Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра «Основы бизнеса»

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методическое пособие по математике
для студентов специальностей
1-36 20 03 «Торговое оборудование и технологии»,
1-52 04 01 «Производство экспозиционно-рекламных объектов

Минск 2012

УДК 517.37 (075.8)

ББК 22.161.1 я7

М 54

Авторы:

Лебедева Г.И., Ругалева И.Е

Рецензенты:

Федосик Е.А., Митенков М.В.

Методическое пособие составлено в соответствии с программой курса высшей математики для инженерных специальностей. В нем дано краткое изложение рассматриваемых тем, приведены примеры решения, даны задания для аудиторной и домашней работы. Весь материал разбит по определенным занятиям.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017)292-77-52 факс (017)292-91-37
Регистрационный № БНТУ/ФММП51-60.2012

.

СОДЕРЖАНИЕ

Занятие 1
ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Двойным интегралом от непрерывной функции $f(x, y)$ по замкнутой области D называется конечный предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$, когда диаметр разбиения области D $\alpha = \max \Delta S_k$ стремится к нулю.

Т.е. $\lim\limits_{\alpha \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, то двойной интеграл существует и единственен.

Он обладает свойствами:

1. $\iint\limits_D c\, f(x, y)dxdy = c\iint\limits_D f(x, y)dxdy$, где $c - const$.

2. $\iint\limits_D (f_1(x, y) \pm f_2(x, y))dxdy = \iint\limits_D f_1(x, y)dxdy \pm \iint\limits_D f_2(x, y)dxdy$.

3. Если $f(x, y) \leq \varphi(x, y)$, то $\iint\limits_D f(x, y)dxdy \leq \iint\limits_D \varphi(x, y)dxdy$.

4. $\left|\iint\limits_D f(x, y)dxdy\right| \leq \iint\limits_D |f(x, y)|dxdy$.

5. $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy$, где $D = D_1 + D_2$.

Вычисление двойного интеграла осуществляется путем сведения его к повторным интегралам.

Рассмотрим две схемы расстановки пределов интегрирования в повторных интегралах.

Схема А. Пусть область D (рис. 1.1.) является правильной в направлении оси OY, т.е. любая прямая, параллельная оси OY и проходящая внутри отрезка $[a, b]$, пересекает границу области D не более чем в двух точках и по одним и тем же линиям.

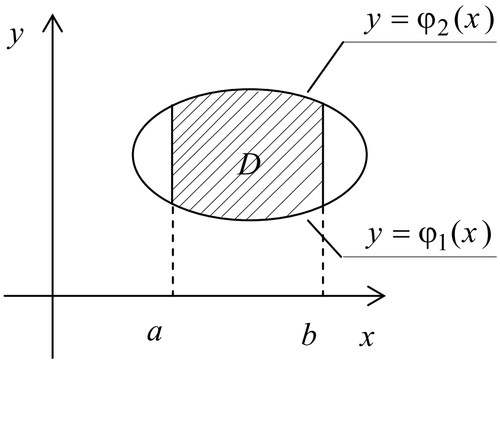

Рис. 1.1

Тогда $$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Схема Б.

Область D (рис. 1.2) является правильной в направлении оси OX.

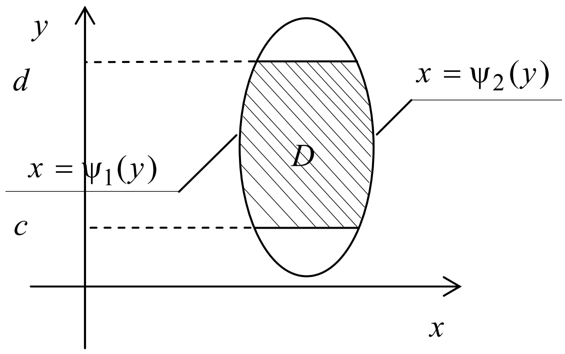

Рис. 1.2.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^{\alpha} dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

Если область D является неправильной, то ее следует разбить на сумму правильных областей. Тогда двойной интеграл по всей области D по свойству 5 будет равен сумме двойных интегралов по выделенным областям.

Вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению повторных интегралов: сначала внутреннего, затем – внешнего.

Заметим, что внешний интеграл всегда имеет постоянные пределы интегрирования.

Пример 1.1. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, где область D ограничена линиями: $y = 4,\quad y = 2x,\quad x = 0$ (рис. 1.3.).

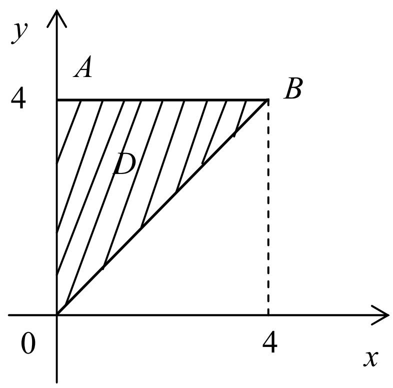

Рис. 1.3.

Решение. И по схеме A) и по схеме $Б$) область является правильной. Следовательно, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{2x}^4 f(x,y)dy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{y/2} f(x,y)dx.$

Пример 1.2. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 2y - y^2$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = 0, x \ge 0$ (рис. 1.4.).

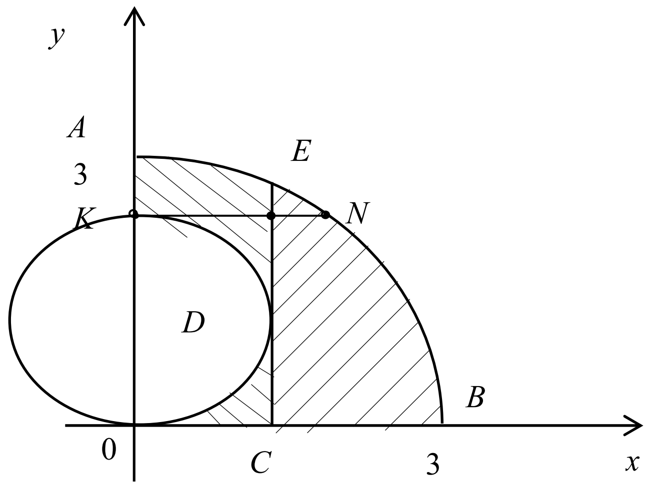

Рис. 1.4.

Решение. По схеме $Б$) область будет неправильная. Разобьем ее линией KN на две области. Тогда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{2y-y^2}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_0^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx$

По схеме A) область будет также неправильная. Разобьем ее линией EC на три области: ODC, $AEDK$ и CBE. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{1-x}} f(x,y)dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{1+\sqrt{1-x}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy.$$

Пример 1.3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x}^{2x} f(x,y)$.

Решение. Изобразим область интегрирования. Она ограничена линиями: $x = 1$, $x = 2$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 2x$. (рис.1.5).

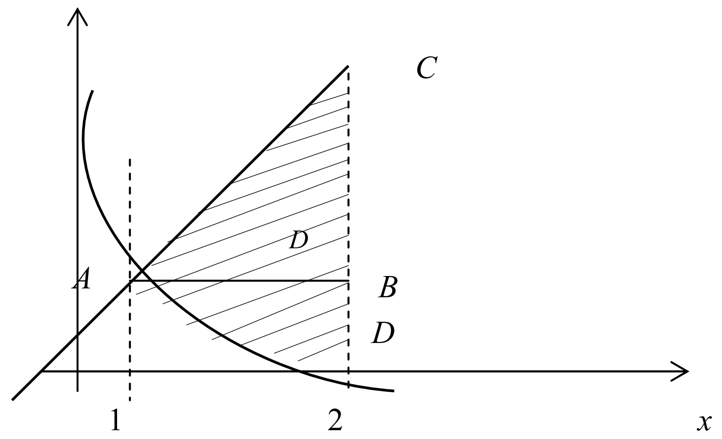

Рис. 1.5.

По рассматриваемой схеме $Б)$ область является неправильной. Разобьем область D линией AB на две области: DAB и ABC. Тогда

$$\int_1^4 dx \int_{1/x}^{2x} f(x,y)dy = \int_{1/4}^{\sqrt{2}} dy \int_{1/y}^{4} f(x,y)dx + \int_{\sqrt{2}}^{8} dy \int_{y/2}^{4} f(x,y)dx .$$

Пример 4. Вычислить $\iint_D xy^2\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x^2+y^2 \le 4, \quad x+y-2 \ge 0$ (рис. 1.6).

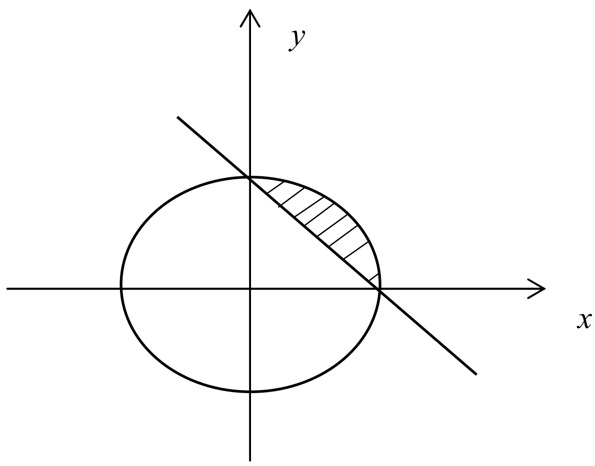

Рис. 1.6.

Решение:

$$\iint_D xy^2\,dxdy=\int_0^2 dy\int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} xy^2\,dx=\int_0^2 y^2dy\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}}=\frac{1}{2}\int_0^2 y^2dy\left(4-y^2-(2-y)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(4y^2-y^4-4y^2+4y^3-y^4\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^2\left(4y^3-2y^4\right)dy=\frac{1}{2}\left(y^4-\frac{2y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{5}=\frac{8}{5}.$$

Аудиторная работа

1.1. Вычислить повторные интегралы:

1.1.1. $\int_1^3 dx\int_2^3 \frac{y}{x^2}\,dy$

1.1.2. $\int_0^1 dy\int_0^1 e^{x-y}\,dx$

1.1.3. $\int_0^{\pi/2} dx\int_0^{\pi/2}\sin(x-y)\,dy$

1.1.4. $\int_{-1}^2 dx\int_0^1 (x+y)^2\,dy$

1.2. Расставить пределы интегрирования по областям, ограниченным указанными линиями:

1.2.1. $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ **,** где $D: y=\frac{1}{2}x,\ x=0,\ y=4.$

1.2.2. $\iint_D f(x,y)\,dxdy$, где $D: y=x, y=4, y=1, y=7-x.$

1.2.3. $\iint_D f(x,y)\,dxdy$, где $D: y=x^2+4x-1,\ y=x-1.$

1.3. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

1.3.1. $\int_0^4 dx\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$

1.3.2. $\int_{-3}^2 dx\int_{-2}^{4+x} f(x,y)\,dy$

1.3.3. $\int_1^3 dy\int_{y-2}^{4-y} f(x,y)\,dx$

1.3.4. $\int_{1/2}^1 dy\int_{1/y}^2 f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)\,dx$

1.4. Вычислить двойной интеграл по областям, ограниченным указанными линиями:

1.4.1. $\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где $D:\begin{cases}x=1, & x=4,\\ y=2, & y=5.\end{cases}$

