МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Сопротивление материалов и теория упругости»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие
для студентов строительных специальностей

В 2 частях

Ч а с т ь 2

СБОРНИК ЗАДАЧ

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области строительства и архитектуры

М и н с к
Б Н Т У
2 0 1 7

УДК 620.1 (076.1)
ББК 30.121я7
С64

Авторы части:
С. И. Зиневич, В. А. Пенькевич, М. В. Югова, Л. И. Шевчук,
О. Л. Вербицкая, Е. А. Евсеева, С. В. Соболевский,
В. Н. Рябцев, В. А. Петрусевич

Рецензенты:
М. Т. Насковец, В. Н. Основин

С64 **Сопротивление** материалов : учебно-методическое пособие для студентов строительных специальностей : в 2 ч. Ч. 2: Сборник задач / С. И. Зиневич [и др.]. – Минск : БНТУ, 2017. – 196 с.
ISBN 978-985-550-607-3 (Ч. 2).

Даны задачи по всем разделам дисциплины «Сопротивление материалов». Приводятся примеры решения.
Часть 1 «Краткая теория. Примеры» издана в 2016 г.

УДК 620.1 (076.1)
ББК 30.121я7

ISBN 978-985-550-607-3 (Ч. 2)
ISBN 978-985-550-778-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебно-методическое пособие «Сопротивление материалов», часть 2 «Сборник задач» является продолжением учебно-методического пособия «Сопротивление материалов», часть 1 (краткий курс), в котором приведен краткий теоретический материал. Поэтому в настоящей книге даны задачи без теоретического сопровождения. Задачи даны по всем разделам сопротивления материалов, рассмотренным в первой части. Из нескольких типовых задач приводится одна с решением, а остальные предлагаются для самостоятельного решения. Для таких задач даются ответы.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов строительных специальностей дневного и заочного отделений.

При написании данного учебно-методического пособия авторский коллектив использовал материалы ранее издаваемых кафедрой пособий и в этой связи выражает глубокую благодарность Алявдину П.В., Балыкину М.К., Винокурову Е.Ф., Голубеву И.А., Зайцу В.Н., Кончицу А.Е., Петровичу А.Г., Рудицину М.Н., Суходоеву В.Н. и другим преподавателям, работавшим на кафедре «Сопротивление материалов и теория упругости».

1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

1.1. Статически определимые системы

Задача 1.1

Проверить прочность и жесткость стальной полосы, рис. 1.1.

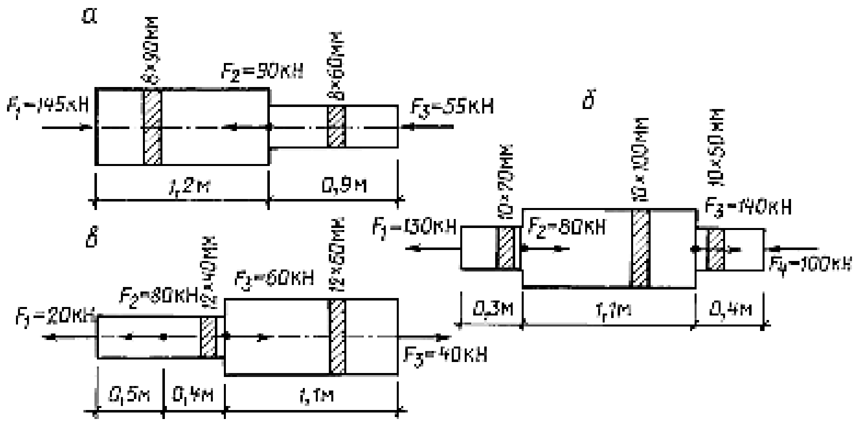


Рис. 1.1

Для стали: расчетное сопротивление R = 210 МПа, модуль Юнга E = 200 ГПа, $\varepsilon_{adm} = 1{,}05 \cdot 10^{-3}$.

Ответы:
а. σ_{max} = 201 МПа < R = 210 МПа; $\varepsilon_{max} = 1{,}007 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{adm} = 1{,}05 \cdot 10^{-3}$.
б. σ_{max} = 200 МПа < R = 210 МПа; $\varepsilon_{max} = 1{,}0 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{adm} = 1{,}05 \cdot 10^{-3}$.
в. σ_{max} = 208 МПа < R = 210 МПа; $\varepsilon_{max} = 0{,}278 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{adm} = 1{,}05 \cdot 10^{-3}$.

Вариант *а*)

Решение

Разбиваем брус на участки (рис. 1.2). Границами участков являются сечения, где приложены внешние силы. Получаем два участка.

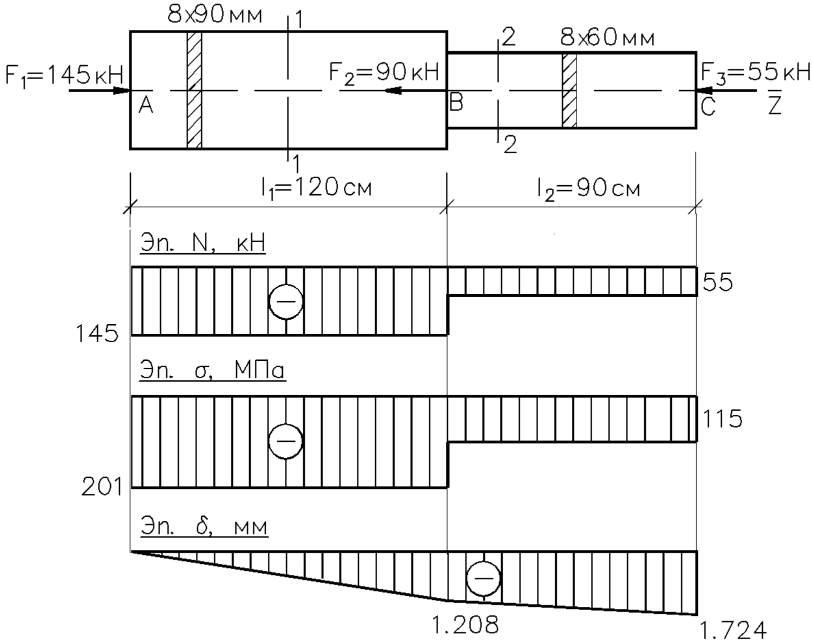


Рис. 1.2

Площади поперечных сечений на участках бруса

$$A_1 = 8 \cdot 90 = 720 \text{ мм}^2;$$

$$A_2 = 8 \cdot 60 = 480 \text{ мм}^2.$$

Продольную силу в поперечном сечении на каждом участке определяем методом сечений, т. е. внешние силы, приложенные левее рассматриваемого сечения, проецируем на ось бруса.

Сечение 1–1:

$$N_1 = -F_1 = -145 \text{ кН}.$$

Сила F_1 считается отрицательной, так как направлена к сечению *1–1*.

Сечение 2–2:

$$N_2 = -F_1 + F_2 = -145 + 90 = -55 \text{ кН}.$$

По полученным значениям строим эпюру продольных сил N.
В поперечных сечениях возникают нормальные напряжения.
Участок 1:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{145 \cdot 10^3}{720 \cdot 10^{-6}} = -0,201 \cdot 10^9 \text{ Па} = -201 \text{ МПа}.$$

Участок 2:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{55 \cdot 10^3}{480 \cdot 10^{-6}} = -0,115 \cdot 10^9 \text{ Па} = -115 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру σ.
Прочность пластины обеспечена, так как

$$\sigma_{max} = 201 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Абсолютные деформации участков:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = -\frac{145 \cdot 10^3 \cdot 120 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9 \cdot 720 \cdot 10^{-6}} = -0,1208 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -1,208 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = -\frac{55 \cdot 10^3 \cdot 90 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9 \cdot 480 \cdot 10^{-6}} = -0,0516 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -0,516 \text{ мм}.$$

Относительные продольные деформации участков:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1} = -\frac{1,208}{1200} = -1,007 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2} = -\frac{0,516}{900} = -0,573 \cdot 10^{-3}.$$

Условие жесткости выполняется, так как

$$\varepsilon_{\max} = 1,007 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{\text{adm}} = 1,05 \cdot 10^{-3}.$$

Строим эпюру перемещений δ.

Крайнее левое сечение A принимаем за условно неподвижное:

$$\delta_A = 0.$$

Перемещение других характерных сечений определяем как сумму деформаций участков, расположенных между крайним левым и рассматриваемым сечением:

$$\delta_B = \Delta l_1 = -1,208 \text{ мм};$$

$$\delta_C = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta_B + \Delta l_2 = -1,208 - 0,516 = -1,724 \text{ мм}.$$

Задача 1.2

Определить размеры квадратного поперечного сечения для каждого расчетного участка бетонной колонны и перемещения ее свободного сечения.

Для материала колонны R_c и E указаны на рис. 1.3.

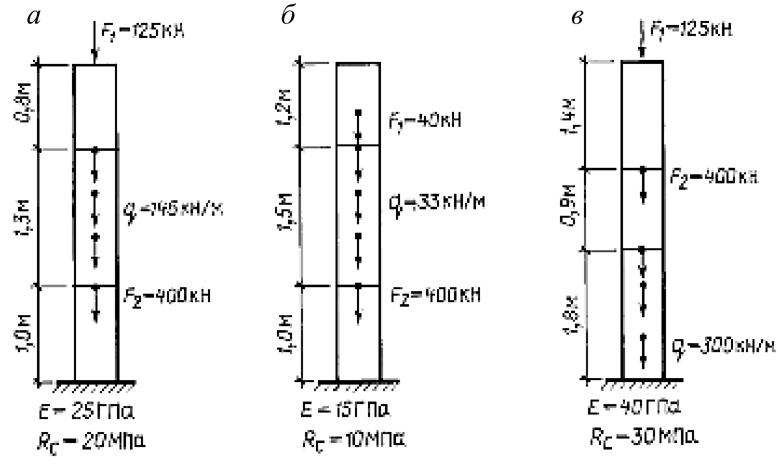


Рис. 1.3

Ответы:

а. 8 × 8 см; 13 × 13 см; 19 × 19см, δ_A = 2,094 мм.
б. 7 × 7 см; 10 × 10 см; 15 × 15 см, δ_A = –1,75 мм.
в. 7 × 7 см; 11 × 11 см; 18 × 18 см, δ_A = –2,4 мм.

Вариант *а)*

Решение

Поскольку нагрузка действует по продольной оси Z колонны (рис. 1.4), то в опоре возникает только одна реакция B_Z, которую определим, используя уравнение равновесия:

$$\sum Z = 0, \qquad -F_1 - ql_2 - F_2 + B_Z = 0.$$

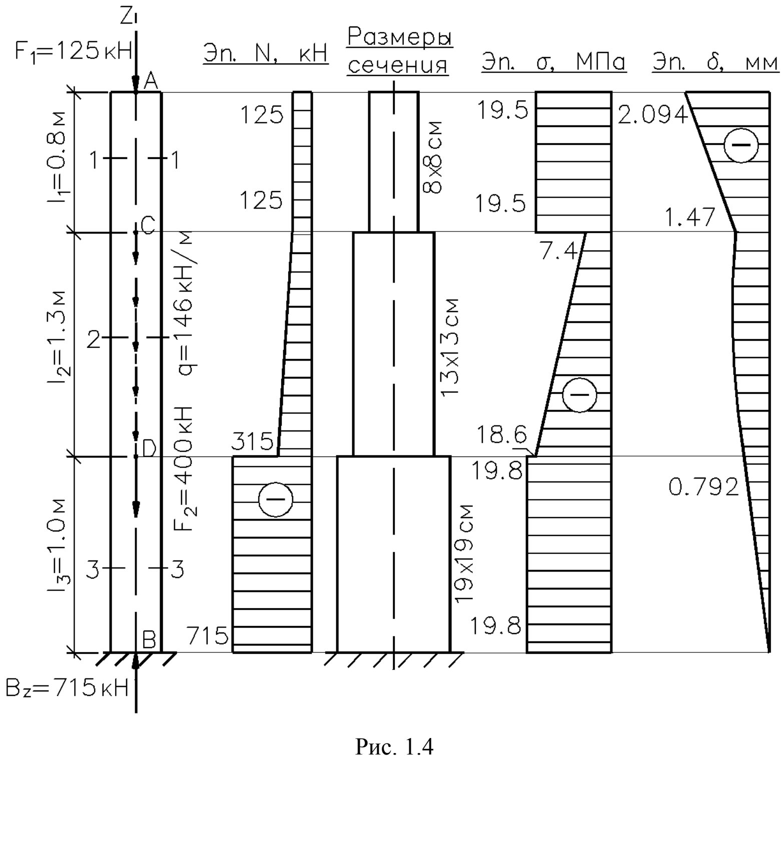


Рис. 1.4

В уравнении имеется одно неизвестное, поэтому рассматриваемая система является статически определимой.

Из уравнения статики реакция

$$B_Z = F_1 + ql_2 + F_2 = 125 + 146 \cdot 1{,}3 + 400 = 715 \text{ кН}.$$

Выделяем расчетные участки, их три.

Определяем продольные силы на участках, используя правило

$$N = \sum F_i,$$

т. е. продольная сила в сечении равна алгебраической сумме внешних сил по одну сторону от сечения. Если сила направлена к сечению, то ее берем со знаком «минус».

$$N_1 = -F_1 = -125 \text{ кН}; \qquad N_{2C} = -125 \text{ кН};$$

$$N_{2D} = -F_1 - ql_2 = -125 - 146 \cdot 1{,}3 = -315 \text{ кН};$$

$$N_3 = -F_1 - ql_2 - F_2 = -715 \text{ кН}.$$

По полученным данным строим эпюру продольных сил N.

Из условия прочности при растяжении-сжатии $\left(\sigma = \dfrac{N}{A} \le R\right)$ определяем площади поперечных сечений на участках стержня.

На 1-м участке требуемая площадь

$$A_1 \ge \frac{N_1}{R} = \frac{125 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^6} = 6{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 62{,}5 \text{ см}^2.$$

Тогда сторона квадратного сечения

$$a_1 = \sqrt{A_1} = \sqrt{62{,}5} = 7{,}9 \text{ см}.$$

Принимаем $a_1 = 8$ см, $A_1 = 8^2 = 64$ см^2.

На 2-м участке $\left(N_{\max} = N_{2D}\right)$

$$A_2 \geq \frac{N_{\max}}{R} = \frac{315 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^6} = 15{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 158 \text{ см}^2;$$

$$a_2 = \sqrt{158} = 12{,}6 \text{ см}.$$

Принимаем $a_2 = 13$ см, $A_2 = 13^2 = 169$ см^2.

На 3-м участке

$$A_3 \geq \frac{N_3}{R} = \frac{715 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^6} = 35{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 358 \text{ см}^2;$$

$$a_3 = \sqrt{358} = 18{,}9 \text{ см}.$$

Принимаем $a_3 = 19$ см, $A_2 = 19^2 = 361$ см^2.

Рассчитываем стержень с найденными площадями.

Нормальные напряжения на участках колонны:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{125 \cdot 10^3}{64 \cdot 10^{-4}} = -1{,}95 \cdot 10^7 \text{ Па} = -19{,}5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{2C} = \frac{N_{2C}}{A_2} = -\frac{125 \cdot 10^3}{169 \cdot 10^{-4}} = -7{,}4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{2D} = \frac{N_{2D}}{A_2} = -\frac{315 \cdot 10^3}{169 \cdot 10^{-4}} = -18{,}6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = -\frac{715 \cdot 10^3}{361 \cdot 10^{-4}} = -19{,}8 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру σ.

Абсолютные продольные деформации участков:

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = -\frac{19,5 \cdot 10^6 \cdot 0,8}{25 \cdot 10^9} = -0,624 \cdot 10^{-3} \text{м} = -0,624 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_{2C} + \sigma_{2D}) l_2}{E} = \frac{-\frac{1}{2}\left(7,4 + 18,6\right) \cdot 10^6 \cdot 1,3}{25 \cdot 10^9} =$$

$$= -0,676 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,676 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 l_3}{E} = -\frac{19,8 \cdot 10^6 \cdot 1,0}{25 \cdot 10^9} = -0,792 \text{ мм}.$$

Определяем перемещение характерных сечений. Считаем, что перемещение сечения B равно нулю (заделка):

$$\delta_B = 0.$$

Перемещение остальных граничных сечений вычисляется последовательным добавлением к начальному перемещению деформаций последующих участков колонны:

$$\delta_D = \Delta l_3 = -0,792 \text{ мм};$$

$$\delta_C = \delta_D + \Delta l_2 = -0,792 - 0,676 = -1,47 \text{ мм};$$

$$\delta_A = \delta_C + \Delta l_1 = -1,47 - 0,624 = -2,094 \text{ мм}.$$

Строим эпюру перемещений δ.

Задача 1.3

Определить размеры поперечных сечений стержневой системы (рис. 1.5).

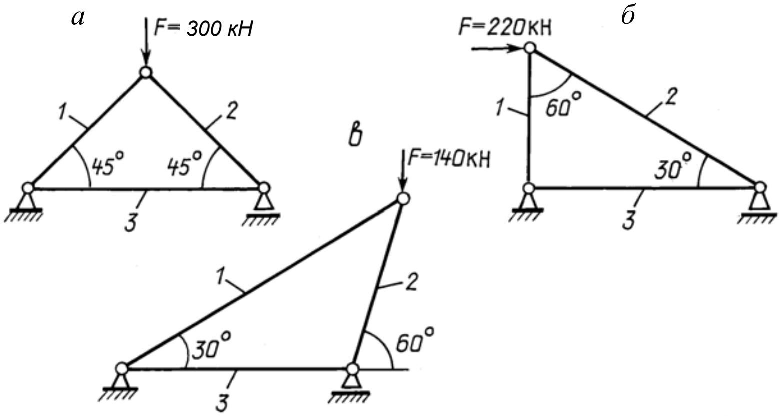


Рис. 1.5

Стержни *1* и *2* – деревянные квадратного поперечного сечения; стержень *3* – стальной, состоящий из двух равнобоких уголков. Считать, что стержни *1* и *2* имеют одинаковые размеры.

Для стали R = 210 МПа, для древесины $R_с$ = 13 МПа.

Ответы:

а. Сторона сечения $a_1 = a_2$ = 13 см, уголок 40 × 40 × 5 мм.

б. Сторона сечения $a_1 = a_2$ = 14 см, уголок 50 × 50 × 6 мм.

в. Сторона сечения $a_1 = a_2$ = 14 см, уголок 50 × 50 × 3 мм.

Вариант *а*)

Решение

Рассматриваемая стержневая система является статически определимой, так как в опорах возникают три реакции, которые могут быть определены из трех уравнений статики.

Стержни подвергаются растяжению-сжатию. Определим продольные силы в стержнях методом сечений.

Вырежем сечением I–I узел C, продольные силы N_1 и N_2 направим к сечениям, т. е. считаем, что стержни сжимаются, рис. 1.6.

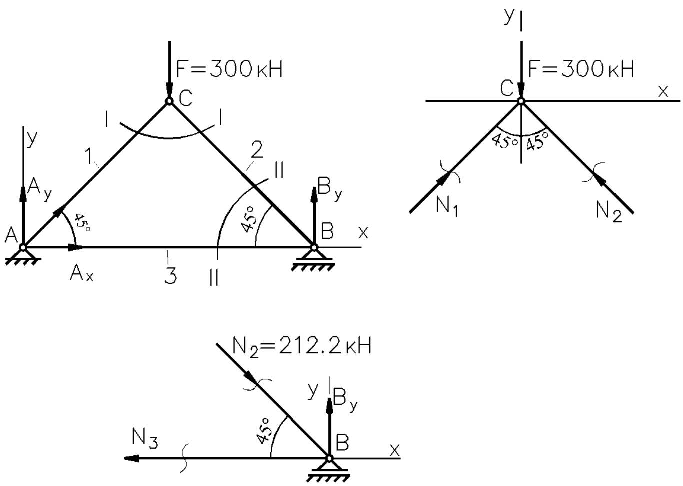


Рис. 1.6

Составим уравнения равновесия для узла *C*:

$$\sum X = 0: \qquad N_1 \sin 45^\circ - N_2 \sin 45^\circ = 0;$$

$$N_1 = N_2;$$

$$\sum Y = 0: \qquad N_1 \cos 45^\circ + N_2 \cos 45^\circ - F = 0;$$

$$2N_1 \cos 45^\circ = F;$$

$$N_1 = \frac{F}{2\cos 45^\circ} = \frac{300}{2 \cdot 0,707} = 212,2 \text{ кН}.$$

Значения усилий N_1 и N_2 положительные, следовательно, предположение о том, что стержни сжимаются, подтвердилось.

С помощью сечения II–II вырежем узел *B*. Усилие N_3 направим от сечения, а найденное N_2 – к сечению, так как стержень *2* сжат.

Составим уравнение равновесия для узла *B*:

$$\sum X = 0: \qquad N_2 \cos 45^\circ - N_3 = 0;$$

$$N_3 = N_2 \cos 45^\circ = 212,2 \cdot 0,707 = 150 \text{ кН}.$$

Стержень *3* растягивается.

Из условия прочности при растяжении-сжатии определим размеры поперечных сечений стержней.

Для 1-го стержня

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \le R_c;$$

$$A_1 \ge \frac{N_1}{R_c} = \frac{212,2 \cdot 10^3}{13 \cdot 10^6} = 16,32 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2 = 163,2\ \text{см}^2,$$

откуда сторона сечения

$$a_1 = \sqrt{A_1} = \sqrt{163,2} = 12,78\ \text{см}.$$

Принимаем $a_1 = 13$ см.

Так как $N_1 = N_2$, то $a_2 = 13$ см.

Для 3-го стержня

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} \le R;$$

$$A_3 \ge \frac{N_3}{R} = \frac{150 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,714 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2 = 7,14\ \text{см}^2,$$

для одного уголка $A_3' = 7,14 : 2 = 3,57\ \text{см}^2$.

Из таблицы сортамента для равнополочных уголков принимаем два уголка $40 \times 40 \times 5$, площадь поперечного сечения которых $A = 3,79\ \text{см}^2$.

Задача 1.4

Для конструкции, состоящей из двух стальных стержней круглого поперечного сечения (рис. 1.7), определить напряжения в стержнях и полное перемещение узла *C*.

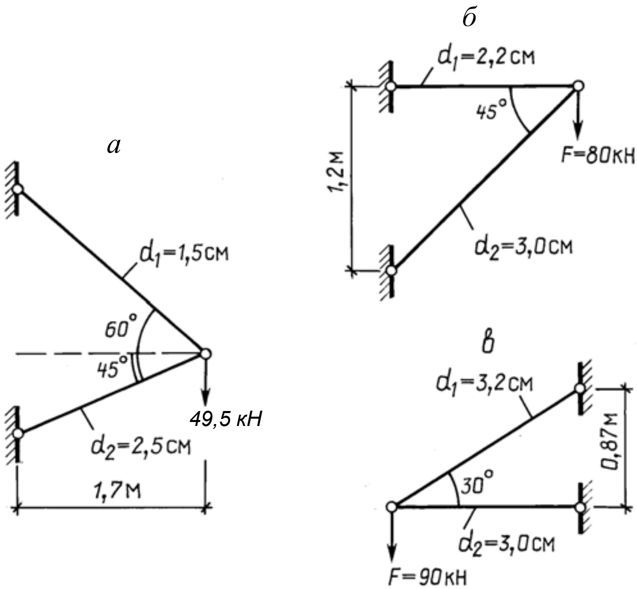


Рис. 1.7

Для стали E = 200 ГПа.

