pm \rho_3 H_1 H_2 I_2 D_{k\alpha} D_{k\alpha}{}_{,\alpha} \pm \right. \\
& \left. \pm \rho_3 \left( H_1 H_2 D_{k\alpha} I_2 \right)_{,\alpha} D_{k\alpha} \mp \rho_3 \left( H_1 H_2 D_{p\alpha} I_4 \right)_{,\alpha} D_{k\alpha} \mp \rho_3 H_1 H_2 I_4 D_{p\alpha} D_{k\alpha}{}_{,\alpha} \right], \\
& m_\alpha^k = 1 + (c + h_k) k_\alpha, \quad I_1^k = \int_{h_k} (1 + k_1 z)(1 + k_2 z) dz; \\
& I_2 = \int_{h_3} (1 \pm z/c)^2 (1 + k_1 z)(1 + k_2 z) dz, \quad I_3^k = \int_{h_k} (z \mp a_k)(1 + k_1 z)(1 + k_2 z) dz, \\
& I_4 = \int_{h_3} (1 - (z/c)^2)(1 + k_1 z)(1 + k_2 z) dz, \quad I_5^k = \int_{h_k} (z \mp a_k)^2 (1 + k_1 z)(1 + k_2 z) dz.
\end{aligned}$$

Здесь запятой в нижнем индексе обозначена операция дифференцирования по координатам, точки сверху – производные по времени, внутренние усилия

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\beta}^k &= \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^k (1 + k_\gamma z) dz, \quad M_{\alpha\beta}^k = \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^k (z \mp a_k) (1 + k_\gamma z) dz, \\
T_{i3}^{(3)} &= \int_{h_3} \sigma_{i3}^{(3)} (1 + k_1 z)(1 + k_2 z) dz, \quad M_{ai}^{(3)\pm} = \int_{h_3} \sigma_{ai}^{(3)} (1 \pm z/c) (1 + k_\gamma z) dz. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Силловые граничные условия формулируются из требования выполнения в каждой точке координатной линии равенства заданных обобщенных усилий и моментов внутренним силовым факторам (2.3). Кинематических условий также можно поставить по восемь на каждом торце оболочки. Краевая задача замыкается добавлением к (2.2) начальных условий движения.

Для трехслойной круговой цилиндрической оболочки основные уравнения движения в усилиях следуют из соотношений (2.2), (2.3) после подстановки коэффициентов, характеризующих ее геометрию.

### 3 КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КРУГОВЫХ ОБОЛОЧЕК В УПРУГОЙ СРЕДЕ

**Общее решение задачи.** Напряжения и деформации в слоях трехслойной круговой цилиндрической оболочки связаны законом Гука

$$\sigma_{\alpha\beta}^k = 2G^k \varepsilon_{\alpha\beta}^k, \quad \sigma^k = 3K_k \varepsilon^k, \quad (3.1)$$

где  $\varepsilon_{ij}^k, \varepsilon_{ij}^k$  – девиаторные,  $\sigma^k, \varepsilon^k$  – шаровые части тензоров напряжений и деформаций в  $k$ -м слое;  $G_k, K_k$  – модули сдвиговой и объемной деформаций.

К наружным поверхностям несущих слоев приложена распределенная нагрузка  $q_i^k$  и реакция упругой среды Винклера:

$$q_{3r}^k = -\kappa_0^k w^k, \quad q_{ar}^k = 0, \quad (3.2)$$

где  $w^k$  – прогиб,  $\kappa_0^k$  – коэффициент жесткости внешней среды.

Разрешающие уравнения в перемещениях для рассматриваемой оболочки следуют из уравнений движения (2.2), после выражения внутренних усилий (2.3) через величины  $u_\alpha^m$ ,  $w^m$  и учета реакции основания (3.2):

$$L_\alpha^m(u_\alpha^m, w^m) - b_\alpha^m \ddot{u}_\alpha^m = -L_{\alpha q}^m, \quad L_3^m(u_\alpha^m, w^m) - b_3^m \ddot{w}^m = -L_{3q}^m \quad (m, \alpha = 1, 2). \quad (3.3)$$

Здесь

$$L_\alpha^m = \sum_{k=1}^2 \left[ \left( a_{m\alpha 1}^k \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} + a_{m\alpha 2}^k \frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2} + a_{m\alpha 3}^k \right) u_\alpha^k + a_{m\alpha 4}^k \frac{\partial^2 u_\beta^k}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \left( a_{m\alpha 5}^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + a_{m\alpha 6}^k \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha^3} + a_{m\alpha 7}^k \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta^2} \right) w^k \right],$$

$$L_3^m = \sum_{\alpha, k=1}^2 \left[ \left( a_{m31}^{ak} \frac{\partial^4}{\partial x_\alpha^4} + a_{m32}^k \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + a_{m33}^{ak} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} + a_{m34}^k - R m_m \kappa_0^m \delta_{mk} \right) w^k + \left( a_{m35}^{ak} \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha^3} + a_{m36}^{ak} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + a_{m37}^{ak} \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta^2} \right) u_\alpha^k \right] \quad (m, \alpha, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta), \quad (3.4)$$

где  $\delta_{mk}$  – символы Кронекера, коэффициенты  $a_{ijk}^m$  зависят от жесткостных параметров оболочки;  $L_{iq}^m$  – параметры внешней нагрузки ( $m = 1, 2$ )

$$L_{1q}^m = m_m R q_1^m, \quad L_{2q}^m = (R \pm 0,5 h_m c_2^m) m_m q_2^m, \quad m_m = 1 \pm (c + h_m) R^{-1},$$

$$L_{3q}^m = R m_m \left[ a_3^m \pm 0,5 h_m (a_{1,1}^m + R^{-1} c_2^m q_2^m) \right].$$

Система уравнений движения (3.3) является линейной. Для получения решения воспользуемся методом Бубнова–Галеркина, тогда

$$u_\alpha^k = \sum_{m,n} \Psi_{\alpha mn}^k(x, \varphi) T_{\alpha mn}^k(t), \quad w^k = \sum_{m,n} \Psi_{3mn}^k(x, \varphi) T_{3mn}^k(t),$$

$$q_l^k = \sum_{m,n} \Psi_{qlmn}^k(x, \varphi) q_{lmn}^k(t) \quad (l = 1, 2, 3; \alpha, k = 1, 2). \quad (3.5)$$

За счет выбора ортогональных базисных функций  $\Psi_{lmn}^k, \Psi_{qlmn}^k$  должны удовлетворяться граничные условия. Подставив выражения (3.5) в уравнения (3.3), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функции времени  $T_{lmn}^k(t)$ . В матричном виде она будет следующей:

$$[P]\{\dot{T}\} + \{Q\} = [B]\{\ddot{T}\}. \quad (3.6)$$

При жестком закреплении торцов оболочки должны выполняться условия

$$u_1^k = u_2^k = w^k = w_{,1}^k = 0 \quad (x = 0, L; k = 1, 2).$$

При свободном опирании – условия в сечениях  $x = 0, L$  следующие:

$$u_2^k = w^k = u_{1,1}^k = w_{,11}^k = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (3.7)$$

**Объемно-инерционная модель.** Учитываются силы инерции, возникающие в оболочке, вдоль всех осей координат. Уравнения для собственных колебаний получим из (3.3), (3.4), положив  $L_{iq}^k = 0$ . Предполагая, что все точки

конструкции совершают колебания с одинаковой частотой, уравнения для определения функции  $T_{lmm}^k(t)$  получим из (3.6), положив  $q_{lmm}^k(t) = 0$ :

$$T_{lmm}^k(t) = A_{lmm}^k \sin(\omega_{mm} t + \alpha_{mm}), \quad (3.8)$$

где  $A_{lmm}^k$ ,  $\omega_{mm}$  – амплитуды и частоты колебаний,  $\alpha_{mm}$  – начальные фазы.

Подставив выражения (3.8) в систему (3.6), приходим к обобщенной задаче на собственные значения:

$$[P]\{A\} = -\omega^2 [B]\{A\}.$$

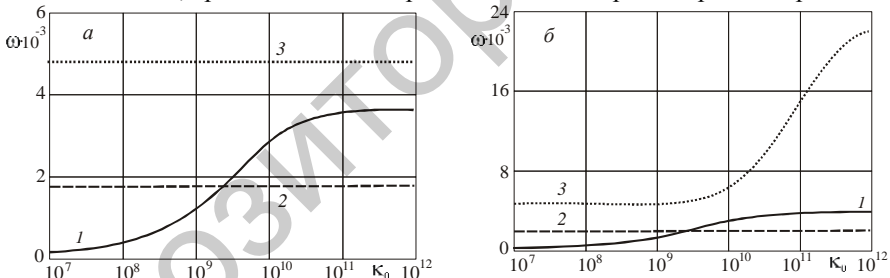
Обозначив  $\lambda = -\omega^2$  и обратив матрицу  $[B]$ , т. к. она не является вырожденной, перейдем от (3.8) к стандартной задаче на собственные значения:

$$[R]\{A\} = \lambda \{A\}, \quad [R] = [B]^{-1} [P].$$

По найденным частотам  $\omega_i^2$  ( $i = 1 \dots 6$ ) вычисляется собственный вектор  $\{A_i\}$ .

*Численные результаты* получены для свободно опертой круговой трехслойной цилиндрической оболочки (Д16Т–фторопласт–Д16Т,  $h_1 = h_2 = 0,02$ ,  $c = 0,025$ ,  $R = 1$ ), находящейся в безынерционной среде Винклера.

На рисунке 3.1 ( $a - L = 2R$ ,  $b - L = 10R$ ) показано изменение собственных частот  $\omega_{01p}$  ( $c^{-1}$ ) ( $1 - \omega_{011}$ ,  $2 - \omega_{012}$ ,  $3 - \omega_{013}$ ) оболочки, в зависимости от коэффициента жесткости  $\kappa_0$  (Па/м) упругой среды. Наличие внешней среды практически не влияет на частоты крутильных колебаний  $\omega_{012}$ . При уменьшении жесткости частота  $\omega_{011}$  уменьшается до нуля. Частота  $\omega_{013}$  короткой оболочки постоянна, при длинной – для средних и жестких сред она резко возрастает.



**Рисунок 3.1 – Зависимость собственных частот  $\omega_{01p}$  от коэффициента  $\kappa_0$**

**Плоско-инерционная модель.** Учитываются силы инерции вдоль радиуса и образующей оболочки. Основные уравнения для свободных колебаний следуют из (3.3), (3.4), если положить  $u_\varphi = u_2 = 0$ ,  $a_j^k = 0$  и обратить в ноль все производные по  $x_2 = \varphi$ . В итоге из системы (3.3) получим 4 уравнения движения. Граничные условия (3.7) свободного опирания будут автоматически выполняться, если решение принять в виде

$$u_1^k = \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{L} T_{1m}^k(t), \quad w^k = \sum_{m=0}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{L} T_{3m}^k(t) \quad (k = 1, 2). \quad (3.9)$$

Функции времени следуют из (3.6):

$$T_{lm}^k(t) = A_{lm}^k \sin(\omega_m t + \alpha_m),$$

Продлав, как и ранее, переход к задаче на собственные значения, получим для каждого индекса  $m$  четыре частоты  $\omega_{mp}$ . Первые три частоты оболочек различной длины, несвязанных с окружающей средой Винклера,  $\omega_{0p}$ ,  $\omega_{1p}$ ,  $\omega_{2p}$  ( $p = 1, \dots, 4$ ,  $\kappa_0 = 0$ ,  $L = 2R$ ,  $10R$ ) приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Частоты собственных плоских колебаний цилиндрической оболочки ( $\text{с}^{-1}$ )

$p/m$	$L = 2R$			$L = 10R$		
	0	1	2	0	1	2
1	0	2822	3021	0	938	1774
2	3602	6068	11433	3602	3655	3859
3	4478	7233	12203	4478	4621	5024
4	32958	32964	32993	32958	32958	32959

**Односно-инерционная модель.** Учитываются только силы инерции вдоль радиуса оболочки. Уравнения движения следуют из соотношений для плоско-инерционной модели, если положить  $\ddot{u}_1^k = 0$ :

$$L_1^m(u_1^m, w^m) = 0, \quad L_3^m(u_1^m, w^m) - b_3^m \ddot{w}^m = 0 \quad (m, k = 1, 2). \quad (3.11)$$

Граничные условия (3.7) будут автоматически выполняться, если принять решение в виде (3.9). Подставив (3.9) в систему (3.11), получим дифференциальные уравнения для определения функции времени  $T_{jm}^k$ . В итоге

$$u_1^k = \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{L} (f_{k1} T_{3m}^1(t) + f_{k2} T_{3m}^2(t)), \quad w^k = \sum_{m=0}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{L} T_{3m}^k(t) \quad (k = 1, 2),$$

$$T_{3m}^k(t) = A_{3m}^k \sin(\omega_m t + \alpha_m),$$

причем для каждого индекса  $m$  имеем две частоты  $\omega_{mp}$  ( $p = 1, 2$ ).

Рисунок 3.2 ( $a - L = 2R$ ;  $b - L = 10R$ ) иллюстрирует изменение частоты  $\omega_{11}$  ( $\text{с}^{-1}$ ) рассматриваемой трехслойной оболочки при росте жесткости внешней безынерционной среды Винклера. Характер изменения частот подобен для обеих оболочек, однако при односно-инерционной модели частоты больше, особенно при  $\kappa_0 > 10^{10}$  Па/м. Увеличение длины оболочки приводит к увеличению разницы между частотами при учете продольной инерции и без нее.