1.4.2. $\iint_D \frac{dxdy}{(x+2y+1)^3}$, где $D:\begin{cases}x=2, & y=0,\\ y=x.\end{cases}$

1.4.3. $\iint\limits_D \sin(3x+y)\,dxdy$, где $D:\begin{cases} x=0, & y=\dfrac{\pi}{2}, \\ y=0, & x=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

1.4.4. $\iint\limits_D e^{2x+y}dxdy$, где $D: y=e^x,\ x=0,\ y=3.$

1.4.5. $\iint\limits_D \left(x^2+5xy\right)dxdy$, где $D:\begin{cases} y=-2x, \\ x=0, \\ y=4. \end{cases}$

Домашнее задание

1.5. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

1.5.1. $\int\limits_1^4 dy \int\limits_{y-1}^{3y-3} f(x,y)\,dx$

1.5.2. $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{2+x}^{5-(x-1)^2} f(x,y)\,dy$

1.5.3. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{4-x/2}^{-x/4+4} f(x,y)\,dy + \int\limits_4^6 dx \int\limits_{4-x/2}^{7-x} f(x,y)\,dy$

1.6. Вычислить двойные интегралы по заданным областям:

1.6.1. $\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dxdy$, $D:\begin{cases} \Delta ABC, & A(1,1), \\ B(3,4), & C(5,2). \end{cases}$ **(**Ответ: 60)

1.6.2. $\iint\limits_D xydxdy$, $D:\begin{cases} y^2=4x, \\ y=x-1. \end{cases}$ (Ответ: 48)

1.6.3. $\iint\limits_D \left(x^2+5xy-6\right)dxdy$, $D: y=x,\ y=0,\ y=4$. (Ответ: 848)

1.6.4. $\iint\limits_D (4-y)\,dxdy$, $D: y=\dfrac{x^2 1}{4},\ y=1,\ x=0.$ (Ответ: $\dfrac{68}{15}$).

Занятие 2
ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Пусть переменные x и y связаны с переменными u и v соотношениями:

$x = \varphi(u,v)$

$y = \psi(u,v)$,

где $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ – непрерывные и дифференцируемые функции, взаимно однозначно отображающие область D плоскости OXY в область D' плоскости OUV.

Тогда $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} \big(\varphi(u,v);\ \psi(u,v)\big)|I|\,dudv$,

где I– функциональный определитель Якоби (якобиан)

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

В случае перехода к полярным координатам:

$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ где $\begin{matrix} 0 \le \rho \le +\infty \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \end{matrix}$

$|I| = \rho.$

имеем: $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi$.

Приведем примеры по рассматриваемой теме.

Пример 2.1. Вычислить $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x+y+1)^2}$, где область D ограничена линиями (рис.2.1):

$x + y = 1,\quad x - y = -1,$

$x + y = 5,\quad x - y = 4.$

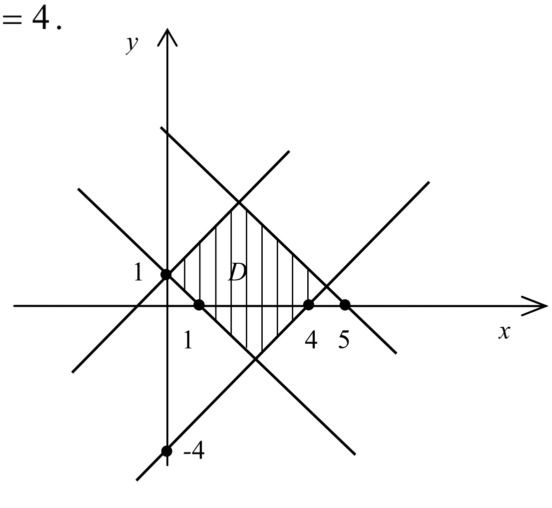

Рис.2.1.

Решение. В декартовой системе координат построенная область будет неправильная и по схеме *А* и по схеме *Б*.

Введем замену переменных: $x + y = u, \quad x - y = v$.

Тогда в новой системе координат (*OUV*) заданная область будет представлена в виде прямоугольника (рис.2.2).

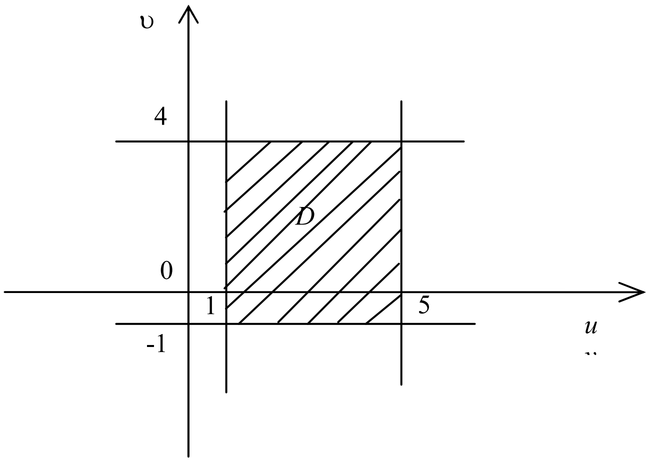

Рис.2.2.

Выразим x и y через новые переменные:

$$\begin{cases} x + y = u, \\ x - y = v. \end{cases}$$

$$2x = u + v, \quad x = \frac{u+v}{2}, \quad y = u - x = u - \frac{u+v}{2} = \frac{2u - u - v}{2} = \frac{u-v}{2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{2}.$$

Функциональный определитель:

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$$\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{(x+y+1)^2}=\iint\limits_{D'}\frac{1}{\left(\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}+1\right)^2}\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|dudv=\frac{1}{2}\iint\limits_{D'}\frac{1}{\left(\frac{u+v+u-v+2}{2}\right)^2}dudv=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D'}\frac{4dudv}{(u+2)^2}=2\int_1^5\frac{du}{(u+2)^2}\int_{-1}^4 dv=2\int_1^5\frac{du}{(u+2)^2}v\Big|_{-1}^4=10\int_1^2\frac{du}{(u+2)^2}=-10(u+2)^{-1}\Big|_1^2=$$

$$=-\frac{10}{u+2}\Big|_1^2=-\frac{10}{4}+\frac{10}{3}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}.$$

Пример 2.2. Вычислить $\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)dxdy$, где область D ограничена линиями

$x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=9,\quad y=x,\quad y=\sqrt{3}x.$

Решение. Заданная область D показана на рис.2.3.

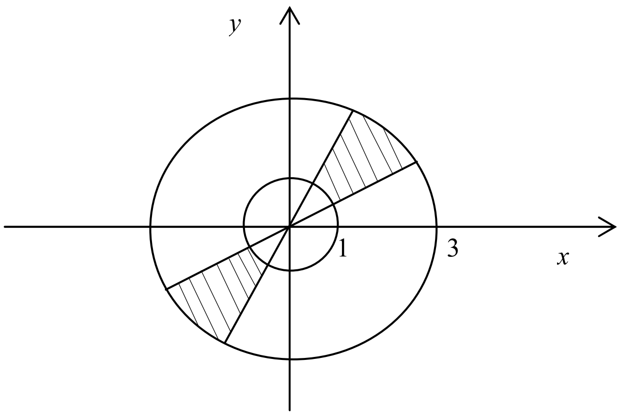

Рис.2.3.

Переходя к полярной системе координат:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi, \end{cases}$$

$|I|=\rho.$

Получим

$$\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)dxdy=2\int_{\pi/4}^{\pi/3}d\varphi\int_1^3\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi-1\right)\rho\, d\rho=2\int_{\pi/4}^{\pi/3}d\varphi\int_1^3\left(\rho^3-\rho\right)d\rho=$$

$$=2\int_{\pi/4}^{\pi/3}d\varphi\left(\frac{\rho^4}{4}\Big|_1^3-\frac{\rho^2}{2}\Big|_1^3\right)=2\int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{81}{4}-\frac{1}{4}-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\right)d\varphi=32\varphi\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}=32\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=32\frac{\pi}{12}=\frac{8\pi}{3}.$$

Пример 2.3. Вычислить $\iint\limits_D x^2 dxdy$, где область D ограничена линиями $x^2 + y^2 = 4, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$ (рис.2.4.).

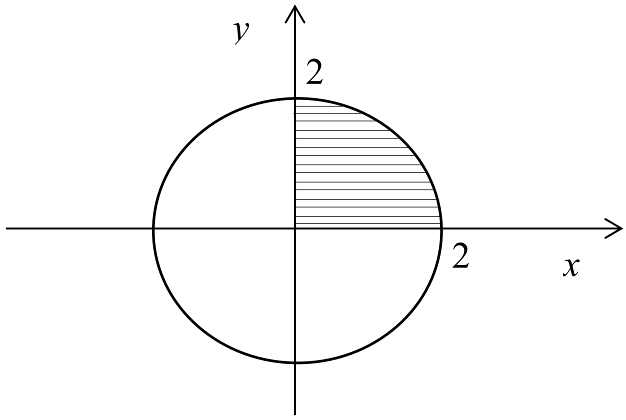

Рис.2.4.

Решение. Переходим к полярным координатам:

$$\iint\limits_D x^2 dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_1^3 \rho^2 \cos^2\varphi \cdot \rho\, d\rho = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2 d\varphi = 4\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 4\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = 2\left.\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\right|_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Аудиторная работа

2.1. С помощью надлежащей замены переменных вычислить интегралы:

2.1.1. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, где область D ограничена линиями: $y=3-x, \quad y=5-x, \quad y=2x, y=4x$.

2.1.2. $\iint\limits_D dxdy$, где область D ограничена линиями: $y=4-x, \quad y=6-x, \quad x-y=0,$ $2x-y=0$.

2.1.3. $\iint\limits_D (x^2+y^2)^2 dxdy$, где область D ограничена линией $x^2+y^2=9, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$.

2.1.4. $\iint\limits_D (x^2+y^2+3) dxdy$, где область D ограничена лемнискатой $(x^2+y^2)^2 = 16xy$.

Домашнее задание

2.2. С помощью замены переменных вычислить интегралы:

2.2.1. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x+y)^3}$, где область D ограничена линиями

$y=3x, \quad y=\dfrac{1}{3}x, \quad y=8-x, \; y=4-x$. (Ответ: $\dfrac{1}{16}$)

2.2.2. $\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy$, где область D ограничена линиями: $x+y=1, \; x+y=5, \; y=2x,$

$y=4x$. (Ответ: $83\dfrac{23}{75}$)

2.2.3. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x+y)^4}$, где область D ограничена линиями

$x+y=2, \quad x+y=1, \quad y-3x=0, \quad y-4x=0.$ (Ответ: $\dfrac{3}{160}$)

2.2.4. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2} dxdy$, где область D ограничена линиями $x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=4.$ (Ответ: $\pi e(e^3-1)$)

2.2.5. $\iint\limits_D xydxdy$, где область D ограничена линиями $y=-x, \; y=\sqrt{3}x, \; x^2+y^2=4x, x^2+y^2=9x.$ (Ответ: 28,73)

Занятие 3

ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Тройным интегралом от непрерывной функции $f(x,y,z)$ по ограниченной замкнутой пространственной области V называется предел интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta\vartheta_k$, когда максимальный диаметр разбиения области V $d=\max_{1\le k\le n}\vartheta_k$ стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta\vartheta_k = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

Для непрерывной функции $f(x,y,z)$ этот предел существует и единственен.