Ответы:
а. σ_1 = 205 МПа, σ_2 = –52,2 МПа, δ_c = 3,50 мм.
б. σ_1 = 211 МПа, σ_2 = –160 МПа, δ_c = 3,43 мм.
в. σ_1 = 224 МПа, σ_2 = –221 МПа, δ_c = 6,99 мм.

Вариант *а*)

Решение

Площади поперечных сечений стержней:

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 1,5^2}{4} = 1,77\ \text{см}^2;$$

$$A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 2,5^2}{4} = 4,91\ \text{см}^2.$$

Нагрузка F вызывает возникновение двух реакций опор (A и B), которые направлены вдоль продольных осей стержней. Двум неизвестным реакциям соответствуют два уравнения равновесия, значит, система статически определима.

Для определения продольных сил, возникающих в стержнях, с помощью сечения I–I вырежем узел C, рис. 1.8.

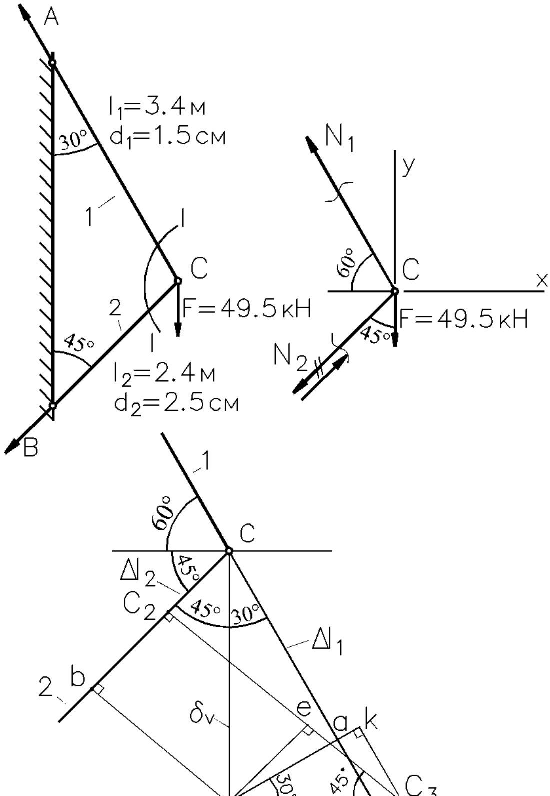


Рис. 1.8

Предположим, что стержни растягиваются, т. е. силы N_1 и N_2 направляем от сечения.

Уравнения равновесия для узла *C*:

$$\sum X = 0: \qquad -N_1 \cos 60^{\circ} - N_2 \sin 45^{\circ} = 0;$$

$$-0,5N_1 - 0,707N_2 = 0;$$

$$\sum Y = 0: \qquad N_1 \sin 60^{\circ} - N_2 \cos 45^{\circ} - F = 0;$$

$$0,866N_1 - 0,707N_2 - F = 0.$$

Решив совместно два уравнения, получим $N_1 = 36,24$ кН, $N_2 = -25,63$ кН.

Внутренняя сила N_2 получилась отрицательной, значит, стержень *2* не растягивается, как было предположено, а сжимается. Поэтому на схеме направление N_2 меняем на противоположное.

Напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{36,24 \cdot 10^3}{1,77 \cdot 10^{-4}} = 20,5 \cdot 10^7 \text{ Па} = 205 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{25,63 \cdot 10^3}{4,91 \cdot 10^{-4}} = -5,22 \cdot 10^7 \text{ Па} = -52,2 \text{ МПа}.$$

Абсолютные продольные деформации стержней:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{205 \cdot 10^6 \cdot 3,4}{200 \cdot 10^9} = 3,49 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,49 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = -\frac{52,2 \cdot 10^6 \cdot 2,4}{200 \cdot 10^9} = -0,626 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,626 \text{ мм}.$$

Для определения перемещения узла *C* мысленно разъединим элементы в этом узле.

По направлению стержня *1* в произвольном масштабе откладываем отрезок $CC_1 = \Delta l_1$, т. е. показываем, насколько стержень удлинился.

По направлению стержня *2* откладываем отрезок $CC_2 = \Delta l_2$, т. е. показываем, насколько стержень укоротился.

Показываем вертикальное δ_υ и горизонтальное δ_u перемещения узла *C*. Выразим эти перемещения через деформации стержней. Для этого спроецируем перемещения δ_υ и δ_u на направления стержней:

$$\Delta l_1 = CC_1 = Ca + aC_1 = Ca + \text{к}C_3 = \delta_\upsilon \cos 30^\circ + \delta_u \sin 30^\circ,$$

$$\Delta l_2 = CC_2 = Cb - bC_2 = Cb - de = \delta_\upsilon \cos 45^\circ - \delta_u \sin 45^\circ.$$

Решаем систему уравнений:

$$3,49 = \delta_\upsilon \cdot 0,866 + \delta_u \cdot 0,5,$$

$$0,626 = \delta_\upsilon \cdot 0,707 - \delta_u \cdot 0,707,$$

откуда $\delta_\upsilon = 2,879$ мм, $\delta_u = 1,993$ мм.

Полное перемещение узла *C*

$$\delta_C = \sqrt{\delta_\upsilon{}^2 + \delta_u{}^2} = \sqrt{2,879^2 + 1,993^2} = 3,5 \text{ мм}.$$

Задача 1.5

Определить перемещение точки *C* и наибольшую допустимую нагрузку (*F* или *q*) на конструкцию, считая элемент *P* абсолютно жестким (недеформирующимся).

Стержень *1* – стальной из прокатных элементов (вид и номер элемента указаны на рис. 1.9).

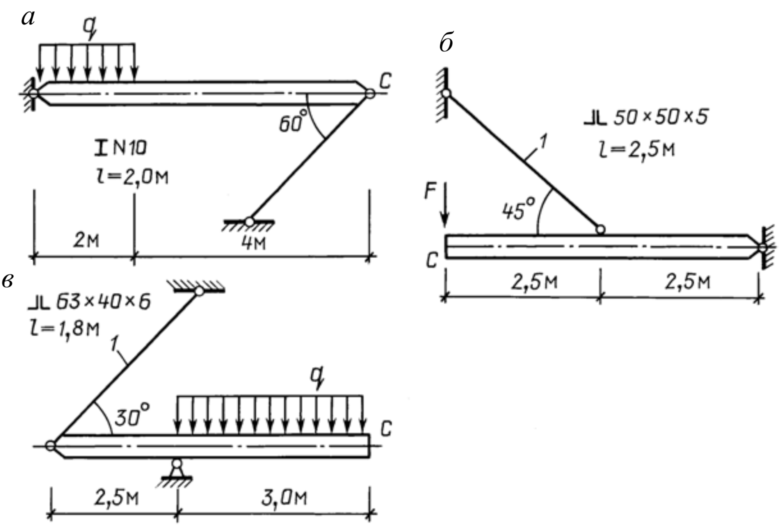


Рис. 1.9

Для стали R = 210 МПа, E = 200 ГПа.

Ответы:
а. q_{adm} = 655 кН/м, δ_c = 2,42 мм.
б. F_{adm} = 71,3 кН, δ_c = 7,44 мм.
в. q_{adm} = 68,8 кН/м, δ_c = 4,54 мм.

Вариант *а*)

Решение

Под действием нагрузки в системе возникают три реакции опор (A_x, A_y и B), которые могут быть определены из трех уравнений равновесия. Следовательно, система является статически определимой.

Для двутавра № 10 площадь поперечного сечения $A_1 = 12,0\,\text{см}^2$.

Разрезаем стержень сечением I–I, рис. 1.20, продольную силу N_1 направляем к сечению, т. е. предполагаем, что стержень сжимается.

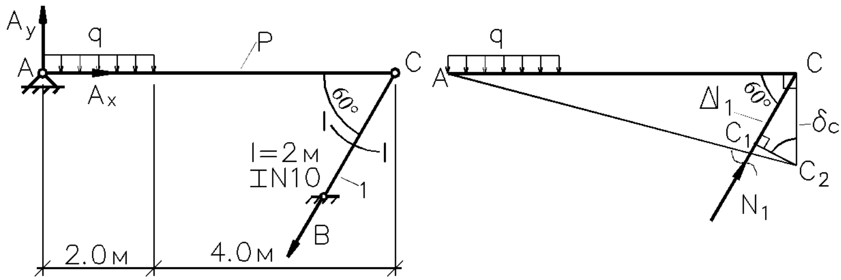


Рис. 1.20

Составляем рациональное уравнение равновесия и определяем продольную силу через неизвестную пока силу q:

$$\sum M_A = 0: \qquad q \cdot 2 \cdot 1 - N_1 \sin 60^{\circ} \cdot 6 = 0;$$

$$N_1 = \frac{q \cdot 2}{\sin 60° \cdot 6} = 0{,}385q.$$

Для определения максимально допустимой силы q_{adm} используем условие прочности при растяжении-сжатии:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \le R; \qquad \sigma_1 = \frac{0{,}385q}{A_1} \le R,$$

откуда

$$q_{\text{adm}} \le \frac{A_1 R}{0{,}385} = \frac{12 \cdot 10^{-4} \cdot 210 \cdot 10^{6}}{0{,}385} = 6545 \cdot 10^{2} \text{ Н/м} = 655 \text{ кН/м}.$$

Абсолютная продольная деформация стержня при найденной нагрузке

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{0{,}385 q l_1}{EA_1} = \frac{0{,}385 \cdot 655 \cdot 10^{3} \cdot 2}{200 \cdot 10^{9} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} = 0{,}21 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2{,}1 \text{ мм}.$$

Для определения перемещения узла C мысленно разъединим элементы в этом узле.

Узел C жесткого элемента P перемещается вниз по дуге относительно неподвижной точки A или по перпендикуляру (вследствие малости деформации) к его продольной оси.

По направлению стержня *1* в произвольном масштабе откладываем отрезок $CC_1 = \Delta l_1$, показывающий его деформацию. С конца этого отрезка, т. е. из точки C_1, проводим перпендикуляр к первому перпендикуляру. Их пересечение (точка C_2) дает новое положение узла C.

Из прямоугольного треугольника CC_1C_2 перемещение узла C

$$\delta_C = \frac{\Delta l_1}{\sin 60^\circ} = \frac{2,1}{0,866} = 2,42 \text{ мм.}$$

Задача 1.6

Расчетная нагрузка F = 200 кН передается на грунтовое основание через чугунную колонну диаметром d, квадратную подошву со стороной a и нижнее квадратное основание со стороной b, рис. 1.21.

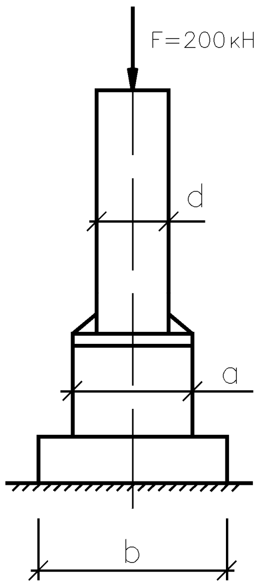


Рис. 1.21

Определить размеры сечений элементов конструкции.

Расчетные сопротивления на сжатие: для чугуна R = 50 МПа, для кладки основания R = 1,0 МПа, для грунта R = 0,25 МПа.

Решение

Так как сжимающая сила совпадает с продольной осью конструкции, то все ее элементы испытывают деформацию сжатия.

Из условия прочности при растяжении-сжатии ($\sigma = \frac{N}{A} \le R$, где во всех поперечных сечениях $N = F$) определяем требуемые площади поперечных сечений элементов конструкции.

Для чугунной колонны

$$A_d = \frac{200 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2 = 40\ \text{см}^2; \qquad A_d = \frac{\pi d^2}{4},$$

откуда

$$d = \sqrt{\frac{4A_d}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 40}{3{,}14}} = 7{,}14\ \text{см}.$$

Для квадратной подошвы

$$A_a = \frac{200 \cdot 10^3}{1{,}0 \cdot 10^6} = 2000\ \text{см}^2,$$

откуда

$$a = \sqrt{A_a} = \sqrt{2000} = 44{,}7\ \text{см}.$$

Для квадратного основания

$$A_b = \frac{200 \cdot 10^3}{0{,}25 \cdot 10^6} = 8000\ \text{см}^2,$$

откуда

$$b = \sqrt{8000} = 89{,}4\ \text{см}.$$

Задача 1.7

Ступенчатый кирпичный столб, рис. 1.22, поддерживает перекрытие двух этажей. Определить наибольшее нормальное напряжение в столбе и укорочение его с учетом собственного веса.

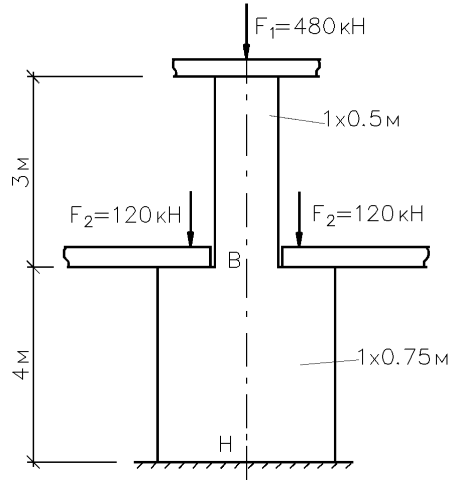


Рис. 1.22

Для кирпичной кладки γ = 2000 кг/м^3, E = 4 ГПа.

Решение

Вес верхней и нижней частей колонны

$$G_B = \gamma A l g = 2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 9,81 = 29,4 \cdot 10^3 \text{ Н;}$$

$$G_H = \gamma A l g = 2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 0,75 \cdot 4 \cdot 9,81 = 58,9 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Определим напряжения с учетом веса и заданной нагрузки.
В сечении B

$$\sigma_B = \frac{F_1 + G_B}{A} = \frac{(480 + 29,4) \cdot 10^3}{1 \cdot 0,5} = 1018,8 \cdot 10^3 \text{ Па} = 1,02 \text{ МПа.}$$

В сечении H

$$\sigma_H = \frac{F_1 + 2F_2 + G_B + G_H}{A} = \frac{\left(480 + 2\cdot 120 + 29,4 + 58,9\right)\cdot 10^3}{1\cdot 0,75} =$$

$$= 1077,7\cdot 10^3 \text{ Па} = 1,08 \text{ МПа}.$$

Деформация верхней части (укорочение)

$$\Delta l_B = \frac{F_1 l}{EA} + \frac{G_B l}{2EA} = \frac{480\cdot 10^3\cdot 3}{4\cdot 10^9\cdot 1\cdot 0,5} + \frac{29,4\cdot 10^3\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 10^9\cdot 1\cdot 0,5} = 0,742 \text{ мм}.$$

Деформация нижней части

$$\Delta l_H = \frac{(F_1 + 2F_2 + G_B)l}{EA} + \frac{G_H l}{2EA} = \frac{(480 + 2\cdot 120 + 29,4)\cdot 10^3\cdot 4}{4\cdot 10^9\cdot 1\cdot 0,75} +$$

$$+ \frac{58,9\cdot 10^3\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 10^9\cdot 1\cdot 0,75} = 1,038 \text{ мм}.$$

Деформация от веса определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{Gl}{2EA},$$

деформация от нагрузки

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}.$$

Укорочение столба

$$\Delta l = \Delta l_B + \Delta l_H = 0,742 + 1,038 = 1,78 \text{ мм}.$$

Задача 1.8

Определить количество болтов, d = 5 мм, необходимых для прикрепления днища бака, заполненного жидкостью с плотностью γ = 1000 кг/м^3, рис. 1.23.

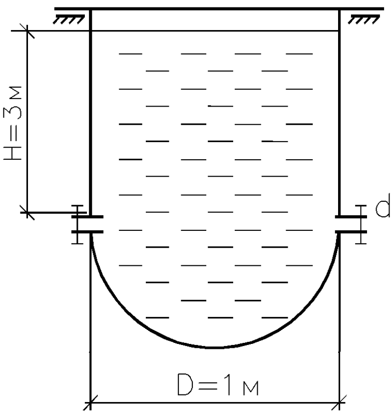


Рис. 1.23

Расчетное сопротивление для материала болта R = 210 МПа.

Р е ш е н и е

Объем полушара

$$V = \frac{\pi D^3}{12}.$$

Площадь поперечного сечения болта

$$A_{\text{болт}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 5^2}{4} = 19{,}6 \text{ мм}^2.$$

Определим объем и вес жидкости:

$$V_{\text{жидк}} = \left(\frac{\pi D^2}{4} H + \frac{\pi D^3}{12} \right) = \frac{3{,}14 \cdot 1^2}{4} \cdot 3 + \frac{3{,}14 \cdot 1^3}{12} = 2{,}617 \text{ м}^3;$$

$$G_{\text{жидк}} = V_{\text{жидк}} \gamma = 2{,}617 \cdot 1000 = 2617 \text{ кг} = 26170 \text{ Н}.$$

Болты работают на растяжение.

Из условия прочности на растяжение ($\sigma = \dfrac{N}{A} = \dfrac{G_{\text{жидк}}}{A} \le R$) определяем требуемую площадь болтов:

$$A \ge \frac{G_{\text{жидк}}}{R} = \frac{26170}{210 \cdot 10^6} = 124{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^2 = 124{,}6\ \text{мм}^2.$$

Необходимое количество болтов

$$n \ge \frac{A}{A_{\text{болт}}} = \frac{124{,}6}{19{,}6} = 6{,}36.$$

Принимаем $n = 7$.

Задача 1.9

Абсолютно жесткий элемент P укреплен на шарнирно-неподвижной опоре и двух стальных стержнях диаметром $d = 2{,}5$ см, рис. 1.24.

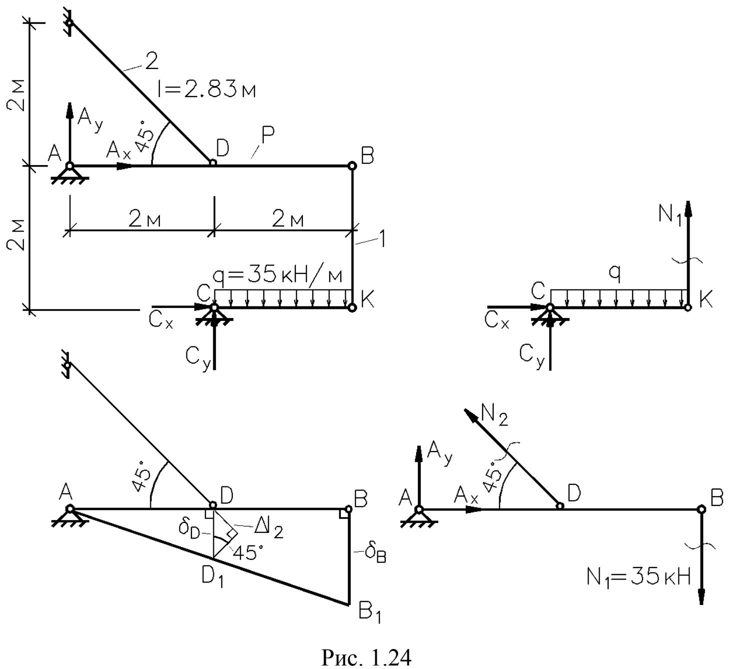


Рис. 1.24

Определить напряжения в стержнях и перемещение точки K, если $E = 200$ ГПа.

Р е ш е н и е

Площади поперечных сечений стержней

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 2{,}5^2}{4} = 4{,}91 \text{ см}^2.$$

Для определения продольных сил N, возникающих в поперечных сечениях стержней, применяем метод сечений. Направляем усилия от сечений, предполагая, что стержни растягиваются.

Рассмотрим равновесие нижней части, так как она имеет три неизвестные силы (продольная сила и две реакции опоры) при трех возможных уравнениях статики (в верхней части четыре неизвестные).

Составим рациональное уравнение равновесия:

$$\sum M_C = 0: \quad q \cdot 2 \cdot 1 - N_1 \cdot 2 = 0;$$

$$N_1 = q = 35 \text{ кН}.$$

Положительный результат говорит о том, что стержень *1* растянут.

Напряжение в поперечном сечении стержня

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{35 \cdot 10^3}{4{,}91 \cdot 10^{-4}} = 71{,}3 \text{ МПа}.$$

Деформация (удлинение) стержня

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{71{,}3 \cdot 10^6 \cdot 2}{200 \cdot 10^9} = 0{,}713 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0{,}713 \text{ мм}.$$

Рассмотрим равновесие верхней части:

$$\sum M_A = 0: \; -N_2 \sin 45^\circ \cdot 2 + N_1 \cdot 4 = 0;$$

$$N_2 = \frac{2N_1}{\sin 45^\circ} = \frac{2 \cdot 35}{0{,}707} = 99 \text{ кН (стержень растягивается)};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{99 \cdot 10^3}{4,91 \cdot 10^{-4}} = 201,6 \text{ МПа};$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = \frac{201,6 \cdot 10^6 \cdot 2,83}{200 \cdot 10^9} = 2,85 \text{ мм}.$$

Для определения перемещения узла *K* рассмотрим деформацию системы. Так как стержни *1* и *2* растягиваются, то точка *D* жёсткого элемента *AB* переместится вниз по перпендикуляру к его продольной оси. По направлению стержня *2* откладываем отрезок Δl_2, показывающий, насколько стержень удлинился. Из конца этого отрезка проводим перпендикуляр к первому перпендикуляру.

Пересечение двух перпендикуляров (точка D_1) дает новое положение точки D.

Точка *B* также опустится по перпендикуляру вниз в точку B_1.

Из подобия треугольников ADD_1 и ABB_1 найдем перемещение точки *B*:

$$\frac{DD_1}{AD} = \frac{BB_1}{AB};$$

$$\frac{\delta_D}{2} = \frac{\delta_B}{4};$$

$$\delta_B = 2\delta_D.$$

Из прямоугольного треугольника ADD_1

$$\delta_D = \frac{\Delta l_2}{\sin 45^\circ}.$$

Тогда получим, что

$$\delta_B = \frac{2\Delta l_2}{\sin 45^\circ} = \frac{2 \cdot 2,85}{0,707} = 8,06 \text{ мм}.$$

Полное перемещение точки K будет состоять из перемещения точки B и удлинения стержня *1*:

$$\delta_K = \delta_B + \Delta l_1 = 8,06 + 0,713 = 8,77 \text{ мм.}$$

1.2. Статически неопределимые системы

Задача 1.10

Система, состоящая из жесткого элемента P и трех стальных стержней, нагружена расчетной нагрузкой, рис. 1.25. Стержни имеют одинаковые длины и площади поперечного сечения.

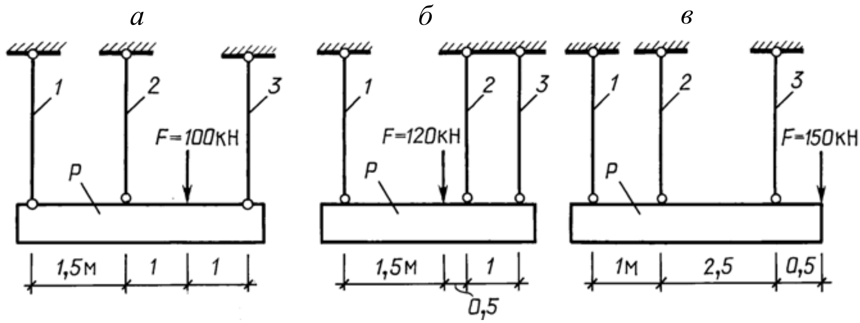


Рис. 1.25

Определить диаметр стержней, если расчетное сопротивление R = 210 МПа.