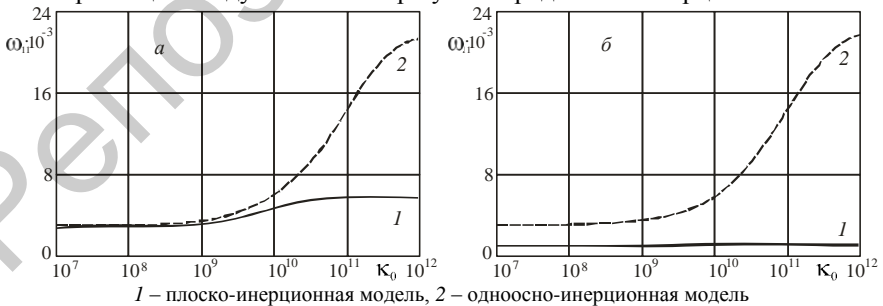


Рисунок 3.2 – Зависимость собственных частот  $\omega_{11}$  от коэффициента  $\kappa_0$

**Вынужденные колебания.** Рассмотрим общий случай вынужденных колебаний трехслойной цилиндрической оболочки, связанной с упругой сре-

дой, под действием нагрузок  $q_a^k, q_3^k$ . Для удобства символьной записи переобозначим искомые функции времени  $T_{lmi}^k(t)$  следующим образом:

$$T_{1mi}^1 \equiv T_{1mi}, \quad T_{1mi}^2 \equiv T_{2mi}, \quad T_{2mi}^1 \equiv T_{3mi}, \quad T_{2mi}^2 \equiv T_{4mi}, \quad T_{3mi}^1 \equiv T_{5mi}, \quad T_{3mi}^2 \equiv T_{6mi}.$$

Тогда их можно представить в виде разложения в конечный ряд по системе собственных ортонормированных функций времени:

$$T_{kmi}(t) = \sum_{i=1}^6 \delta_{mki} \zeta_{mni} \quad (k = 1, 2 \dots 6), \quad (3.13)$$

где  $\delta_{lmi}$  – коэффициенты форм,  $\zeta_{mni}(t)$  – собственные функции времени.

Подставляя выражение (3.13) в (3.6) и используя свойство ортогональности собственных форм колебаний, приходим к шести независимым уравнениям относительно собственных функций времени  $\zeta_{mni}$  (для каждого  $m$  и  $n$ ):

$$\ddot{\zeta}_{mni} + (\omega_{mni})^2 \zeta_{mni} = \tilde{q}_{mni} \tilde{T}_i(t), \quad (3.14)$$

где  $\omega_{mni}$  – частоты собственных колебаний,  $\tilde{T}_i(t)$  – временная составляющая динамической нагрузки,  $\tilde{q}_{mni}$  – компоненты приведенной нагрузки.

Общее решение дифференциального уравнения (3.14) следующее:

$$\zeta_{mni}(t) = A_{mni} \cos(\omega_{mni} t) + B_{mni} \sin(\omega_{mni} t) + \frac{1}{\omega_{mni}} \int_0^t \sin(\omega_{mni}(t-\tau)) \tilde{q}_{mni}(\tau) d\tau.$$

После этого искомые перемещения представляются в виде (3.5).

Рассмотрим три типа нагружения:

1. *Внезапное* – в начальный момент времени  $t_0$  нагрузка мгновенно возрастает до амплитудного значения и остается постоянной:

$$q(x, \varphi, t) = q_a(x, \varphi) H_0(t - t_0), \quad (3.15)$$

где  $H_0(t)$  – единичная функция Хевисайда.

Решение уравнения (3.14) с учетом  $\tilde{q}_{mni}$  и (3.15) запишется в виде

$$\zeta_{mni}(t) = A_{mni} \cos(\omega_{mni} t) + B_{mni} \sin(\omega_{mni} t) + \tilde{q}_{mni} \frac{1 - \cos(\omega_{mni} t)}{\omega_{mni}^2}. \quad (3.16)$$

2. *Импульсное* – время действия нагрузки не превосходит четверти периода собственных колебаний по меньшей из собственных частот

$$q(x, \varphi, t) = q_i(x, \varphi) \delta(t - t_0), \quad (3.17)$$

где  $q_i$  – импульс силы в момент времени  $t_0$ ,  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака.

Решение уравнения (3.14) с учетом  $\tilde{q}_{mni}$  и (3.17) запишется в виде

$$\zeta_{mni}(t) = A_{mni} \cos(\omega_{mni} t) + B_{mni} \sin(\omega_{mni} t) + \tilde{q}_{mni} \frac{\sin(\omega_{mni} t)}{\omega_{mni}}. \quad (3.18)$$

3. *Резонансное* – частота внешней нагрузки совпадает с одной из частот собственных колебаний рассматриваемой оболочки:

$$q_3^2(x, \varphi, t) = q_{3a}^2(x, \varphi) \sin(\omega_{kjp} t).$$

Функции времени в этом случае

$$\zeta_{mni}(t) = A_{mni} \cos(\omega_{mni}t) + B_{mni} \sin(\omega_{mni}t) + y_{mni}(t), \quad (3.19)$$

где  $y_{mni}(t)$  – частное решение уравнения (3.14)

$$y_{mni}(t) = \begin{cases} \frac{\tilde{q}_{mni}}{(\omega_{mni}^2 - \omega_{kjp}^2)} \sin(\omega_{kjp}t) & m \neq k \text{ или } n \neq j \text{ или } i \neq p, \\ -\frac{\tilde{q}_{mni}}{2\omega_{mni}} t \cos(\omega_{mni}t) & m = k, n = j, i = p, \end{cases}$$

константы интегрирования  $A_{mni}$ ,  $B_{mni}$  следуют из начальных условий.

Следовательно, колебания цилиндрической оболочки в упругой среде определяются выражениями (3.5), (3.13), в которых функции времени  $\zeta_{mni}(t)$  зависят от принятых нагрузок – (3.16), (3.18), (3.19). Исследованы случаи осесимметричных и радиальных колебаний при действии *локальных нагрузок*: прямоугольной; погонных и сосредоточенных сил, моментов; условия возникновения *ложного резонанса*.

**Инерционная среда Винклера.** При необходимости учета инерционных свойств упругой среды Винклера ее реакцию представим в виде

$$q_{3r}^1 = -\kappa_0 w^1 - m_f \ddot{w}^1, \quad q_{\alpha r}^k = 0, \quad (3.20)$$

где  $\kappa_0$  – коэффициент постели,  $m_f$  – массовый коэффициент упругой среды.

Уравнения движения оболочки в этом случае будет отличаться от системы (3.4) только наличием дополнительных инерционных слагаемых в реакции (3.20). Аналитическое решение задачи строится в виде (3.5), с соответствующими поправками на инерционность среды в матрице  $[B]$  (3.6).

**Инерционная среда Пастернака.** В отличие от модели Винклера здесь учитывается сопротивление сдвигу во внешней среде:

$$q_{3r}^1 = -\kappa_0 w^1 - m_f \ddot{w}^1 + t_f \left( \frac{\partial^2 w^1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w^1}{\partial x_2^2} \right), \quad q_{\alpha r}^k = 0, \quad (3.21)$$

где  $\kappa_0$  – коэффициент сжатия среды,  $t_f$  – коэффициент ее сдвига.

Система уравнений движения оболочки в *инерционной среде Пастернака (объемно-инерционная модель)* следует из (3.4) с учетом реакции (3.21):

$$L_\alpha^m(u_\alpha^m, w^m) - b_\alpha^m \ddot{u}_\alpha^m = -L_{\alpha q}^m, \\ L_3^m(u_\alpha^m, w^m) - (b_3^m + R m_m m_f \delta_{1m}) \ddot{w}^m = -L_{3q}^m \quad (m, \alpha = 1, 2), \quad (3.22)$$

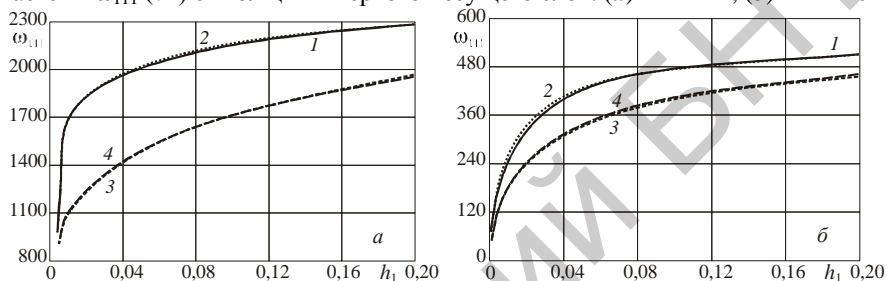
где операторы  $L_\alpha^m = \sum_{k=1}^2 \left[ \left( a_{ma1}^k \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} + a_{ma2}^k \frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2} + a_{ma3}^k \right) u_\alpha^k + a_{ma4}^k \frac{\partial^2 u_\beta^k}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \left( a_{ma5}^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + a_{ma6}^k \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha^3} + a_{ma7}^k \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta^2} \right) w^k \right]$ ,

$$L_3^m = \sum_{\alpha, k=1}^2 \left[ \left( a_{m31}^{ak} \frac{\partial^4}{\partial x_\alpha^4} + a_{m32}^k \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + (a_{m33}^{ak} + R^{3-2\alpha} m_m t_f \delta_{mk} \delta_{1m}) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} + a_{m34}^k - \right. \right.$$

$$-Rm_m \kappa_0 \delta_{mk} w^k + \left( a_{m35}^{ak} \frac{\partial^3}{\partial x_a^3} + a_{m36}^{ak} \frac{\partial}{\partial x_a} + a_{m37}^{ak} \frac{\partial^3}{\partial x_a \partial x_p^2} \right) u_a^k \Big], (m, \alpha, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta).$$

Система уравнений, описывающая вынужденные колебания круговой цилиндрической оболочки в *безынерционной среде* Пастернака следует из (3.22), если положить  $m_f = 0$ . Аналитическое решение задачи в обоих случаях строится в виде (3.5), с соответствующими поправками на инерционность среды в матрице  $[B]$  и учетом коэффициента сдвига  $t_f$  в матрице  $[P]$  (3.6).

*Численное исследование* проводилось для свободно опертой оболочки в упругой среде различных моделей. На рисунке 3.3 представлены зависимости частоты  $\omega_{111}$  ( $c^{-1}$ ) от толщины первого несущего слоя: (а) –  $L = 2R$ , (б) –  $L = 10R$ .

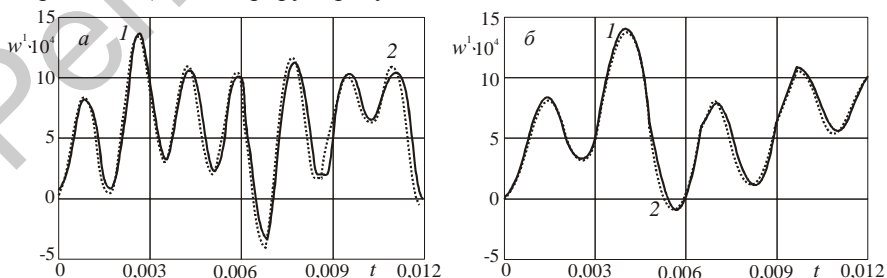


1, 2 – безынерционные среды Винклера, Пастернака; 3, 4 – инерционные соответствующие среды

**Рисунок 3.3 – Изменение частот собственных колебаний в зависимости от толщины первого несущего слоя**

Увеличение толщины слоя вызывает рост собственных частот обеих оболочек при расчетах по всем рассматриваемым моделям, при этом результаты по соответствующим моделям Винклера и Пастернака, как при учете инерции внешней среды, так и без него, практически совпадают между собой. Значительное изменение частот происходит за счет учета инерционных свойств среды. Сдвиги в упругой среде типа грунта на частоты влияния практически не оказывают, т. к. коэффициент сдвига  $t_f$  меньше  $\kappa_0$  на порядок.

Вынужденные колебания рассматриваемой трехслойной оболочки в тонком слое внешней среды ( $H_f = 0,5$ ;  $m_f = 308,5$  кг/м<sup>2</sup>; а – безынерционной, б – инерционной) иллюстрирует рисунок 3.4.



**Рисунок 3.4 – Изменение прогибов несущего слоя 1 во времени  $t$  (с) при различных моделях упругой среды: а – безынерционная, б – инерционная**



Графики прогибов первого слоя ( $x = L/2$ ) построены для моделей упругих сред: 1 – Винклера ( $\kappa_0 = 50$  МПа/м), 2 – Пастернака ( $\kappa_0 = 130$  МПа/м,  $t_f = 2,29$  МПа·м). Учет инерции среды приводит к увеличению периода колебаний. Результаты, полученные для моделей Винклера и Пастернака близки, хотя частоты при тонком слое среды существенно различаются между собой.

#### 4 КОЛЕБАНИЯ КРУГОВЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН, СКРЕПЛЕННЫХ С УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

Рассматриваются симметричные колебания упругих трехслойных круговых пластин, скрепленных с упругим основанием. Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  (рисунок 4.1). Для тонких несущих слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого легкого заполнителя

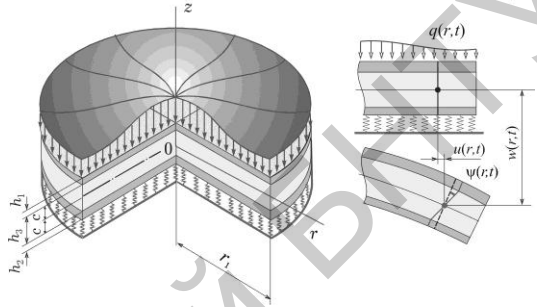


Рисунок 4.1 – Трехслойная круговая пластина на упругом основании

(не работающего в тангенциальном направлении) справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. На пластину действует вертикальная нагрузка  $q(r, t)$ . На контуре пластины жесткая диафрагма, препятствующая относительно сдвигу слоев, т. е.  $\psi = 0$  при  $r = r_1$ .

В силу симметрии тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластины  $w$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi$  и радиальное перемещение координатной плоскости  $u$  не зависят от координаты  $\varphi$ , т. е.  $u(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$ ,  $w(r, t)$ . В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя, получим выражения для радиальных перемещений в слоях  $u_r^{(k)}$  через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \quad u_r^{(3)} = u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Уравнения движения рассматриваемой пластины можно вывести из вариационного принципа Лагранжа, учтя работу сил инерции, подобно оболочке. В результате получим систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую вынужденные поперечные колебания круговой трехслойной пластины. При упругом безынерционном основании Винклера:

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_{,r}) &= 0, \quad L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w_{,r}) = 0, \\ L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r}) - M_0\ddot{w} - \kappa_0w &= -q. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В качестве начальных условий движения примем

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r). \quad (4.3)$$

Начально-краевая задача замыкается присоединением к (4.2), (4.3) граничных условий.

**Собственные колебания.** Соответствующая однородная система дифференциальных уравнений следует из (4.2) при  $q = 0$ :

$$u = b_1 w_r + C_1 r + C_2 / r, \quad \psi = b_2 w_r + C_3 r + C_4 / r, \quad L_3(w_r) + \kappa^4 w + M^4 \ddot{w} = 0. \quad (4.4)$$

В связи с ограниченностью решения в начале координат для сплошных пластин необходимо положить константы интегрирования  $C_2 = C_4 = 0$ .