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла.

Вычисление тройного интеграла

Пусть пространственная область V в декартовой системе координат $OXYZ$ ограничена снизу и сверху поверхностями $z=z_1(x,y)$ и $z=z_2(x,y)$ $(z_1(x,y)\le z_2(x,y)$, с боков – прямой цилиндрической поверхностью V, проектируется на плоскость OXY в область D, ограниченную линиями $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$, $x=a$, $x=b$ $(a<b, \varphi(x)\le\psi(x))$, а функции z_1, z_2, φ, ψ – непрерывны на области D (рис. 3.1).

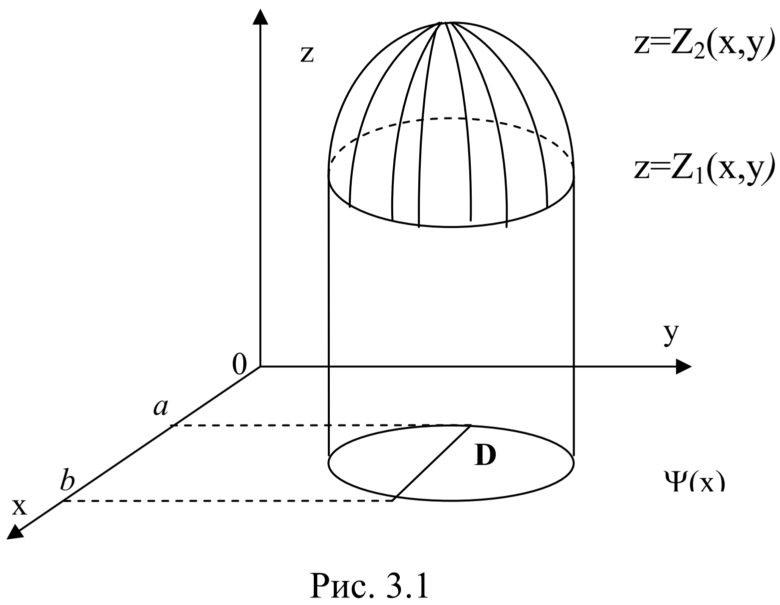

Рис. 3.1

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению одного однократного и одного двойного интегралов или к вычислению трех однократных интегралов:

$$\iiint_V f(x,y,z)ddxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Порядок интегрирования в формуле (4.2) может быть изменен.

Пример 3.1. Вычислить $\iiint_V \left(z^2 + x^2 + y^2\right)dxdydz$, где область V – прямоугольный параллелепипед, определяемый неравенствами: $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ a \le z \le c$ (рис. 3.2).

Решение. Область V ограничена сверху плоскостью $z = c$, а снизу – плоскостью $z = 0$. Проекцией тела на плоскость Oxy служит прямоугольник со сторонами a и b.

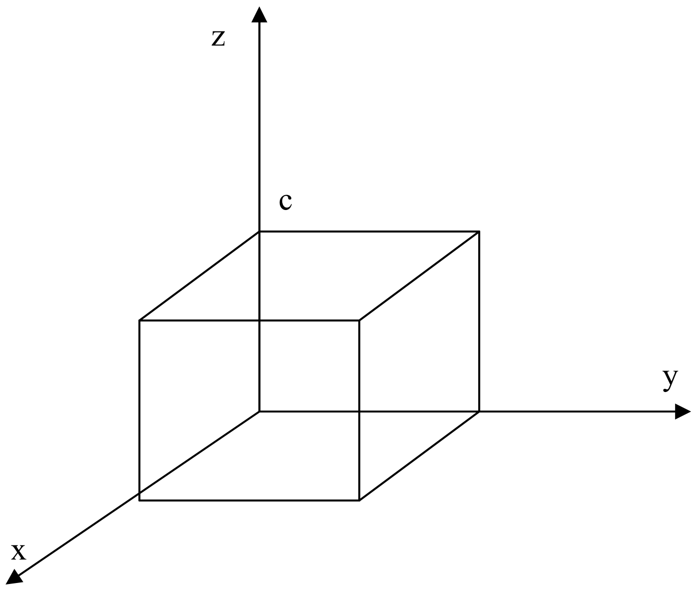

Рис. 3.2

$$\iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dxdydz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dz = \int_0^a dx \int_0^b \left[\left(x^2 + y^2\right)z + \frac{z^3}{3}\right]\Bigg|_0^c dy =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b \left[\left(x^2 + y^2\right)c + \frac{c^3}{3}\right]dy = \int_0^a \left[\left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)c + \frac{c^3}{3}y\right]\Bigg|_0^b dx = \int_0^a \left[\left(x^2 b + \frac{b^3}{3}\right)c + \frac{c^3}{3}b\right]dx =$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3}b + \frac{b^3}{3}x\right)c + \frac{c^3}{3}bx\right]\Bigg|_0^a = \frac{a^3 bc}{3} + \frac{b^3 ac}{3} + \frac{c^3 ab}{3} = abc(a + b + c).$$

Пример 3.2. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{1}{(1+x+y+t)^3}dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x+y+t=1, \quad x=0, y=0\ z=0.$

Решение. Область V есть пирамида (рис. 3.3). Проекцией пирамиды на плоскость OXY является треугольник, ограниченный прямыми $x=0, y=0, x+y=1$ (рис. 3.4). Для переменной z нижним пределом будет $z=0$ (плоскость OXY), а верхним – значение z, полученное из уравнения плоскости $x+y+z=1,$, т.е. $z=1-x-y.$

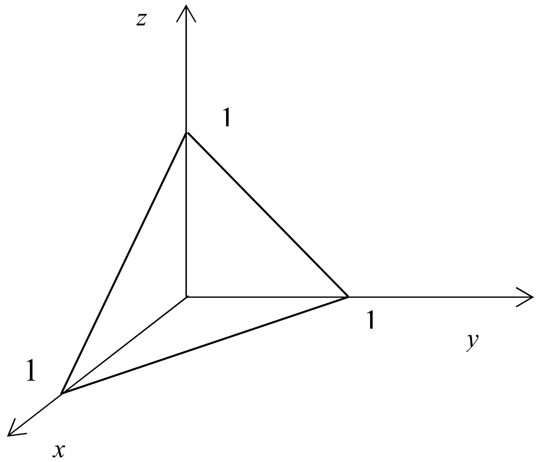

Рис. 3.3

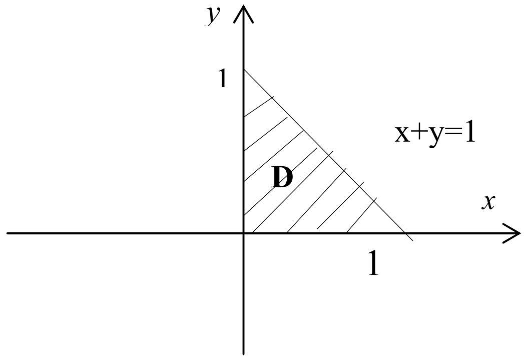

Рис. 3.4

Поэтому получим:

$$\iiint\limits_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3}dxdydz \quad = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\right]\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} dy = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right]dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\frac{y}{4}+\frac{1}{1+x+y}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\frac{1-x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x-\frac{x^2}{8}-\ln|1+x|\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$

Пример 3.3. Вычислить $\iiint\limits_V z\, dxdydz$, где область V определяется неравенствами $0 \le x \le \frac{1}{2}, x \le y \le 2x, 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}.$

Решение.

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz=\int\limits_0^{\frac12}dx\int\limits_x^{2x}dy\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}z\,dz=\frac12\int\limits_0^{\frac12}dx\int\limits_x^{2x}z^2\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dy=\frac12\int\limits_0^{\frac12}dx\int\limits_x^{2x}\left(1-x^2-y^2\right)dy=$$

$$=\frac12\int\limits_0^{\frac12}\left(y-yx^2-\frac13y^3\right)\Bigg|_x^{2x}dx=\frac12\int\limits_0^{\frac12}\left(2x-2x^3-\frac83x^3-x+x^3+\frac13x^3\right)dx=\frac12\int\limits_0^{\frac12}\left(x-\frac{10}{3}x^3\right)dx=\frac{7}{192}.$$

Пример 3.4. Вычислить $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, где V – верхняя половина эллипсоида $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2\le 1,\ z\ge 0$ (рис. 3.5).

Решение. Проекцией тела на плоскость OXY является область, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ (рис. 3.6).

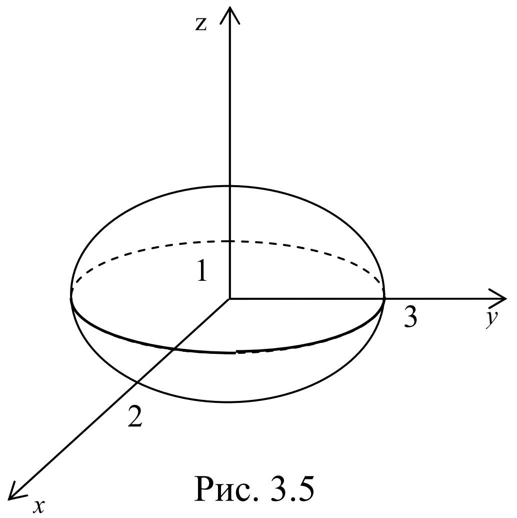

Рис. 3.5

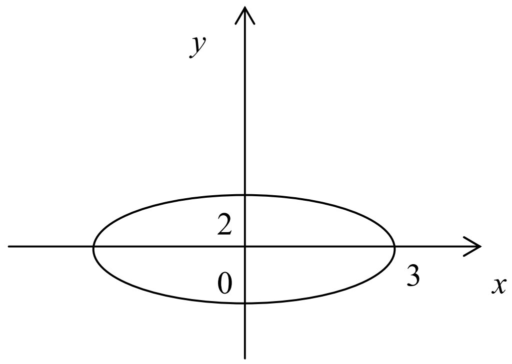

Рис. 3.6

Поэтому

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz=\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\left(\frac23\right)\sqrt{9-x^2}}^{\left(\frac23\right)\sqrt{9-x^2}}dy\int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}}z\,dz=\frac12\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\frac23\sqrt{9-x^2}}^{\frac23\sqrt{9-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}\right)dy=$$

$$=\frac12\int\limits_{-3}^{3}\left[\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\frac43\sqrt{9-x^2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{16}{27}\left(9-x^2\right)^{\frac32}\right]dx=\frac{4}{81}\int\limits_{-3}^{3}\left(9-x^2\right)^{\frac32}dx=$$

$$=\frac{8}{81}\int\limits_0^{3}\left(9-x^2\right)^{\frac32}dx=\begin{vmatrix}x=3\sin t\\ dx=3\cos t\,dt\end{vmatrix}=\frac{8}{81}\int\limits_0^{\frac{n}{2}}81\cos^4 t\,dt=8\int\limits_0^{\frac{n}{2}}\frac{\left(1+\cos 2t\right)}{4}dt=$$

$$=2\left[t+\sin 2t+\frac t2+\frac18\sin 4t\right]\Bigg|_0^{\frac{n}{2}}=2\cdot\frac62\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi.$$

Аудиторная работа

3.1. Вычислить тройной интеграл по указанным областям V, ограниченным поверхностями

3.1.1. $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$ $\qquad V:\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 4\\ 0\le z\le 6\end{cases}$

3.1.2. $\iiint\limits_V xyz\ dxdydz$ $\qquad V:\begin{cases}y=x^2\\ x=y^2\\ z=xy\\ z=0\end{cases}$

3.1.3. $\iiint\limits_V (3x+4y)dxdydz$ $\qquad V:\begin{cases}z=x^2+y^2\\ y=x^2\\ z=0,\quad y=1\end{cases}$

3.1.4. $\iiint\limits_V \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$ $\qquad V:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x=0, y=0, z=0\\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\end{cases}$

Домашнее задание

3.2. Вычислить тройные интегралы по областям, ограниченным указанными поверхностями.