Ответы:
а. По расчету d = 1,88 см; по сортаменту принимаем d = 2,0 см.
б. По расчету d = 1,69 см; по сортаменту принимаем d = 1,8 см.
в. По расчету d = 3,17 см; по сортаменту принимаем d = 3,2 см.

Вариант *а*)

Решение

Система один раз статически неопределима, так как неизвестных реакций или продольных сил три, а уравнений статики для плоской системы параллельных сил можно составить только два.

Рассекаем стержни, усилия N направляем от сечений, т. е. предполагаем, что все стержни растянуты, рис. 1.26.

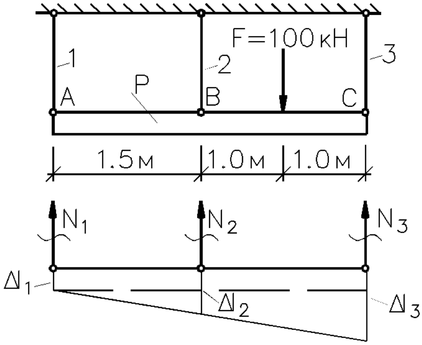


Рис. 1.26

Уравнения равновесия для нижней части:

$$\sum M_A = 0: \quad F \cdot 2{,}5 - N_2 \cdot 1{,}5 - N_3 \cdot 3{,}5 = 0; \qquad (1.1)$$

$$\sum M_C = 0: \quad N_1 \cdot 3{,}5 + N_2 \cdot 2 - F \cdot 1 = 0. \qquad (1.2)$$

Составим дополнительное уравнение перемещений, рассмотрев, как система деформируется. Под действием нагрузки жёсткий элемент P опустится вниз и наклонится, оставаясь прямолинейным. Стержни удлинятся на соответствующие отрезки Δl.

Проведем вспомогательную прямую, параллельную первоначальному положению жесткого элемента.

Рассматривая подобные треугольники, найдем зависимость между деформациями стержней:

$$\frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{3{,}5} = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{1{,}5};$$

$$1{,}5\Delta l_3 - 1{,}5\Delta l_1 = 3{,}5\Delta l_2 - 3{,}5\Delta l_1;$$

$$2\Delta l_1 - 3{,}5\Delta l_2 + 1{,}5\Delta l_3 = 0.$$

Учитывая, что длины и площади поперечных сечений стержней одинаковы, выражаем удлинение стержней по закону Гука:

$$\frac{2N_1 l}{EA} - \frac{3,5N_2 l}{EA} + \frac{1,5N_3 l}{EA} = 0;$$

$$2N_1 - 3,5N_2 + 1,5N_3 = 0. \qquad (1.3)$$

Совместно решая уравнения (1.1)–(1.3), находим продольные силы:

$$N_1 = 10,81 \text{ кН}, \quad N_2 = 31,08 \text{ кН}, \quad N_3 = 58,1 \text{ кН}.$$

Из условия прочности при растяжении-сжатии определим требуемую площадь поперечного сечения стержней:

$$\sigma = \frac{N_{max}}{A} \le R,$$

откуда

$$A \ge \frac{N_{max}}{R} = \frac{N_3}{R} = \frac{58,1 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,277 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^2 = 2,77 \text{ см}^2.$$

Диаметр стержней

$$A = \frac{\pi d^2}{4},$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{2,77 \cdot 4}{3,14}} = 1,88 \text{ см}.$$

Принимаем $d = 2$ см.

Задача 1.11

Определить наибольшую допустимую нагрузку на систему, рис. 1.27, состоящую из абсолютно жесткого элемента P и двух стальных стержней, выполненных из сдвоенных прокатных уголков.

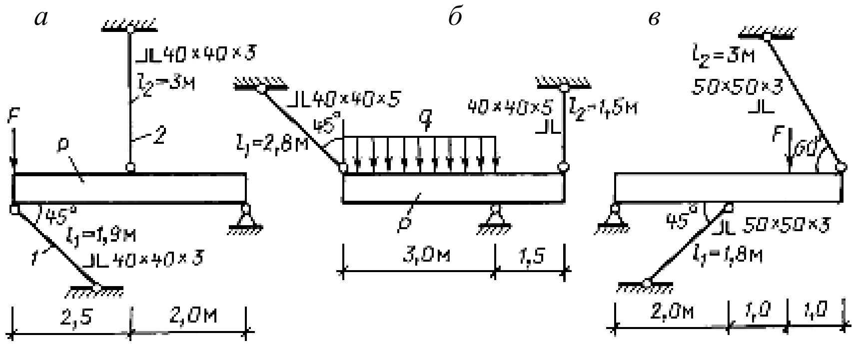


Рис. 1.27

Для стали: $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.

Ответы:
а. $N_{\text{мах}} = N_1 = 1{,}13F$; $F_{adm} = 87{,}3$ кН.
б. $N_{\text{мах}} = N_2 = 1{,}447\,q$; $q_{adm} = 110$ кН/м.
в. $N_{\text{мах}} = N_3 = 0{,}678\,F$; $F_{adm} = 183{,}3$ кН.

Вариант *а*)

Решение

Для равнобокого уголка $40 \times 40 \times 3$ из сортамента выписываем площадь поперечного сечения $A = 2{,}35$ см^2.

Тогда площадь поперечного сечения стержней

$$A = 2 \cdot 2{,}35 = 4{,}7 \text{ см}^2.$$

Данная система, рис. 1.28, является один раз статически неопределимой, так как имеет четыре неизвестные силы (продольные силы и реакции опор), а уравнений статики для плоской системы можно составить только три.

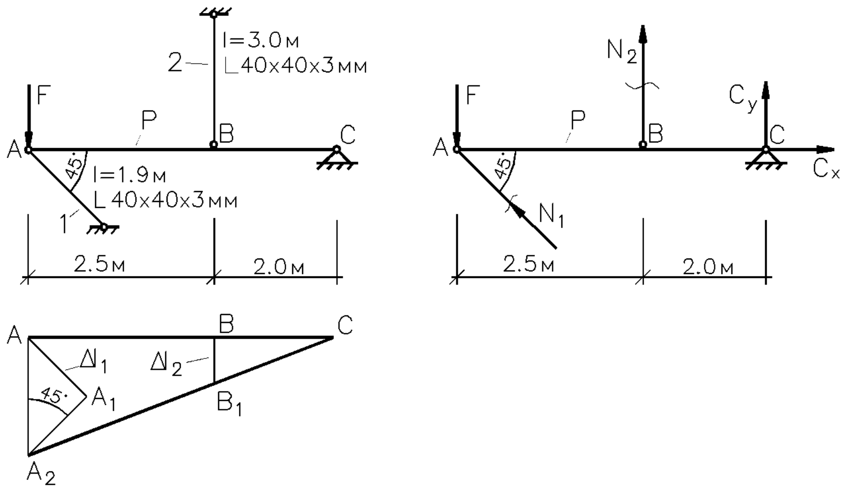


Рис. 1.28

Составим рациональное уравнение равновесия для элемента *P*:

$$\sum M_C = 0: \quad N_1 \sin 45^\circ \cdot 4,5 - F \cdot 4,5 + N_2 \cdot 2 = 0. \qquad (1.4)$$

Дополнительное уравнение запишем из перемещения системы, найдя зависимость между деформациями стержней. Перемещение точек *A* и *B* найдем аналогично примеру 1.9.

Рассмотрев подобные треугольники AA_2C и BB_1C, получим

$$\frac{AA_2}{4,5} = \frac{BB_1}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника AA_1A_2

$$AA_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin 45^\circ},$$

тогда

$$\frac{\Delta l_1}{\sin 45^\circ \cdot 4,5} = \frac{\Delta l_2}{2}.$$

Выразим деформации через продольные силы $\left(\Delta l = \dfrac{Nl}{EA}\right)$:

$$\frac{N_1 l_1}{EA\sin 45^\circ \cdot 4,5} = \frac{N_2 l_2}{EA \cdot 2},$$

$$\frac{N_1 \cdot 1,9}{0,707 \cdot 4,5} = \frac{N_2 \cdot 3}{2},$$

откуда

$$N_1 \cdot 0,597 - N_2 \cdot 1,5 = 0. \tag{1.5}$$

Решая совместно уравнения (1.4) и (1.5), найдем продольные силы в стержнях через неизвестную силу F:

$$N_1 = 1,13F, \quad N_2 = 0,45F.$$

Так как материал и площади стержней одинаковы, то наибольшее напряжение возникает в первом стержне, где продольная сила больше.

Допустимую нагрузку найдем из условия прочности наиболее загруженного стержня:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{1,13F}{A} \le R,$$

откуда

$$F_{\text{adm}} \le \frac{AR}{1,13} = \frac{4,7 \cdot 10^{-4} \cdot 210 \cdot 10^6}{1,13} = 873 \cdot 10^2\ \text{Н} = 87,3\ \text{кН}.$$

Задача 1.12

Система, состоящая из трех стальных стержней одинакового поперечного сечения и длины, нагружена расчетной нагрузкой F, рис. 1.29. Определить напряжение в стержнях и перемещение узла K.

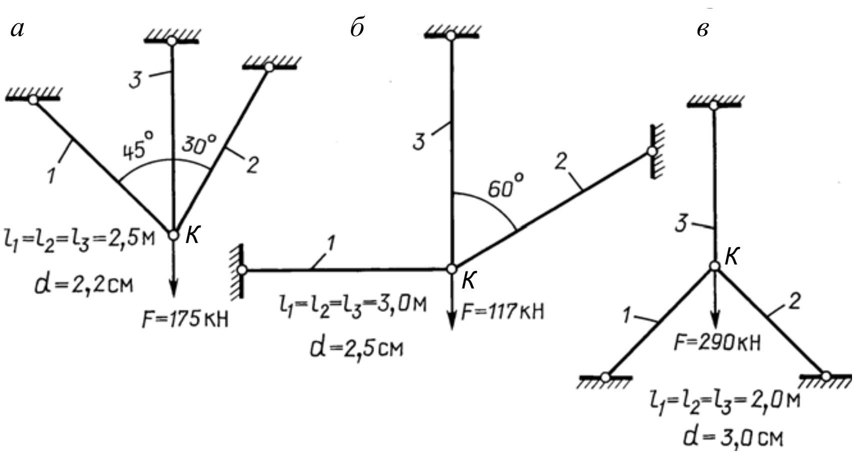


Рис. 1.29

Для стали R = 210 МПа, E = 200 ГПа.

Ответы:
а. Напряжения: σ_1 = 132 МПа, σ_2 = 187 МПа, σ_3 = 205 МПа.
Перемещения $\delta_к$ = 2,58 мм.
б. Напряжения: σ_1 = 59,6 МПа, σ_2 = 69,6 МПа, σ_3 = 209 МПа.
Перемещения $\delta_к$ = 3,22 мм.
в. Напряжения: $\sigma_1 = \sigma_2$ = 145 МПа, σ_3 = 205 МПа.
Перемещения $\delta_к$ = 2,05 мм.

Вариант *в*)

Решение

Площадь поперечного сечения стержней

$$A = \frac{3{,}14 \cdot 3^2}{4} = 7{,}065 \text{ см}^2.$$

Данная система является статически неопределимой, так как имеет три неизвестные реакции или внутренних усилия, а уравнений статики для плоской системы сходящихся сил можно составить только два.

Для определения продольных сил используем метод сечений, рис. 1.30.

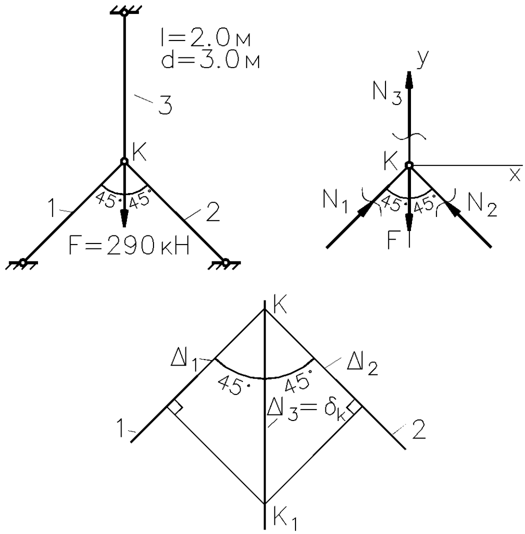


Рис. 1.30

Так как стержни *1* и *2* сжимаются, то показываем сжимающие усилия, т. е. направляем их к сечению. Стержень *3* растягивается, направляем продольную силу от сечения.

Рассмотрим равновесие узла *K*:

$$\sum X = 0: \qquad N_1 \sin 45^{\circ} - N_2 \sin 45^{\circ} = 0;$$

$$N_1 = N_2.$$

$$\sum Y = 0: \qquad N_3 + N_1 \cos 45^{\circ} + N_2 \cos 45^{\circ} - F = 0;$$

$$1{,}414 N_1 + N_3 = F. \tag{1.6}$$

Составляем дополнительное уравнение, рассмотрев перемещение системы, т. е. найдем зависимость между деформациями стержней:

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos 45^\circ = 0,707 \Delta l_3;$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 \cos 45^\circ = 0,707 \Delta l_3.$$

Выражаем Δl через усилие, используя закон Гука:

$$\frac{N_1 l}{EA} = \frac{N_3 l}{EA} \cdot 0,707,$$

$$N_1 = 0,707 N_3. \tag{1.7}$$

Решая совместно уравнения (1.6) и (1.7), находим продольные силы:

$$N_1 = N_2 = 102,5 \text{ кН}, \qquad N_3 = 145 \text{ кН}.$$

Определим нормальные напряжения, возникающие в стержнях:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{102,5 \cdot 10^3}{7,065 \cdot 10^{-4}} = 14,5 \cdot 10^7 \text{ Па} = 145 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{145 \cdot 10^3}{7,065 \cdot 10^{-4}} = 205 \text{ МПа}.$$

Для определения перемещения узла *K* по направлению стержней отложим в произвольном масштабе отрезки Δl_1 и Δl_2, показывающие, насколько стержни удлинились. Из конца этих отрезков проводим перпендикуляры к направлению стержня *3*.

Так как система симметрична, то точка *K* опустится вертикально вниз. Пересечение всех указанных линий (точка K_1) даст новое положение узла *K*. Из прямоугольного треугольника перемещение

$$\delta_k = \Delta l_3 = \frac{N_3 l}{EA} = \frac{145 \cdot 10^3 \cdot 2}{200 \cdot 10^9 \cdot 7,065 \cdot 10^{-4}} = 0,205 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,05 \text{ мм}.$$

Задача 1.13

Определить минимально необходимый диаметр стального стержня, жестко защемленного концами и нагруженного системой расчетных сил (рис. 1.31). Проверить прочность стержня, если между его нижним концом и опорой будет зазор Δ.

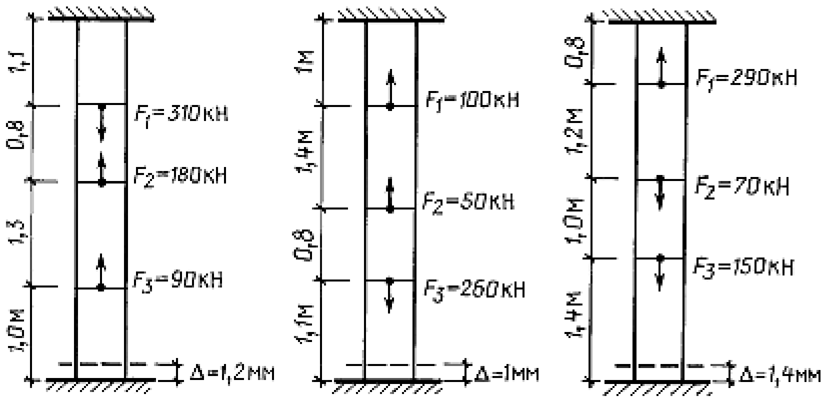


Рис. 1.31

Для стали R = 210 МПа, E = 200 ГПа.

Ответы:

а. По расчету, d = 3,49 см, принимаем d = 3,6 см, $\sigma_{мах}$ = 197 МПа.

При наличии зазора $\sigma_{мах}$ = 265 МПа > R.

б. По расчету, d = 2,94 см, принимаем d = 3,0 см, $\sigma_{мах}$ =201 МПа.

При наличии зазора $\sigma_{мах}$ = 213 МПа > R.

в. По расчету, d = 3,03 см, принимаем d = 3,0 см, $\sigma_{мах}$ = 214 МПа (перенапряжение менее 5 %).

При наличии зазора $\sigma_{мах}$ = 260 МПа > R.

Вариант *б*)

Решение

Поскольку силы приложены вдоль продольной оси стержня, то в опорах возникает по одной реакции (A_Z и B_Z), рис. 1.32.

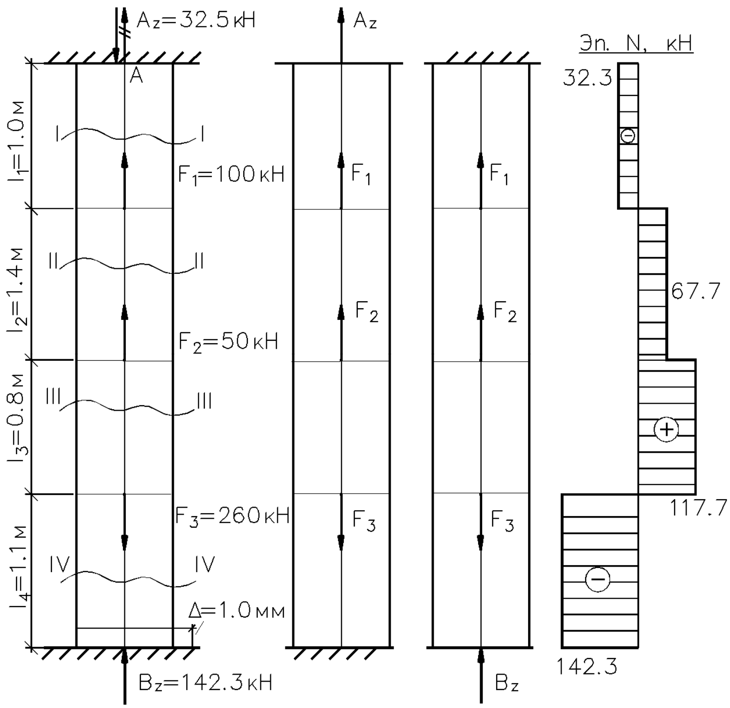


Рис. 1.32

Для данной системы можно составить только одно уравнение статики:

$$\sum Z = A_Z + F_1 + F_2 - F_3 + B_Z = 0.$$

Следовательно, система один раз статически неопределима.

Для раскрытия статической неопределимости отбросим верхнюю опору и заменим ее действие на стержень неизвестной реакцией A_Z.

Получим статически определимый стержень, который нагружен так же, как заданный статически неопределимый.

Смысл дополнительного уравнения перемещений состоит в том, что сумма деформаций всех участков стержня от действия заданных сил и верхней опорной реакции равна нулю:

$$\delta_A = \sum \Delta l_i = 0.$$

Применяя принцип суперпозиции, получим

$$\delta_A = \Delta l_{A_Z} + \Delta l_F = 0.$$

Выразим деформации участков стержня через продольные силы по закону Гука $\left(\Delta l = \frac{Nl}{EI}\right)$, учитывая, что $EA = \text{const}$:

$$\delta_A = \frac{1}{EA}[A_Z(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + F_1(l_2 + l_3 + l_4) + F_2(l_3 + l_4) - F_3 l_4] = 0;$$

$$A_Z \cdot 4{,}3 + 100 \cdot 3{,}3 + 50 \cdot 1{,}9 - 260 \cdot 1{,}1 = 0,$$

откуда

$$A_Z = -32{,}3 \text{ кН}.$$

Меняем направление реакции A_Z на противоположное.

Для определения реакции B_Z отбросим нижнюю опору.

Уравнение перемещений

$$\delta_B = \Delta l_{B_Z} + \Delta l_F = 0,$$

$$\delta_B = \frac{1}{EA}[-B_Z(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) - F_1 l_1 - F_2(l_1 + l_2) + F_3(l_2 + l_3 + l_4)] = 0;$$

$$-B_Z \cdot 4{,}3 - 100 \cdot 1 - 50 \cdot 2{,}4 + 260 \cdot 3{,}2 = 0,$$

откуда

$$B_Z = 142{,}3 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность найденных реакций из уравнения равновесия:

$$\sum Z = -32{,}3 + 100 + 50 - 260 + 142{,}3 = 0.$$

Реакции определены верно.

Определяем продольные силы на участках, разрезая стержень и отбрасывая от сечения нижнюю часть.

Сечение I–I:

$$N_1 = -A_Z = -32,3 \text{ кН}.$$

Сечение II–II:

$$N_2 = -A_Z + F_1 = 67,7 \text{ кН}.$$

Сечение III–III:

$$N_3 = -A_Z + F_1 + F_2 = 117,7 \text{ кН}.$$

Сечение IV–IV:

$$N_4 = -A_Z + F_1 + F_2 - F_3 = -142,3 \text{ кН}.$$

По полученным значениям строим эпюру N.

Диаметр определяем из условия прочности при растяжении-сжатии:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \le R,$$

откуда

$$A \ge \frac{N_{\max}}{R} = \frac{142,3 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,678 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 6,78 \text{ см}^2.$$

Так как $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$, то $d = \sqrt{\dfrac{4A}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{4 \cdot 6,78}{3,14}} = 2,94$ см.

Принимаем $d = 3$ см, $A = \dfrac{3,14 \cdot 3^2}{4} = 7,07 \text{ см}^2$.

Проверим прочность стержня, если между нижним концом и опорой имеется зазор $\Delta = 1$ мм.

Уравнение перемещений будет иметь вид

$$\delta_B = \sum \Delta l_i = \Delta;$$

$$\delta_B = -B_Z \cdot 4{,}3 + 260 \cdot 3{,}2 \cdot 10^3 - 50 \cdot 2{,}4 \cdot 10^3 - 100 \cdot 1 \cdot 10^3 = \Delta EA;$$

$$-B_Z \cdot 4{,}3 + 612 \cdot 10^3 = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 7{,}07 \cdot 10^{-4};$$

$$-B_Z \cdot 4{,}3 = -470{,}6 \cdot 10^3;$$

$$B_Z = 109{,}4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 109{,}4 \text{ кН}.$$

Определяем продольные силы, разрезая стержень и отбрасывая от сечения верхнюю часть:

$$N_1 = -B_Z + F_3 - F_2 - F_1 = 0{,}6 \text{ кН};$$

$$N_2 = -B_Z + F_3 - F_2 = 100{,}6 \text{ кН};$$

$$N_3 = -B_Z + F_3 = 150{,}6 \text{ кН};$$

$$N_4 = -B_Z = -109{,}4 \text{ кН};$$

$$N_{\max} = N_3 = 150{,}6 \text{ кН}.$$

Определяем максимальное напряжение и проверяем прочность стержня:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{150{,}6 \cdot 10^3}{7{,}07 \cdot 10^{-4}} = 21{,}3 \cdot 10^7 \text{ Па} = 213 \text{ МПа} > R = 210 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение стержня

$$\frac{213 - 210}{210} \cdot 100\,\% = 1{,}4\,\%, \text{ что допустимо.}$$

Прочность стержня обеспечена.