Искомый прогиб принимается в виде

$$w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (4.5)$$

где  $v(r)$  – искомая координатная функция,  $\omega$  – частота собственных колебаний,  $A$  и  $B$  – константы интегрирования, следующие из начальных условий.

После подстановки выражения (4.5) в уравнение (4.4)<sub>3</sub> получим уравнение для определения координатной функции  $v(r)$ . Его решение

$$v(\lambda r) = C_5 J_0(\lambda r) + C_6 I_0(\lambda r) + C_7 Y_0(\lambda r) + C_8 K_0(\lambda r), \quad (4.6)$$

где  $J_0, Y_0, I_0, K_0$  – функции Бесселя;  $C_5, \dots, C_8$  – константы интегрирования.

Функции  $Y_0(\lambda r)$  и  $K_0(\lambda r)$  имеют особенность типа логарифма в начале координат, поэтому для сплошных пластин нужно в (4.6) положить  $C_7 = C_8 = 0$ .

При защемленном контуре пластины и наличия на нем жесткой диафрагмы должны выполняться граничные условия

$$u = \psi = w = w_r = 0 \quad (r = r_1). \quad (4.7)$$

При шарнирном опирании контура:

$$u = \psi = w = M_r = 0 \quad (r = r_1). \quad (4.8)$$

Подставляя в два последних требования (4.7) решение (4.5) с учетом функции (4.6), получим однородную систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования  $C_5, C_6$ . Эта система имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю ее детерминанта. Следовательно,

$$I_1(\lambda r_1) J_0(\lambda r_1) + J_1(\lambda r_1) I_0(\lambda r_1) = 0. \quad (4.9)$$

Трансцендентное уравнение (4.9) служит для определения собственных чисел  $\lambda_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) уравнения (4.4)<sub>3</sub>. Следует отметить, что оно совпало с подобным уравнением для собственных чисел однослойной пластины, т. к. в него не входят жесткостные и геометрические параметры слоев.

Аналогичное уравнение для собственных чисел, следующее из (4.8), будет

$$J_0(\lambda r_1) \left[ a_7 \left( \lambda J_0(\lambda r_1) - \frac{I_1(\lambda r_1)}{r_1} \right) + \frac{a_8}{r_1} I_1(\lambda r_1) \right] + I_0(\lambda r_1) \left[ a_7 \left( \lambda J_0(\lambda r_1) - \frac{J_1(\lambda r_1)}{r_1} \right) + \frac{a_8}{r_1} J_1(\lambda r_1) \right] = 0.$$

В дальнейшем, для описания прогиба круговой трехслойной пластины, связанной с упругим безынерционным основанием, при свободных колебаниях вводится система собственных ортонормированных функций

$$v(\lambda_n, r) = \frac{1}{d_n} \left[ J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right]. \quad (4.10)$$

Константы  $d_n$  следуют из требования нормировки системы функций (4.10).

В итоге искомые перемещения при свободных колебаниях трехслойной круговой пластины, связанной с упругим безынерционным основанием Винклера, представляются с помощью разложения в ряд по фундаментальной системе собственных ортонормированных функций (4.10):

$$\begin{aligned}
 w(r, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \\
 u(r, t) &= b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \\
 \psi(r, t) &= b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

где  $\varphi_n(\lambda_n, r) = \frac{\lambda_n}{d_n} \left[ J_1(\lambda_n r_1) \frac{r}{r_1} - J_1(\lambda_n r) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} (I_1(\lambda_n r_1) \frac{r}{r_1} - I_1(\lambda_n r)) \right]$ ,  $A_n, B_n$  – константы, следующие из начальных условий движения (4.3).

Числовые результаты получены для круговых трехслойных пластин, материалы слоев которых Д16Т–фторопласт–Д16Т. На рисунке 4.2 показано изменение первых четырех частот  $\omega_n$  собственных колебаний защемленной по контуру пластины в зависимости от коэффициента жесткости основания  $\kappa_0$  (Па/м): 1 –  $\omega_0$ , 2 –  $\omega_1$ , 3 –  $\omega_2$ , 4 –  $\omega_3$ . При основаниях малой жесткости ( $\kappa_0 < 10^7$ ) частоты практически постоянны. При увеличении жесткости основания до средней величины ( $10^7 < \kappa_0 < 10^9$ ) частота основного тона  $\omega_0$  увеличивается в 6,3 раза. В случае основания высокой жесткости ( $10^9 < \kappa_0 < 10^{11}$ ) частота основного тона может увеличиться еще в 9,5 раз.

На рисунке 4.3 приведены графики изменения собственных чисел  $\lambda_0$  (1) и собственных частот  $\omega_0$  (2) шарнирно оперой трехслойной пластины, скрепленной с основанием, в зависимости от толщины слоя 1, при наличии (со штрихом) и при отсутствии (без штриха) упругого безынерционного основания Винклера. С ростом  $h_1$  собственные числа убывают, а частота  $\omega_0$  слегка убывает, а затем примерно восстанавливает свою величину.

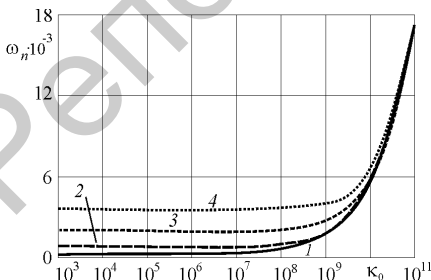


Рисунок 4.2 – Изменение частот  $\omega_n$  ( $\text{с}^{-1}$ ) в зависимости от коэффициента  $\kappa_0$

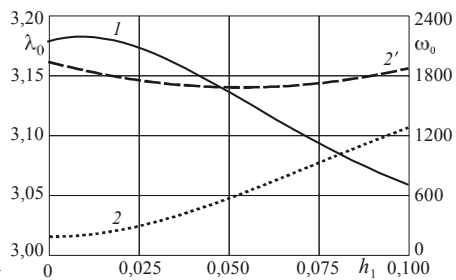


Рисунок 4.3 – Изменение собственных чисел  $\lambda_0$  и частот  $\omega_0$  ( $\text{с}^{-1}$ ) в зависимости от  $h_1$

**Вынужденные колебания.** Искомые перемещения  $u(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$ ,  $w(r, t)$  и внешняя нагрузка  $q(r, t)$  и представляются в виде разложений в ряд по системам собственных функций (4.10):

$$u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t),$$

$$q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \quad q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^{r_1} q(r, t) v_n r dr. \quad (4.12)$$

Функция времени будет следующей:

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) q_n(\tau) d\tau. \quad (4.13)$$

Равномерная сходимость рядов (4.11), (4.12) обеспечена полнотой системы собственных фундаментальных ортонормированных функций (4.10).

Рассмотрим колебания пластины на упругом основании при различных нагрузках. Для решения необходимо выписать функции  $q_n(t)$ ,  $T_n(t)$ .

*Локальная внезапно приложенная поверхностная нагрузка:*

$$q(r, t) = q_0 H_0(t) H_0(b - r), \quad b \leq r_1. \quad (4.14)$$

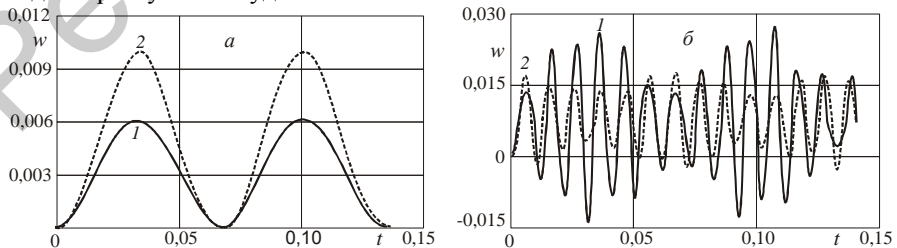
Подставив (4.14) в (4.12), получим параметры нагрузки  $q_n(t)$

$$q_n(t) = \frac{q_0 H_0(t) b}{M_0 d_n \lambda_n} \left( J_1(\lambda_n b) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_1(\lambda_n b) \right).$$

Если интенсивность нагрузки  $q_0$  постоянна по модулю, то при нулевых начальных условиях ( $A_n = 0$ ,  $B_n = 0$ ) из (4.13) получаем функцию времени

$$T_n(t) = \frac{q_0 b (1 - \cos(\omega_n t))}{M_0 d_n \lambda_n \omega_n^2} \left( J_1(\lambda_n b) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_1(\lambda_n b) \right).$$

Рисунок 4.4 иллюстрирует изменение во времени  $t$  (с) прогиба в центре пластины при отсутствии основания –  $a$ , при основании Винклера –  $b$ . Кривые соответствуют различным относительным радиусам силового круга  $b$ :  $1 - b = 0,5$ ,  $2 - b = 1$ . Пластина без основания совершает отнулевой цикл колебаний, при основании средней жесткости ( $\kappa_0 = 10^8$  Па/м) наблюдается несимметричный циклический процесс. Увеличение радиуса силового круга приводит к росту амплитуды колебаний.



**Рисунок 4.4 – Прогиб во времени при внезапно приложенной нагрузке**

Локальный равномерно распределенный импульс. Тогда

$$q(r, t) = q_1 \delta(t) H_0(b - r), \quad b \leq r_1,$$

$$T_n(t) = \frac{q_1 b \sin(\omega_n t)}{M_0 d_n \lambda_n \omega_n} \left( J_1(\lambda_n b) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_1(\lambda_n b) \right).$$

На рисунке 4.5 показано изменение во времени  $t$  (с) прогиба в центре пластины при отсутствии упругого основания –  $a$ , при его наличии –  $b$  ( $\kappa_0 = 10^8$  Па/м). Внешняя нагрузка распределена по кругу радиуса  $b = 0,5$ : 1 – импульс с интенсивностью  $q_1 = 700$  Па·с, 2 – внезапно приложенная нагрузка с интенсивностью  $q_0 = 7 \cdot 10^3$  Па ( $a$ ) и  $q_0 = 7 \cdot 10^4$  Па ( $b$ ).

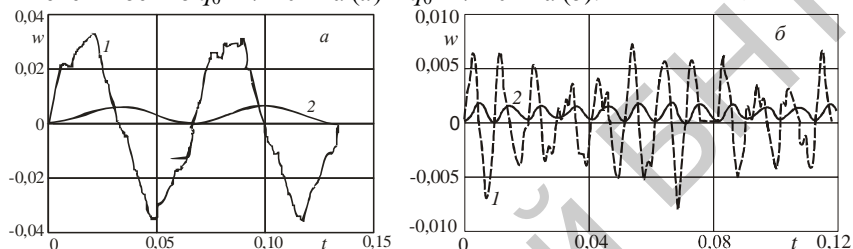


Рисунок 4.5 – Прогиб во времени при импульсной нагрузке

За предельную продолжительность импульса при отсутствии основания принимаем четверть периода по низшей из частот, в нашем случае  $t_1 \leq \pi/(2\omega_0) = 0,016$  с. Достичь величины  $q_1$  за это время можно нагрузкой  $q_0' = q_1/t_1 = 43,7$  кПа, которая в 6,25 раза больше  $q_0$ . Максимальный прогиб от такой нагрузки будет во столько же раз больше прогиба от  $q_0$ . Следовательно, внезапно приложенная нагрузка, вызывает в пластине перемещения в 1,3 раза большие, чем при ее импульсном воздействии. Подобный эффект наблюдается и при наличии основания.

**Резонансная нагрузка.** Частота гармонической нагрузки совпадает с одной из собственных частот колебаний системы. Тогда

$$q(r, t) = q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)) \quad (D, E - \text{const}). \quad (4.15)$$

Если интенсивность нагрузки (4.15)  $q_0 = \text{const}$ , то параметры нагрузки  $q_n(t)$

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^{r_1} q(r, t) v_n r dr = D_n \cos(\omega_k t) + E_n \sin(\omega_k t),$$

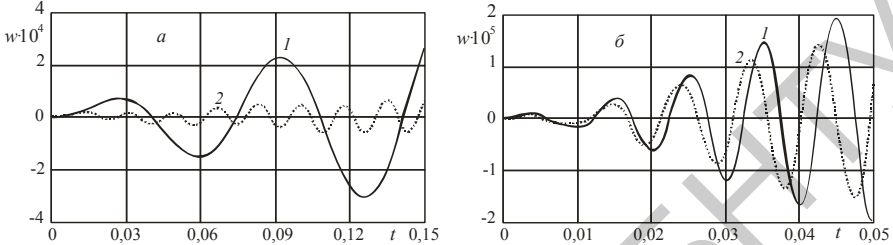
$$\{D_n, E_n\} = \{D, E\} \frac{q_0}{M_0 d_n \lambda_n} \left[ J_1(\lambda_n r_1) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_1(\lambda_n r_1) \right].$$

Функция времени запишется в виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + y_n(t), \quad (4.16)$$

$$y_n(t) = \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \cos(\omega_k t) + \frac{E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \sin(\omega_k t), & n \neq k, \\ -\frac{E_k}{2\omega_k} t \cos(\omega_k t) + \frac{D_k}{2\omega_k} t \sin(\omega_k t), & n = k. \end{cases}$$

На рисунке 4.6 ( $a - \kappa_0 = 0$ ,  $b - \kappa_0 = 10^8$  Па/м) показано изменение прогибов во времени  $t$  (с) при резонансе по частотам:  $1 - \omega_k = \omega_0$ ,  $2 - \omega_k = \omega_1$ . Здесь визуально наблюдается нарастание резонансной амплитуды колебаний с существенным опережением при частоте основного тона в случае отсутствия упругого основания. При наличии основания частоты и амплитуды колебаний сближаются, но превалирование нижней частоты сохраняется.



**Рисунок 4.6 – Прогиб во времени при резонансной нагрузке**

В работе получены аналитические решения задач для рассматриваемой пластины при действии внезапно приложенных, импульсных и резонансных локальных распределенных нагрузок, сосредоточенных сил и моментов.

**Инерционное основание Винклера.** Рассматриваются колебания трехслойной пластины, связанной с упругим инерционным основанием Винклера:

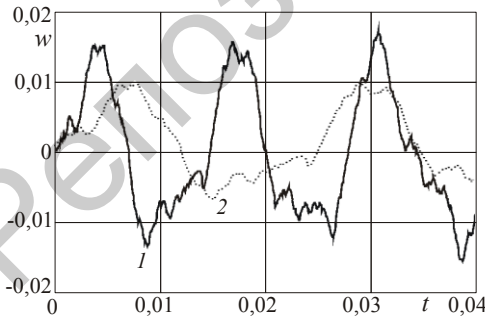
$$q_r = \kappa_0 w + m_f \ddot{w},$$

где  $m_f$  – массовый инерционный коэффициент упругого основания.