3.2.1. $\iiint\limits_V xy^2z^3\ dxdydz$, $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$ (Ответ: 1/364)

3.2.2. $\iiint\limits_V xy\ dxdydz$, $x^2+y^2=1, z=0, z=1, x=0, y=0\ (x\ge 0, y\ge 0)$ (Ответ: 1/8)

3.2.3. $\iiint\limits_V yz\ dxdydz$, $x^2+y^2+z^2=1, z=0$ (Ответ: 0)

3.2.4. $\iiint\limits_V xy\ dxdydz$, $z=xy, x+y=1, z=0\ (z\ge 0)$ (Ответ: 1/180)

3.2.5. $\iiint\limits_V y\ dxdydz$, $x+2z=3, y=1, y=3, x=0, z=0$ (Ответ: 9)

Занятие 4
ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Пусть переменные x, y, z связаны с переменными u, ϑ, ω соотношениями:
$x = \varphi(u, \vartheta, \omega), y = \psi(u, \vartheta, \omega), z = \theta(u, \vartheta, \omega)$

где φ, ψ, θ – непрерывные и дифференцируемые функции, взаимно однозначно отображающие область V пространства OXY на область V' в системе координат φ, ψ, θ. Тогда

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_V f(\varphi(u, \vartheta, \omega), \psi(u, \vartheta, \omega), \theta(u, \vartheta, \omega)) \cdot |I(u, \vartheta, \omega)|\, dud\vartheta d\theta$$

где $$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \theta}{\partial \omega} \end{vmatrix}$$

При этом предполагается, что функции (4.1) имеют непрерывные частные производные по своим аргументам и якобиан преобразования отличен от нуля.

Формула преобразования тройного интеграла от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим координатам ρ, φ, z, связанным с декартовыми соотношениями (рис. 4.1)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, & 0 \le \rho < \infty \\ y = \rho \sin \varphi, & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = z, & -\infty < z < \infty \\ |I| = \rho \end{cases}$$

имеет вид $$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_V f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz$$

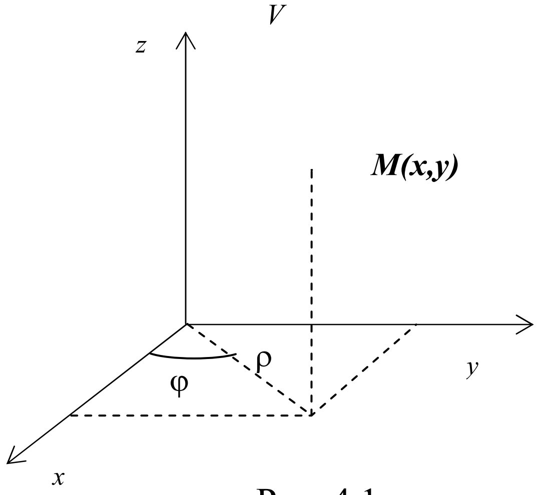

Рис. 4.1

Формулы преобразования тройного интеграла от декартовых координат x, y, z к сферическим r, φ, θ (рис. 4.2), связанными с декартовыми соотношениями (4.2) имеет вид:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta & 0 \le \rho < \infty \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = \rho\cos\theta & 0 \le \theta \le \pi \\ |I| = \rho^2 \sin\theta & \end{cases}$$

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint_\rho f\left(\rho\, cos\ \varphi\ sin\ \theta, \rho\, sin\ \varphi\ sin\ \theta, \rho\, cjs\ \theta\right)|I|\,d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

где $|I|$ – якобиан перехода.

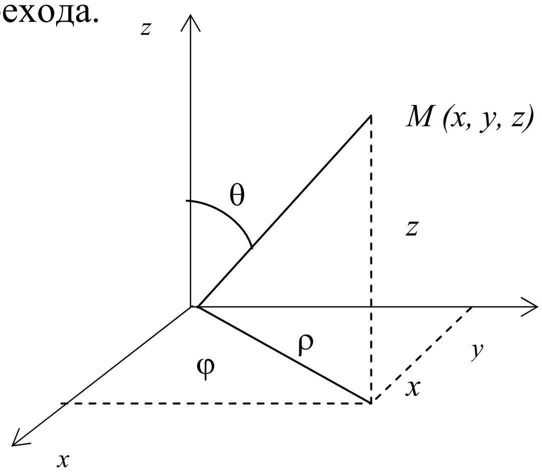

Рис. 4.2

Пример 4.1. Вычислить $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz$, где область V ограничена параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 4$ (рис. 4.3).

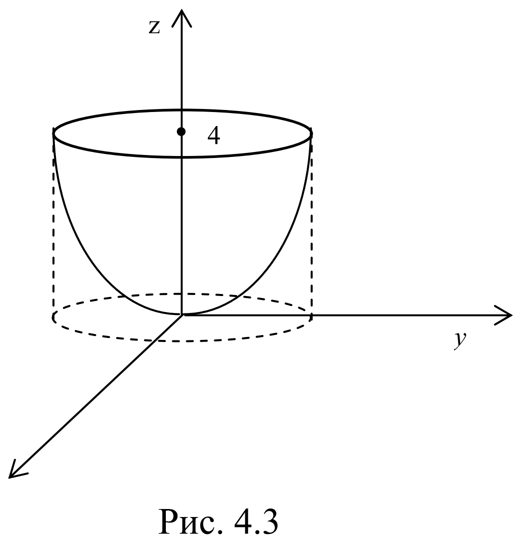

Рис. 4.3

Решение. Данная пространственная область V проектируется в круг радиуса 2 плоскости XOY (рис. 4.4.). Вычислим тройной интеграл в цилиндрических координатах. Уравнение параболоида $z=\rho^2$. Координаты ρ,φ,z изменяются так: $0\le\rho\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ \rho^2\le z\le 4.$

Тогда

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \\ |I|=\rho \end{vmatrix}=\iiint\limits_\Omega \rho\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^2 d\rho\int\limits_{\rho^2}^4 dz=$$

$$=2\pi\int\limits_0^2\left(4\rho^2-\rho^4\right)d\rho=2\pi\left(\frac{4}{3}\rho^3-\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=\frac{128}{5}\pi.$$

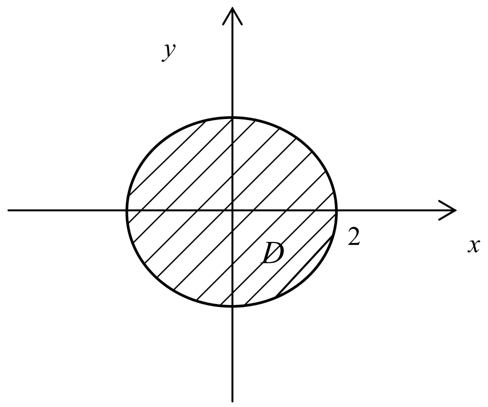

Рис. 4.4

Пример 4.2. Вычислить $\iiint\limits_V x^2\,dxdydz$ **,** где $V: x^2+xy^2+z^2\le R^2$.

Решение. Область V ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=R^2$. Перейдем в данном интервале к сферической системе координат ρ,φ,θ. Здесь $0\le\rho\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi$ (рис. 5.5).

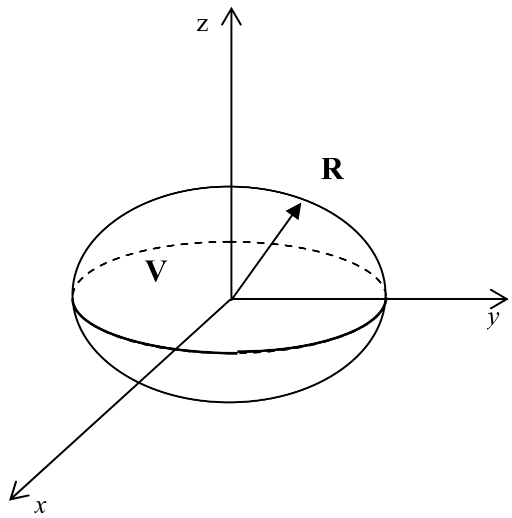

Рис. 4.5

Следовательно

$$\iiint\limits_V x^2\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega \rho^4 \sin^3\theta \cos^2\varphi d\rho d\varphi d\theta = \int\limits_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^R \rho^4 d\rho =$$

$$= \frac{R^5}{5\cdot 2}\int\limits_0^\pi \sin^3\theta d\theta \left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi R^5}{5}\int\limits_0^\pi \left(\cos^2\theta - 1\right) d\cos\theta = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

Пример 4.3. Вычислить $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, где V ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и является внутренней по отношению к конусу
(рис. 4.6).

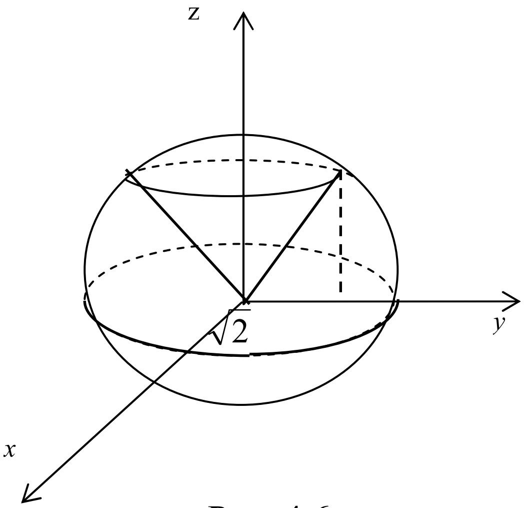

Рис. 4.6.

Решение. Перейдем в данном интеграле к сферическим координатам. Уравнение сферы записывается в виде $\rho = 2$, а уравнение конуса $\theta = \frac{\pi}{4}$. В области Ω координаты ρ, φ, θ изменяются следующим образом:

$0 \le \rho \le 2, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi/4$. Тогда

$$\iiint\limits_V z\ dxdydz = \iiint\limits_\Omega \rho\, cos\ \theta \rho^2\, sin\ \theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} sin\ \theta\, cos\ \theta\, d\theta \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\pi/4} \frac{1}{2} sin\ 2\theta\, d\theta \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^2 = 25 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4}\left(- cos\ 2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 = 2\pi.$$

Пример 4.4. Вычислить $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ если область V ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$ и плоскостями $y = 0, z = 0, z = a.$

Решение. $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1.$

Представленный объем – цилиндр высоты a (рис. 4.7) проектирующийся на плоскости OXY в область D, представляющей круг радиуса 1 с центром в точке $x = 1$ по оси OX (рис. 4.8).