Задача 1.14

Короткая стальная труба, заполненная бетоном, находится под действием сжимающей силы F = 600 кН, которая передается трубе через абсолютно жесткую плиту, рис. 1.33.

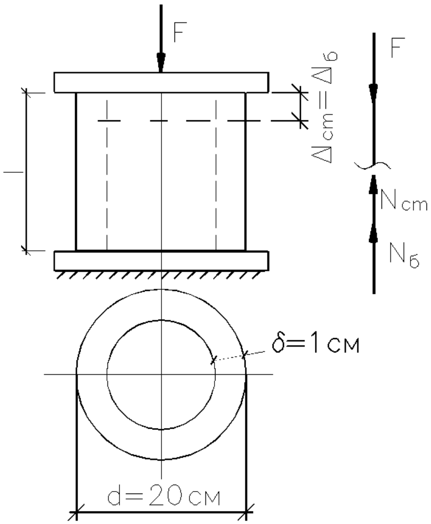


Рис. 1.33

Проверить прочность трубы и бетона.
Для стали $R_{\text{ст}}$ = 210 МПа, E = 200 ГПа.
Для бетона $R_{\text{б}}$ = 20 МПа, E = 30 ГПа.

Р е ш е н и е

Площадь поперечного сечения бетона и стали

$$A_{\text{б}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 18^2}{4} = 254{,}3 \text{ см}^2;$$

$$A_{\text{ст}} = \frac{3{,}14 \cdot 20^2}{4} - 254{,}3 = 59{,}7 \text{ см}^2.$$

При действии нагрузки колонна сжимается, возникают сжимающие усилия в бетоне и стали. Применяя метод сечений и составляя уравнение равновесия для оставшейся верхней части, получим

$$\sum Z = 0: \qquad N_{\text{ст}} + N_{\text{б}} - F = 0. \tag{1.8}$$

Так как система имеет два неизвестных усилия, а уравнение статики для нее можно записать только одно, следовательно, необходимо составить дополнительное уравнение перемещений, рассмотрев деформацию системы.

Смысл уравнения перемещений состоит в том, что деформация бетона и стали в данном случае одинакова:

$$\Delta l_{\text{ст}} = \Delta l_{\text{б}}.$$

Деформацию выражаем через усилия по закону Гука $\left(\Delta l = \dfrac{Nl}{EA}\right)$:

$$\frac{N_{\text{ст}} l}{E_{\text{ст}} A_{\text{ст}}} = \frac{N_{\text{б}} l}{E_{\text{б}} A_{\text{б}}};$$

$$\frac{N_{\text{ст}}}{200 \cdot 59{,}7} = \frac{N_{\text{б}}}{30 \cdot 254{,}3},$$

откуда

$$N_{\text{ст}} = 1{,}57 N_{\text{б}}. \tag{1.9}$$

Решая совместно уравнения (1.8) и (1.9), найдем неизвестные усилия:

$$N_{\text{б}} = 233{,}9 \text{ кН}, \qquad N_{\text{ст}} = 366{,}1 \text{ кН}.$$

Напряжения, возникающие в стали и бетоне:

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{N_{\text{ст}}}{A_{\text{ст}}} = \frac{366{,}1 \cdot 10^3}{59{,}7 \cdot 10^{-4}} = 6{,}13 \cdot 10^7 \text{ Па} = 61{,}3 \text{ МПа} < R_{\text{ст}};$$

$$\sigma_{\text{б}} = \frac{N_{\text{б}}}{A_{\text{б}}} = \frac{233{,}9 \cdot 10^3}{254{,}3 \cdot 10^{-4}} = 0{,}92 \cdot 10^7 \text{ Па} = 9{,}2 \text{ МПа} < R_{\text{б}}.$$

Прочность обеспечена.

Задача 1.15

Деревянная стойка, рис. 1.34, усиленная четырьмя стальными уголками, сжимается силой F через абсолютно жесткую плиту.

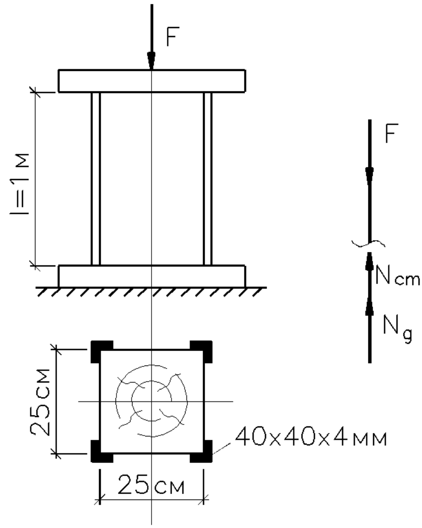


Рис. 1.34

Определить наибольшую допустимую нагрузку F.

Для стали $R_{\text{ст}}$ = 210 МПа, E = 200 ГПа.

Для древесины $R_{\text{д}}$ = 4 МПа, E = 10 ГПа.

Р е ш е н и е

Из сортамента для уголка $40 \times 40 \times 4$ мм площадь поперечного сечения A = 3,08 см^2.

Площади сечений для стали и дерева:

$$A_{\text{ст}} = 3{,}08 \cdot 4 = 12{,}32 \text{ см}^2;$$

$$A_{\text{д}} = 25 \cdot 25 = 625 \text{ см}^2.$$

Рассекаем систему и составляем уравнение равновесия для верхней от сечения части:

$$\sum Z = 0: \qquad N_{\text{ст}} + N_{\text{д}} = F. \qquad (1.10)$$

Таким образом, задача статически неопределимая, так как для определения двух неизвестных усилий одного уравнения статики недостаточно.

Дополнительное уравнение

$$\Delta l_{\text{ст}} = \Delta l_{\text{д}};$$

$$\frac{N_{\text{ст}} l}{E_{\text{ст}} A_{\text{ст}}} = \frac{N_{\text{д}} l}{E_{\text{д}} A_{\text{д}}}.$$

Подставляем все заданные величины:

$$\frac{N_{\text{ст}} \cdot 1}{200 \cdot 12{,}32} = \frac{N_{\text{д}} \cdot 1}{10 \cdot 625},$$

откуда

$$N_{\text{ст}} = 0{,}394 N_{\text{д}}$$

или

$$N_{\text{д}} = 2{,}54 N_{\text{ст}}.$$

С учетом этого уравнение (1.10) примет вид

$$0{,}349 N_{\text{д}} + N_{\text{д}} = F \qquad (1.11)$$

или

$$N_{\text{ст}} + 2{,}54 N_{\text{ст}} = F. \qquad (1.12)$$

Из условия прочности $\sigma = \dfrac{N}{A} \le R$ при растяжении-сжатии определим допустимые продольные силы:

$$N_{\text{д}} = R_{\text{д}} A_{\text{д}} = 4 \cdot 10^6 \cdot 625 \cdot 10^{-4} = 250 \text{ кН};$$

$$N_{\text{ст}} = R_{\text{ст}} A_{\text{ст}} = 210 \cdot 10^6 \cdot 12{,}32 \cdot 10^{-4} = 259 \text{ кН}.$$

Подставляем полученные значения усилий в уравнения (1.11) и (1.12) и определяем допустимые силы для дерева и стали:

$$F_{\text{adm}_{\text{д}}} = 1{,}394 \cdot 250 = 348{,}5 \text{ кН};$$

$$F_{\text{adm}_{\text{ст}}} = 3{,}54 \cdot 259 = 916{,}9 \text{ кН}.$$

Принимаем меньшее значение F:

$$F_{\text{adm}} = 348{,}5 \text{ кН}.$$

Задача 1.16

Конструкция, рис. 1.35, состоит из абсолютно жесткого элемента P, укрепленного на опоре C, и двух прокатных равнополочных уголков $50 \times 50 \times 5$ мм.

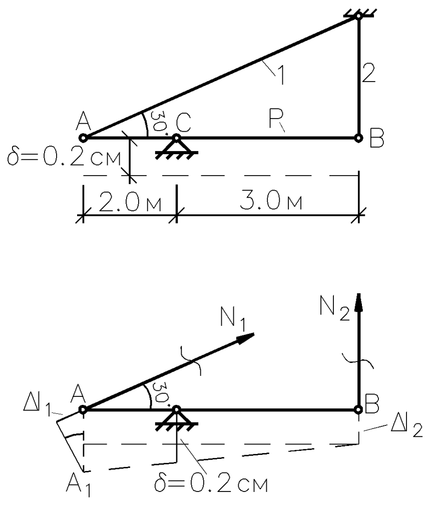


Рис. 1.35

Определить напряжения в стержнях вследствие осадки опоры C на $\delta = 0{,}2$ см.

Решение

Площадь поперечного сечения уголка $50 \times 50 \times 5$ мм из сортамента A = 4,8 см. Площадь стержней

$$A = 2 \cdot 4{,}8 = 9{,}6 \text{ см}^2.$$

Длины стержней

$$l_1 = \frac{5}{\cos 30^\circ} = 5{,}77 \text{ м};$$

$$l_2 = l_1 \sin 30^\circ = 5{,}77 \cdot 0{,}5 = 2{,}89 \text{ м}.$$

Вследствие осадки опоры C система продеформируется и в стержнях *1* и *2* возникнут растягивающие усилия.

Рациональное уравнение статики

$$\sum M_C = 0: \qquad N_1 \sin 30^\circ \cdot 2 - N_2 \cdot 3 = 0;$$

$$N_1 = 3N_2. \tag{1.13}$$

Уравнение перемещений

$$\frac{2\Delta l_1 - \Delta l_2}{5} = \frac{\delta - \Delta l_2}{3},$$

где
$$AA_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin 30^\circ} = 2\Delta l_1,$$

$$6\Delta l_1 + 2\Delta l_2 = 5\delta.$$

Выражаем деформации через усилия:

$$\frac{6N_1 l_1}{EA} + \frac{2N_2 l_2}{EA} = 5\delta;$$

$$6N_1 l_1 + 2N_2 \Delta l_2 = 5EA\delta.$$

Подставляем известные величины:

$$6N_1 \cdot 5,77 + 2N_2 \cdot 2,89 = 5 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 9,6 \cdot 10^{-4} \cdot 0,2 \cdot 10^{-2};$$

$$34,62N_1 + 5,78N_2 = 1920 \cdot 10^3. \qquad (1.14)$$

Решая совместно уравнения (1.13) и (1.14), получим

$$N_1 = 52,53 \text{ кН}, \qquad N_2 = 17,51 \text{ кН}.$$

Напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{52,53 \cdot 10^3}{9,6 \cdot 10^{-4}} = 5,47 \cdot 10^7 \text{ Па} = 54,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{17,51 \cdot 10^3}{9,6 \cdot 10^{-4}} = 18,2 \text{ МПа}.$$

2. СДВИГ

Задача 2.1

Заклепочное соединение, рис. 2.1, должно безопасно воспринять нагрузку F. Определить номер прокатного профиля, размеры поперечного сечения накладки и количество заклепок.

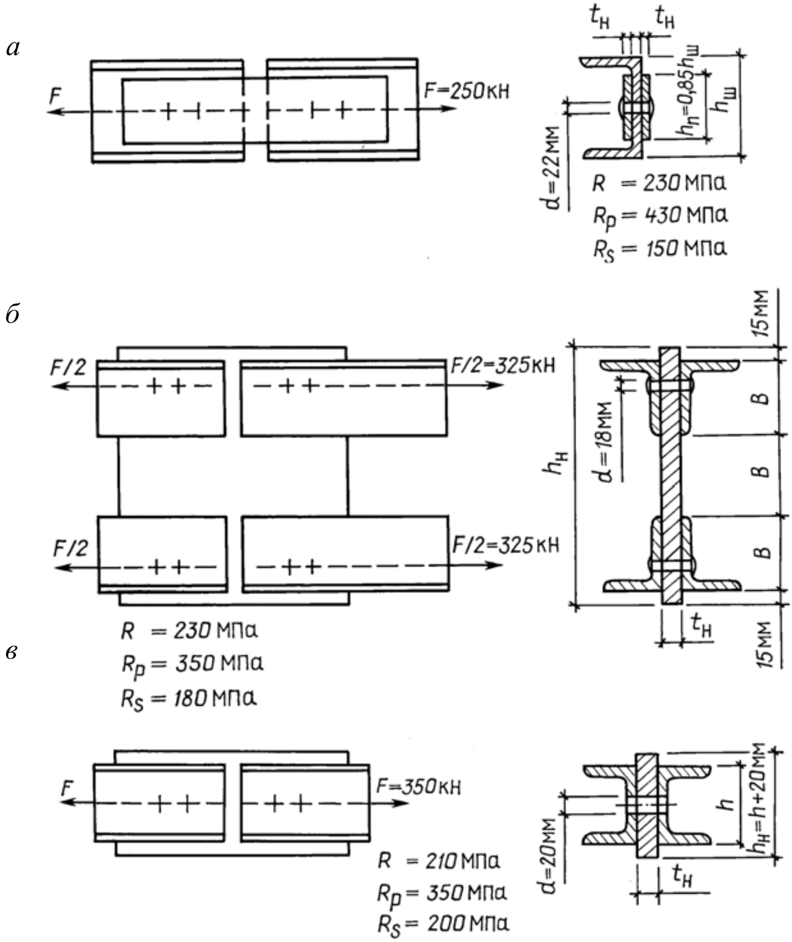


Рис. 2.1

Считать $A_{нт} = 0{,}85A_{бр}$.

Ответы:
а. Швелер № 12, накладка $10 \times 0{,}7$ см, $n = 6$ (с каждой стороны).
б. Уголок $75 \times 60 \times 7$ мм, накладка $25{,}5 \times 1{,}3$ см, $n = 8$.
в. Швелер № 10, накладка $12 \times 1{,}8$ см, $n = 6$.

Вариант *а*)

$F = 250$ кН; $R = 230$ МПа; $R_P = 430$ МПа; $R_S = 150$ МПа, рис. 2.2.

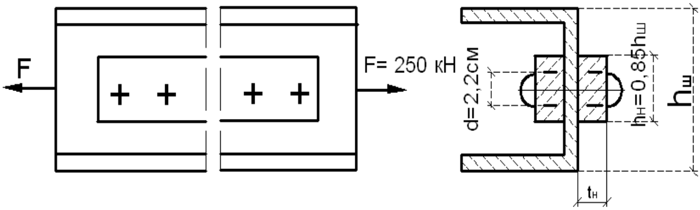


Рис. 2.2

Решение

Определим площадь поперечного сечения швеллера из условия прочности на растяжение по нормальным напряжениям

$$\sigma = \frac{N}{A_{нт}} \le R,$$

откуда

$$A_{нт} = 0{,}85A_{бр} = \frac{N}{R}, \quad N = F,$$

тогда

$$A_{бр} = \frac{F}{0{,}85R} = \frac{250 \cdot 10^3}{0{,}85 \cdot 230 \cdot 10^6} = 12{,}8 \text{ см}^2.$$

Принимаем швеллер № 12 с площадью $A_ш = 13{,}3$ см^2 и $h_ш = 12$ см; $t_ш = 4{,}8$ мм.

Тогда высота накладки (см. рис. 2.2)

$$h_{\text{н}} = 0,85 h_{\text{ш}} = 0,85 \cdot 12 = 10,2 \text{ см.}$$

Толщину накладки определим из соображений, что

$$A_{\text{н}} = A_{\text{ш}} = 13,3 \text{ см}^2 = 2 h_{\text{н}} t_{\text{н}} \to t_{\text{н}} = 0,65 \text{ см.}$$

Принимаем $t_{\text{н}} = 0,7$ см.

Количество заклепок определим из условия прочности на срез

$$\tau = \frac{Q}{\sum A_s} = \frac{F}{A_s n n_s} \le R_s,$$

откуда

$$n = \frac{F}{A_s n_s R_s} = \frac{4F}{\pi d^2 n_s R_s} =$$

$$= \frac{4 \cdot 250 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 2,2^2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 150 \cdot 10^6} = 2,19 \to n = 3.$$

Количество заклепок определим из условия прочности на смятие

$$\sigma_{\text{р}} = \frac{N}{\sum A_{\text{р}}} = \frac{F}{dn \sum t_{\min}} \le R_{\text{р}},$$

откуда

$$n = \frac{F}{d \sum t_{\min} R_{\text{р}}} = \frac{250 \cdot 10^3}{2,2 \cdot 10^{-2} \cdot 4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 430 \cdot 10^6} = 5,51 \to n = 6.$$

Для соединения принимаем $n = 6$ (с каждой стороны стыка).

Задача 2.2

Две стальные полосы, рис. 2.3, соединены внахлест заклепками диаметром $d = 14$ мм.

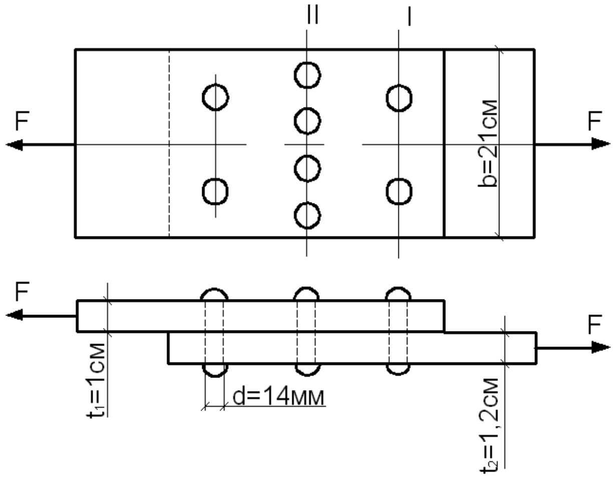


Рис. 2.3

Определить наибольшую допустимую нагрузку F, если R = 210 МПа, R_s = 140 МПа, $R_{\text{р}}$ = 250 МПа.

Р е ш е н и е

Из условия прочности на растяжение:
по сечению I

$$F = A_{\text{нт}} R = (21 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 10^{-2}) \cdot 210 \cdot 10^{6} = 382\ \text{кН};$$

по сечению II

$$F = (21 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 10^{-2} - 4 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 10^{-2}) \cdot 210 \cdot 10^{6} = 323{,}4\ \text{кН}.$$

Из условия прочности на срез

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{F}{\dfrac{\pi d^2}{4} n n_s} \le R_s;$$

$$F = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}4^2 \cdot 10^{-4}}{4} \cdot 8 \cdot 1 \cdot 140 \cdot 10^{6} = 172\ \text{кН}.$$

Из условия прочности на смятие

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{\sum t_{\min} dn} \le R_{\text{p}};$$

$$F = 1{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot 250 \cdot 10^{6} = 280 \text{ кН}.$$

Принимаем F_{adm} = 172 кН.

Задача 2.3

Раскосы стальной фермы, рис. 2.4, выполненные из уголков $80 \times 80 \times 80$ мм, с помощью косынки толщиной t = мм присоединяются к нижнему поясу, выполненному из уголков $75 \times 75 \times 6$ мм. Усилия в раскосах $N_1 = N_2 = 140$ кН.

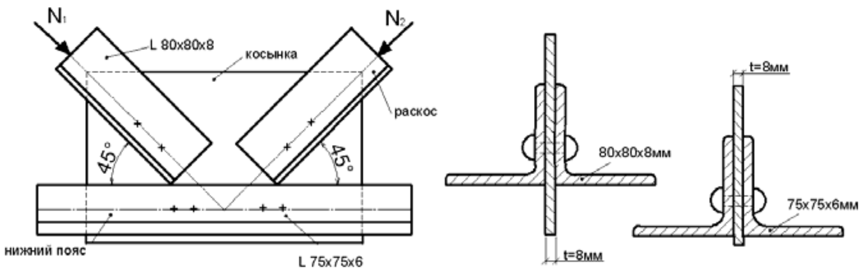


Рис. 2.4

Определить количество заклепок d = 17 мм для присоединения:
1) раскосов к косынке;
2) косынки к нижнему поясу.
Принять R_s = 100 МПа, R_{p} = 260 МПа.

Р е ш е н и е

1. Количество заклепок для присоединения раскоса к косынке.
Количество заклепок из условия прочности на срез

$$n = \frac{4N}{\pi d^2 n_s R_s} = \frac{140 \cdot 10^3 \cdot 4}{3{,}14 \cdot 1{,}7^2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 100 \cdot 10^6} = 3{,}1.$$

Количество заклепок из условия прочности на смятие

$$n = \frac{N}{d\sum t_{\min} R_{\text{р}}} = \frac{140 \cdot 10^3}{1,7 \cdot 10^{-2} \cdot 0,8 \cdot 10^{-2} \cdot 260 \cdot 10^6} = 3,96.$$

Принимаем $n = 4$.

2. Количество заклепок для присоединения косынки к нижнему поясу.

Количество заклепок из условия прочности на срез

$$n = \frac{4N \sin 45^\circ \cdot 2}{\pi d^2 n_s R_s} = \frac{4 \cdot 140 \cdot 10^3 \cdot 0,707 \cdot 2}{3,14 \cdot 1,7^2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 100 \cdot 10^6} = 4,36.$$

Количество заклепок из условия прочности на смятие

$$n = \frac{2N \sin 45^\circ}{d\sum t_{\min} R_{\text{р}}} = \frac{4 \cdot 140 \cdot 10^3 \cdot 0,707}{1,7 \cdot 10^{-2} \cdot 0,8 \cdot 10^{-2} \cdot 260 \cdot 10^6} = 5,59.$$

Принимаем $n = 6$.

Задача 2.4

Определить равнопрочные размеры поперечного сечения (номер прокатного профиля) соединяемых элементов и накладки, рис. 2.5, а также длину фланговых швов (выполненных вручную), если расчетное сопротивление соединяемых элементов R = 210 МПа, а расчетное сопротивление материала шва срезу R_w = 160 МПа.

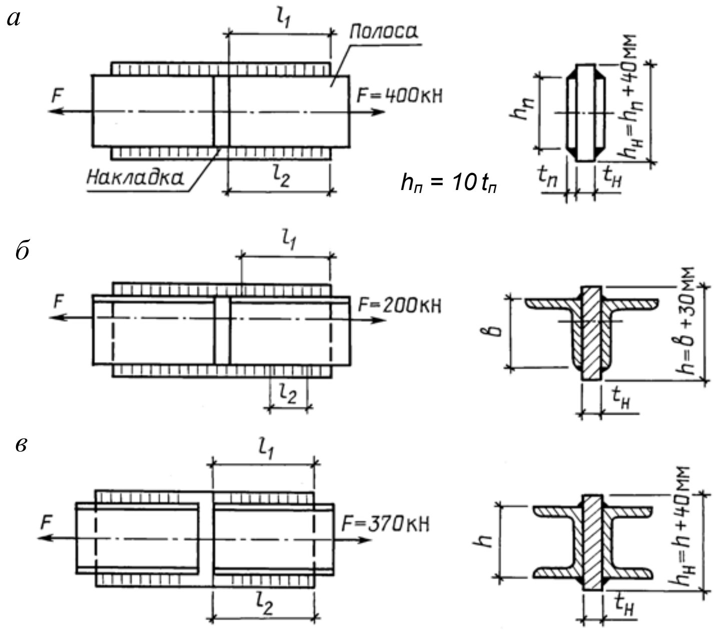


Рис. 2.5

Ответы:

а. h_ω = 10 мм, $h_п$ = 10 см, $t_п$ = 1,0 см, $h_н$ = 14 см, $t_н$ = 1,4 см, l_1 = = l_2 = 10 см.