Система уравнений движения пластины в отличие от (4.2) дополнится инерционным слагаемым от основания:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w, r) = 0, \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w, r) = 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w, r) - M_0^* \ddot{w} - \kappa_0 w = -q, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где  $M_0^* = M_0 + m_f$  – удельная масса пластины и основания.



**Рисунок 4.7 – Изменение прогиба во времени (основание Винклера)**

$1$  – безынерционное основание,  $2$  – инерционное основание. Инерция основания уменьшает максимальные прогибы на 40 %.

**Инерционное основание Пастернака.** Пусть трехслойная круговая пластина скреплена с инерционным основанием Пастернака. Его реакция

$$q_r = \kappa_0 w - t_f \Delta w + m_f \ddot{w},$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Система дифференциальных уравнений движения в перемещениях (4.17) при инерционном основании Пастернака принимает вид:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = 0, \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) + t_f \Delta w - M_0^* \ddot{w} - \kappa_0 w = -q. \end{aligned} \quad (4.18)$$

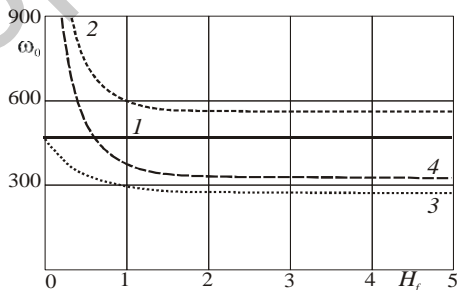
Решение системы (4.18) принимается в виде следующих разложений в ряд по системам собственных функций:

$$\begin{aligned} w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^* T_n(t), \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^* T_n(t), \\ u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^* T_n(t), \quad q(r, t) = M_0^* \sum_{n=0}^{\infty} v_n^* q_n(t), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где  $T_n(t)$  вычисляются по формуле (4.13); системы собственных функций

$$\begin{aligned} v_n^*(\lambda_n, r) = \frac{1}{d_n^*} \left[ J_0(s_n^- r) - \frac{J_0(s_n^- r_1)}{I_0(s_n^+ r_1)} I_0(s_n^+ r) \right], \quad s_n^\pm = \sqrt{\sqrt{t^4 + \lambda^4} \pm t^2}, \\ \phi_n^*(\lambda_n, r) = \frac{1}{d_n^*} \left[ s_n^- J_1(s_n^- r) \frac{r}{r_1} - s_n^- J_1(s_n^- r) + \frac{s_n^+ J_0(s_n^- r_1)}{I_0(s_n^+ r_1)} \left( I_1(s_n^+ r_1) \frac{r}{r_1} - I_1(s_n^+ r) \right) \right]. \end{aligned}$$

На рисунке 4.8 показана зависимость нижней частоты  $\omega_0$  ( $\text{с}^{-1}$ ) от толщины слоя внешней среды  $H_f$ . Кривые соответствуют различным моделям упругих оснований: 1, 2 – безынерционные Винклера и Пастернака, 3, 4 – инерционные Винклера и Пастернака. При увеличении толщины основания собственные частоты по четырем моделям стабилизируются при  $H_f \geq 1,5$ .

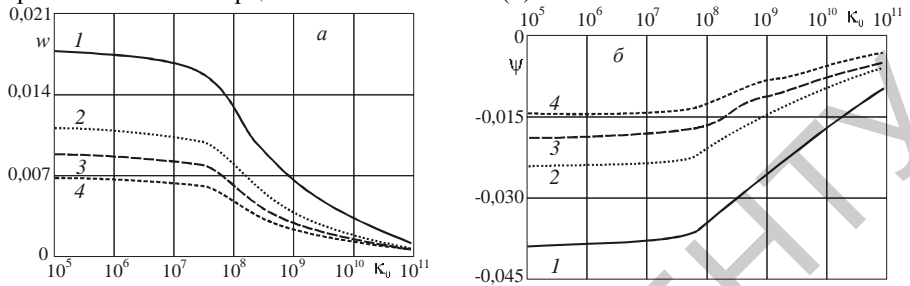


**Рисунок 4.8 – Зависимость частоты  $\omega_0$  от толщины слоя основания**

При  $H_f \geq 1,5$  частота по безынерционной модели Пастернака в 1,2 раза больше, чем по Винклеру. Учет инерции основания, начиная с  $H_f \geq 1,5$ , приводит к уменьшению исследуемой частоты по обоим моделям в 1,7 раза.

На рисунке 4.9 показано изменение максимальных прогибов ( $a$ ) и сдвигов в заполнителе ( $b$ ) защемленной по контуру пластины в зависимости от коэффициента жесткости инерционного основания Пастернака  $\kappa_0$  при различной удельной массе основания  $m_f$  ( $\text{кг/м}^2$ ): 1 –  $m_f = 0$  (безынерционное основание), 2 –  $m_f = 500$ , 3 –  $m_f = 1000$ , 4 –  $m_f = 2000$  ( $t_f = 4,75$  МПа·м). Импульсная нагрузка ( $q = 1$  кПа·с) действует на всю внешнюю поверхность слоя 1. Суще-

ственное уменьшение перемещений наблюдается при основаниях средней и высокой жесткости  $10^6 < \kappa_0 < 10^{11}$  Па/м. Из графиков следует, что учет инерции основания (2, 3, 4) приводит к уменьшению перемещений на 40–60 % по сравнению с безынерционным основанием (1).



**Рисунок 4.9 – Изменение максимальных прогиба (а) и сдвига (б) на основании Пастернака (импульсное нагружение)**

В работе численно исследованы параметры колебаний трехслойной пластины, скрепленной с инерционным основанием Пастернака, при действии локальных внезапно приложенных, импульсных и резонансных нагрузок.

## 5 ТЕРМОРАДИАЦИОННЫЙ УДАР ПО ПЛАСТИНЕ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРА

**Терморadiационный удар.** Пусть к поверхности  $z = c + h_1$  шарнирно опертой круговой трехслойной пластины, связанной с безынерционным упругим основанием, внезапно подводится тепловой поток плотностью  $q_t$  и падает нейтронный поток интенсивностью  $\phi$  в направлении, противоположном наружной нормали. Поверхность  $z = -c - h_2$  и контур  $r = r_1$  теплоизолированы.

Собственные колебания описываются системой уравнений (4.4). Начальные условия движения принимаются однородными. Изменения произойдут в граничных условиях, в которые необходимо добавить «температурный»  $M_t$  и «радиационный» моменты  $M_I$ , обусловленные объемными деформациями за счет теплового и нейтронного воздействия  $\theta_i^{(k)} = \alpha_{0k} T(z, t)$ ,  $\theta_I^{(k)} = B_k I(z, t)$ . Следовательно, при  $r = r_1$  должны выполняться условия:

$$u = \psi = w = 0, \quad M_r = a_3 u_{,r} + a_5 \psi_{,r} - a_6 w_{,rr} - a_{60} \frac{w_{,r}}{r} - M_t - M_I = 0,$$

$$M_t = \sum_{k=1}^3 M_{kt} = 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} K_k^- \int_{h_k} T z dz, \quad M_I = 3 \sum_{k=1}^3 K_k^- B_k \int_{h_k} I(z, t) z dz.$$

Перемещения рассматриваемой пластины получены методом разделения на статическую и  $w_{dn}$  динамическую составляющие. В результате:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \left( T_n + \frac{r_1^2 (M_t + M_I) I(\lambda_n)}{2(a_7 + a_8)} \right), \quad u = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} v_n r \left( T_n + \frac{r_1^2 (M_t + M_I) I(\lambda_n)}{2(a_7 + a_8)} \right) + C_1 r,$$

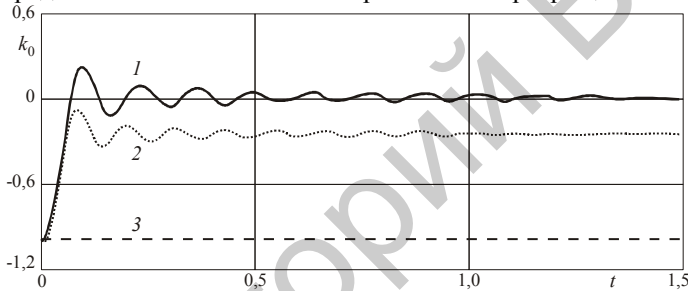


$$\psi = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} v_n v_r \left( T_n + \frac{r_1^2 (M_t + M_l) I(\lambda_n)}{2(a_7 + a_8)} \right) + C_3 r,$$

где  $v_n$  – введенные ранее собственные функции,  $T_n(t)$  – функция времени

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) - \frac{r_1^2 I_n(\lambda_n)}{2(a_7 + a_8) \omega_n} \int_0^t \left( \kappa^4 (M_t(\tau) + M_{l0}(\tau)) + M^4 \ddot{M}_t(\tau) \right) \sin[\omega_n (t - \tau)] d\tau.$$

Графики зависимости от времени  $t$  (с) коэффициентов  $k_n = w_{sn} / w_{dn}$  ( $n = 0$ ) при радиационном ударе показаны на рисунке 5.1: 1 – пластина не связанная с основанием, 2 – пластина на основании малой жесткости  $\kappa_0 = 10^5$  Па/м; 3 – основание средней жесткости  $\kappa_0 = 10^8$  Па/м. При малой жесткости основания характер колебаний не изменяется, несколько увеличивается частота, уменьшается амплитуда прогиба, колебательный процесс смещается вниз. При основании средней жесткости колебания практически прекращаются.



**Рисунок 5.1 – Изменение коэффициента  $k_0$  во времени для пакета корднерит-фторопласт-Д16Т при радиационном ударе**

**Колебания, вызванные абляцией.** Если при воздействии теплового потока возникла абляция, т. е. часть материала внешнего слоя была унесена с некоторой скоростью  $v_t$ , направленной перпендикулярно поверхности пластины, то рассматриваемая пластина получила импульс движения и начала совершать свободные колебания. Начальную скорость  $v_0$  движения пластины получим, используя закон сохранения количества движения системы:

$$v_0 = \rho_1 h_0 v_t / \left( \sum_{k=1}^3 \rho_k h_k \right),$$

где  $h_0$  – толщина унесенной со скоростью  $v_t$  части внешнего слоя.

Начальные условия колебания принимаются в виде

$$w(r, 0) = 0; \quad \dot{w}(r, 0) = -v_0.$$

Аналитическое решение поставленной задачи при заделанном контуре пластины по виду будет полностью совпадать с изотермическим решением (4.11). Константы интегрирования:

$$A_n = 0, \quad B_n = -\frac{v_0}{\omega_n d_n \lambda_n} \left[ J_1(r_1 \lambda_n) - \frac{J_0(r_1 \lambda_n)}{I_0(r_1 \lambda_n)} I_1(r_1 \lambda_n) \right].$$

При шарнирном опирании рассматриваемой пластины в граничные условия необходимо добавить «температурный» момент  $M_{t1} = \text{const}$ , при  $t = t_1$ .

## 6 КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ТРЕХСЛОЙНЫХ КРУГОВЫХ ПЛАСТИН НА УПРУГИХ ОСНОВАНИЯХ

**Линейно вязкоупругая пластина на основании Винклера.** Рассматривается трехслойная круговая пластина, материалы слоев которой описываются физическими уравнениями состояния линейной вязкоупругости:

$$s_{\alpha\beta}^k = 2G_k^* \varepsilon_{\alpha\beta}^k, \quad \sigma^k = 3K_k \varepsilon^k, \quad (6.1)$$

где  $G_k^*$  – оператор линейной вязкоупругости

$$G_k^* f(t) \equiv G_k (1 - R_k^*) f(t) \equiv G_k \left( f(t) - \int_0^t R_k(t - \tau) f(\tau) d\tau \right),$$

$R_k(t)$  – ядро релаксации материала  $k$ -го слоя.

Система уравнений поперечных колебаний вязкоупругой пластины следует из уравнений для упругой пластины (4.2), если в коэффициентах  $a_m$  модули сдвига  $G_k$  формально заменить операторами  $G_k^*$  (6.1):

$$\begin{aligned} L_2(a_1^* u + a_2^* \psi - a_3^* w, r) &= 0, \quad L_2(a_2^* u + a_4^* \psi - a_5^* w, r) = 0, \\ L_3(a_3^* u + a_5^* \psi - a_6^* w, r) - M_0 \ddot{w} - \kappa_0 w &= -q. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Система уравнений (6.2) является интегро-дифференциальной. Для ее упрощения введем гипотезу о подобии ядер релаксации материалов слоев:

$$R_k(t) = l_k R_3(t), \quad l_k = \text{const}, \quad 0 \leq \int_0^t R_3(\tau) d\tau \ll 1, \quad R_3(\tau) \geq 0. \quad (6.3)$$

Операторы линейной вязкоупругости  $a_m^*$  в (6.2) представим в виде

$$a_m^* = a_m - a_m' R_3^*, \quad (m = 1, \dots, 6). \quad (6.4)$$

Для решения системы интегро-дифференциальных уравнений (6.2), с учетом условий (6.3)–(6.4), применим метод усреднения в динамических задачах вязкоупругости (Ильюшина–Победри). Решение будем искать в виде

$$u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t). \quad (6.5)$$

В результате для функции времени  $T_n(t)$  получим уравнение

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = \varepsilon_1 q_n + \varepsilon_2 \omega_n^2 k_n \int_0^t R_3(t - \tau) T_n(\tau) d\tau, \quad k_n = \omega_n'^2 / \omega_n^2. \quad (6.6)$$

Применительно к нашей задаче его решение следующее

$$\begin{aligned} T_n = & \left[ A_n \cos \omega_n (1 + 0,5R_{cn}) t + B_n \sin \omega_n (1 + 0,5R_{cn}) t \right] \exp(-0,5\omega_n R_{sn} t) + \\ & + \frac{2}{\omega_n} \sqrt{\frac{q_{1n}^2 + q_{2n}^2}{R_{cn}^2 + R_{sn}^2}} \cos(\omega_n t + \varphi_{01} - \varphi_{02}). \end{aligned} \quad (6.7)$$

При малых силах порядка  $\varepsilon$  метод усреднения дает отличную от нуля амплитуду только в случае резонанса, поэтому предположим, что частота нагрузки совпадает с одной из частот  $\omega_k$  собственных колебаний пластины:

$$q_k(r, t) = q_0(D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)), \quad (D, E, k - \text{const}). \quad (6.8)$$

Начальные условия движения принимаем однородными. Характеристики колебаний в (6.7), соответствующие  $k$ -й гармонике, в этом случае будут

$$q_k(t) = D_k \cos \omega_k t + E_k \sin \omega_k t, \quad q_{1k} = \frac{E_k}{2\omega_k}, \quad q_{2k} = \frac{D_k}{2\omega_k}, \quad \varphi_{02} = \arctg \frac{D_k}{E_k},$$

$$\{D_k, E_k\} = \{D, E\} \frac{q_0 r_1}{M_0 d_k \lambda_k} \left[ J_1(\lambda_k r_1) - \frac{J_0(\lambda_k r_1)}{I_0(\lambda_k r_1)} I_1(\lambda_k r_1) \right]. \quad (6.9)$$

**Инерционное основание Винклера.** Система уравнений движения вязкоупругой пластины (6.2) дополняется учетом массы упругого основания:

$$L_2(a_1^* u + a_2^* \psi - a_3^* w_r) = 0, \quad L_2(a_2^* u + a_4^* \psi - a_5^* w_r) = 0,$$

$$L_3(a_3^* u + a_5^* \psi - a_6^* w_r) - M_0^* \ddot{w} - \kappa_0 w = -q,$$

где  $M_0^*$  – удельная масса пластины и основания.