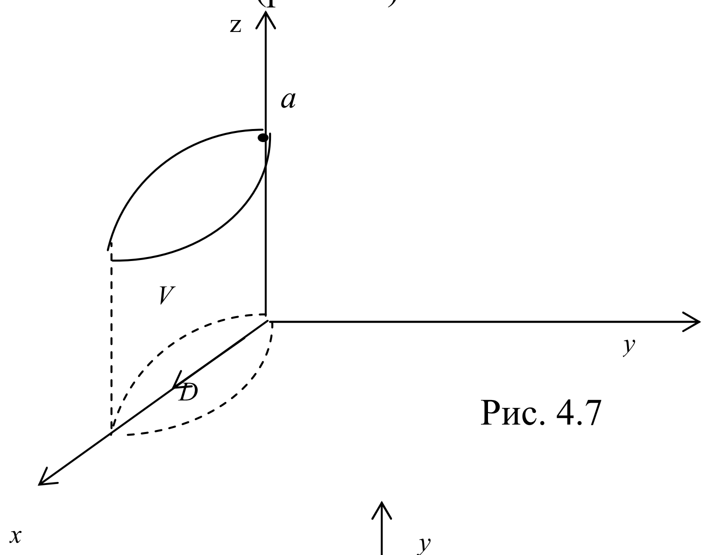

Рис. 4.7

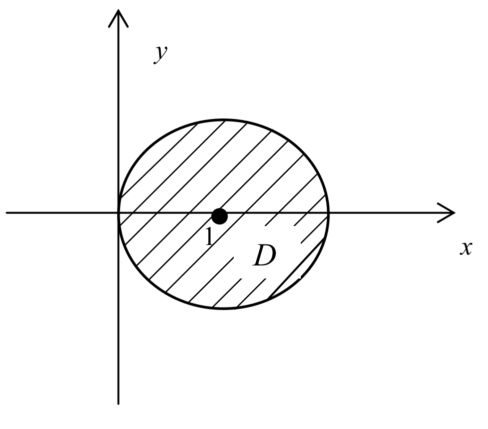

Рис. 4.8

Перейдем к цилиндрическим координатам $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z, |I| = \rho.$

Уравнение цилиндра в этих координатах примет вид

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 2\rho\cos\varphi$$

или

$$\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=2\rho\cos\varphi\text{, т.е. } \rho=2\cos\varphi\ .$$

Следовательно в области Ω координаты ρ,φ,z изменяются как:

$0\le\rho\le 2\cos\varphi,\quad \pi/2\le\varphi\le\pi/2,\quad 0\le z\le a$ (рис. 4.8).

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\iiint\limits_\Omega z\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\,\rho d\rho d\varphi dz=\iiint\limits_\Omega z\rho^2 d\rho d\varphi dz=$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2 d\rho\int\limits_0^a z\,dz=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2 d\rho\left[\frac{z^2}{2}\right]\Bigg|_0^a=\frac{1}{2}a^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}\right]d\varphi=$$

$$=\frac{1}{6}a^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}8\cos^3\varphi d\varphi=\frac{8a^2}{6}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi d\sin\varphi=\frac{4a^2}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi=$$

$$=\frac{4a^2}{3}\left[\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{4a^2}{3}\left[1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{4a^2}{3}\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{4a^2}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{16a^2}{9}.$$

Аудиторная работа

4.1. Вычислить $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ по указанным областям:

4.1.1. $f(x,y,z)=1$ $\qquad V:\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\ z=2\end{cases}$

4.1.2. $f(x,y,z)=x^2+y^2$ $\qquad V: z=\sqrt{9-x^2-y^2}$

4.1.3. $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\qquad V:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\ x^2+y^2+z^2=16\end{cases}$

4.1.4. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ $\qquad V:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le R^2\\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\end{cases}$

Домашнее задание

4.2. Вычислить $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ по указанным областям:

4.2.1. $f(x,y,z)=z\sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad V: x^2+y^2=2x,\ y=0,\ z=0,\ z=a$

(Ответ: $8a^2/9$)

4.2.2. $f(x,y,z)=z$ $\qquad V: x^2+y^2-z^2=a^2,\ z=0,\ z=a\ (a\ge 0)$

(Ответ: $3\pi a^4/4$)

4.2.3. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad V: x^2+y^2+z^2 \le 9$

(Ответ: 81π)

4.2.4. $f(x,y,z)=1$ $\qquad V: x^2+y^2+4z^2=1$

(Ответ: $2\pi/3$)

4.2.5. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ $\qquad V:\begin{cases} y^2+z^2=b^2 \\ x=0,\ x=a \end{cases}$

(Ответ: $\pi ab^2\left(\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{2}\right)$)

4.2.6. $f(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^3$ $\qquad V:\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y=0,\ y=1 \end{cases}$

(Ответ: $431\pi/420$)

4.2.7. $f(x,y,z)=x^2+y^2$ $\qquad V:\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le R^2 \\ z \ge 0 \end{cases}$

(Ответ: $4\pi R^5/15$)

4.2.8. $f(x,y,z)=\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}$ $\qquad V: x^2+y^2+z^2 \le R^2$

(Ответ: $\pi R^8/2$)

4.2.9. $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2+1}$ $\qquad V:\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le R^2 \\ y=0,\ y \ge 0 \end{cases}$

(Ответ: $2\pi(R-arctgR+1)$)

Занятие 5
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ I РОДА

Пусть функция $f(x,y,z)$ определена и непрерывна в точках дуги $\overset{\cup}{AB}$ кусочно-гладкой пространственной кривой L.

Криволинейным интегралом I рода (КРИ–I) от функции $f(x,y,z)$ вдоль кривой L называется предел интегральной суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\cdot\Delta\ell_k$, когда диаметр разбиения кривой L $d = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta\ell_k$ стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\cdot\Delta\ell_k = \int\limits_L f(x,y,z)\,d\ell .$$

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на L, то КРИ–I существует и единственен.

Основные свойства КРИ–I

1. КРИ–I не зависит от направления пути интегрирования, т.е.

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y,z)\,d\ell = \int\limits_{\overset{\cup}{BA}} f(x,y,z)\,d\ell .$$

2. $\int\limits_L f_1(x,y,z) \pm f_2(x,y,z)d\ell = \int\limits_L f_1(x,y,z)\,d\ell \pm \int\limits_L f_2(x,y,z)\,d\ell$.

3. $\int\limits_L cf(x,y,z)d\ell = c\int\limits_L f(x,y,z)\,d\ell,$ где $c = const$.

4. Если кривая L разбита на части $L_1, L_2, \ldots, L_n$, т.е. $L = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$, то

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,d\ell = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{L_i} f(x,y,z)\,d\ell .$$

5. Если для точки кривой L выполнено неравенство

$$f_1(x,y,z) \le f_2(x,y,z),\ \text{то}\ \int\limits_L f_1(x,y,z)\,d\ell \le \int\limits_L f_2(x,y,z)\,d\ell .$$

Вычисление КРИ–I

1. Пусть пространственная кривая L задана параметрически уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, где $t_1 \le t \le t_2$, тогда дифференциал дуги кривой равен $d\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$ и

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,d\ell=\int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(x(t),\,y(t),\,z(t),\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2+\big(z'(t)\big)^2}\,dt\,.$$

2. Пусть плоская кривая L задана уравнением $y=\varphi(x)$, где $a\le x\le b$, тогда дифференциал дуги равен $d\ell=\sqrt{1+\big(\varphi'(x)\big)^2}\,dx$ и

$$\int\limits_L f(x,y)\,d\ell=\int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\big(\varphi'(x)\big)^2}\,dx\,.$$

3. Пусть плоская кривая L задана в полярной системе координат уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, где $\alpha\le\varphi\le\beta$, тогда дифференциал дуги кривой равен $d\ell=\sqrt{\rho^2(\varphi)+\big(\rho'(\varphi)\big)^2}\,d\varphi$ и $\int\limits_L f(x,y)d\ell=\int\limits_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\big(\rho'(\varphi)\big)^2}\,d\varphi$.

Таким образом, вычисление криволинейного интеграла I рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Пример 5.1. Вычислить $\int\limits_L\left(x^5+8xy\right)d\ell$, где L – дуга кривой $4y=x^4$, заключенная между точками $x=0,\ x=1$.

Решение. Находим $d\ell=\sqrt{1+x^6}\,dx$, тогда

$$\int\limits_L\left(x^5+8xy\right)d\ell=\int\limits_0^1\left(x^5+2x^5\right)\sqrt{1+x^6}\,dx=\int\limits_0^1 3x^5\sqrt{1+x^6}\,dx=$$

$$=3\cdot\frac{1}{6}\int\limits_0^1\left(1+x^6\right)^{1/2}d\left(1+x^6\right)=\frac{1}{2}\frac{\left(1+x^6\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Пример 5.2. Вычислить $\int\limits_L\sqrt{x^2+y^2}\,d\ell$, где L – дуга лемнискаты $\rho=a\sqrt{\cos2\varphi}\quad(0\le\varphi\le\pi/4)$.

Решение. Находим

$$d\ell=\sqrt{a^2\cos2\varphi+\frac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos2\varphi}}\,d\varphi=\frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos2\varphi}}=\frac{a^2d\varphi}{\rho}\,,$$

т.к. $\rho'(\varphi)=\dfrac{-a\sin2\varphi}{\sqrt{\cos2\varphi}}$, тогда

$$\int\limits_L\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\,d\ell=\int\limits_0^{\pi/4}\sqrt{\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)}\frac{a^2d\varphi}{\rho}=a^2\int\limits_0^{\pi/4}d\ =a^2\varphi\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi a^2}{4}$$

Аудиторная работа

5.1. Вычислить криволинейные интегралы по указанным кривым:

5.1.1. $\int\limits_L xyz\,d\ell$, где L – дуга кривой, $x=\frac{1}{2}t^2,\quad y=t,\quad z=\frac{8}{3}\sqrt{t^3}\quad(0\le t\le 1)$.

5.1.2. $\int\limits_L \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}d\ell$, где L – дуга косинусоиды $y=\cos x\quad(0\le x\le \pi/2)$.

5.1.3. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,d\ell$, где L – кривая $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}\quad(0\le t\le 2\pi)$.

5.1.4. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2 d\ell$, где L – дуга кривой $\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi}\quad(0\le\varphi\le\pi/2)$.

5.1.5. $\int\limits_L x\,d\ell$, где L – параболы $y=x^2\quad(1\le x\le 2)$.

Домашнее задание

5.2. Вычислить следующие криволинейные интегралы:

5.2.1. $\int\limits_L \frac{d\ell}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0)$ и $A(1,2)$.

(Ответ: $ln\left|\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right|$)

5.2.2. $\int\limits_L y^2\,d\ell$, где L – первая арка циклоиды: $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$.

(Ответ: $\frac{256}{15}a^3$)

5.2.3. $\int\limits_L (x+y)\,d\ell$, где L – правый лепесток лемнискаты $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

(Ответ: $a^2\sqrt{2}$)

Занятие 6

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ II РОДА

Пусть на дуге $\overset{\cup}{AB}$ кусочно-гладкой пространственной кривой L определена и непрерывна вектор-функция

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + +Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

где $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – проекции вектора $\vec{F}(x,y,z)$ на координатные оси. Составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}(\vec{F}(M_k),\, \Delta\vec{r}_k)$.