б. h_ω = 5 мм, уголок $50\times50\times5$ мм, $h_н$ = 8 см, $t_н$ = 1,2 см, l_1 = 13 см, l_2 = 6 см.

в. h_ω = 6 мм, двутавр № 8, $h_н$ = 12 см, $t_н$ = 1,5 см, l_1 = l_2 = 15 см.

Вариант *а*)

Решение

Суммарную площадь двух полос, рис. 2.6, определим из условия прочности на растяжение:

$$\sigma = \frac{F}{A} \le R,$$

откуда

$$A_п = \frac{F}{R} = \frac{400\cdot10^3}{210\cdot10^6} = 19{,}1 \text{ см}^2 .$$

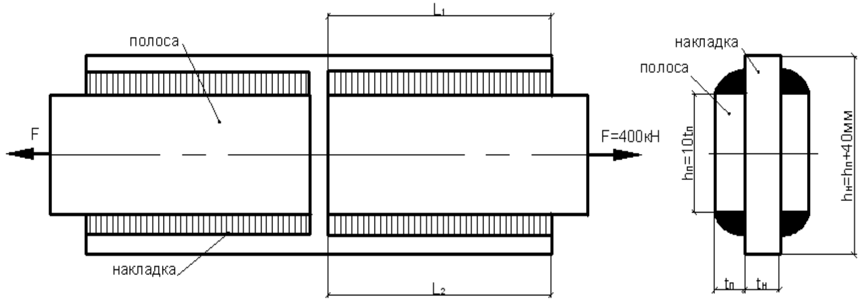


Рис. 2.6

Тогда размеры одной полосы будут (см. рис. 2.6)

$$A_п = 2(h_п t_п) = 2(10 t_п t_п) = 19{,}1\ \text{см}^2 \rightarrow t_п = 0{,}977\ \text{см}.$$

Принимаем $t_п = 1{,}0$ см, $h_п = 10$ см.

$$A_п = 2 \cdot 10 \cdot 1 = 20\ \text{см}^2.$$

Размеры накладки определим из условия ее равнопрочности с полосами:

$$A_н = A_п = 20\ \text{см}^2, \qquad h_н = 10 + 4 = 14\ \text{см};$$

$$t_н = \frac{20}{14} = 1{,}43\ \text{см}.$$

Принимаем $t_н = 1{,}4$ см.

Длину фланговых швов определим из условия прочности на срез, приняв высоту катета шва $h_w = t_п = 10$ мм:

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{h_w \sum l_w} \le R_w.$$

Учитывая, что сварка ручная, суммарная длина швов будет

$$\sum l_w = \frac{400 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 160 \cdot 10^6} = 0,357 \text{ м} = 36 \text{ см};$$

$$l_1 = l_2 = \frac{\sum l_w}{4} + 1 = 10 \text{ см}.$$

Задача 2.5

При ограниченном перекрытии соединенных внахлестку двух полос (*1* и *2*) для обеспечения прочности соединения в полосе толщиной 12 мм сделана прорезь шириной 24 мм для заполнения электрошвом, рис. 2.7.

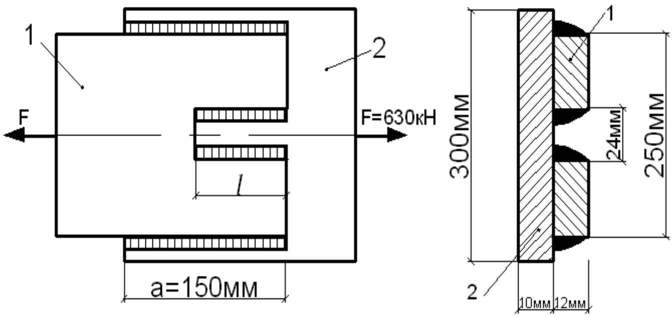


Рис. 2.7

Определить проектную длину прорези l, если $R_w = 150$ МПа. Сварка ручная.

Р е ш е н и е

Принимаем $h_w = 12$ мм.

Тогда из условия прочности общая длина шва

$$\sum l_w = \frac{630 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 12 \cdot 10^{-3} \cdot 150 \cdot 10^6} = 0,5 \text{ м} = 50 \text{ см}.$$

Длину прорези определим следующим образом:

$$\sum l_w = 2(a-1) + 2l = 50 \text{ см} \to l = 11 \text{ см};$$

$$2a + 2l = 50 \text{ см} \to l = 10 \text{ см}.$$

Принимаем l = 10 + 1 = 11 см.

Задача 2.6

Сварной стык стальной полосы, рис. 2.8, осуществлен крестообразным соединением с помощью прокладки, приваренной к полосе четырьмя торцевыми швами, выполненными вручную. Катет шва h_w = 10 мм.

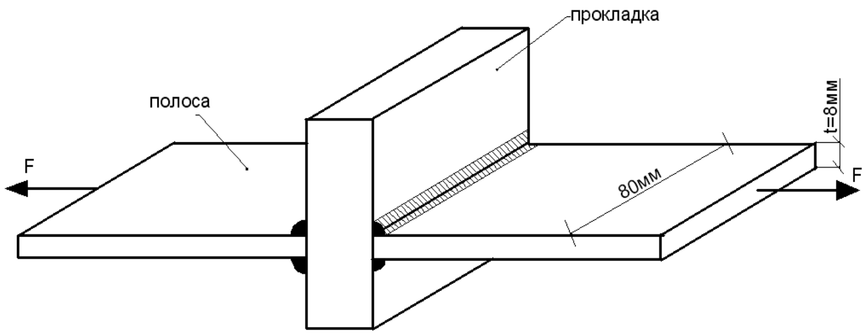


Рис. 2.8

Определить значение касательного напряжения в сечении шва, если нормальное напряжение в полосе составляет 150 МПа.

Р е ш е н и е

Зная напряжение в полосе, определим силу F:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{80 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3}} = 150 \cdot 10^6 \to F = 96 \text{ кН}.$$

Касательное напряжение в сечении шва, принимая во внимание, что сварка выполнялась вручную:

$$\tau_w = \frac{F}{A} = \frac{96 \cdot 10^3}{2 \cdot 0.7 \cdot 80 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 85{,}7 \text{ МПа}.$$

Задача 2.7

Проверить прочность соединения деревянных брусьев, рис. 2.9, соединенных с помощью лобовой врубки. Усилие в стропильной ноге F = 50 кН, h = 12 см; b = 8 см; c = 11 см; a = 4 см; l = 27 см; $\alpha = 30°$.

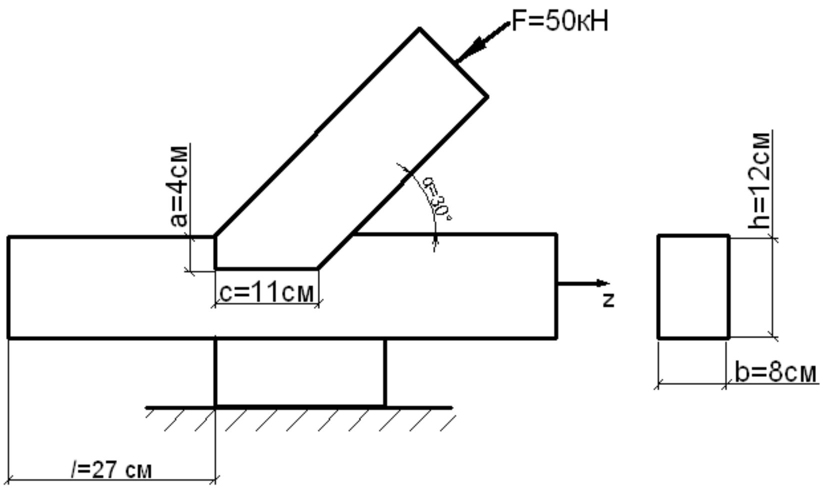


Рис. 2.9

Расчетные сопротивления:
на скалывание вдоль волокон R_s = 2,1 МПа;
смятие вдоль волокон R_{p0} = 140 МПа;
смятие поперек волокон R_{p90} = 3 МПа.

Р е ш е н и е

Напряжение скалывания

$$\tau_s = \frac{F\cos 30^\circ}{A_s} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0,866}{8 \cdot 10^{-2} \cdot 27 \cdot 10^{-2}} = 0,20 \cdot 10^7 \text{ Па} = 2,0 \text{ МПа} < R_s.$$

Напряжение смятия вдоль волокон

$$\sigma_{\text{р}0} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0,866}{8 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 1,35 \cdot 10^7 \text{ Па} = 13,5 \text{ МПа} < R_{\text{р}0}.$$

Напряжение смятия поперек волокон

$$\sigma_{\text{р}90} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{-2} \cdot 11 \cdot 10^{-2}} = 0,284 \cdot 10^7 \text{ Па} = 2,84 \text{ МПа} < R_{\text{р}90}.$$

Прочность соединения деревянных брусьев обеспечена.

Задача 2.8

Перекладина *1*, рис. 2.10, соединяется со стойкой *2* при помощи шипа.

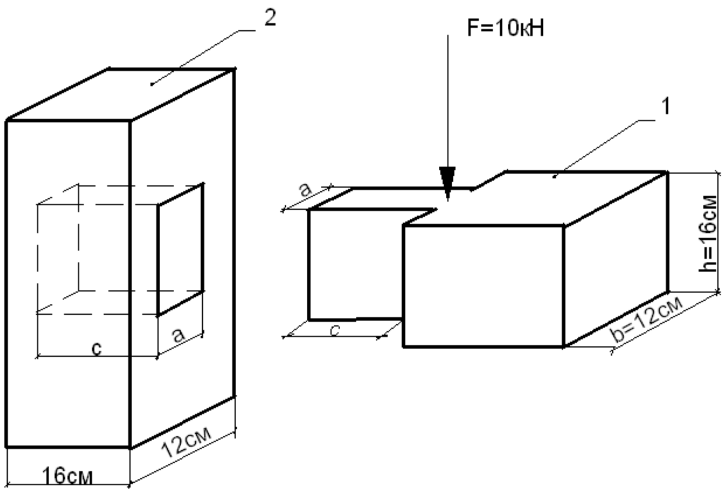


Рис. 2.10

Определить размеры шипа, если расчетные сопротивления для древесины:

на смятие вдоль волокон $R_{р0}$ = 8МПа;

смятие поперек волокон $R_{р90}$ = 3 МПа.

Решение

В соединении образуются сминающие напряжения. Шип перекладины сминается поперек волокон, гнездо стойки – вдоль волокон. Более опасно смятие поперек волокон ($R_{р0} > R_{р90}$).

Принимаем

$$a = \frac{b}{3} = \frac{12}{3} = 4 \text{ см}.$$

Условие прочности

$$\sigma_{р90} = \frac{F}{ac} = 3 \cdot 10^6 \rightarrow c = \frac{10 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^6} = 0{,}833 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 8{,}33 \text{ см}.$$

Принимаем c = 9,0 см.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ

Задача 3.1

Для заданного сечения, рис. 3.1, определить значения главных центральных моментов инерции (h = 30 см; b =18 см; d =24 см).

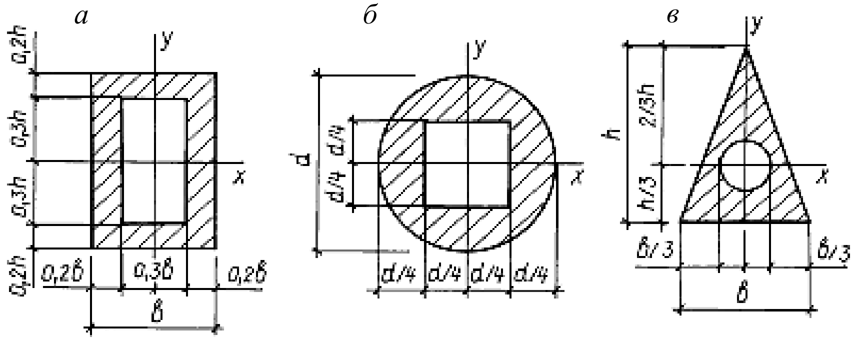


Рис. 3.1

Ответы:
а. J_u = 35 251 см^4, J_v = 12 690 см^4.
б. $J_u = J_v$ = 14 550 см^4.
в. J_u = 13 436 см^4, J_v = 3581 см^4.

Вариант *а*)

Решение

Поскольку центры тяжести фигур совпадают, то центр тяжести сечения расположен в точке *O*, рис. 3.2.

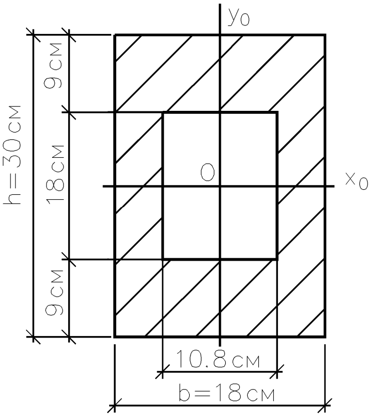


Рис. 3.2

Вычислим моменты инерции относительно центральных осей X_0 и Y_0, используя формулы для определения центральных моментов инерции простых фигур:

$$I_{X_0} = I_{X_1} - I_{X_2} = \frac{b_1 h_1^3}{12} - \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{18 \cdot 30^3}{12} - \frac{10{,}8 \cdot 18^3}{12} = 35\,251 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y_0} = \frac{b_1^3 h_1}{12} - \frac{b_2^3 h_2}{12} = \frac{18^3 \cdot 30}{12} - \frac{10{,}8^3 \cdot 18}{12} = 12\,690 \text{ см}^4.$$

Поскольку оси X_0 и Y_0 являются осями симметрии и проходят через центр тяжести сечения, они являются главными центральными осями (U и V).

$$I_U = I_{\max} = I_{X_0} = 35\,251 \text{ см}^4;$$

$$I_V = I_{\min} = I_{Y_0} = 12\,690 \text{ см}^4.$$

Задача 3.2

Для заданного сечения, рис. 3.3, определить положение центра тяжести и значения главных центральных моментов инерции.

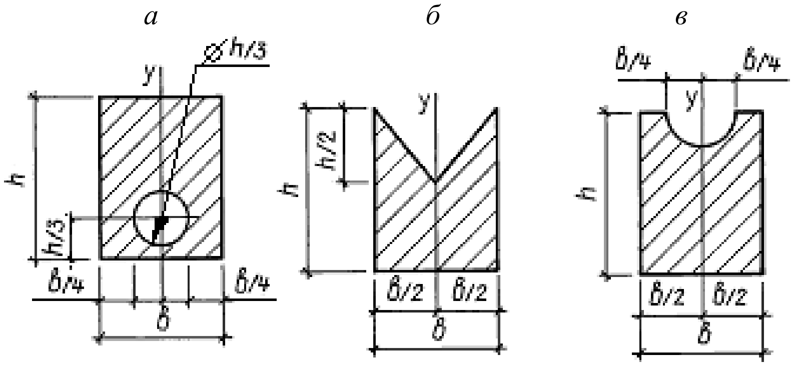


Рис. 3.3

Данные к вариантам задачи:
а. $h = 24$ см, $b = 16$ см.
б. $h = 30$ см, $b = 20$ см.
в. $h = 28$ см, $b = 24$ см.

Ответы:
а. $y_0 = 12{,}6$ см, $J_u = 17\,306$ см^4, $J_v = 7991$ см^4.
б. $y_0 = 11{,}66$ см, $J_u = 23\,125$ см^4, $J_v = 17\,500$ см^4.
в. $y_0 = 12{,}93$ см, $J_u = 35\,657$ см^4, $J_v = 31\,747$ см^4.

Вариант *а*)

Решение

Разобьем сечение на две фигуры: прямоугольник и круг, рис. 3.4. Площади этих фигур

$$A_1 = bh = 16 \cdot 24 = 384 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 8^2}{4} = 50{,}24 \text{ см}^2.$$

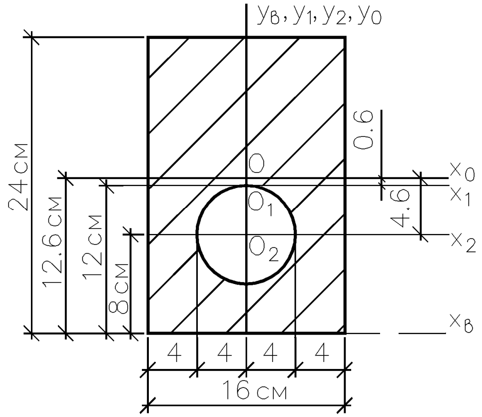


Рис. 3.4

Для определения положения центра тяжести сечения проведем вспомогательные оси, ось симметрии – одна из них.

Центр тяжести лежит на оси симметрии, тогда

$$x_0 = 0;$$

$$y_0 = \frac{S_{X_в}}{A} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2} = \frac{24 \cdot 16 \cdot 12 - \dfrac{3{,}14 \cdot 8^2}{4} \cdot 8}{384 - 50{,}24} = 12{,}6 \text{ см},$$

где y_i – расстояние от вспомогательной оси $X_в$ до центра тяжести соответствующей фигуры.

Проводим центральные оси X_0 и Y_0 и определяем моменты инерции относительно этих осей:

$$I_{X_0} = \sum\left(I_{X_i} + m_i^2 A_i\right) = I_{X_1} + m_1^2 A_1 - \left(I_{X_2} + m_2^2 A_2\right);$$

$$I_{Y_0} = \sum\left(I_{Y_i} + n_i^2 A_i\right) = I_{Y_1} + n_1^2 A_1 - \left(I_{Y_2} + n_2^2 A_2\right).$$

Найдем центральные моменты инерции простых фигур:

$$I_{X_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{16 \cdot 24^3}{12} = 18\,432 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y_1} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{16^3 \cdot 24}{12} = 8192 \text{ см}^4;$$

$$I_{X_2} = I_{Y_2} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3{,}14 \cdot 8^4}{64} = 201 \text{ см}^4.$$

Определяем расстояния между центральными осями простых фигур X_1, X_2 и центральной осью всего сечения X:

$$m_1 = y_0 - y_1 = 12{,}6 - 12 = 0{,}6 \text{ см};$$

$$m_2 = y_0 - y_2 = 12{,}6 - 8 = 4{,}6 \text{ см}.$$

Расстояния между центральными осями Y_1, Y_2 и центральной осью всего сечения Y

$$n_1 = n_2 = 0,$$

так как эти оси совпадают.

Окончательно получим

$$I_{X_0} = 18432 + 0{,}6^2 \cdot 384 - 201 - 4{,}6^2 \cdot 50{,}24 = 17\,306 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y_0} = 8192 - 201 = 7991 \text{ см}^4.$$

Рассматриваемое сечение имеет ось симметрии – ось Y_0. Следовательно, эта ось является главной. Вторая главная ось – ось X_0, так как проходит через центр тяжести сечения и перпендикулярна первой. Главные центральные моменты инерции

$$I_U = I_{\max} = I_{X_0} = 17306 \text{ см}^4;$$

$$I_V = I_{\min} = I_{Y_0} = 7991 \text{ см}^4.$$

Задача 3.3

Для сечения, составленного из прокатного элемента и листа, рис. 3.5, определить положение центра тяжести и значения главных центральных моментов инерции.

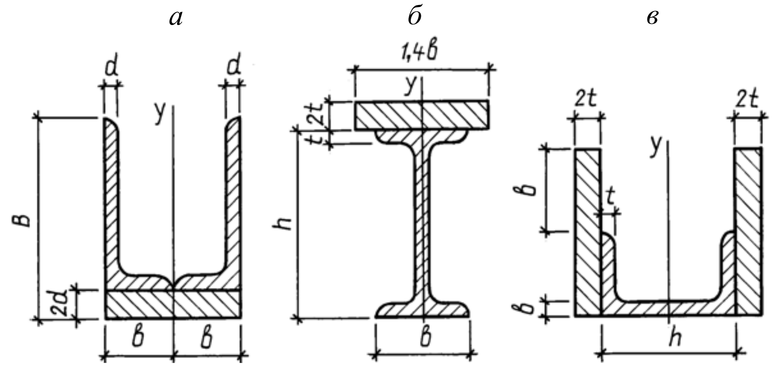


Рис. 3.5

Данные к вариантам задачи:

а) неравнобокий уголок $12{,}5 \times 8 \times 0{,}8$ см; лист $16 \times 1{,}6$ см;

б) двутавр № 20; лист $14 \times 1{,}68$ см;

в) швеллер № 18; лист $14 \times 1{,}74$ см.

Ответы:

а. $y_0 = 3{,}32$ см, $J_u = 1774$ см^4, $J_v = 768$ см^4.

б. $y_0 = 15{,}07$ см, $J_u = 3317$ см^4, $J_v = 499$ см^4.

в. $y_0 = 5{,}49$ см, $J_u = 5860$ см^4, $J_v = 800$ см^4.

Вариант *а*)

Р е ш е н и е

Из таблиц сортамента для уголка, рис. 3.6, выписываем: $A_1 = 14,06$ см^2, $I_{X_1} = 226$ см^4, $I_{Y_1} = 73,73$ см^4, $x_c = 1,8$ см, $y_c = 4,01$ см.

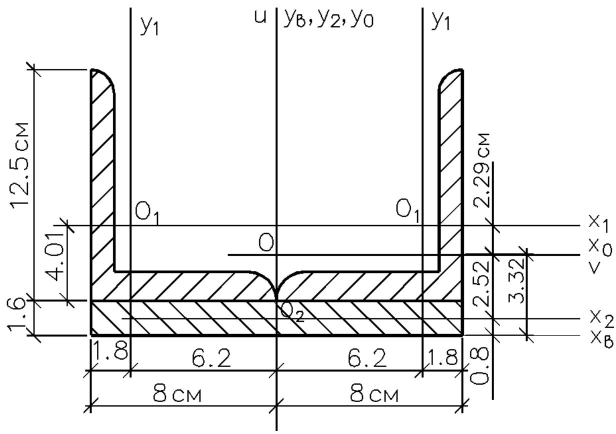


Рис. 3.6

Геометрические характеристики листа

$$A_2 = bh = 16 \cdot 1,6 = 25,6 \text{ см}^2;$$

$$I_{X_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{16 \cdot 1,6^3}{12} = 5,46 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y_2} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{16^3 \cdot 1,6}{12} = 546 \text{ см}^4.$$

Проводим вспомогательные оси и определяем координаты центра тяжести сечения:

$$x_0 = 0;$$

$$y_0 = \frac{S_{X_в}}{A} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{2A_1 y_1 + A_2 y_2}{2A_1 + A_2} = \frac{2 \cdot 14,06 \cdot (1,6 + 4,01) + 25,6 \cdot 0,8}{2 \cdot 14,06 + 25,6} =$$

$$= 3,32 \text{ см.}$$

Определяем центральные моменты инерции:

$$I_{X_0} = \sum \left(I_{X_i} + m_i^2 A_i \right) = 2\left(I_{X_1} + m_1^2 A_1 \right) + I_{X_2} + m_2^2 A_2 =$$

$$= 2\left(226 + 2,29^2 \cdot 14,06\right) + 5,46 + 2,52^2 \cdot 25,6 = 767,5 \text{ см}^4,$$

где $m_1 = y_1 - y_0 = 5{,}61 - 3{,}32 = 2{,}29$ см;

$m_2 = y_0 - y_2 = 3{,}32 - 0{,}8 = 2{,}52$ см;

$$I_{Y_0} = \sum \left(I_{Y_i} + n_i^2 A_i \right) = 2\left(I_{Y_1} + n_1^2 A_1 \right) + I_{Y_2} + n_2^2 A_2 =$$

$$= 2\left(73,73 + 6,2^2 \cdot 14,06\right) + 546 = 1774,4 \text{ см}^4,$$

где $n_1 = b - x_c = 8 - 1{,}8 = 6{,}2$ см;

$n_2 = 0.$

Главные центральные моменты инерции

$$I_U = I_{\max} = 1774,4 \text{ см}^4;$$

$$I_V = I_{\min} = 767,5 \text{ см}^4.$$

Задача 3.4

Для сечения, составленного из прокатного профиля и листа, рис. 3.7, определить положение центра тяжести и главных центральных осей, а также значения главных центральных моментов инерции.