**Инерционное основание Пастернака,** тогда искомое решение соответствующей интегро-дифференциальной системы представляется в виде разложений в ряд по базисным функциям из (4.19):

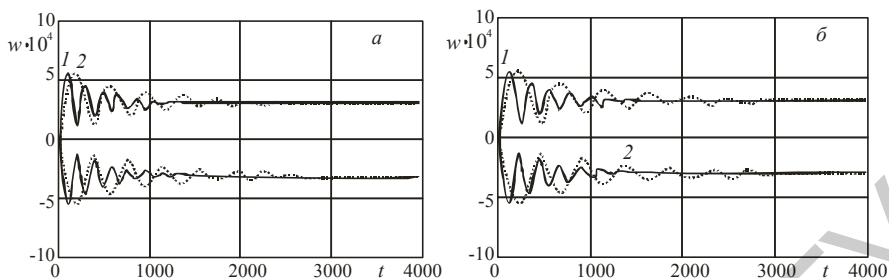
$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^* T_n(t), \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^* T_n(t), \quad u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^* T_n(t). \quad (6.10)$$

При *резонансной нагрузке* (6.8) характеристики колебаний соответствующие  $k$ -й гармонике, следующие:

$$\{D_k, E_k\} = \{D, E\} \frac{q_0 r_1}{M_0 d_k} \left[ \frac{J_1(s_n^- r_1)}{s_n^-} - \frac{J_0(s_n^- r_1)}{s_n^+ I_0(s_n^+ r_1)} I_1(s_n^+ r_1) \right].$$

*Численные результаты* получены для жестко закрепленной пластины (Д16Т–фторопласт–Д16Т) с относительными толщинами слоев  $h_1 = h_2 = c = 0,02$ . Интенсивность резонансной нагрузки –  $q_0 = 1$  Па; параметры основания Пастернака –  $\kappa_0 = 50$  МПа/м,  $t_f = 4.7$  МПа·м,  $m_f = 641$  кг/м<sup>2</sup>.

На рисунке 6.1 показаны образующие прогибов вязкоупругой пластины на упругих основаниях Винклера (а) и Пастернака (б): 1 – безынерционное, 2 – инерционное основание. Учет инерционности основания показывает более медленное затухание свободных колебаний, т. е. стабилизацию амплитуды колебаний. Различие моделей оснований проявляется слабо.



**Рисунок 6.1 – Образующие амплитуд прогибов вязкоупругой пластины**

**Колебания вязкоупругой пластины на упругих основаниях в температурном поле.** При решении этой задачи воспользуемся температурно-временной аналогией (ТВА) в вязкоупругих средах. Для определенности будем считать, что температурное поле стационарно. В соответствии с ТВА в решении задачи реальное время заменяется условным  $t'$ :

$$t' = \frac{t}{\alpha_T(T)}, \quad (6.11)$$

где  $t$  – время наблюдения,  $T$  – температура,  $\alpha_T(T)$  – функция температурно-временного сдвига (формула Вильямса–Ландела–Ферри)

$$\lg a_T = C_1 \frac{T - T_0}{C_2 + T - T_0},$$

$C_1$ ,  $C_2$  – экспериментальные константы, их принимаемые значения  $C_1 = 8,86$ ;  $C_2 = 101,6$  К;  $T_0$  – базовая температура в Кельвинах, при которой получены параметры вязкоупругого материала.

Тогда функция времени в решении задачи о вынужденных колебаниях вязкоупругой круговой трехслойной пластины в температурном поле, скрепленной с упругим основанием, будет

$$T_n(T) = \left[ A_n \cos \omega_n (1 + 0,5R'_{cn})t + B_n \sin \omega_n (1 + 0,5R'_{cn})t \right] \exp(-0,5\omega_n R'_{sn}t) + \frac{2}{\omega_n} \sqrt{\frac{q_{1n}^2 + q_{2n}^2}{R'^2_{cn} + R'^2_{sn}}} \cos(\omega_n t + \varphi'_{01} - \varphi_{02}),$$

где параметры со штрихом, характеризующие вязкоупругие свойства материала при повышенных температурах, вычисляются в условное время  $t'$  (6.11).

*Численные результаты* получены для рассматриваемой пластины при нагревании на 30 К, при этом  $\alpha_T(T) = 9,55 \cdot 10^{-3}$ . Рисунок 6.2 показывает рост прогибов вязкоупругой пластины на инерционных основаниях Винклера (а) и Пастернака (б) при различных температурах: 1 –  $T = 293$  К, 2 –  $T = 323$  К. У нагретой пластины скорость нарастания амплитуды колебаний несколько выше, сдвиг фазы за счет температуры порядка  $\pi$  при основании Винклера, при основании Пастернака сдвиг несколько больше.

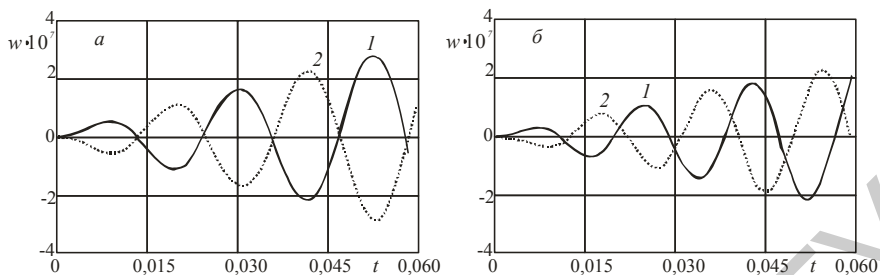


Рисунок 6.2 – Зависимость прогиба вязкоупругой пластины от времени

## 7 КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ, СВЯЗАННЫХ С УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

**Постановка начально-краевой задачи.** Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Бернулли, в жестком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений по поперечной координате  $z$ . На границах контакта слоев используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается его обжатие, деформации малые. Система координат  $x, y, z$  связывается со срединной плоскостью заполнителя. К внешней поверхности первого несущего слоя приложена динамическая поверхностная поперечная нагрузка  $q(x, t)$ . На нижнюю поверхность второго несущего слоя действует реакция основания  $q_r(x, t)$ . Через  $w_k(x, t)$  и  $u_k(x, t)$  обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоев;  $h_k$  – толщина  $k$ -го слоя,  $h_3 = 2c$  ( $k = 1, 2, 3$  – номер слоя);  $b_0$  – ширина стержня.

Уравнения движения рассматриваемого трехслойного стержня следуют из принципа Лагранжа, включая работу сил инерции. Учитывая инерцию движения в слоях вдоль координатных осей и инерцию вращения нормали в несущих слоях, получим систему уравнений колебаний в перемещениях:

$$\begin{aligned}
 a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} + m_1 \ddot{u}_1 &= 0, \\
 -a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} + m_2 \ddot{u}_2 &= 0, \\
 -a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + \\
 + a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 + m_1 \dot{w}_1 - m_3 \dot{w}_{1,xx} &= q, \\
 -a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - \\
 -a_{16} w_{1,xxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + a_8 w_2 + m_2 \dot{w}_2 - m_4 \dot{w}_{2,xx} &= -q_r. \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

**Безынерционное основание Винклера.** Реакция основания  $q_r = -\kappa_0 w_2$ . Начальные условия движения будут следующие ( $t = 0$ ):

$$\begin{aligned}
 u_k(x, 0) = u_{k0}(x), \quad \dot{u}_k(x, 0) = \dot{u}_{k0}(x), \\
 w_k(x, 0) = w_{k0}(x), \quad \dot{w}_k(x, 0) = \dot{w}_{k0}(x) \quad (k = 1, 2), \quad (7.2)
 \end{aligned}$$

где  $u_0^k(x)$ ,  $\dot{u}_0^k(x)$ ,  $w_0^k(x)$ ,  $\dot{w}_0^k(x)$  – начальные перемещения и скорости.

Для замыкания начально-краевой задачи (7.1), (7.2) необходимо добавить граничные условия. Ее решение проводится методом Бубнова – Галеркина. Искомые перемещения и нагрузка разлагаются в ряды по системам базисных функций  $\psi_{im}$ , удовлетворяющей принятым граничным условиям:

$$u_1(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{1m}(x) T_{m1}(t), \quad u_2(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{2m} T_{m2}(t), \quad w_1(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{3m} T_{m3}(t),$$

$$w_2(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{4m} T_{m4}(t), \quad q(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{5m} q_m(t), \quad (7.3)$$

где  $T_{mi}(t)$  – неизвестная функция времени,  $q_m(t)$  – коэффициенты разложения нагрузки в ряд,  $\psi_{im}$  – базисные функции ( $i = 1 \dots 5$ ).

Подстановка выражений (7.3) в (7.1) приводит к системе уравнений для определения функций времени  $T_{mi}(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ):

$$[B]\{T\} + [M]\{\ddot{T}\} = \{Q\}. \quad (7.4)$$

Коэффициенты системы (7.4) получены для жесткого защемления и свободного опирания торцов на неподвижные опоры, при которых базисные функции являются тригонометрическими.

**Собственные колебания стержня.** В этом случае  $q(x, t) = 0$ . Тогда решение начально-краевой задачи (7.1)–(7.3) будет

$$T_{mk}(t) = A_{mk} \sin(\omega_m t + \alpha_{mk}), \quad (7.5)$$

где  $A_{mk}$  – амплитуда,  $\omega_m$  – частота,  $\alpha_{mk}$  – начальная фаза колебаний.

Подстановка выражения (7.5) в систему (7.4) приводит к обобщенной задаче на собственные значения. В результате имеем алгебраическое уравнение 4-го порядка относительно  $\omega_m^2$ . Решив его, получим четыре вещественных неотрицательных корня. Таким образом, колебательный процесс для каждого значения параметра  $m$  оказывается четырехчастотным.

Зависимость частот  $\omega_{m1}$  ( $c^{-1}$ ) от жесткости основания  $\kappa_0$  показана на рисунке 7.1 ( $c = 0,09$ ;  $h_2 = 0,05$ ;  $h_1 = 0,01$ ). Номер кривой совпадает с параметром  $m$ . При основаниях малой и высокой жесткости ( $\kappa_0 < 10^8$ ,  $\kappa_0 > 10^{11}$  (Па/м)) эта зависимость слабая. В диапазоне средней жесткости  $10^8 < \kappa_0 < 10^{11}$  Па/м наблюдается существенное увеличение исследуемых частот.

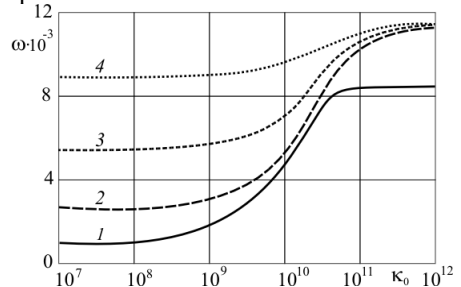


Рисунок 7.1 – Собственные частоты

**Вынужденные колебания.** В этом случае функции  $T_{mk}(t)$  (7.5) представим в виде разложения по собственным формам:

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^4 \delta_{mki} \zeta_{mi}(t) \quad \left( \sum_{i=1}^4 \delta_{mik}^2 = 1 \right), \quad (7.6)$$

где  $\delta_{mki}$  – амплитуды нормированных собственных форм колебаний.

Функции времени  $\zeta_{mi}(t)$  определяются из системы уравнений

$$\ddot{\zeta}_{mi} + \omega_{mi}^2 \zeta_{mi} = \tilde{q}_{mi}(t), \quad (7.7)$$

где  $\omega_{mi}$  – собственные частоты;  $\tilde{q}_{mi}(t)$  – компоненты приведенной нагрузки.

Общее решение дифференциального уравнения (7.7)

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi} \cos(\omega_{mi} t) + B_{mi} \sin(\omega_{mi} t) + \frac{1}{\omega_{mi}} \int_0^t \sin(\omega_{mi}(t-\tau)) \tilde{q}_{mi}(\tau) d\tau. \quad (7.8)$$

После взятия интеграла в (7.8) перемещения представляются в виде сумм произведений  $\zeta_{mi}(t)$  на соответствующие коэффициенты  $\delta_{mki}$  и исходные координатные функции, введенные в (7.3). Сходимость рядов (7.3) обеспечивается полнотой базисной системы функций  $\psi_{im}$ . В нашем случае проведена проверка практической сходимости. Рисунок 7.2 показывает на примере прогиба первого слоя  $w_1$ , что при вычислении перемещений достаточно оставлять первые 35 слагаемых, т. к. дополнительные 65 членов ряда вносят поправку, не превышающую 0,01 %. Нагрузка равномерно распределена по всей длине стержня,  $a - \kappa_0 = 10^6$  Па/м,  $b - \kappa_0 = 10^{11}$  Па/м. С ростом жесткости основания перемещения уменьшаются, сходимость улучшается.