Криволинейным интегралом II рода (КРИ– II) называется предел интегральной суммы $\sum\limits_{k=1}^{n}(\vec{F}(M_k),\, \Delta\vec{r}_k)$, когда диаметр разбиения дуги кривой L $d = \max\limits_{1\le k\le n}\left|\Delta\vec{r}_k\right|$ стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}(\vec{F}(M_k),\, \Delta\vec{r}_k) = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}(P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k + R(M_k)\Delta z_k) =$$
$$= \int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Свойства КРИ– II

1. При изменении направления интегрирования КРИ– II меняет знак на противоположный:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = -\int\limits_{\overset{\cup}{BA}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Остальные свойства КРИ– II аналогичны свойствам КРИ–I.

Вычисление КРИ– II

1. Пусть L – пространственная кривая, заданная параметрическими уравнениями $x = x(t),\, y = y(t),\, z = z(t)$, где $t_1 \le t \le t_2$, тогда

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{t_1}^{t_2}((P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) +$$
$$+ R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t))\,dt.$$

2. Пусть L – плоская кривая, заданная уравнением $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$, тогда

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b (P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\,\varphi'(x))\,dx\ .$$

3. Пусть L – плоская кривая, заданная в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)\quad (\alpha \le \varphi \le \beta)$, тогда

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta -(P(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\sin\varphi + Q(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\cos\varphi)\,d\varphi,$$

где $\rho = \rho(\varphi)$.

Таким образом, вычисление КРИ– II сводится к вычислению определенного интеграла.

Формула Грина

Если L – кусочно-гладкий контур, ограничивающий на плоскости Oxy область D, функции $P(x,y), Q(x,y)$ – непрерывны в замкнутой области D и имеют непрерывные частные производные, тогда справедлива формула Грина

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\quad ,$$

где контур L обходится в положительном направлении (против часовой стрелки).

Криволинейный интеграл

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy\ ,$$

где контур L целиком лежит внутри некоторой односвязной области D, в которой функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их частные производные непрерывны, не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\ .$$

В этом случае подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, т.е.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y) \text{ и}$$

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(M_2) - U(M_1) = U(x_2,y_2) - U(x_1,y_1),$$

где $M_1(x_1,y_1)$ – начальная точка, $M_2(x_2,y_2)$– конечная точка пути интегрирования.

В частности, криволинейный интеграл по замкнутому контуру в этом случае равен нулю:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Пример 6.1. Вычислить $\int_L \cos^3 x\,dx + \frac{dy}{y^3}$, где L – дуга кривой $y = \operatorname{tg} x \quad (\pi/4 \le x \le \pi/2)$.

Решение.

$$\int_L \cos^3 x\,dx + \frac{dy}{y^3} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^3 x\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^3 \cos^2 x} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\,d(\sin x) + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} =$$

$$= \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{1}{2\sin^2 x} \right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{7}{6} - \frac{5}{12}\sqrt{2}.$$

Пример 6.2. Вычислить $\int_L ydx + xdy$, где L – дуга астроиды $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t \ \ (0 \le t \le \pi/4)$.

Решение. Найдем $dx = -3a\cos^2 t \cdot \sin t\,dt$, $dy = 3a\sin^2 t \cdot \cos t\,dt$.

Следовательно:

$$\int_L ydx + xdy = \int_0^{\pi/4} \left(a\,sin^3 t(-3a\,cos^2 t \cdot sin\,t) + a\,cos^3 t \cdot 3a\,sin^2 t \cdot cos\,t \right) dt =$$

$$= 3a^2 \int_0^{\pi/4} sin^2 t \cdot cos^2 t(cos^2 t - sin^2 t\cdot)\,dt = 3a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{sin^2 2t}{4} \cdot cos\,2t\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8} \int_0^{\pi/4} sin^2 2t\,d(sin\,2t) = \frac{3a^2}{8} \cdot \frac{sin^3 2t}{4}\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{8}.$$

Пример 6.3. Применяя формулу Грина, вычислить интеграл

$$\oint_L - x^2 ydx + xy^2 dy,$$

где L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

Решение. Используя формулу Грина, сведем криволинейный интеграл к двойному интегралу

$$\oint_L - x^2 ydx + xy^2 dy = \iint_D \left(y^2 + x^2 \right) dxdy,$$

т.к.

$$\begin{cases} P(x,y) = -x^2 y, \\ Q(x,y) = xy^2, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y^2. \end{cases}.$$

Для вычисления двойного интеграла введем полярные координаты:

$$\iint_D \left(y^2 + x^2\right) dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ |I| = \rho \end{vmatrix} = \iint_S \rho^2 \cdot \rho\, d\varphi\, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3\, d\rho = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4},$$

где I – якобиан преобразования.

Пример 6.4. Вычислить криволинейный интеграл, предварительно проверив, зависит ли он от пути интегрирования

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} (3x^2 y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2 y + 3y^2)dy, \text{ где } A(-1,-1),\ B(1,1).$$

Решение. В нашем случае

$$P(x,y) = 3x^2 y - 4xy^2,$$
$$Q(x,y) = x^3 - 4x^2 y + 3y^2,$$

тогда $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - 8xy$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 - 8xy$, т.е. условие независимости выполнено. Определим функцию $U(x,y)$, полный дифференциал которой, равен подынтегральному выражению

$$dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 y - 4xy^2, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = x^3 - 4x^2 y + 3y^2. \end{cases}$$

Так как $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 y - 4xy^2$, то

$$U(x,y) = \int (3x^2 y - 4xy^2)dx = x^3 y - 2x^2 y^2 + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – неизвестная функция, для нахождения которой продифференцируем полученное равенство:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^3 - 4x^2 y + \varphi'(y) = x^3 - 4x^2 y + 3y^2.$$

Тогда $\varphi'(y) = 3y^2$ и $\varphi(y) = y^3 + C$.

Итак, $U(x,y) = x^3y - 2x^2y^2 + y^3 + C$.

Окончательно

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2y + 3y^2)dy = (x^3y - 2x^2y^2 + y^3)\Big|_A^B = 2.$$

Аудиторная работа

6.1. Вычислить криволинейные интегралы по указанным кривым:

6.1.1. $\int\limits_L y^2dx + xydy$, L – дуга эллипса $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi/2)$.

6.1.2. $\int\limits_L \sin^3 x\, dx + \dfrac{dy}{y^2}$, L – дуга кривой $y = \operatorname{ctg} x$ $(0 \le x \le \pi/3)$.

6.1.3. $\int\limits_L x^2dx + (x+z)dy + xydz$, L – дуга кривой

$x = \sin t$, $y = \sin^2 t$, $z = \sin^3 t$ $(0 \le t \le \pi/2)$.

6.1.4. $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} xydx - y^2dy + (z - x)dz$, где $\overset{\cup}{AB}$ – отрезок прямой от $A(1,-2,3)$ до $B(-1,1,2)$.

6.2. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

6.2.1. $\int\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, L – окружность $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

6.2.2. $\int\limits_L (x + y)dx - (x - y)dy$, L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

6.2.3. $\int\limits_L (x + y)dx - x\,dy$, L – контур четырехугольника $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(4,4)$, $D(0,4)$.

6.3. Проверить зависимость интегралов от пути интегрирования:

6.3.1. $\int\limits_L (x + 2x^3y^2 - y^4)dx + (y^2 - 3x^2y^3 + 4xy)dy$.

6.3.2. $\int\limits_L (4x^3 - 12x^3y)dx + (5y^4 - 4x^3)dy$.

6.3.3. $\int\limits_L (xy^3 + x^2 - 2y^2)dx + (y^5 - 3x^3y^2 + x^4)dy$.

Домашнее задание

6.4. Вычислить криволинейные интегралы по указанным кривым:

6.4.1. $\int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, L – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2,4)$. (Ответ: $40\frac{19}{30}$)

6.4.2. $\int\limits_L y^2 dx + x^2 dy$, где L – верхняя половина эллипса, пробегаемая по ходу часовой стрелки $x = a\cos t,\ y = b\sin t$. (Ответ: $\frac{4}{3}ab^2$)

6.4.3. $\int\limits_L x^2 ydx + y^2 xdy$, L – дуга кривой $x = t,\ y = t^3$ $(0 \le t \le 1)$.

(Ответ: $1/2$)

6.4.4. $\int\limits_L y^2 dx + x^2 dy$, L – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

(Ответ: $a^3\pi(5 - 2\pi)$)

6.4.5. $\int\limits_L (x^2 + y^2)dx + xydy$, L – дуга кривой $y = e^x$ от точки $A(0,1)$ до точки $B(1,e)$.

(Ответ: $\frac{4}{3}e^2 + \frac{1}{12}$)

6.5. Применяя формулу Грина, вычислить следующие криволинейные интегралы:

6.5.1. $\oint\limits_L (1 - x^2)dx + x(1 + y^2)dy$, где L – окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

(Ответ: $\frac{\pi a^4}{2}$)

6.5.2. $\oint\limits_L e^{-(x^2 - y^2)}(\cos 2xydx + \sin 2xydy)$, где L – окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

(Ответ: 0)

6.6. Вычислить криволинейные интегралы, предварительно определив функцию $U(x,y)$, полный дифференциал которой равен подынтегральному выражению:

6.6.1. $\int\limits_{AB} (4xy - 15x^2 y)dx + (2x^2 - 5x^3 + 7)dy$, где $A(0,2)$, $B(1,3)$.

(Ответ: –2)

6.6.2. $\int\limits_{AB} \left((x + y + 1)e^x - e^y\right)dx + \left(e^x - (x + y + 1)e^y\right)dy$, где $A(1,0)$, $B(2,1)$.

(Ответ: $3e^2 - 4e + 1$)

Занятие 7

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ I РОДА

Пусть в точках некоторой поверхности S пространства $Oxyz$ определена непрерывная функция $f(x,y,z)$. Поверхностным интегралом I рода от непрерывной функции $f(x,y,z)$ по поверхности S называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$, когда диаметр разбиения поверхности $d=\max_{1\le i\le n} d_i$ стремится к нулю:

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i = \iint_S f(x,y,z)dS .$$

Если поверхность S гладкая, а функция $f(x,y,z)$ – непрерывная, то поверхностный интеграл I рода существует.

Свойства поверхностных интегралов I рода аналогичны свойствам двойных и тройных интегралов.

Вычисление поверхностного интеграла I рода осуществляется путем сведения его к двойному интегралу.

Пусть поверхность S однозначно проектируется на какую-либо координатную плоскость, например плоскость OXY , и область D является ее проекцией (Рис. 7.1).

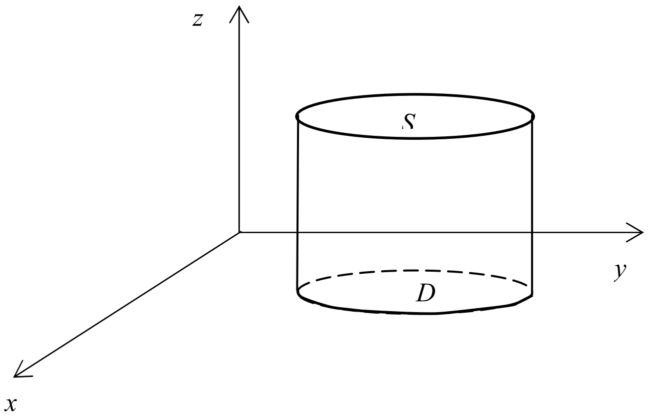

Рис. 7.1.