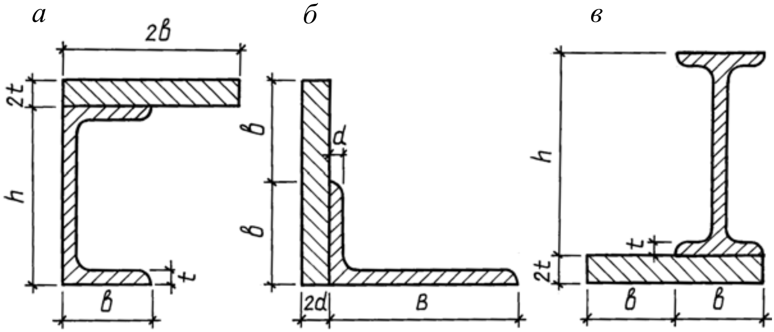


Рис. 3.7

Данные к вариантам задачи:

а) швеллер № 16, лист 12,8 × 1,68 см;

б) неравнобокий уголок 10 × 6,3 × 1 см, лист 12,6 × 2 см;

в) двутавр № 16, лист 16,2 × 1,56 см.

Ответы:

а. $x_0 = 4{,}30$ см, $y_0 = 12{,}8$ см, $\alpha_0 = -41{,}35^{\circ}$, $J_u = 1666$ см^4, $J_v = 420$ см^4.

б. $x_0 = 2{,}7$ см, $y_0 = 4{,}5$ см, $\alpha_0 = 31{,}49^{\circ}$, $J_u = 748$ см^4, $J_v = 194$ см^4.

в. $x_0 = 9{,}90$ см, $y_0 = 4{,}68$ см, $\alpha_0 = -20^{\circ}$, $J_u = 1890$ см^4, $J_v = 651$ см^4.

Вариант *б*)

Решение

Из таблиц сортамента выписываем необходимые данные для уголка. В рассматриваемом сечении, рис. 3.8, уголок расположен иначе, чем в таблице сортамента, поэтому значения моментов инерции и координат центра тяжести нужно записать с учетом его положения:

$$A_1 = 15{,}47 \text{см}^2, \quad I_{X_1} = 47{,}2 \text{ см}^4, \quad I_{Y_1} = 154 \text{ см}^4,$$

$$I_{X_1 Y_1} = 48{,}6 \text{ см}^4, \quad x_c = 3{,}4 \text{ см}, \quad y_c = 1{,}58 \text{ см}.$$

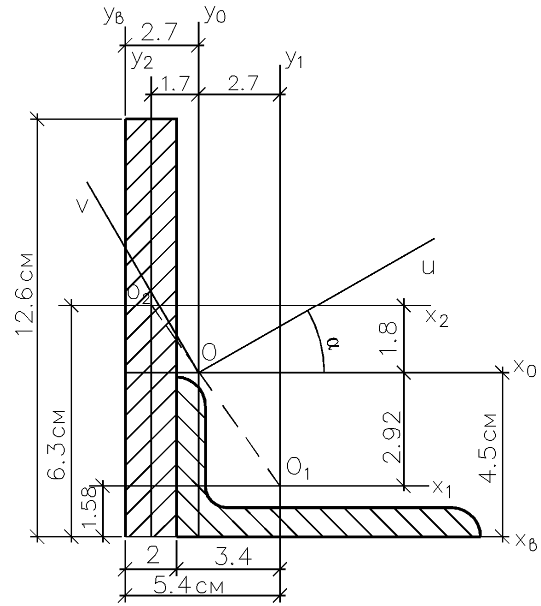


Рис. 3.8

Геометрические характеристики листа:

$$A_2 = bh = 12{,}6 \cdot 2 = 25{,}2 \text{ см}^2;$$

$$I_{X_2} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{2 \cdot 12{,}6^3}{12} = 333{,}3 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y_2} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{2^3 \cdot 12{,}6}{12} = 8{,}4 \text{ см}^4.$$

Проводим вспомогательные оси и находим положение центра тяжести сечения:

$$x_0 = \frac{S_Y}{A} = \frac{A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{15{,}47 \cdot 5{,}4 + 25{,}2 \cdot 1}{15{,}47 + 25{,}2} = 2{,}7 \text{ см};$$

$$y_0 = \frac{S_X}{A} = \frac{A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{15{,}47 \cdot 1{,}58 + 25{,}2 \cdot 6{,}3}{15{,}47 + 25{,}2} = 4{,}5 \text{ см},$$

где x_i, y_i – координаты центров тяжести элементов во вспомогательных осях.

Определяем центральные моменты инерции:

$$I_{X_0} = \sum\left(I_{X_i} + m_i^2 A_i\right) = I_{X_1} + m_1^2 A_1 + I_{X_2} + m_2^2 A_2 =$$
$$= 47{,}2 + 2{,}92^2 \cdot 15{,}47 + 333{,}3 + 1{,}8^2 \cdot 25{,}2 = 594\ \text{см}^4,$$

где $m_1 = -\left(y_0 - y_1\right) = -\left(4{,}5 - 1{,}58\right) = -2{,}92$ см (ниже оси X_0);

$m_2 = y_2 - y_0 = 6{,}3 - 4{,}5 = 1{,}8$ см (выше оси X_0).

$$I_{Y_0} = \sum\left(I_{Y_i} + n_i^2 A_i\right) = I_{Y_1} + n_1^2 A_1 + I_{Y_2} + n_2^2 A_2 =$$
$$= 154 + 2{,}7^2 \cdot 15{,}47 + 8{,}4 + 1{,}7^2 \cdot 25{,}2 = 348\ \text{см}^4,$$

где $n_1 = x_1 - x_0 = 5{,}4 - 2{,}7 = 2{,}7$ см (правее оси Y_0);

$n_2 = -\left(x_0 - x_2\right) = -\left(2{,}7 - 1\right) = -1{,}7$ см (левее оси Y_0).

Определяем центробежный момент инерции:

$$I_{X_0Y_0} = \sum\left(I_{X_iY_i} + m_i n_i A_i\right) = I_{X_1Y_1} + m_1 n_1 A_1 + I_{X_2Y_2} + m_2 n_2 A_2 =$$
$$= -48{,}6 + (-2{,}92) \cdot 2{,}7 \cdot 15{,}47 + 0 + 1{,}8 \cdot (-1{,}7) \cdot 25{,}2 = -248\ \text{см}^4,$$

где центробежный момент инерции уголка $I_{X_1Y_1}$ отрицательный, так как это связано с положением уголка в сечении.

Положение главных центральных осей определяем по формуле

$$\text{tg}2\alpha_0 = -\frac{2I_{X_0Y_0}}{I_{X_0} - I_{Y_0}} = -\frac{2 \cdot (-248)}{594 - 348} = 2{,}02;$$

$$2\alpha_0 = 63^\circ 66', \qquad \alpha_0 = 31^\circ 49'.$$

Для определения положения главной оси U необходимо отложить угол от оси с большим моментом инерции, т. е. оси X_0, против часовой стрелки, так как $\alpha_0 > 0$. Ось V будет ей перпендикулярна.

Определяем главные центральные моменты инерции:

$$I_U = \frac{1}{2}\left[\left(I_{X_0} + I_{Y_0}\right) + \sqrt{\left(I_{X_0} - I_{Y_0}\right)^2 + 4I_{X_0Y_0}{}^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(594 + 348\right) + \sqrt{\left(594 - 348\right)^2 + 4 \cdot 248^2}\right] = 748 \text{ см}^4;$$

$$I_V = \frac{1}{2}\left[\left(I_{X_0} + I_{Y_0}\right) - \sqrt{\left(I_{X_0} - I_{Y_0}\right)^2 + 4I_{X_0Y_0}{}^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(594 + 348\right) - \sqrt{\left(594 - 348\right)^2 + 4 \cdot 248^2}\right] = 194 \text{ см}^4.$$

4. КРУЧЕНИЕ

Задача 4.1

Стальной брус круглого поперечного сечения, рис. 4.1, нагружен скручивающими моментами T_e, кН·м.

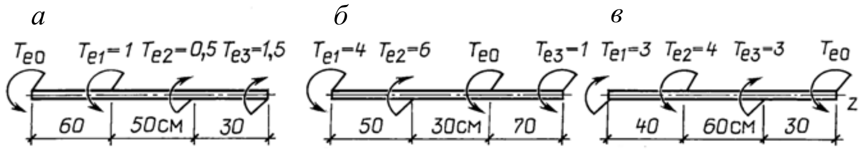


Рис. 4.1

Определить диаметр вала из условий прочности и жесткости, если R_s = 120 МПа, G = 80 ГПа, θ_{adm} = 0,04 рад/м.

Ответы:
а. d = 5,0 см;
б. d = 6,0 см;
в. d = 5,5 см.

Вариант *а*)

Решение

Определим неизвестный скручивающий момент T_{e0}, составив уравнение равновесия:

$$\sum T_z = -T_{e_0} - T_{e_1} + T_{e_2} + T_{e_3} = 0;$$

$$T_{e_0} = -T_{e_1} + T_{e_2} + T_{e_3} = -1 + 0,5 + 1,5 = 1 \text{ кН·м}.$$

Используя метод сечений, на характерных участках определим внутренние усилия (крутящие моменты) и построим эпюру (рис. 4.2).

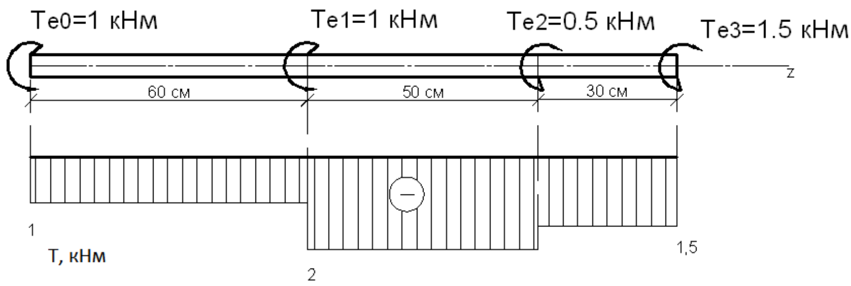


Рис. 4.2

Для наибольшего значения крутящего момента (2 кН·м) определим диаметр из условия прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} = \frac{16T_{\max}}{\pi d^3} \le R_s,$$

отсюда

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 120 \cdot 10^6}} = 0{,}440 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 4{,}4 \text{ см}.$$

Определим диаметр из условия жесткости:

$$\theta_{\max} = \frac{T_{\max}}{J_p G} = \frac{32T_{\max}}{\pi d^4 G} \le \theta_{\text{adm}},$$

отсюда

$$d' = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}04}} = 0{,}502 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 5{,}02 \text{ см}.$$

Принимаем большее значение $d = 5$ см.

Задача 4.2

Проверить прочность и жесткость стального бруса круглого поперечного сечения, рис. 4.3, защемленного одним концом.

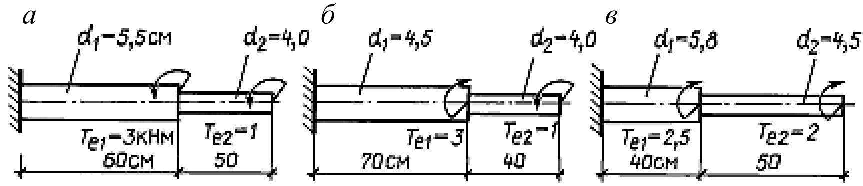


Рис. 4.3

Для материала стержня R_s = 120 МПа, G = 80 ГПа, θ_{adm} = 0,07 рад.

Ответы:

а. τ_{max} = 123 МПа > 120 МПа (2,5 % допустимо),
θ_{max} = 0,0557 рад/м < θ_{adm}.
б. τ_{max} = 112 МПа < 120 МПа, θ_{max} = 0,0621 рад/м < θ_{adm}.
в. τ_{max} = 118 МПа < 120 МПа, θ_{max} = 0,0621 рад/м < θ_{adm}.

Вариант *а*)

Решение

Построим эпюру внутренних усилий. Брус, рис. 4.4, имеет два расчетных участка. Крутящие моменты на участках (сечения рассматриваются справа)

T_2 = 1 кН·м; T_1 = 1 + 3 = 4 кН·м.

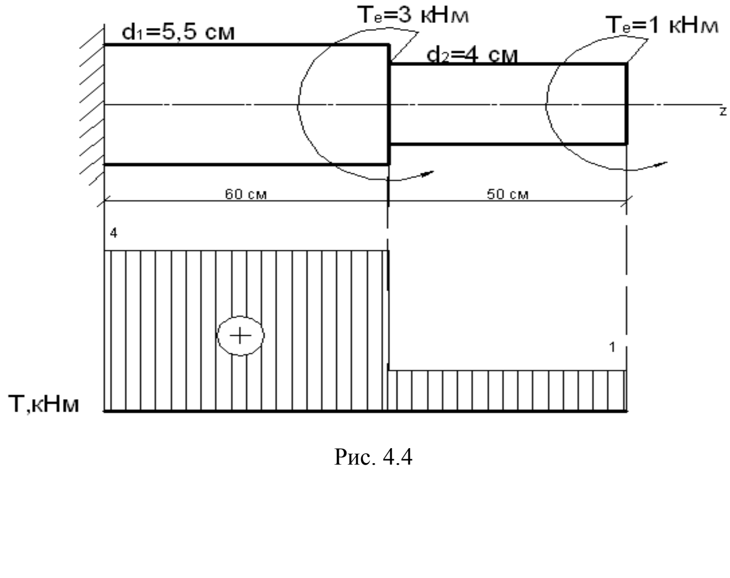


Рис. 4.4

Определим напряжения на участках:

$$\tau_1 = \frac{T_1}{W_p} = \frac{16T_1}{\pi d_1^{\,3}} = \frac{16 \cdot 4 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 5{,}5^3 \cdot 10^{-6}} = 122{,}5 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{T_2}{W_p} = \frac{16T_2}{\pi d_2^{\,3}} = \frac{16 \cdot 1 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 4^3 \cdot 10^{-6}} = 79{,}6 \text{ МПа}.$$

Определим относительные деформации на участках:

$$\theta_1 = \frac{T_1}{GI_{p_1}} = \frac{32T_1}{G\pi d_1^{\,4}} = \frac{32 \cdot 4 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3{,}14 \cdot 5{,}5^4 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0557 \text{ рад/м};$$

$$\theta_2 = \frac{T_2}{GI_{p_2}} = \frac{32T_2}{G\pi d_2^{\,4}} = \frac{32 \cdot 1 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3{,}14 \cdot 4^4 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0498 \text{ рад/м}.$$

Прочность и жесткость бруса обеспечены, так как $\tau_{\max} = 122{,}5$ МПа > R_s = 120 МПа (больше на 2,1 %, что допустимо);

$$\theta_{\max} = 0{,}0557 \text{ рад/м} < \theta_{adm} = 0{,}07 \text{рад/м}.$$

Задача 4.3

Для стержня, рис. 4.5, определить наибольшее допустимое значение скручивающих моментов и угол поворота сечения *K*.

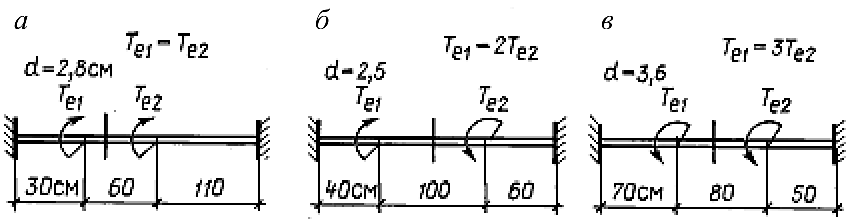


Рис. 4.5

Для материала стержня R_s = 120 МПа, G = 80 ГПа.

Ответы:
а. $T_{e1} = T_{e2} = 369{,}3$ Н·м, $\varphi = 2{,}54$ град.
б. $T_{e1} = 306{,}7$ Н·м, $T_{e2} = 613{,}4$ Н·м, $\varphi = 8{,}03$ град.
в. $T_{e1} = 1500$ Н·м, $T_{e2} = 500$ Н·м, $\varphi = 2{,}83$ град.

Вариант *а*)

$$T_{e1} = T_{e2}, \quad d = 2{,}8 \text{ см.}$$

Решение

В соответствии с характером нагрузки, рис. 4.6, в опорах возникает по одной реакции – реактивному моменту T (предварительно направляем произвольно).

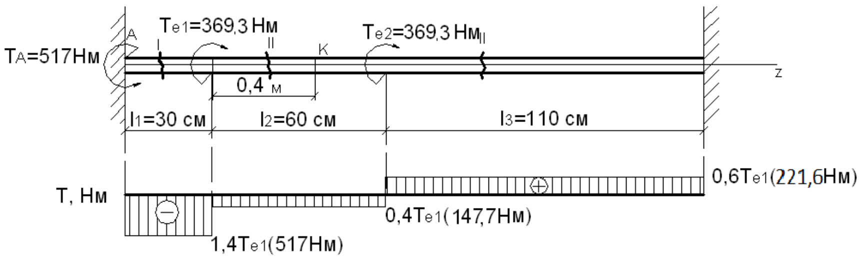


Рис. 4.6

Уравнение равновесия можно составить только одно:

$$\sum M_z = -T_A + T_{e_1} + T_{e_2} - T_{д} = 0, \tag{4.1}$$

у которого две неизвестные величины, следовательно, брус один раз статически неопределимый (2 – 1 = 1). Для составления недостающего уравнения (дополнительно к уравнению (4.1)) выберем основную (статически определимую) систему, например, отбросим левую опору, составим уравнение угла поворота сечения A и приравняем его нулю. Используем формулу для определения угла поворота при кручении:

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}.$$

Сократив на GI_p получим

$$\varphi_A = -T_A \cdot 2 + T_{e1} \cdot 1,7 + T_{e2} \cdot 1,1 = 0;$$

$$T_A = 1,4T_{e1}.$$

Определением момента T_A статическая неопределимость раскрыта. Определим значение крутящих моментов на участках бруса и построим эпюу:

$$T_1 = -T_A = -1,4T_{e1};$$

$$T_2 = -1,4T_{e1} + T_{e1} = -0,4T_{e1};$$

$$T_3 = -1,4T_{e1} + T_{e1} + T_{e2} = 0,6T_{e1}.$$

Из эпюры следует, что $T_{\max} = 1,4T_{e1}$. Тогда из условия при кручении максимальный допустимый крутящий момент, который может воспринять брус, будет

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \le R_s \longrightarrow T_{\text{adm}} = R_s W_p;$$

$$\max T_{\text{adm}} = \frac{120 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 2,8^3 \cdot 10^{-6}}{16} = 517 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

тогда

$$1,4T_{e1} = 517 \to T_{e1} = 369,3 \text{ Н} \cdot \text{м} \to T_{e2} = 369,3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Угол поворота сечения K определим, используя формулу

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p};$$

$$\varphi_K = -\varphi(T_A) + \varphi(T_{e1}) = \frac{-T_A \cdot (l_1 + 0,4) + T_{e1} \cdot 0,4}{GI_p} =$$

$$= \frac{32 \cdot (-517 \cdot 0,7 + 369,3 \cdot 0,4)}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 2,8^4 \cdot 10^{-8}} = -0,0443 \text{ рад} \cdot \frac{180^\circ}{3,14} = -2,54 \text{ град}.$$

5. ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

Эпюры внутренних сил

Задача 5.1

Для консольной балки, рис. 5.1, построить эпюры Q и M.

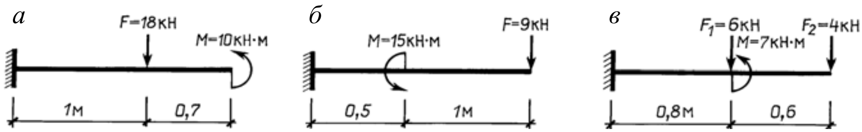


Рис. 5.1

Ответы:
а. $Q_{\max} = 18$ кН, $M_{\max} = 10$ кН·м.
б. $Q_{\max} = 9$ кН, $M_{\max} = 9$ кН·м.
в. $Q_{\max} = 10$ кН, $M_{\max} = 4{,}6$ кН·м.

Вариант *а*)

Решение

Имеем частный случай, когда реакции в опоре A можно не определять. Пойдем со стороны свободного конца и определим поперечную силу и изгибающие моменты в характерных точках, рис. 5.2.

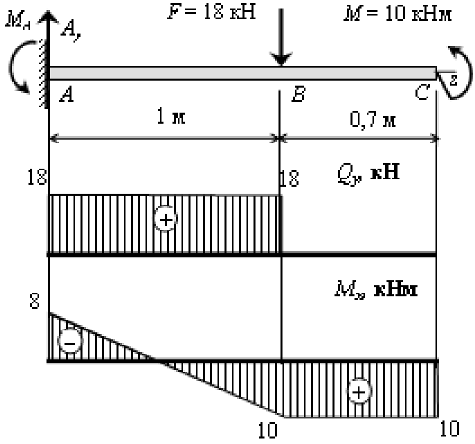


Рис. 5.2

Сечение C:

$$Q = 0; \qquad M = 10 \text{ кН·м}.$$

Сечение B:

$$Q^{пр} = 0; \qquad Q^{л} = 18 \text{ кН}; \qquad M = 10 \text{ кН·м}.$$

Сечение A:

$$Q = 18 \text{ кН}; \qquad M = 10 - 18 \cdot 1 = -8 \text{ кН·м}.$$

Ответ: $Q_{max} = 18$ кН; $M_{max} = 10$ кН·м.

Задача 5.2

Для двухопорной балки, рис. 5.3, построить эпюры Q и M.

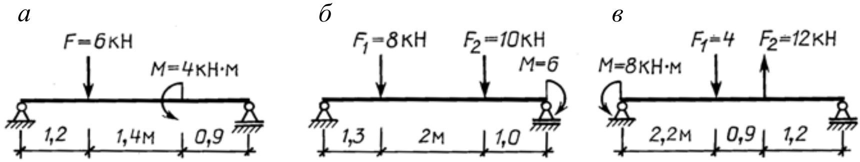


Рис. 5.3

Ответы:

а. $Q_{max} = 5{,}09$ кН, $M_{max} = 6{,}1$ кН·м.
б. $Q_{max} = 11{,}5$ кН, $M_{max} = 8{,}46$ кН·м.
в. $Q_{max} = 8{,}67$ кН, $M_{max} = 9{,}54$ кН·м.