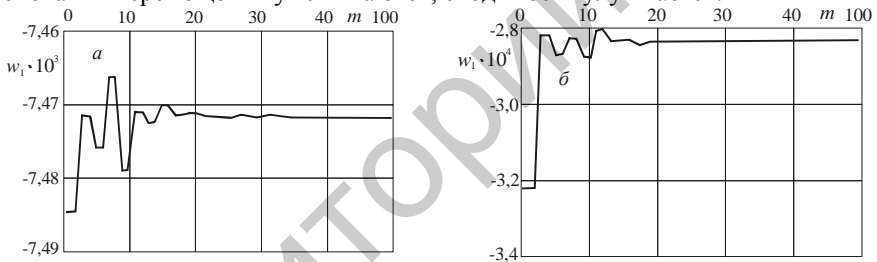


Рисунок 7.2 – Сходимость решения

В работе получены решения для локальных *внезапно приложенных, импульсных и резонансных* распределенных и сосредоточенных нагрузок.

**Инерционное основание Винклера**, тогда реакция упругого инерционного основания будет:

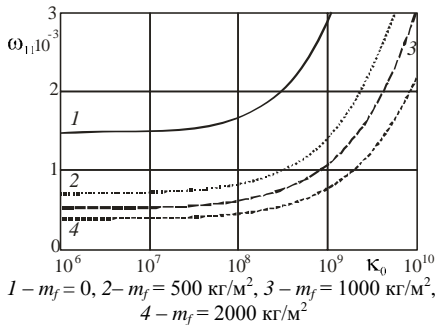
$$q_r = -\kappa_0 w_2 - m_f \ddot{w}_2, \quad (7.9)$$

где  $m_f$  – инерционный член основания.

С учетом реакции (7.9) в системе (7.1) изменится только четвертое уравнение, которое примет вид

$$-a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - a_{16} w_{1,xxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + (a_8 + \kappa_0) w_2 + (m_2 + m_f) \ddot{w}_2 - m_4 \ddot{w}_{2,xx} = 0. \quad (7.10)$$

Решение полученной системы, с учетом (7.10), строится в виде (7.3), (7.6)–(7.8). Отличие будет только в коэффициентах матрицы масс  $[M]$ , где дополнительно учитывается удельная масса основания.



**Рисунок 7.3 – Изменение частоты колебаний  $\omega_{11}$  в зависимости от коэффициента жесткости  $\kappa_0$**

**Инерционное основание Пастернака, тогда реакция основания**

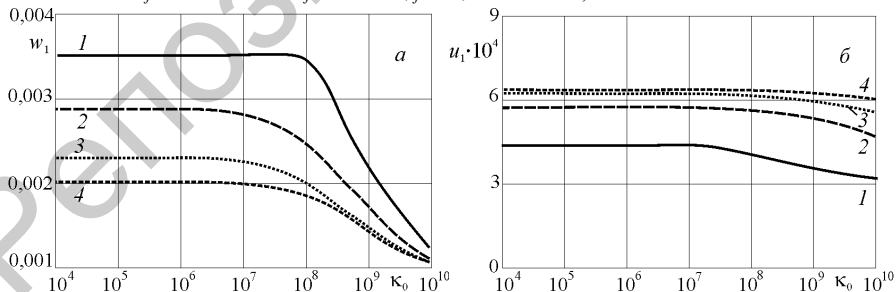
$$q_r = -\kappa_0 w_2 + t_f w_{2,xx} - m_f \ddot{w}_2. \quad (7.11)$$

С учетом реакции (7.11) в системе уравнений движения (7.1) изменится только четвертое уравнение, которое примет вид

$$-a_3 u_{1,x} + a_7 u_{2,x} - a_4 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + (a_{14} - t_f) w_{2,xx} - a_{16} w_{1,xxxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + (a_8 + \kappa_0) w_2 + (m_2 + m_f) \ddot{w}_2 - m_4 \ddot{w}_{2,xx} = 0. \quad (7.12)$$

Система (7.12) решается методом Бубнова-Галеркина по схеме рассмотренной ранее. Отличие будет только в коэффициентах матриц в (7.4) для различных способов закрепления торцов стержня.

На рисунке 7.4 показано изменение прогиба ( $a$ ) и горизонтального перемещения первого несущего слоя ( $b$ ) в зависимости от коэффициента жесткости инерционного основания Пастернака  $\kappa_0$  (Па/м) при различной удельной массе основания  $m_f$  (кг/м<sup>2</sup>): 1 –  $m_f = 0$  (безынерционное основание), 2 –  $m_f = 500$ , 3 –  $m_f = 1000$ , 4 –  $m_f = 2000$  ( $t_f = 4,75$  МПа·м).



**Рисунок 7.4– Изменение максимальных прогиба ( $a$ ) и горизонтального перемещения ( $b$ ) в зависимости от коэффициента  $\kappa_0$  на основании Пастернака**

Из графиков следует, что рост инерции основания Пастернака (2, 3, 4) приводит к уменьшению прогиба на 20–50 % по сравнению с безынерционным основанием (1), горизонтальные перемещения при этом возрастают на 40–50 %.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты диссертации

В работе создана новая научно обоснованная общая методология математического исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных элементов конструкций, связанных с упругими инерционными и безынерционными средами Винклера и Пастернака, при внешних динамических воздействиях, приведены новые теоретические результаты, включающие:

- механико-математические модели колебаний трехслойных элементов конструкций (оболочек вращения, цилиндрических оболочек, круговых пластин, стержней) в упругой среде, содержащие вывод уравнений движения в усилиях и перемещениях, формулировки начальных и граничных условий, отличающиеся учетом реакций внешних инерционных и безынерционных сред Винклера и Пастернака, воздействием температурных и радиационных полей [1–7, 9–87];
- аналитические решения начально-краевых задач о собственных колебаниях трехслойных цилиндрических оболочек (объемная, плоская и радиальная инерционные модели), круговых пластин и стержней, связанных с инерционными и безынерционными средами Винклера и Пастернака, позволившие получить формулы для расчета собственных частот и построить системы базисных и собственных функций [10, 12, 27, 28, 38, 40, 42, 53, 66, 72, 80–82, 86];
- численный параметрический анализ собственных частот колебаний трехслойных элементов конструкций, установивший их зависимость от упругих и геометрических характеристик слоев, удельной массы, коэффициентов жесткости и сдвига упругой среды, показавший, что учет инерционности среды приводит к существенному уменьшению собственных частот колебаний [10, 12, 27, 28, 38, 40, 42, 53, 66, 72, 80–82, 86];
- аналитические решения начально-краевых задач о вынужденных колебаниях трехслойных цилиндрических оболочек, круговых пластин и стержней, связанных с внешними безынерционными или инерционными средами, позволившие получить формулы для расчета перемещений, деформаций и напряжений при действии непрерывных и локальных (распределенных, погонных, сосредоточенных) внезапно приложенных, импульсных, резонансных нагрузок [3, 5–9, 11, 13, 15–18, 20–25, 26, 30–32, 34, 39, 41, 43, 45, 47–49, 51–53, 55–63, 66, 67, 71, 73–76, 78, 79, 83–85];
- численный параметрический анализ вынужденных колебаний, установивший зависимость напряженно-деформированного состояния трехслойных элементов конструкций от геометрических и механических характеристик слоев, величины, вида и формы нагрузки, характеристик и моделей упругого основания, граничных условий; показавший, что упрощение инерционной модели оболочки приводит к росту частоты и

уменьшению амплитуды колебаний, при основаниях высокой жесткости расчеты пластин достаточно вести по модели Винклера, увеличение коэффициента жесткости среды приводит к существенному уменьшению максимальных перемещений и периода колебаний и быстрому затуханию амплитуды в окрестности локальных нагрузок [3, 5–7, 9, 11, 13, 15–18, 20–25, 26, 30–32, 34, 39, 41, 43, 45, 47–49, 51–53, 55–63, 66, 67, 71, 73–76, 78, 79, 83–85];

- постановки и аналитические решения начально-краевых задач о тепловом, радиационном и терморadiационном ударах по круговой трехслойной пластине, скрепленной с упругим основанием Винклера, моделирующие возникновение свободных колебаний за счет терморadiационных воздействий (лазерных, нейтронных) и позволившие провести анализ зависимости параметров колебаний от величины температурных и радиационных потоков [14, 19, 26, 29, 33, 35, 36, 44, 50, 64, 65, 68, 69, 77];
- постановки и аналитические решения начально-краевых задач о вынужденных колебаниях линейно вязкоупругих круговых трехслойных пластин, скрепленных с упругими безынерционными и инерционными основаниями Винклера и Пастернака, позволившие учесть демпфирующую способность материалов слоев, воздействие температурного поля и провести численный анализ параметров колебаний, показавший, что вязкость материалов слоев приводит к уменьшению и стабилизации амплитуды, инерционность оснований замедляет затухание свободных колебаний, а температура повышает скорость нарастания амплитуды и смещает фазу колебаний [1, 54, 70, 87].

### **Рекомендации по практическому использованию результатов**

Полученные результаты позволяют численно моделировать динамические перемещения, деформации и напряжения в упругих трехслойных элементах конструкций, скрепленных с упругой внешней средой, давать практические рекомендации при проектировании указанных систем, что приводит к существенному снижению материальных затрат, необходимых для проведения экспериментальных исследований. Аналитические решения представляют самостоятельную ценность, как новые фундаментальные результаты, и могут служить для тестовой проверки численных решений. Разработанные методики и компьютерные программы могут быть использованы в практике проектных организаций строительного и машиностроительного профиля, в частности, при расчетах последствий воздействия подводных и подземных взрывов, землетрясений (импульсное воздействие), колебаний мостовых конструкций (гармоническое нагружение, резонанс), ударных нагрузок.

В настоящее время результаты исследований внедрены в учебный процесс БелГУТа, ОДО «Стройкомплекттехника», ЧУП «МонолитСервисСтрой», УП «Гомельское агентство по строительству и инвестициям» при Национальном Олимпийском комитете РБ, ОАО «Гомельский Техноприбор», расчетную практику Научно-исследовательского института железнодорожного транс-

порта. Они применялись для расчета элементов фундамента, лопаток осевых вентиляторов в лесосушильных комплексах, прямоугольных вставок для усиления покрытия промышленного здания; оптимизации толщины оконного металлополимерного профиля, с их помощью исследовано деформирование теплообменника, камер горения и дожига. Результаты внедрения подтверждены соответствующими актами.

## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

### Монографии

1. *Старовойтов, Э.И.* Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, **Д.В. Леоненко**. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
2. *Старовойтов, Э.И.* Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, **Д.В. Леоненко**. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 379 с.

### Статьи в научных изданиях, рекомендованных в Перечне ВАК

3. *Горшков, А.Г.* Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.
4. *Леоненко, Д.В.* Колебания круговых трехслойных пластин под действием поверхностных нагрузок синусоидальной формы / **Д.В. Леоненко** // Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. – 2004. – № 2 (9). – С. 26–29.
5. *Плескачевский, Ю.М.* Металлополимерная пластина на упругом основании. Часть 1. Равномерная нагрузка / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, **Д.В. Леоненко** // Весці НАНБ. Сер. фізіка-тэхнічных навук. – 2005. – № 3. – С. 39–43.
6. *Горшков, А.Г.* Деформирование трехслойной круговой пластины на упругом основании / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, **Д.В. Леоненко** // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – № 1. – С. 16–20.
7. *Старовойтов, Э.И.* Особенности колебания трехслойного стержня при локальных и импульсных воздействиях / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко**, А.В. Яровая // Прикладная механика. – 2005. – 41, № 7. – С. 122–129.  
*Starovoitov, É.I.* Vibrations of a sandwich rod under local and impulsive forces / É.I. Starovoitov, **D.V. Leonenko**, A.V. Yarovaia // International applied mechanics. – 2005. – Vol. 41, № 7. – P. 809–816.
8. *Леоненко, Д.В.* О некоторых интегралах, содержащих произведение степенных и бесселевых функций / **Д.В. Леоненко** // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2005. – № 5 (32). – С. 150–153.
9. *Плескачевский, Ю.М.* Металлополимерная пластина на упругом основании. Часть 2. Локальная нагрузка / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, **Д.В. Леоненко** // Весці НАНБ. Сер. фізіка-тэхніч. навук. – 2005. – № 4. – С. 33–37.
10. *Кубенко, В.Д.* Собственные колебания трехслойного стержня на упругом основании / В. Д. Кубенко, Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Прикладная механика. – 2006. – 42, №5. – С. 57–63.  
*Kubenko, V.D.* Natural vibration of a sandwich beam on an elastic foundation / V.D. Kubenko, Yu.M. Pleskachevskii, É.I. Starovoitov, **D.V. Leonenko** // International applied mechanics. – 2006. – Vol. 42, № 5. – P. 541–547.

11. *Старовойтов, Э.И.* Колебания трехслойного стержня, скрепленного с деформируемым основанием / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Вестник гражданских инженеров. – 2006. – №2 (7). – С. 45–51.

12. *Леоненко, Д.В.* Исследование собственных частот колебаний трехслойного стержня на упругом основании / **Д.В. Леоненко** // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2006. – Т. 11, №4. – С. 23–26.

13. *Старовойтов, Э.И.* Динамика трехслойных стержней / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко**, А.В. Яровая // Проблемы прочности. – 2006. – № 6. – С. 133–146.

*Starovoitov, É.I.* Dynamics of three-layer bars / É.I. Starovoitov, **D.V. Leonenko**, A.V. Yarovaya // Strength of Materials. – 2006. – Vol. 41, № 7. – P. 668–679.

14. *Старовойтов, Э.И.* Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко**, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 4. – С. 55–62.

15. *Леоненко, Д.В.* Динамическое деформирование трёхслойного стержня на безынерционном основании / **Д.В. Леоненко** // Теорія і практика процесів. Подрібнення, розділення, змішування і ущільнення: зб. наук. пр. – Одеса: ОНМА, 2006. – Вип. 12. – С.67–72.

16. *Старовойтов, Э.И.* Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко**, М. Сулейман // Механика композитных материалов. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.

*Starovoitov, É.I.* Deformation of composite plate on an elastic foundation by local loads / É.I. Starovoitov, **D.V. Leonenko**, M. Suleyman // Mechanics of composite materials. – 2007. – Vol. 43, № 1. – P. 75–84.

17. *Старовойтов, Э.И.* Упругопластический изгиб трехслойного стержня на упругом основании / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко**, А.В. Яровая // Прикладная механика. – 2007. – 43, № 4. – С. 110 – 120.

*Starovoitov, É.I.* Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, **D.V. Leonenko**, A.V. Yarovaya // International applied mechanics. – 2007. – Vol. 43, № 4. – P. 451–459.