Тогда, если поверхность задана уравнением $z=z(x,y)$, то поверхностный интеграл I рода по поверхности S вычисляется по формуле:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy \qquad (7.1)$$

Отметим, что если поверхность S задана уравнением вида $y=y(x,z)$ или $x=x(y,z)$ и однозначно проектируется соответственно на координатные плоскости OXZ и OYZ, то аналогично получаем:

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y(x,z),z)\cdot\sqrt{1+{y'_x}^2+{y'_z}^2}\,dxdz \qquad (7.2)$$

и

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_2} f(x(y,z),y,z)\cdot\sqrt{1+{x'_y}^2+{x'_z}^2}\,dydz\ , \qquad (7.3)$$

где D_1 и D_2 проекции поверхности S на координатные плоскости OXZ и OYZ соответственно.

Пример 7.1. Вычислить интеграл $\iint\limits_{S} z(x+y)dS$, где S часть поверхности $z=\sqrt{4-x^2}$, отсеченная плоскостями $y=0,\ y=5$ (рис. 7.2).

Решение. Поверхность $z=\sqrt{4-x^2}$ представляет собой верхнюю часть цилиндра $z^2+x^2=4$ с образующими, параллельными оси Oy; $y=0, y=5$ – уравнения плоскостей, параллельных плоскости OXZ. Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (7.1).

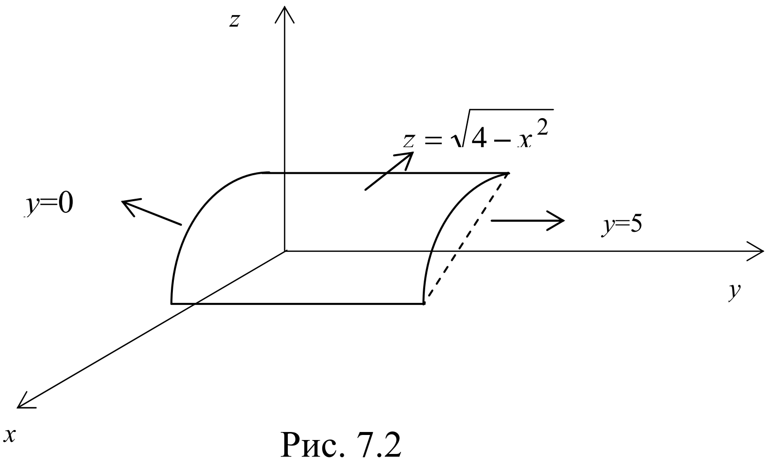

Рис. 7.2

Проекция рассматриваемой поверхности на плоскость OXY представляет собой прямоугольник (рис. 7.3).

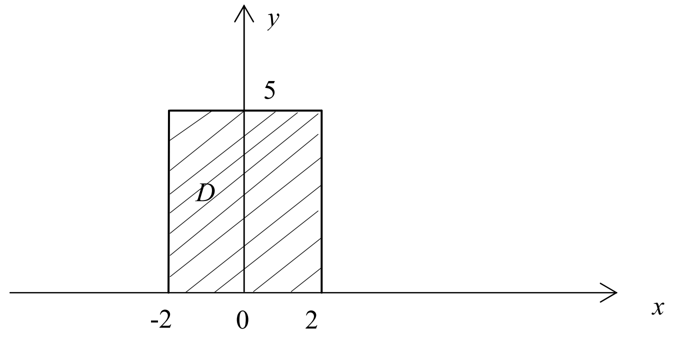

Рис. 7.3

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}; \quad z'_y = 0.$$

$$\iint\limits_S z(x+y)dS = \iint\limits_D \sqrt{4-x^2}(x+y)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}dxdy = \iint\limits_D \sqrt{4-x^2}(x+y)\sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}}dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{4-x^2}(x+y)\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dxdy = 2\iint\limits_D (x+y)dxdy = 2\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_0^5(x+y)dy = 2\int\limits_{-2}^{2}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^5 dx =$$

$$= 2\int\limits_{-2}^{2}\left(5x+\frac{25}{2}\right)dx = \left(5x^2+25x\right)\Big|_{-2}^{2} = 100.$$

Пример 7.2. Вычислить интеграл $\iint\limits_S (x^2+y^2)dS$, где поверхность S задана уравнением $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$.

Решение. Поверхность S представляет собой верхнюю часть сферы $z^2+x^2+y^2=25$ с радиусом $R=5$ (Рис. 7.4)

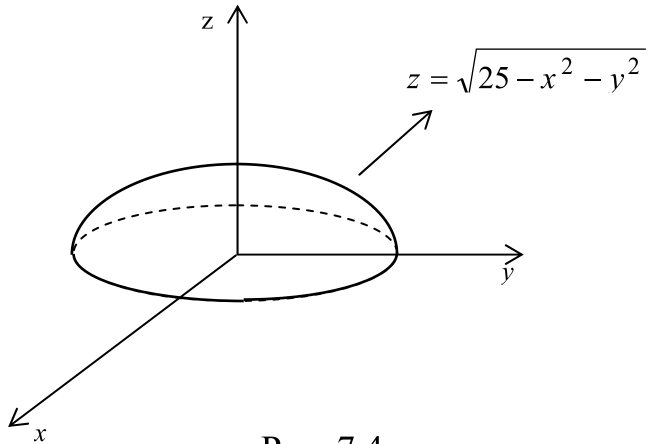

Рис. 7.4

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (7.1). Для этого найдем

$$z'_x = \frac{(-2x)}{2\sqrt{25-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}.$$

$$\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)dS = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{25-x^2-y^2}+\frac{y^2}{25-x^2-y^2}}dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\sqrt{\frac{25-x^2-y^2+x^2+y^2}{25-x^2-y^2}}dxdy = 5\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$$

, где область D – круг $x^2+y^2 \le 5$.

Для вычисления последнего интеграла перейдем к полярным координатам:

$$5\iint\limits_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{25-x^2-y^2}}dxdy = \begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ I=\rho \end{bmatrix} = 5\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^5 \frac{\rho^2\cdot\rho}{\sqrt{25-\rho^2}}d\rho.$$

Интеграл $\int\limits_0^5 \frac{\rho^3}{\sqrt{25-\rho^2}}d\rho$ вычисляем с помощью подстановки $\rho = 5\cdot\sin t$.

$$\int\limits_0^5 \frac{\rho^3}{\sqrt{25-\rho^2}}d\rho = \left| \begin{array}{l} \rho = 5\cdot\sin t, \\ \rho = 5 \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \pi/2, \\ \rho = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0, \\ d\rho = 5\cos t\, dt \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{5^3\sin^3 t\cdot 5\cos t\, dt}{\sqrt{25-25\sin^2 t}} = 5^4\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 t\cos t}{5\cos t} =$$

$$= -5^3\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 t\right)d\cos t = -5^3\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{5^3\cdot 2}{3}.$$

Окончательно получим $5\iint\limits_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{25-x^2-y^2}} = \frac{2}{3}5\int\limits_0^{2/\pi} d\varphi = \frac{4\cdot 5^4\pi}{3}$.

Пример 7.3. Вычислить $\iint\limits_S \left(x^2+3y^2+z^2+5\right)dS$, где S – часть поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченная плоскостями $y=0,\ y=2$.

Решение. Поверхность S представляет собой верхнюю часть конуса $y^2=x^2+z^2$, заключенную между поверхностями $y=0,\ y=2$ (Рис. 7.5).

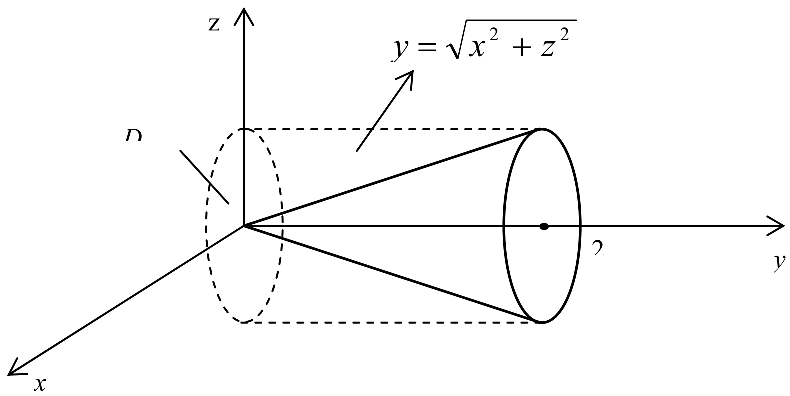

Рис. 7.5

Так как поверхность задана в виде $y=y(x,z)$, то для вычисления интеграла воспользуемся формулой (7.2). Для этого найдем

$$y'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}};\quad y'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}.$$

$$\iint\limits_S \left(x^2+3y^2+z^2+5\right)dS=\iint\limits_D \left(x^2+3\left(x^2+z^2\right)+z^2+5\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}}dxdz=$$

$$=\iint\limits_D \left(4x^2+4z^2+5\right)\sqrt{\frac{2\left(x^2+z^2\right)}{x^2+z^2}}dxdz=\sqrt{2}\iint\limits_D \left(4x^2+4z^2+5\right)dxdz,$$

где область D – круг $x^2+z^2\le 4$.

Для вычисления последнего интеграла перейдем к полярным координатам:

$$\sqrt{2}\iint\limits_D \left(4x^2+4z^2+5\right)dxdz=\begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi, \\ z=\rho\sin\varphi, \\ I=\rho \end{vmatrix}=\sqrt{2}\int\limits_0^{2/\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(4\rho^2+5\right)\rho d\rho=\sqrt{2}\cdot 2\pi\left(\rho^3+\frac{5\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=52\sqrt{2}\pi.$$

Аудиторной работа

7.1. Вычислить поверхностные интегралы I рода по указанным поверхностям:

7.1.1. $\iint\limits_S x\,dS$**,** где S – часть поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсекаемая плоскостями $z=0, z=1$.

7.1.2. $\iint\limits_S x(y+z)dS$ **,**где S – часть поверхности $x=\sqrt{1-y^2}$, отсекаемая плоскостями $z=0, z=2$.

7.1.3. $\iint\limits_S z\,dS$**,** где S – поверхность, заданная уравнением $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

7.1.4. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}dS$**,** где S – часть поверхности $z^2=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостями $z=4, z=0$.

7.1.5. $\iint\limits_S (3x-2y+6z)dS$**,** где S – часть плоскости $2x+y+2z=2$, отсеченная координатными плоскостями.

Домашнее задание

7.2. Найти интегралы по указанным поверхностям:

7.2.1. $\iint\limits_S (x-3y+2z)dS$**,** где S – часть плоскости $4x+3y+2z-4=0$, расположенная в I октанте. (Ответ: $\frac{\sqrt{29}}{9}$)

7.2.2. $\iint\limits_S y^3dS$**,** где S - поверхность $y=\sqrt{4-x^2-z^2}$. (Ответ: 16π)

7.2.3. $\iint\limits_S \left(x^2+y^2+z-2\right)dS$, где S - часть поверхности $2z=9-x^2-y^2$, отсеченная плоскостью $z=0$. (Ответ: $\pi\left(500\sqrt{10}-23\right)/15$).