Вариант *а*)

Решение

1. Используя уравнения равновесия, определим реакции в опорах, рис. 5.4:

$$\Sigma M_A = -B_y \cdot 3{,}5 - 4 + 6 \cdot 1{,}2 = 0; \qquad B_y = 0{,}91 \text{ кН}.$$

$$\Sigma M_B = A_y \cdot 3{,}5 - 6 \cdot 2{,}3 - 4 = 0; \qquad A_y = 5{,}09 \text{ кН}.$$

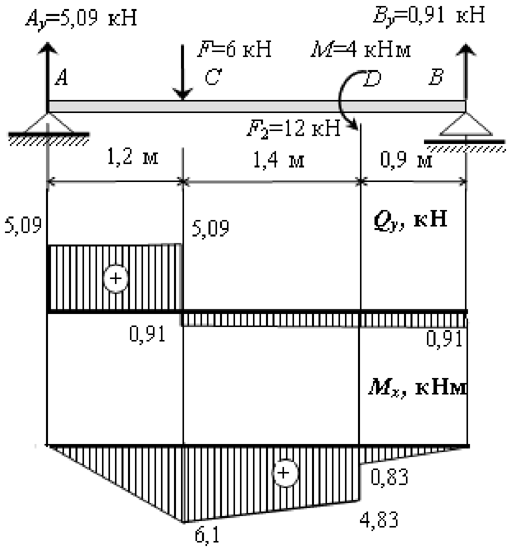


Рис. 5.4

Проверка:

$$\Sigma Y = 5,09 - 6 + 0,91 = 0.$$

2. С помощью метода сечений вычислим поперечную силу и изгибающий момент в характерных сечениях балки.

Сечение A:

$$Q = 5,09 \text{ кН}; \quad M = 0.$$

Сечение C:

$$Q^{л} = 5,09 \text{ кН}; \quad Q^{пр} = 5,09 - 6 = -0,91 \text{ кН};$$

$$M = 5,09 \cdot 1,2 = 6,1 \text{ кН·м}.$$

Сечение D:

$$Q = 5,09 - 6 = -0,91 \text{ кН};$$

$$M^{л} = -5,09 \cdot 2,6 + 6 \cdot 1,4 = -4,83 \text{ кН·м};$$

$$M^{пр} = -5,09 \cdot 2,6 + 6 \cdot 1,4 + 4 = 0,83 \text{ кН·м}.$$

Ответ: Q_{max} = 5,09 кН; M_{max} = 6,1 кН·м.

Задача 5.3

Для двухопорной балки с консолью, рис. 5.5, построить эпюры Q и M.

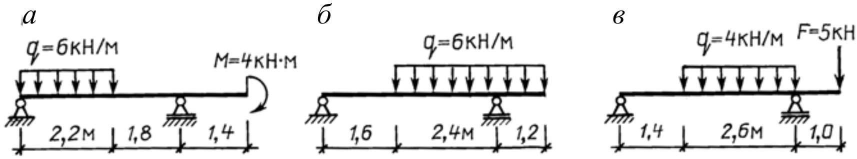


Рис. 5.5

Ответы:
а. Q_{max} = 8,57 кН, M_{max} = 6,12 кН·м.
б. Q_{max} = 11,16 кН, M_{max} = 6,06 кН·м.
в. Q_{max} = 6,77 кН, M_{max} = 6,0 кН·м.

Вариант *а*)

Р е ш е н и е

$$A_y = \frac{6 \cdot 2,2\left(1,1+1,8\right)-4}{4} = 8,57 \text{ кН};$$

$$B_y = \frac{4+6 \cdot 2,2 \cdot \dfrac{2,2}{2}}{4} = 4,63 \text{ кН, рис. 5.6}$$

$$Q = A_y - qz_0 = 0, \qquad z_0 = 1,43 \text{ м.}$$

При z_0 = 1,43 м $\quad M = 8,57 \cdot 1,43 - 6 \cdot \dfrac{1,43^2}{2} = 6,12$ кН·м.

Ответ: Q_{max} = 8,57 кН; $\quad M_{max}$ = 6,12 кН·м.

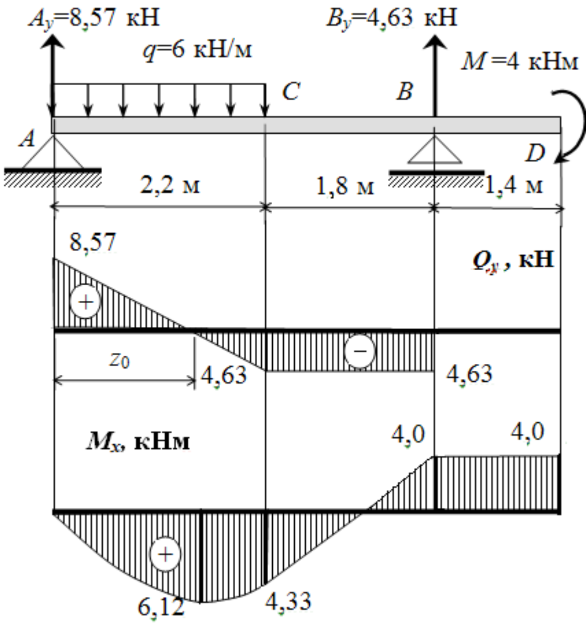


Рис. 5.6

Задача 5.4

Для двухпролетной балки с промежуточным шарниром, рис. 5.7, построить эпюры Q и M.

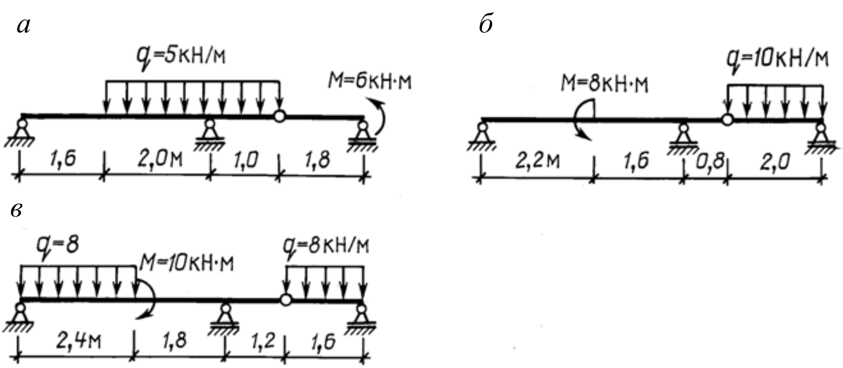


Рис. 5.7

Ответы:
а. Q_{max} = 8,85 кН, M_{max} = 6,0 кН·м.
б. Q_{max} = 10,0 кН, M_{max} = 8,0 кН·м.
в. Q_{max} = 9,7 кН, M_{max} = 9,8 кН·м.

Вариант *а*)

Решение

$$\Sigma M_E^{\text{п}} = -6 + C_y \cdot 1{,}8 = 0; \qquad C_y = -3{,}33 \text{ кН, рис. 5.8.}$$

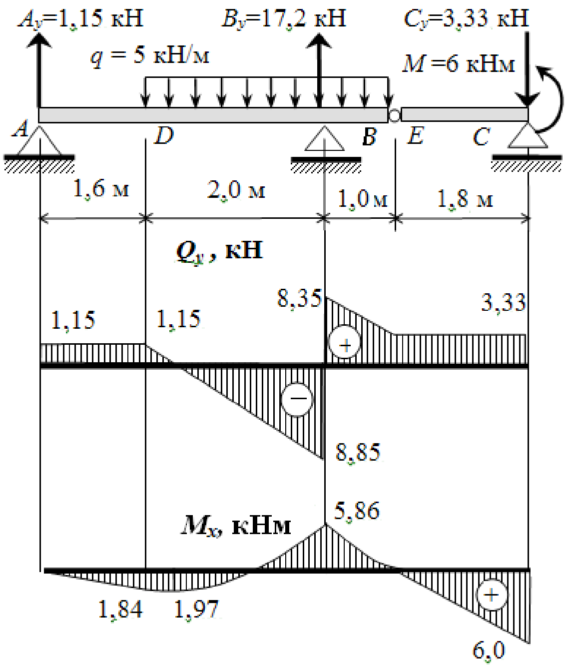


Рис. 5.8

$$\Sigma M_A = -B_y \cdot 3{,}6 - 6 + 3{,}33 \cdot 6{,}4 + 5 \cdot 3 \cdot 3{,}1 = 0; \qquad B_y = 17{,}2 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_E^{\text{л}} = A_y \cdot 4{,}6 + 17{,}2 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 0; \qquad A_y = 1{,}15 \text{ кН.}$$

$$Q_{max} = 8{,}85 \text{ кН}; \qquad M_{max} = 6 \text{ кН·м.}$$

Задача 5.5

По эпюрам Q и M установить вид нагрузки, ее значение и направление, а также вид опор балки, рис. 5.9.

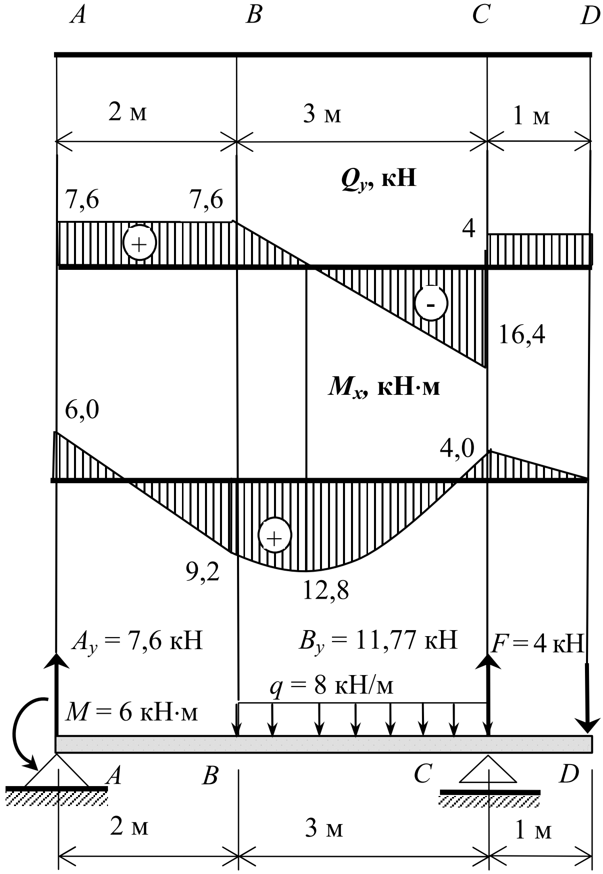


Рис. 5.9

Решение

В сечениях A, C, D приложены сосредоточенные силы; в сечении A – сосредоточенный момент.

В сечении A: шарнирно-подвижная или неподвижная опора.

A_y = 7,6 кН (вверх); M = 6 кН·м (против часовой стрелки).

В сечении C: шарнирно-подвижная или неподвижная опора:

$$C_y = 4 + 16{,}4 = 20{,}4 \text{ кН (вверх)}.$$

В сечении D

$$F = 4 \text{ кН (вниз)}.$$

Участок BC: равномерно распределенная нагрузка

$$q = \frac{7{,}6 + 16{,}4}{3} = 8 \text{ кН/м (вниз)}.$$

Задача 5.6

Для заданной схемы нагружения, рис. 5.10, построить эпюры Q_y и M_x; подобрать круглое, прямоугольное и двутавровое сечение; вычислить коэффициент экономичности данных сечений; выполнить проверку прочности по нормальным и касательным напряжениям.

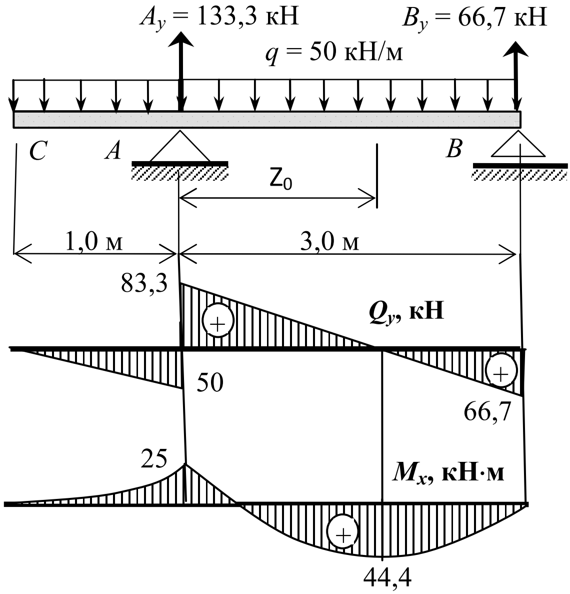


Рис. 5.10

Для материала балки R = 12 МПа, R_s = 130 МПа.

Соотношение сторон для прямоугольного сечения принять $h/b = 1{,}4$.

Р е ш е н и е

1. Определим опорные реакции:

$$\Sigma M_A = -B_y \cdot 3 + 50 \cdot (3+1) \cdot \left(\frac{3+1}{2} - 1 \right) = 0, \quad B_y = 66{,}7 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = A_y \cdot 3 - 50 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 0, \quad A_y = 133{,}3 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\Sigma Y = 133{,}3 - 50 \cdot 4 + 66{,}7 = 0.$$

2. Вычислим значения Q и M в характерных сечениях балки и построим их эпюры.

Сечение C:

$$Q = 0, \quad M = 0.$$

Сечение A:

$$Q^{\text{л}} = -50 \cdot 1 = 50 \text{ кН};$$

$$Q^{\text{п}} = -50 \cdot 1 + 133{,}3 = 83{,}3 \text{ кН};$$

$$M = -50 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = 25 \text{ кН·м}.$$

Сечение B:

$$Q^{\text{л}} = -50 \cdot 4 + 133{,}3 = -66{,}7 \text{ кН};$$

$$M = 0.$$

Абсцисса z_0, где $Q = 0$, будет

$$z_0 = 1 + \frac{Q_A^{\text{п}}}{q} = 1 + \frac{83{,}3}{50} = 2{,}67 \text{ м}.$$

При $z = 2{,}67$ м

$$M_{\max} = -50 \cdot \frac{2{,}67^2}{2} + 133{,}3(2{,}67 - 1) = 44{,}4 \text{ кН·м}.$$

3. Из условия прочности определим требуемый момент сопротивления и подберем сечение:

$$W_x^{\text{тр}} \geq \frac{M_{\max}}{R} = \frac{44,4 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,211 \cdot 10^{-3} = 211\,\text{см}^3.$$

Для круглого поперечного сечения

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 211\,\text{см}^3,$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{211 \cdot 32}{3,14}} = 12,9\,\text{см}.$$

Принимаем $d = 13$ см.

Для прямоугольного поперечного сечения

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(1,4b)^2}{6} = 211\,\text{см}^3,$$

откуда $b = 8,64$ см, $h = 12,1$ см.

Принимаем $h = 12$ см, $b = 9$ см.

Для прокатного двутавра из сортамента принимаем № 22,

$$W_x = 232\,\text{см}^3.$$

4. Вычислим коэффициент экономичности для принятых размеров сечений балок по выражению

$$\omega = \frac{W_x}{\sqrt{A^3}}.$$

Для круглого поперечного сечения

$$W_x = \frac{3,14 \cdot 13^3}{32} = 216\,\text{см}^3, \quad A = \frac{3,14 \cdot 13^2}{4} = 132,7\,\text{см}^2, \quad \omega = 0,141.$$

Для прямоугольного поперечного сечения

$$W_x = \frac{9 \cdot 12^2}{6} = 216\ \text{см}^3,\ \ A = 12 \cdot 9 = 108\ \text{см}^2,\ \ \omega = 0{,}192.$$

Для двутавра W_x = 232 см^3, A = 30,6 см^2, ω = 1,37.

Из рассмотренных форм сечений балки наиболее экономичным является двутавр.

5. Вычислим максимальные значения нормальных и касательных напряжений для принятых размеров сечений балки.

Нормальные напряжения (максимальны в точках наиболее удаленных от нейтральной оси):

а) для круглого поперечного сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{44{,}4 \cdot 10^3}{216 \cdot 10^{-6}} = 0{,}206 \cdot 10^9\ \text{ГПа} = 206\ \text{МПа} < R = 210\ \text{МПа};$$

б) для прямоугольного поперечного сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{44{,}4 \cdot 10^3}{216 \cdot 10^{-6}} = 0{,}206 \cdot 10^9\ \text{ГПа} = 206\ \text{МПа} < R = 210\ \text{МПа};$$

в) для двутавра

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{44{,}4 \cdot 10^3}{232 \cdot 10^{-6}} = 0{,}191 \cdot 10^9\ \text{ГПа} = 191\ \text{МПа} < R = 210\ \text{МПа}.$$

Касательные напряжения (максимальны на уровне нейтральной оси):

а) для круглого поперечного сечения

$$\tau_{\max} = 1{,}33\frac{Q_{\max}}{A} = 1{,}33\frac{83{,}3 \cdot 10^3}{132{,}7} = 0{,}83 \cdot 10^7\ \text{Па} = 8{,}3\ \text{МПа} < R_s = 130\ \text{МПа};$$

б) для прямоугольного поперечного сечения

$$\tau_{\max} = 1{,}5\frac{Q_{\max}}{A} = 1{,}5\frac{83{,}3 \cdot 10^3}{108 \cdot 10^{-4}} = 1{,}16 \cdot 10^7\ \text{Па} = 11{,}6\ \text{МПа} < R_s = 130\ \text{МПа};$$

в) для двутавра № 22, $I_x = 2550$ см^4; $S_x = 131$ см^3; $d = 5{,}4$ мм (толщина стенки)

$$\tau_{\max} = \frac{83{,}3 \cdot 10^3 \cdot 131 \cdot 10^{-6}}{5{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 0{,}792 \cdot 10^8 \text{ Па} = 79{,}2 \text{ МПа} < R_s.$$

Проанализировав значения $\tau_{\max}$ для рассмотренных форм сечений, видим: если размеры сечений определены из условия прочности по нормальным напряжениям, то максимальные касательные напряжения далеко не достигают предельно допустимых значений.

Задача 5.7

Определить значения нормальных и касательных напряжений в точке K указанного сечения балки, рис. 5.11. Проверить прочность балки по этим напряжениям и построить их эпюры.

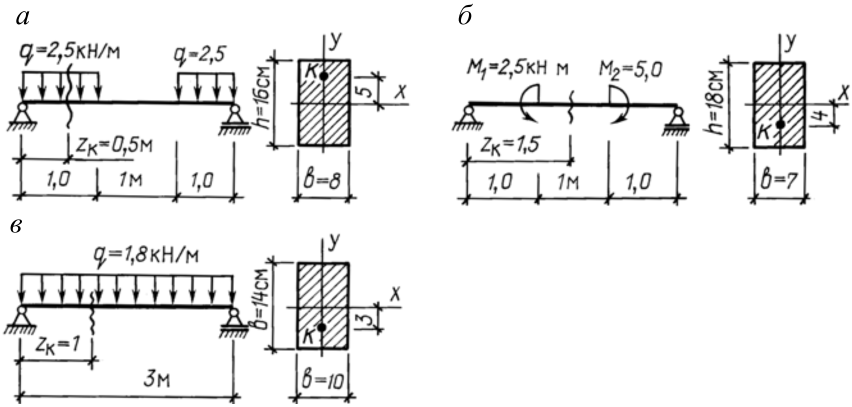


Рис. 5.11

Для материала балки $R = 12$ МПа, $R_s = 3$ МПа.

Ответы:
а. $\sigma_к = 1{,}72$ МПа, $\tau_к = 0{,}09$ МПа, $\sigma_{\max} = 3{,}66$ МПа, $\tau_{\max} = 0{,}29$ МПа.
б. $\sigma_к = 4{,}41$ МПа, $\tau_к = 0{,}03$ МПа, $\sigma_{\max} = 11{,}02$ МПа, $\tau_{\max} = 0{,}099$ МПа.
в. $\sigma_к = 2{,}36$ МПа, $\tau_к = 0{,}079$ МПа, $\sigma_{\max} = 6{,}18$ МПа, $\tau_{\max} = 0{,}29$ МПа.

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

1. Определим реакции опор, рис. 5.12:

$$A_y = B_y = q \cdot 1 = 2,5 \cdot 1 = 2,5 \text{ кН}.$$

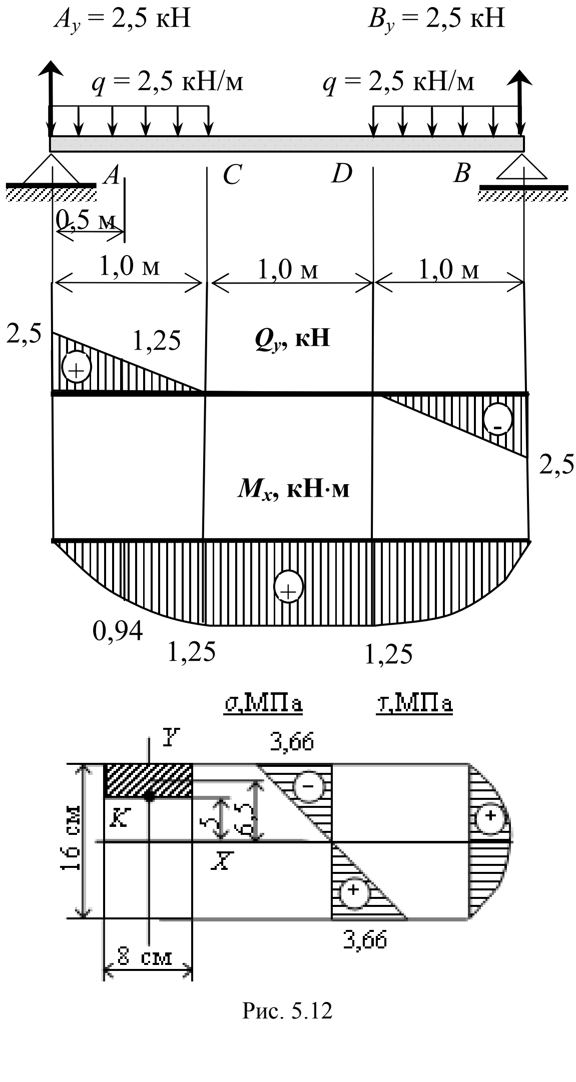


Рис. 5.12

2. Определим Q, M и построим эпюры. При z = 0,5 м

$$Q = 2{,}5 - 2{,}5 \cdot 0{,}5 = 1{,}25 \text{ кН};$$

$$M = 2{,}5 \cdot 0{,}5 - 2{,}5\frac{0{,}5^2}{2} = 0{,}94 \text{ кН·м}.$$

3. Вычислим геометрические характеристики сечения:

$$I_x = \frac{8 \cdot 16^3}{12} = 2731 \text{ см}^4;$$

$$S_K^{\text{отс}} = 8 \cdot 3 \cdot 6{,}5 = 156 \text{ см}^3;$$

$$S_x^{\text{отс}} = 8 \cdot 8 \cdot 4 = 256 \text{ см}^3.$$

4. Определим значения нормальных и касательных напряжений в точке K:

$$\sigma_K = \frac{0{,}94 \cdot 10^3}{2731 \cdot 10^{-8}} \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 1{,}72 \text{ МПа};$$

$$\tau_K = \frac{1{,}25 \cdot 10^3 \cdot 156 \cdot 10^{-6}}{2731 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 10^{-2}} = 0{,}09 \text{ МПа}.$$

5. Проверим балку на прочность и построим эпюры напряжений:

$$Q_{\max} = 2{,}5 \text{ кН}; \quad M_{\max} = 2{,}5 \cdot 1 - 2{,}5 \cdot \frac{1^2}{2} = 1{,}25 \text{ кН·м}.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{1{,}25 \cdot 10^3}{2731 \cdot 10^{-8}} \cdot 8 \cdot 10^{-2} = 3{,}66 \text{ МПа} < R;$$

$$\tau_{\max} = \frac{2{,}5 \cdot 10^3 \cdot 256 \cdot 10^{-6}}{2731 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 10^{-2}} = 0{,}29 \text{ МПа} < R_s.$$

Задача 5.8

Подобрать номер прокатного профиля для двухопорной балки с консолью, рис. 5.13, если R = 210 МПа, R_s = 130 МПа.