18. *Старовойтов, Э.И.* Изгиб трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем на упругом основании / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко**, А.В. Яровая // Материалы, технологии, инструменты. – 2007. – Т. 12, № 1. – С. 19–22.

19. *Старовойтов, Э.И.* Деформирование упругопластической круговой трехслойной пластины на основании Винклера при термосиловом нагружении / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, **Д.В. Леоненко** // Проблемы прочности. – 2007. – №5. – С. 68–80.

*Starovoitov, É.I.* Deformation of a three-layer elastoplastic plate on a Winkler foundation under thermomechanical loading/ É.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya, **D.V. Leonenko** // Strength of Materials. – 2007. – Vol. 39, № 5. – P. 502–512.

20. *Леоненко, Д.В.* Вынужденные колебания трехслойного стержня на упругом безынерционном основании / **Д.В. Леоненко** // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2007. – №3. – С. 70–74.

21. *Старовойтов, Э.И.* Колебания круговых трехслойных пластин при импульсных воздействиях / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Механіка. – Киев: Наукова думка, 2007. – С. 286–295.

22. *Старовойтов, Э.И.* Упругопластическое деформирование трехслойного стержня на упругом основании / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко**, А.В. Яровая // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. – 2007. – №2(28), Т. 13. – 109–122.

*Starovojtov, E.I.* Elastic-plastic deformation of a three-layer rod on the elastic basis / E.I. Starovojtov, **D.V. Leonenko**, A.V. Yarovaya // Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems. – 2007. – №2(28), V.13. – 109–122.

23. *Старовойтов, Э.И.* Изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2007. – Т. 12, №4. – С. 15–20.

24. **Леоненко, Д.В.** Импульсные нагружения трехслойных стержней / **Д.В. Леоненко** // Чрезвычайные ситуации: образование и наука. – 2007. – Т. 2, № 1. – С. 65–72.

25. **Леоненко, Д.В.** Вынужденные колебания трехслойных стержней под действием нагрузок различной формы / **Д.В. Леоненко** // Теорія і практика процесів. Подрібнення, розділення, змішування і ущільнення: зб. наук. пр. – Одеса: ОНМА, 2008. – Вип. 13. – С. 59–66.

26. *Старовойтов, Э.И.* Термопластический изгиб кольцевых трехслойных пластин на упругом основании / Э.И. Старовойтов, В.Д. Кубенко, **Д.В. Леоненко** // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2008. – Т. 13, №3. – С. 44–50.

27. **Леоненко, Д.В.** Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании / **Д.В. Леоненко** // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – №3. – С. 42–47.

28. *Плескачевский, Ю.М.* Динамика круговых металлополимерных пластин на упругом основании. Ч. 1: Свободные колебания / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Механика машин, механизмов и материалов. – 2008. – № 4 (5). – С. 48–52.

29. *Старовойтов, Э.И.* Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Приклад. механика. – 2008. – 44, № 9. – С. 94–103.

*Starovojtov, É.I.* Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation // É.I. Starovojtov, **D.V. Leonenko** // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1032–1040.

30. **Леоненко, Д.В.** Локальные динамические нагружения круговых трехслойных пластин на упругом основании / **Д.В. Леоненко** // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – №8/1(67). – С. 401–410.

31. *Плескачевский, Ю.М.* Динамика круговых металлополимерных пластин на упругом основании. Часть 2. Вынужденные колебания / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Механика машин, механизмов и материалов. – 2009. – № 1 (6). – С. 48–52.

32. **Леоненко, Д.В.** Резонансные колебания круговых трехслойных пластин, скрепленных с упругим основанием / **Д.В. Леоненко** // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць / Дніпропетровський

національний університет. – Дніпропетровськ: ІМА-прес, 2009. – Вип. 13. – С. 128–134.

33. *Старовойтов, Э.И.* Термоупругопластический изгиб круговой трехслойной пластины на деформируемом основании / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко**, А.В. Яровая // Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент. – 2009. – Т.14, 1(28). – С. 115–128.

*Starovoitov, E.I.* Thermoelastoplastic bending of circular three-layer plate on the deformable foundation / E.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya, **D.V. Leonenko** // Actual Problems of Aviation and Aerospace Systems: processes, models, experiment. – 2009. – Т.14, 1(28). – Р. 115–128.

34. **Леоненко, Д.В.** Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании под действием распределенных локальных нагрузок / **Д.В. Леоненко** // Вестник гражданских инженеров. – 2009. – 2 (19). – С. 14–19.

35. *Плескачевский, Ю.М.* Колебания круговой металлополимерной пластины, связанной с упругим основанием, при тепловом ударе / Ю.М. Плескачевский, В.Д. Кубенко, Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Механика машин, механизмов и материалов. – 2009. – № 4 (9). – С. 50–54.

36. **Леоненко, Д.В.** Термопластическое деформирование круговых трехслойных пластин на упругом основании / **Д.В. Леоненко**, Э.И. Старовойтов // Изв. РАН. МТТ. – 2009. – № 5. – С. 106–119.

**Leonenko, D.V.** Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / **D.V. Leonenko**, É.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2009. – Vol. 44, № 5. – P. 744–755.

37. **Леоненко, Д.В.** Колебания круговых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием, под действием синусоидальных нагрузок / **Д.В. Леоненко** // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2009. – №3. – С. 89–94.

38. *Старовойтов, Э.И.* Свободные колебания круговых трехслойных пластин, скрепленных с деформируемым основанием / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Проблемы машиностроения: межд. научно-техн. журнал. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 56–62.

39. *Старовойтов, Э.И.* Резонансные воздействия локальных нагрузок на круговые трехслойные пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Прикладная механика. – 2010. – 46, № 1. – С. 105–113.

*Starovoitov, E.I.* Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, **D.V. Leonenko** // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, № 1. – P. 86–93.

40. **Леоненко, Д.В.** Свободные колебания упругой трехслойной оболочки вращения / **Д.В. Леоненко** / Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. – Вип. 11. – С. 177–183.

41. *Старовойтов, Э.И.* Динамика круглых трехслойных пластин на упругом основании при осесимметричном нагружении / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Проблемы прочности. – 2010. – № 3. – С.113–124.

*Starovoitov, É.I.* Dynamics of circular three-layer plates with elastic base under axisymmetric loading / *É. I. Starovoitov, D.V. Leonenko* // *Strength of Materials*. – 2010. – Vol. 42, № 3. – P. 322–330.

42. *Леоненко, Д.В.* Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек / *Д.В. Леоненко* // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2010. – № 3 (12). – С.53–56.

43. *Starovoitov, E.I.* Free and resonant vibrations of circular three-layer plate / *E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko* // *Engineering & Automation Problems*. – 2010. – Vol. 1, № 1. – P. 98–103.

44. *Леоненко, Д.В.* Собственные колебания круговой трехслойной пластины при радиационном воздействии / *Д.В. Леоненко* // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2010. – №2. – С. 46–52.

45. *Старовойтов, Э.И.* Деформирование трехслойного упругопластического стержня на упругом основании / *Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко* // *Изв. РАН. МТТ*. – 2011. – № 2. – С. 160–168.

#### **Статьи в сборниках**

46. *Леоненко, Д.В.* Колебания металлополимерного стержня под действием нагрузок синусоидальной формы / *Д.В. Леоненко* // *Динамика металлополимерных систем* / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая – Минск: Беларус. навука, 2004. – С. 116–129.

47. *Леоненко, Д.В.* Особенности поведения трехслойного стержня при воздействии локальных нагрузок / *Д.В. Леоненко* // *Сборник трудов молодых ученых Национальной академии наук Беларуси*. – Минск: ИП Логвинов, 2004. – Т. 4. – С. 134–137.

48. *Леоненко, Д.В.* Колебания под действием нагрузок параболической формы / *Д.В. Леоненко* // *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций* / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – С. 279–303.

49. *Старовойтов, Э.И.* Деформирование трехслойного упругопластического стержня со сжимаемым наполнителем / *Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Гу Юй* // *Теоретическая и прикладная механика: межведомст. сб. науч.-метод. ст.* – Минск, 2005. – Вып. 19. – С. 67–75.

50. *Горшков, А.Г.* Термоупругий изгиб круговой трехслойной пластины на упругом основании / *А.Г. Горшков, Д.В. Леоненко, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая* // *Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: сб. стат. к 75-летию Е.И. Шемякина*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – С. 173–180.

51. *Плескачевский, Ю.М.* Динамические нагружения трёхслойного стержня, скрепленного с упругим безынерционным основанием / *Ю.М. Плескачевский, В.Д. Кубенко, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко* // *Теоретическая и прикладная механика: межведомст. сб. науч.-метод. ст.* – Минск, 2006. – Вып. 21. – С. 39–46.

52. *Старовойтов, Э.И.* Напряженное состояние кольцевой трехслойной пластины при изгибе на упругом основании / *Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко,*



М. Сулейман // Теоретическая и прикладная механика: межведомст. сб. науч.-метод. ст. – Минск, 2007. – Вып. 22. – С. 24–31.

53. *Кубенко, В.Д.* Свободные и вынужденные колебания трехслойных круговых пластин на упругом основании / В.Д. Кубенко, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Геотехническая механика: межведомств. сб. науч. тр. / Ин-т геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины. – Днепрпетровск, 2009. – Вып. 81. – С. 262–274.

54. *Леоненко, Д.В.* Колебания вязкоупругой пластины на основании Винклера / **Д.В. Леоненко** // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. журнал. – 2011. – Вып. 26. – С. 122–127.

### **Материалы конференций**

55. *Старовойтов, Э.И.* Математическая модель динамического поведения трехслойных пластин при локальных воздействиях / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Импульсные процессы в механике сплошных сред: матер. VI Междунар. науч. школ.-семина., Николаев, 22–26 авг. 2005г. / Инст. импульсн. процес. и технол.; редкол.: И.С. Швец [и др.]. – Николаев: КП «Николаевская областная типография», 2005. – С. 19–20.

56. *Старовойтов, Э.И.* Импульсные нагружения трехслойных стержней / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // ISTF' 2005: тр. V междунар. симпоз. по трибофатике, Иркутск, 3–7 окт. 2005 г. / Отв. ред. А.П. Хоменко. – Иркутск, 2005. – Т. 3. – С. 128–138.

57. *Леоненко, Д.В.* Колебание трехслойного стержня на безынерционном основании / **Д.В. Леоненко** // Проблемы безопасности на транспорте: матер. III Междунар. научн.-практ. конф., Гомель, 14–18 окт. 2005 г. / Белорус. госуд. уни-вер. трансп.; под общ. ред. В.И. Сенько. – Гомель: БелГУТ, 2005. – С. 267–269.

58. *Леоненко, Д.В.* Нагружения трехслойных стержней ударным импульсом / **Д. В. Леоненко** // Чрезвычайные ситуации: теория, практика, инновации: матер. докл. междуна. науч.-практ. конф., Гомель, 27–28 сент. 2006 г. / Гомельс. инженер. инст. – Гомель: ГИИ, 2006. – С. 296–297.

59. *Старовойтов, Э.И.* Импульсные колебания трехслойных круговых пластин / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Импульсные процессы в механике сплошных сред: матер. VII Междунар. науч. школ.-семина., Николаев, 21–25 авг. 2007 г. / Инст. импульсн. процес. и технол.; редкол.: И.С. Швец [и др.]. – Николаев: КП «Миколаївська обласна друкарня», 2007. – С. 19–20.

60. *Яровая, А.В.* Изгиб трехслойного упругопластического стержня на деформируемом основании / А.В. Яровая, **Д.В. Леоненко** // Механика–2007: сб. науч. тр. III Белорусского конгресс. по теорет. и прикл. механ., Минск, 16–18 окт. 2007 г. / ОИМ НАН Б. – Минск, 2007. – С. 319–325.

61. *Леоненко, Д.В.* Локальные динамические нагружения трехслойного стержня на упругом основании / **Д.В. Леоненко** // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: матер. XIV междунар. симп. им. А.Г. Горшкова, Ярополец, 18–22 февр. 2008 г. / Московс. авиац. инст.; редкол.: Д. В. Тарлаковский [и др.]. – Т.1. –М.: ИД «МЕДПРАКТИКА-М», 2008. – С. 141–142.

62. **Леоненко, Д.В.** Резонансные нагружения трёхслойного стержня на упругом основании / **Д.В. Леоненко** // Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса: матер. II Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 02–03 окт. 2008 г. / Белорус. госуд. универ. трансп.; под общ. ред. В.И. Сенько.– Гомель: БелГУТ, 2008. – С. 241–243.

63. **Леоненко, Д.В.** Колебания трехслойных оболочек вращения / **Д.В. Леоненко** // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: матер. XV междунар. симп. им. А.Г. Горшкова, Ярополец, 16–20 февраля 2009 г. / Москов. авиац. инст.; редкол.: Д.В. Тарлаковский [и др.]. – М.: Изд-во «ПАРАДИЗ», 2009. – Т. 1.– С. 105–106.

64. **Старовойтов, Э.И.** Термоупругопластическое деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / **Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко** // Современные проблемы математики, механики и их приложений: матер. Междунар. конф. посвящ. 70-л. ректора МГУ акад. В.А. Садовнического, Москва, 31 марта–02 апр. 2009 г. / Москов. гос. универс. – М.: Изд-во «Университетская книга», 2009. – С. 300–301.

65. **Старовойтов, Э.И.** Термоупругопластический изгиб круговой трехслойной пластины на упругом основании / **Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко** // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела: тр. II междунар. конф., Казань, 8–11 нояб. 2009 г. / науч. ред. С.А. Кузнецов. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – С. 360–363.

66. **Кубенко, В.Д.** Свободные и вынужденные колебания трехслойных круговых пластин на упругом основании / **В.Д. Кубенко, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко** // Импульсные процессы в механике сплошных сред: матер. Междунар. науч. конф., Николаев, 17–21 авг. 2009 г. / Инст. импульсн. процес. и технол.; редкол.: В.С. Крутиков [и др.]. – Николаев: КП «Миколаївська обласна друкарня», 2009. – С. 5–6.

67. **Леоненко, Д.В.** Динамическое деформирование трехслойного стержня на упругом основании / **Д.В. Леоненко** // Импульсные процессы в механике сплошных сред: матер. Междунар. науч. конф., Николаев, 17–21 авг. 2009 г. / Инст. импульсн. процес. и технол.; редкол.: В.С. Крутиков [и др.]. – Николаев: КП «Миколаївська обласна друкарня», 2009. – С. 7–8.