Занятие 8

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ II РОДА

Пусть в точках двусторонней поверхности S пространства $OXYZ$ определена непрерывная функция $f(x,y,z)$. Поверхностным интегралом II рода от непрерывной функции $f(x,y,z)$ по выбранной стороне поверхности S называется предел интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma_i$,, где $\Delta\sigma_i$ – площадь проекции ΔS_i на площадь OXY , взятая со знаком «плюс», если нормаль к выбранной стороне поверхности составляет с осью OZ острый угол и со знаком «минус» в противном случае, когда диаметр разбиения поверхности $d=\max\limits_{1\le i\le n} d_i$ стремится к нулю:

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma_i=\iint_S f(x,y,z)dxdy\,. \tag{8.1}$$

Аналогично определяются поверхностные интегралы II рода, если поверхность S проектируется соответственно на плоскости Oyz и Oxz .

$$\iint_S f(x,y,z)dydz=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma_i \tag{8.2}$$

$$\iint_S f(x,y,z)dxdz=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_iy_iz_i)\Delta\sigma_i \tag{8.3}$$

То есть,

$$\iint_S f(x.y.z)dxdy=\pm\iint_D f(x,y,z(x,y))dxdy \tag{8.4}$$

$$\iint_S f(x,y,z)dxdz=\pm\iint_{D_1} f(x,y(x,z),z)dxdz \tag{8.5}$$

$$\iint_S f(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_2} f(x(y,z),y,z)dydz \tag{8.6}$$

где D, D_1 и D_2- проекции поверхности S на координатные плоскости Oxy, Oxz и Oyz соответственно.

Поверхностный интеграл II рода зависит от выбранной стороны поверхности: если нормаль, отвечающая выбранной стороне поверхности, составляет с соответствующей осью острый угол, то поверхностный интеграл II–го рода берется со знаком «+», в противном случае перед интегралом ставится знак «–».

Наиболее общий вид интеграла второго рода:

$$I=\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy \tag{8.7}$$

где $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – функции определенные и непрерывные в точках двусторонней поверхности S.

Интеграл второго рода обладает всеми свойствами интеграла первого рода, за исключением одного: при переходе к другой стороне поверхности интеграл II-го рода меняет знак.

Интегралы первого и второго рода связаны формулой

$$\iint_S P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dG \qquad (8.8)$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали, направленной в ту сторону поверхности, по которой берется интеграл второго рода.

Вычисление поверхностного интеграла II рода сводится к вычислению двойного интеграла.

Связь между поверхностным интегралом II рода по замкнутой поверхности S и тройным интегралом по объему V, ограниченному этой поверхностью, устанавливается по формуле Остроградского-Гаусса:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint_S P\,dydz + Q\,dxdy + R\,dxdy \qquad (9.9)$$

где $P = P(x,y,z), Q(x,y,z), R = R(x,y,z)$ – функции, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в пространственной области V.

Пример 8.1. Вычислить интеграл $\iint_S x\,dydz + z\,dzdx + dxdy$, где S верхняя сторона плоскости $x - y + z = 1$, лежащей в IV октанте (Рис. 11.1).

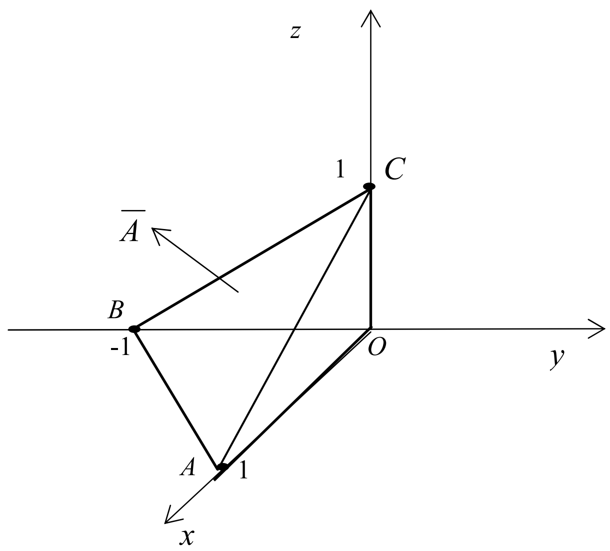

Рис. 8.1

Решение. Найдем направляющие косинусы нормального вектора плоскости

$\vec{n}\,(1,1,1)$, $\quad |\vec{n}\,| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} > 0$, $\quad \cos\beta = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} < 0$, $\quad \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}} > 0$.

$$\iint\limits_S x\,dydz + z\,dzdx + dxdy = \iint\limits_S x\,dydz + \iint\limits_S z\,dzdx + \iint\limits_S dxdy \,.$$

Для вычисления каждого из интегралов применим соответственно формулы 8.3, 8.2, 8.1

$$\iint\limits_{S_0} x\,dydz = \iint\limits_{D_2}(1+y-z)dydz = \int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{0}^{1+y}(1+y-z)dz = \int\limits_{-1}^{0}\left(z+yz-\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1+y}dy = \int\limits_{-1}^{0}1+y+y(1+y)-$$

$$-\frac{(1+y)^2}{2}dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}\left(1+2y+y^2\right)dy = \frac{1}{2}\left(y+y^2+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{1}{6},$$

где D_2 – треугольник BOC .

$$\iint\limits_S z\,dzdx = -\iint\limits_{D_1} z\,dzdx = -\int\limits_0 dx\int\limits_0^{1-x} z\,dz = -\int\limits_0 \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} dx = -\frac{1}{2}(1-x)^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

где D_1 – треугольник AOC .

$$\iint\limits_S dxdy = \iint\limits_D dxdy = S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}.$$

Окончательно:

$$\iint x\,dydz + zdzdx + dxdy = 1\frac{1}{6}.$$

Пример 8.2. Вычислить $\iint\limits_S 3x^2 + 3y^2 + z^2\,dxdy$, где S – внешняя сторона части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченной плоскостями $z = 0, z = 1$.

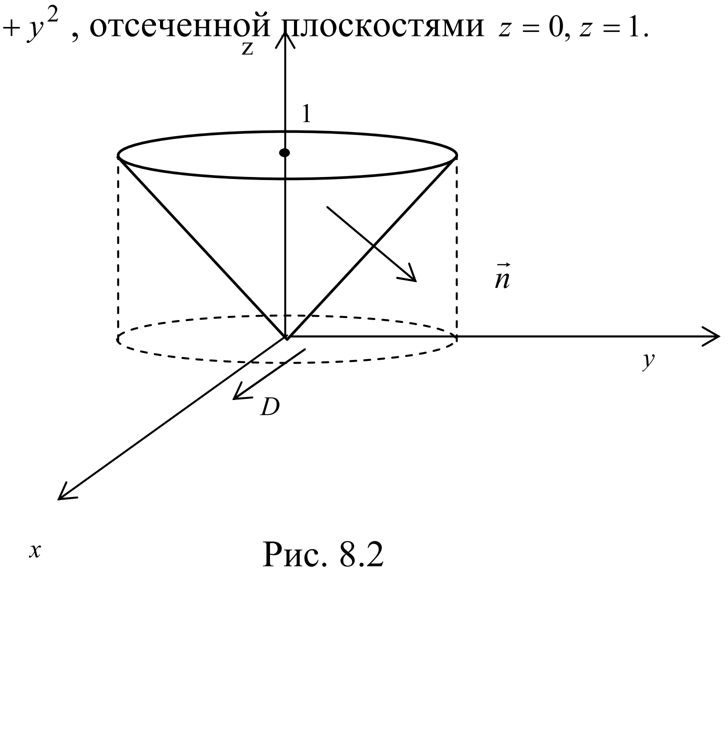

Рис. 8.2

Решение. Поверхность $z=\sqrt{x^2+y^2}$ представляет собой верхнюю часть конуса $z^2=x^2+y^2$. Нормаль к поверхности составляет с осью Oz тупой угол. Для вычисления интеграла применим формулу 11.1

$$\iint\limits_S 3x^2+3y^2+z^2\,dxdy=-\iint\limits_D\left(3x^2+3y^2+x^2+y^2\right)dxdy=-4\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy,$$

где D – круг $x^2+y^2\le 1$.

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам:

$$-4\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\begin{vmatrix}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\\ I=\rho\end{vmatrix}=-4\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho=-2\pi.$$

Пример 8.3. Вычислить $\oiint\limits_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$, где S внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $2x-3y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ (рис. 8.4.)

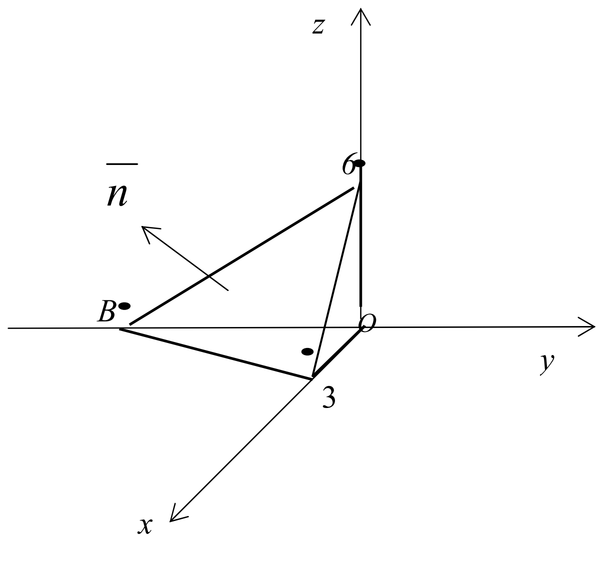

Рис. 8.3

Решение. По формуле 8.4 находим

$$\oiint\limits_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy=\iiint\limits_V(1+1+1)dV=3\iiint\limits_V dV$$

$$=3V_{пирамиды}=3\cdot\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 6=18.$$

Аудиторная работа

8.1. Вычислить интегралы по указанным поверхностям:

8.1.1. $\iint\limits_S \left(y^2 + z^2\right) dxdy$ **,** где S – внешняя сторона поверхности $z = \sqrt{4 - x^2}$, отсеченная плоскостями $y = 0, y = 1$.

8.1.2. $\iint\limits_S x\, dydz + y\, dxdz + z\, dxdy$ **,** где S – верхняя сторона плоскости $x + y + z = 4$, лежащей в первом октанте.

8.1.3. $\iint\limits_S \left(x^2 + z^2\right) dydz$ **,**где S – внешняя сторона поверхности $x = \sqrt{9 - y^2}$, отсеченная плоскостями $z = 0, z = 2$.

8.1.4. $\iint\limits_S dxdy + y\, dxdz + 5dydz$ **,** где S – внешняя сторона плоскости $x + y + z = 1$, ограниченной координатными плоскостями.

Домашнее задание

8.2. Найти интегралы:

8.2.1. $\iint\limits_S \left(x^2 + z^2 + 3y^2\right) dxdz$ **,** где S – внешняя сторона части поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченной плоскостями $y = 0, y = 1$.

(Ответ: **-2*π***)

8.2.2. $\iint\limits_S \left(3x^2 + 7y^2 + 7z^2\right) dydz$, где S – внутренняя сторона части полусферы $x\sqrt{4 - z^2 - y^2}$, вырезанной конусом $x = \sqrt{4 - z^2 - y^2}$.

(Ответ: -32π)

8.2.3. $\iint\limits_S x\, dydz + y\, dxdz + z\, dxdy$ **,** где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(Ответ: 3π)