68. **Старовойтов, Э.И.** Колебания трехслойной круговой пластины, вызванные тепловым ударом / **Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский** // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: матер. XVI междунар. симп. им. А.Г. Горшкова, Ярополец, 15–19 февр. 2010 г. / Москов. авиац. инст.; редкол.: Д.В. Тарлаковский [и др.] – Ч.: ГУП «ИПК «Чувашия», 2010. – С. 155–157.

69. **Леоненко, Д.В.** Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании в температурном поле / **Д.В. Леоненко** // Трибофатика: труды VI Междунар. симп. по трибофатике МСТФ 2010, Минск, 25 окт.–1 нояб. 2010 г. В 2 ч. – Минск: БГУ, 2010. – Ч. 2.– С. 365–368.

70. **Леоненко, Д.В.** Собственные колебания вязкоупругих трехслойных пластин на упругом основании / **Д.В. Леоненко** // Проблемы безопасности на транспорте: матер. III Междунар. научн.-практ. конф., Гомель, 25–26 ноябр. 2010 г. /

Белорус. госуд. универ. трансп.; под общ. ред. В.И. Сенько. – Гомель: БелГУТ, 2010. – С. 321–322.

71. *Старовойтов, Э.И.* Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины на деформируемом основании / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Упругость и неупругость: матер. Междунар. научн. симп. по пробл. механ. деформир. тел, посвящённого 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина, Москва, 20–22 января 2011 г. – М.: Издательство Московского университета, 2011. – С. 458–462.

72. **Леоненко, Д.В.** Собственные колебания трехслойных круговых цилиндрических оболочек в безынерционной среде / **Д.В. Леоненко** // Механика – машиностроению: сб. научн. тр. Междунар. научн.-техн. конф. «Инновации в машиностроении» и VI Международного симпозиума по трибофатике МСТФ 2010 ОИМ НАН Беларуси, Минск, 26–29 окт. 2010 г. / ОИМ НАН Беларуси; редкол.: М.С. Высоцкий [и др.]. – Минск, 2010. – С. 124–127.

### Тезисы докладов

73. *Старовойтов, Э.И.* Создание математической модели динамического поведения трехслойных пластин при локальных воздействиях / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // IX Белорусская математическая конференция: тезисы докл. междунар. конф., Гродно, 3–6 нояб. 2004 г. В 3 ч. / Гроднен. гос. универ. им. Я. Купалы; редкол.: Ю.С. Харин [и др.]. – Гродно: ГрГУ, 2004. – Ч. 2. – С. 201–202.

74. *Старовойтов, Э.И.* Колебания трехслойных стержней при резонансе / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Интегральные уравнения и их применения: тезисы докл. Междунар. конф., Одесса, 29 июня–4 июля 2005 г. / Одесск. нац. ун-т им. И.И. Мечникова. – Одесса, 2005. – С. 134–135.

75. *Яровая, А.В.* Деформирование круговой металлополимерной пластины на упругом основании / А.В. Яровая, А.Г. Горшков, **Д.В. Леоненко** // ПОЛИКОМТ-РИБ–2005: тез. докл. междунар. научн.-техн. конф., Гомель, 18–21 июля 2005 г. / Инст. механ. металлополимер. систем им. В.А. Белого НАН Б. – Гомель: ИММС НАНБ, 2005. – С. 36–37.

76. *Старовойтов, Э.И.* Колебания трехслойного стержня / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов. ВЕМ&FEM–2005: тезисы докл. XXI Междунар. конф., Санкт-Петербург, 4–7 окт. 2005 г. / Редкол.: В.А. Постнов [и др.] – СПб.: ВВМ, 2005. – Т. 1. – С. 186–187.

77. *Горшков, А.Г.* Термосиловой изгиб круговой трехслойной упругопластической пластины на упругом основании / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко**, А.В. Яровая // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: матер. XII междунар. симп., Ярополец, 13–17 февраля 2006 г. / Московс. авиац. инст.; редкол.: А.Г. Горшков [и др.]. – М.: Изд-во МАИ, 2006. – С. 107–108.

78. **Леоненко, Д.В.** Колебания трехслойного стержня на безынерционном основании / **Д.В. Леоненко** // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: тезис. XIII междунар. симп. им. А.Г. Горшкова, Ярополец, 12–16 февр. 2007 г. / Московс. авиац. инст.; редкол.: Д.В. Тарлаковский [и др.]. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – С. 162–164.

79. *Старовойтов, Э.И.* Колебания трехслойных круговых пластин при резонансе / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Вторая Всероссийская конференция по волновой динамике машин и конструкций: тезисы докл., Нижний Новгород, 5–8 июня 2007 г. – Нижний Новгород, 2007. – С. 90.

80. **Леоненко, Д.В.** Собственные колебания круговых трехслойных пластин на винклеровском основании / **Д.В. Леоненко** // Международная конференция по математической физике и ее приложениям: тезисы докл., Самара, 8–13 сентября 2008 г. / Самарс. гос. ун-т. – Самара: СГУ, 2008. – С. 116–117.

81. **Леоненко, Д.В.** Свободные колебания трехслойной круговой пластины, скрепленной с упругим основанием / **Д.В. Леоненко** // Новые функциональные материалы, современные технологии и методы исследования: тезисы IV Гомел. регион. конф. молод. уч., Гомель, 23–24 сент. 2008 г. / Инст. механ. металлополимер. систем им. В.А. Белого НАН Б. – Гомель, 2008. – С. 144–145 с.

82. **Леоненко, Д.В.** Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании / **Д.В. Леоненко** // X Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. научн. конф., Минск, 3–7 нояб. 2008 г. / Инстит. матем. НАН Б. – Минск, 2008. – Ч. 2. – С. 134–135.

83. *Плескачевский, Ю.М.* Колебание металлополимерных элементов конструкций на упругом основании / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко** // Поликомтриб–2009: тезисы докл. междунар. научн.-техн. конф., Гомель, 22 – 25 июня 2009 г. / Инст. механ. металлополимер. систем им. В.А. Белого НАН Б. – Гомель, 2009. – С. 181–182.

84. **Леоненко, Д.В.** Колебание трехслойного стержня с учетом диссипации энергии / **Д.В. Леоненко** / Вторая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: матер. Межд. конф., Самара, 29 авг.–4 сент. 2010 г. / Под ред. чл.-корр. РАН И.В. Воловича и д.ф.-м.н., проф. Ю.Н. Радаева. – Самара: Изд-во «Книга», 2010. – С. 203.

85. **Леоненко, Д.В.** Динамическое нагружение трехслойных круговых цилиндрических оболочек в упругой среде / **Д.В. Леоненко** // Новые функциональные материалы, современные технологии и методы исследования: тезисы Респ. научн.-техн. конф. молод. уч., Гомель, 5–7 окт. 2010 г. / ИММС НАН Беларуси. – Гомель, 2010. – С. 127.

86. **Леоненко, Д.В.** Собственные колебания трехслойного стержня на упругом основании Пастернака / **Д.В. Леоненко** // Новые материалы, оборудование и технологии в промышленности: материалы междунар. научно-техн. конф. молод. ученых, Могилев, 18–19 ноябр. 2010 г. / ГУВПО «БРУ». – Могилев, Белорус.-Рос. ун-т, 2010. – С. 127.

87. *Старовойтов, Э.И.* Колебания вязкоупругих трехслойных пластин на упругом основании / Э.И. Старовойтов, **Д.В. Леоненко**, Д.В. Тарлаковский // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова: матер. Междунар. симп., Ярополец, 14–18 февр. 2011 г. – М., 2011. – Т. 1. – С. 125–127.

## РЭЗІЮМЭ

Лявоненка Дзяніс Уладзіміравіч

### Уласныя і змушаныя ваганні трохслаёвых элементаў канструкцый, звязаных з пругкім асяроддзем

*Ключавыя словы:* ваганні, пругкасць, вязкапругкасць, трохслаёвыя абалонкі, пласціны, стрыжні, інерцыйныя асяроддзі Вінклера і Пастэрнака, тэрмарадыяцыйны ўдар.

*Аб'ект даследавання:* пругкія і вязкапругкія трохслаёвыя несіметрычныя па таўшчыні элементы канструкцый (абалонкі вярчэння, цыліндрычныя абалонкі, стрыжні, кругавыя пласціны), звязаныя з пругкім асяроддзем; *прадмет даследавання:* параметры ваганняў і напружана-дэфармаваны стан (НДС) трохслаёвых элементаў канструкцый, звязаных з пругкім асяроддзем, пры розных дынамічных сілавых нагрузках, уключаючы тэрмарадыяцыйныя ўздзеянні.

*Мэта работы:* стварэнне агульнай метадалогіі, якая дазваляе разлічваць НДС трохслаёвых элементаў канструкцый, звязаных з пругкімі інерцыйнымі і безынерцыйнымі асяроддзямі Вінклера або Пастэрнака, пры ўласных ваганнях і пры дзеянні дынамічных сілавых нагрузак рознага віду (раптоўных, імпульсных, рэзанансных) і спосабу прыкладання (размеркаваных, лакальных, засяроджаных), уключаючы цеплавыя і радыяцыйныя ўздзеянні.

У рабоце прапанаваны механіка-матэматычныя мадэлі ваганняў пругкіх трохслаёвых элементаў канструкцый (абалонак вярчэння, цыліндрычных абалонак, кругавых пласцін, стрыжняў) у пругкім асяроддзі. Атрыманы аналітычныя рашэнні пачаткова-краевых задач аб уласных і вымушаных ваганнях трохслаёвых цыліндрычных абалонак, кругавых пласцін, стрыжняў, звязаных з інерцыйнымі і безынерцыйнымі асяроддзямі Вінклера і Пастэрнака. Разгледжаны цеплавы і радыяцыйны ўдары па кругавой трохслаёвай пласціне, змацаванай з пругкай асновай Вінклера. Рашэнне задачы аб ваганнях вязкапругкай пласціны атрымана метадам усярэднявання. Праведзены лікавыя параметрычныя аналізы уласных і змушаных ваганняў, які выявіў залежнасць НДС трохслаёвых элементаў канструкцый ад гранічных умоў, геаметрычных і механічных характарыстык слаёў, велічыні, віду і формы нагрузкі, характарыстык і мадэляў пругкай асновы, велічыні тэмпературных і радыяцыйных патокаў, вязкасці запаўняльніка.

Вынікі даследаванняў з'яўляюцца новымі і могуць быць выкарыстаныя практнымі ўстановамі ў аэракасічным, транспартным, энергетычным і электронным машынабудаванні, будаўніцтве.

## РЕЗЮМЕ

Леоненко Денис Владимирович

### **Собственные и вынужденные колебания трехслойных элементов конструкций, связанных с упругой средой**

*Ключевые слова:* колебания, упругость, вязкоупругость, трехслойные оболочки, пластины, стержни, инерционные среды Винклера и Пастернака, терморadiационный удар.

*Объект исследования:* упругие и вязкоупругие трехслойные несимметричные по толщине элементы конструкций (оболочки вращения, цилиндрические оболочки, стержни, круговые пластины), связанные с упругой средой; *предмет исследования:* параметры колебаний и напряженно-деформированное состояние (НДС) трехслойных элементов конструкций, связанных с упругой средой, при различных динамических силовых нагрузках, включая терморadiационные воздействия.

*Цель работы:* создание новой общей методологии, позволяющей рассчитывать НДС трехслойных элементов конструкций, связанных с упругими инерционными и безынерционными средами Винклера или Пастернака, при собственных колебаниях и действии динамических силовых нагрузок различного вида (внезапных, импульсных, резонансных) и способа приложения (распределенных, локальных, сосредоточенных), включая тепловые и радиационные воздействия.

В работе предложены механико-математические модели колебаний упругих трехслойных элементов конструкций (оболочек вращения, цилиндрических оболочек, круговых пластин, стержней) в упругой среде. Получены аналитические решения начально-краевых задач о собственных и вынужденных колебаниях трехслойных цилиндрических оболочек, круговых пластин, стержней, связанных с инерционными и безынерционными средами Винклера и Пастернака. Рассмотрены тепловой и радиационный удары по круговой трехслойной пластине, скрепленной с упругим основанием Винклера. Решение задачи о колебаниях вязкоупругой пластины получено методом усреднения. Проведен численный параметрический анализ собственных и вынужденных колебаний, установивший зависимость НДС трехслойных элементов конструкций от граничных условий, геометрических и механических характеристик слоев, величины, вида и формы нагрузки, характеристик и моделей упругого основания, величины температурных и радиационных потоков, вязкости заполнителя.

Результаты исследований являются новыми и могут быть использованы проектными организациями в аэрокосмическом, транспортном, энергетическом и электронном машиностроении, строительстве.

## ABSTRACT

Leonenko Denis Vladimirovich

### **Natural and forced oscillations of three-layer elements of a structure restricted by an elastic medium**

*Key-words:* oscillations, elasticity, viscoelasticity, three-layer shells, bars, inertial Winkler's and Pasternak's medium, thermal-radiation impact.

*Object of research* are the elastic and viscoelastic three-layer asymmetric across thickness elements of constructions (shells of revolution, cylindrical shells, bars, circular plates) restricted by an elastic medium; *subject of research* is oscillation parameters and stress-strain state (SSS) of the three-layer elements of structures connected with an elastic medium under various kinds of dynamic power loading, including thermo-radiation effects.

*The aim of the work* is to create a new general methodology enabling calculations of SSS in three-layer structural elements restricted by the elastic inertial and inertialess Winkler or Pasternak's medium under various kinds of natural oscillations, dynamic power loads (sudden, pulse, resonant), and the method of their application (distributed, local, concentrated), including thermal and radiation effects.

Mechano-mechanical models are proposed in the work to describe oscillations of the three-layered elastic structural elements (shells of revolution, cylindrical shells, circular plates and bars) in the elastic medium. Analytical solutions are presented to the initial boundary-value problems for the natural and forced oscillations of three-layer cylindrical shells, circular plates and bars restricted by the inertial and inertialess Winkler's and Pasternak's medium. The heat and radiation impacts on the circular three-layer plate fixed on an elastic base are considered. The problem on the viscoelastic plate oscillations was solved by averaging. The natural and forced oscillations were subjected to a numerical parametric analysis that proved the SSS of the three-layer structural elements to be dependent upon boundary conditions, geometric and mechanical characteristics of the layers, type, form and value of the load, characteristics of the elastic base models, temperature and radiation flow magnitude, as well as filler viscosity.

The investigation results are novel and can be used to design constructions in aeronautics, transport, power and electronic engineering and building spheres.