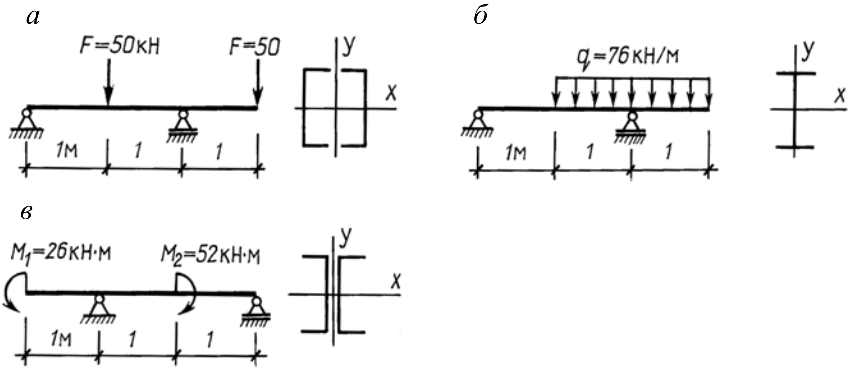


Рис. 5.13

Построить эпюры σ и τ.

Ответы:
а. Швеллер № 18, σ_{max} = 207 МПа, τ_{max} = 31,4 МПа.
б. Двутавр № 20, σ_{max} = 207 МПа, τ_{max} = 82,6 МПа.
в. Швеллер № 16, σ_{max} = 209 МПа, τ_{max} = 9,41 МПа.

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

$$Q_{max} = 50 \text{ кН}; \quad M_{max} = 50 \text{ кН·м, рис. 5.14.}$$

$$W_x^1 = \frac{50 \cdot 10^3}{2 \cdot 210 \cdot 10^6} = 119 \text{ см}^3.$$

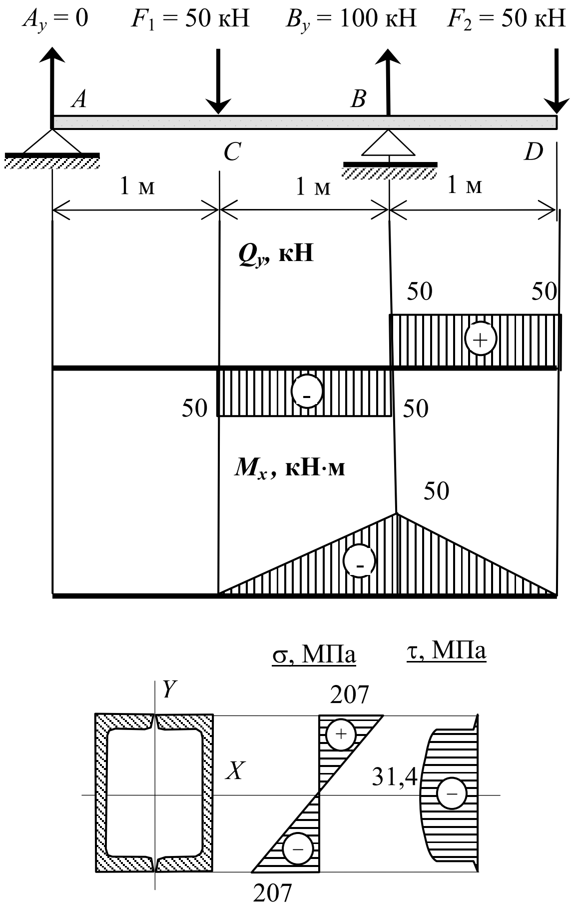


Рис. 5.14

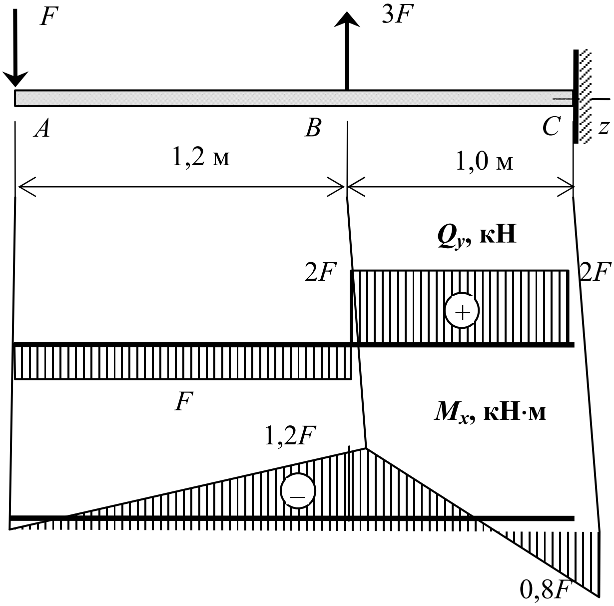
Принимаем швеллер № 18: $W_x = 121$ см^3; $I_x = 1090$ см^4; $S_x = 69{,}8$ см^3; $d = 5{,}1$ мм.

$$\sigma_{\max} = \frac{50 \cdot 10^3}{2 \cdot 121 \cdot 10^{-6}} = 207 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = \frac{-50 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 69{,}8 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1090 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-3}} = -31{,}4 \text{ МПа}.$$

Задача 5.9

Определить наибольшую допустимую нагрузку на чугунную балку, рис. 5.15, расположив ее сечение рационально по отношению к этой нагрузке, если расчетное сопротивление на растяжение R_t = 50 МПа, на сжатие R_c = 140 МПа.



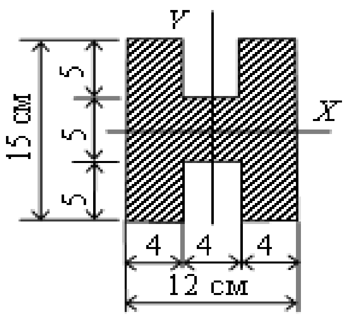


Рис. 5.15

Р е ш е н и е

$$I_x = \frac{4 \cdot 15^3}{12} \cdot 2 + \frac{4 \cdot 5^3}{12} = 2292\ \text{см}^4; \qquad I_y = \frac{15 \cdot 12^3}{12} - \frac{5 \cdot 4^3}{12} \cdot 2 = 2107\,\text{см}^4;$$

$$W_x = \frac{2292}{7{,}5} = 306\ \text{см}^3; \qquad W_y = \frac{2107}{6} = 351\ \text{см}^3.$$

Так как $W_y > W_x$, то сечение следует повернуть на 90°.

$$M_y = W_y R_t = 351 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 10^6 = 17{,}6\ \text{кН·м};$$

$$1{,}2F = M_y;$$

$$F = 17{,}6\ /\ 1{,}2 = 14{,}7\ \text{кН}.$$

Задача 5.10

Подобрать номер прокатного профиля и произвести полную проверку прочности балки, рис. 5.16, если R = 210 МПа, R_s = 130 МПа.

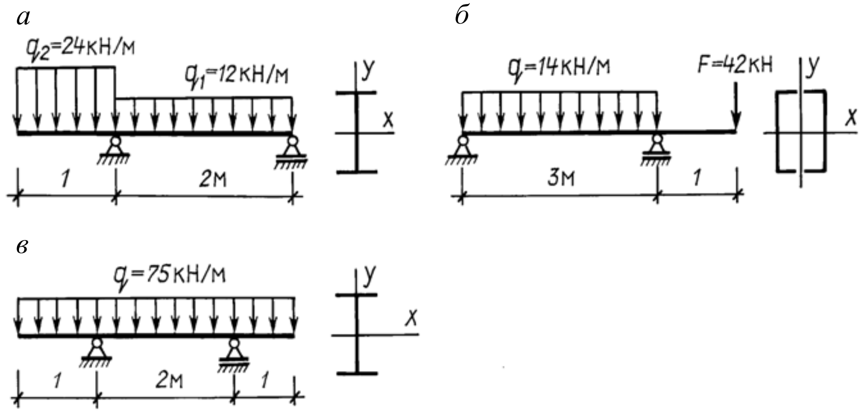


Рис. 5.16

Ответы:

а. Двутавр № 12, τ_{max} = 48,1 МПа, σ_{des} = 192,4 МПа.

б. Швеллер № 16а, τ_{max} = 30,3 МПа, σ_{des} = 185,6 МПа.

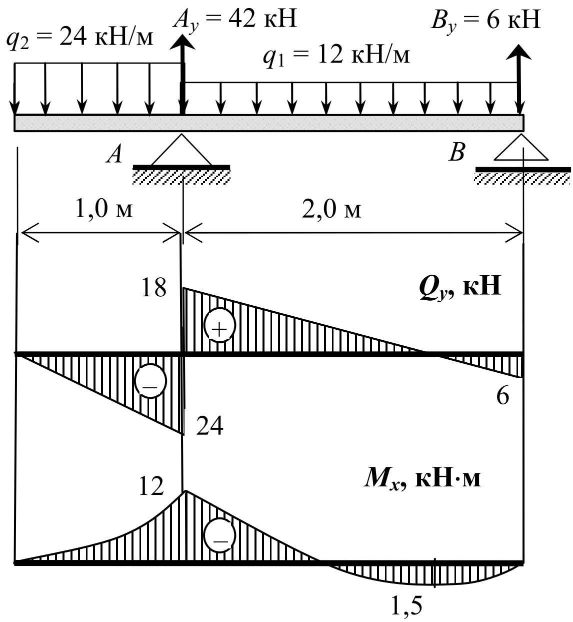
в. Двутавр № 20, τ_{max} = 81,5 МПа, σ_{des} = 217 МПа (перенапряжение 3,3 %).

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

Q_{max} = 24 кН; M_{max} = 12 кН·м, рис. 5.17.

$$W_x = \frac{M_{max}}{R} = \frac{12 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 57 \text{ см}^3.$$



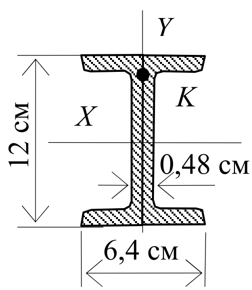


Рис. 5.17

Принимаем двутавр № 12: W_x = 58,4 см^3; I_x = 350 см^4; S_x = 33,7 см^3; d = 4,8 мм; b = 64 мм; t = 7,3 мм.

$$\sigma_{\max} = \frac{12 \cdot 10^3}{58,4 \cdot 10^{-6}} = 205\ \text{МПа} < R;$$

$$\tau_{\max} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 33,7 \cdot 10^{-6}}{4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 350 \cdot 10^{-8}} = 48,1\ \text{МПа} < R_s.$$

Опасное сечение A, опасная точка K:

$$\sigma_K = \frac{12 \cdot 10^3}{350 \cdot 10^{-8}} \cdot 5,27 \cdot 10^{-2} = 181\ \text{МПа};$$

$$\tau_K = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot \left(6,4 \cdot 0,73 \cdot (6 - \frac{0,73}{2}) \right) \cdot 10^{-6}}{4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 350 \cdot 10^{-8}} = 37,6\ \text{МПа};$$

$$\sigma_{\text{des}} = \sqrt{181^2 + 3 \cdot 37,6^2} = 192,4\ \text{МПа} < R.$$

Задача 5.11

Определить главные напряжения в указанных точках балки, рис. 5.18, и установить вид напряженного состояния. Сечение балки – двутавр № 24.

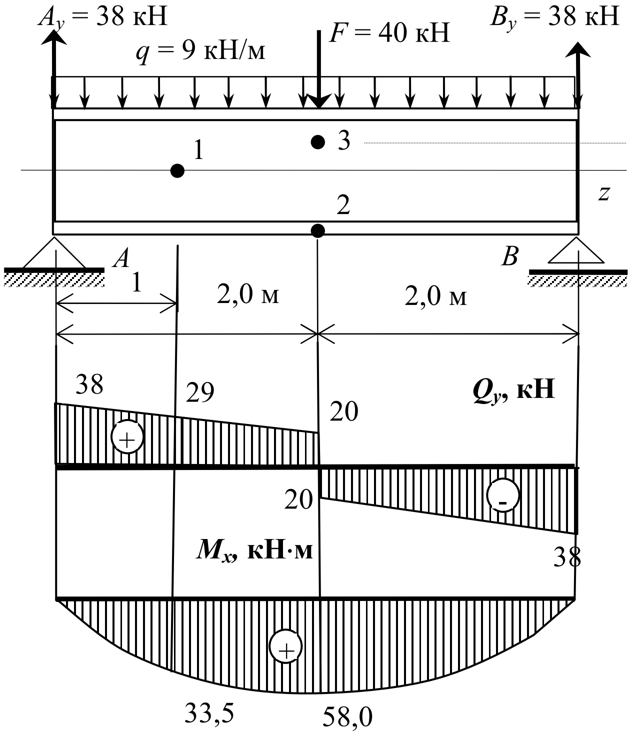
Решение

Двутавр № 24: W_x = 289 см^3; I_x = 3460 см^4; S_x = 163 см^3; d = 5,6 мм; b = 115 мм; t = 9,5 мм.

$$S_1 = S_x = 163\ \text{см}^3;$$

$$S_2 = 0;$$

$$S_3 = 11,5 \cdot 0,95(12 - 0,95/2) + 0,56 \cdot 5,05(6 + 5,05/2) = 150,6\ \text{см}^3.$$



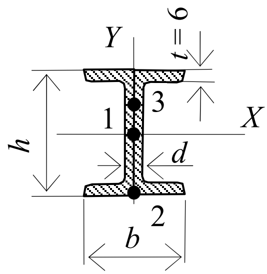


Рис. 5.18

Точка *1*:

$$\sigma = 0, \qquad \tau = \frac{29 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{5{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 24{,}4\ \text{МПа};$$

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 24,4^2} = \pm 24,4\,\text{МПа};$$

$$\sigma_{max} = \tau = 24,4\,\text{МПа};$$

$$\sigma_{min} = -24,4\,\text{МПа};$$

$\sigma_1 = 24,4\,\text{МПа}$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -24,4\,\text{МПа}$ – плоское напряженное состояние.

Точка *2*:

$$\sigma = \frac{58\cdot 10^3}{289\cdot 10^{-6}} = 201\,\text{МПа}, \quad \tau = 0;$$

$$\sigma_{max} = 201\,\text{МПа}; \quad \sigma_{min} = 0;$$

$\sigma_1 = 201\,\text{МПа}$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; – линейное напряженное состояние.

Точка *3*:

$$\sigma = \frac{58\cdot 10^3}{3460\cdot 10^{-8}}\cdot 6\cdot 10^{-2} = 101\,\text{МПа};$$

$$\tau = \frac{20\cdot 10^3\cdot 150,6\cdot 10^{-6}}{5,6\cdot 10^{-3}\cdot 3460\cdot 10^{-8}} = 15,5\,\text{МПа};$$

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{101}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{101^2 + 4\cdot 15,5^2} = 50,5 \pm 52,8;$$

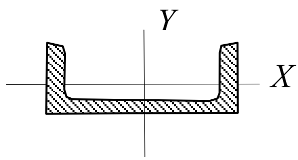
$$\sigma_{max} = 103,3\,\text{МПа};$$

$$\sigma_{min} = -2,3\,\text{МПа};$$

$\sigma_1 = 103,3\,\text{МПа}$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -2,3\,\text{МПа}$; – плоское напряженное состояние.

Задача 5.12

Определить наибольшую допустимую длину балки l, выполненную их швеллера № 30, уложенного плашмя, если R = 210 МПа, рис. 5.19.



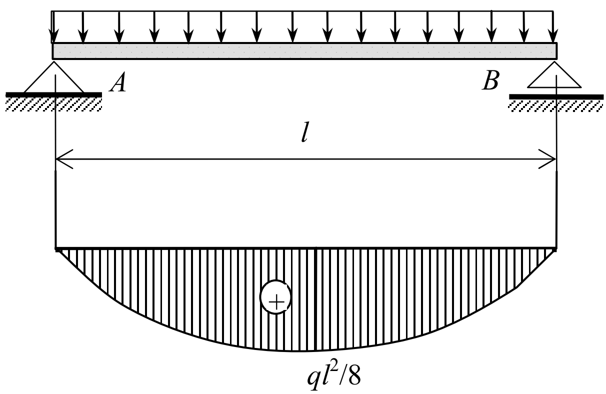


Рис. 5.19

Р е ш е н и е

Швеллер № 30: W_x = 43,6 см^3.

$$M_{\text{adm}} = W_x R = 43{,}6\cdot 10^{-6}\cdot 210\cdot 10^{6} = 9{,}16 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = 9{,}16 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Отсюда определим длину балки l = 4,94 м.

Задача 5.13

Деревянная балка, рис. 5.21, составлена из двух сосновых брусьев, соединенных поперечными дубовыми шпонками. Определить количество шпонок.

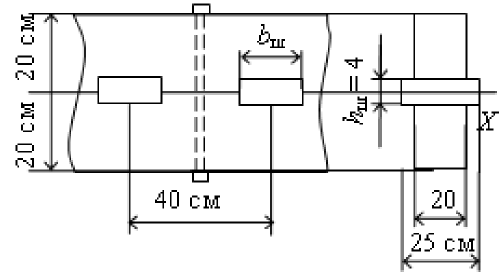


Рис. 5.20

Для дуба расчетное сопротивление на скалывание вдоль волокон R_{S90} = 1 МПа. Соединительные болты в расчет не принимать.

Р е ш е н и е

Q_{max} = 30 кН, рис. 5.21.

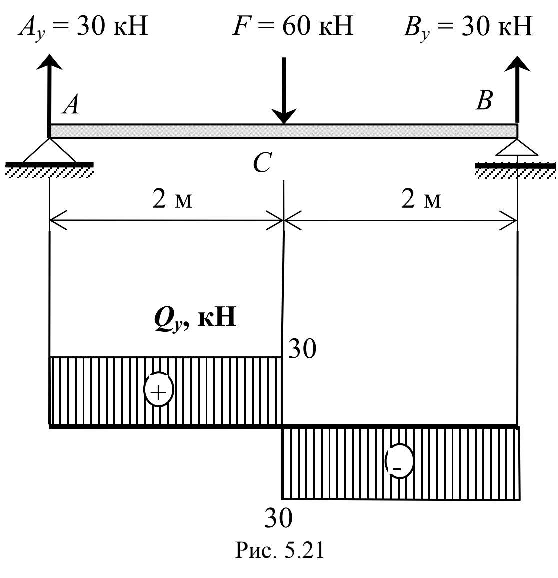


Рис. 5.21

Касательные напряжения на уровне шпонок

$$\tau_x = \frac{QS_x}{I_x b} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot (20 \cdot 10^{-2} \cdot 20 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-2})}{20 \cdot 10^{-2} \cdot \left(\dfrac{20 \cdot 40^3}{12}\right) \cdot 10^{-8}} = 0,56 \text{ МПа}.$$

Сдвигающая сила, действующая на шпонки:

$$T = \tau_x lb = 0,56 \cdot 10^6 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 44,8 \text{ кН}.$$

Одна шпонка может воспринимать

$$T' = R_{S90} b h_{ш} = 1 \cdot 10^6 \cdot 0,04 \cdot 0,2 = 8 \text{ кН}.$$

Число шпонок

$$n = \frac{44,8}{8} = 5,6.$$

Принимаем $n = 6$.

Задача 5.14

Для консольной балки, рис. 5.22, определить угол поворота сечения C и прогибы сечений B и C (в долях от жесткости EI_x).

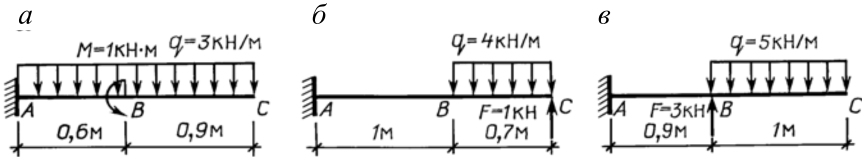


Рис. 5.22

Ответы:

а. $\vartheta_B = -\dfrac{0,282}{EJ_X}$; $\vartheta_C = -\dfrac{1,18}{EJ_X}$; $\theta_C = -\dfrac{1,088}{EJ_X}$.

б. $\vartheta_B = -\dfrac{0,740}{EJ_X}$; $\vartheta_C = -\dfrac{1,57}{EJ_X}$; $\theta_C = -\dfrac{1,164}{EJ_X}$.

в. $\vartheta_B = -\dfrac{1,499}{EJ_X}$; $\vartheta_C = -\dfrac{5,184}{EJ_X}$; $\theta_C = -\dfrac{3,893}{EJ_X}$.

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

Начало координатных осей помещаем в крайнем левом сечении балки (в защемлении), рис. 5.23, исходя из этого начальные параметры (прогиб и угол поворота) равны нулю:

$$V_0 = 0; \qquad \theta_0 = 0.$$

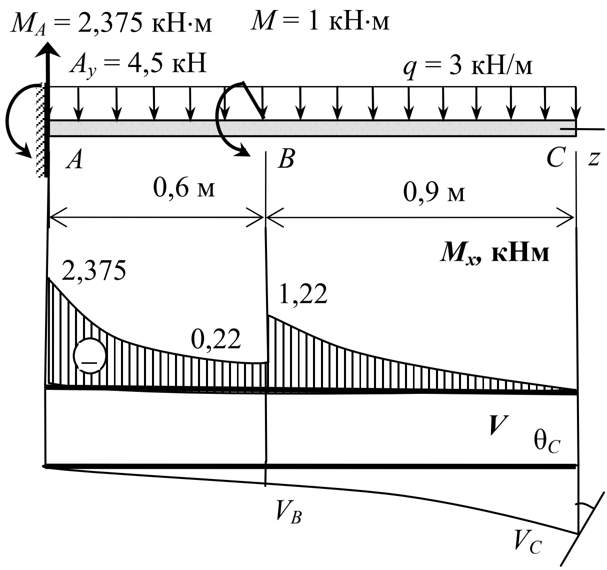


Рис. 5.23

Используя уравнения статики, определим реакции в опоре A:

$$A_y = 4{,}5 \text{ кН}; \qquad M_A = 2{,}375 \text{ кН·м}.$$

Тогда угол поворота сечения C

$$EI\theta_C = A_y \frac{(z_C - 0)^2}{2} - q\frac{(z_C - 0)^3}{6} - M_A(z_C - 0) - M(z_C - 0{,}6)$$

или

$$EI\theta_C = \frac{4{,}5 \cdot 1{,}5^2}{2} - \frac{3 \cdot 1{,}5^3}{6} - 2{,}375 \cdot 1{,}5 - 1 \cdot 0{,}9 = -1{,}088 \text{ кН·м}^2.$$

Прогиб в сечении C

$$EIV_C = A_y\frac{(z_C-0)^3}{6} - q\frac{(z_C-0)^4}{24} - M_A\frac{(z_C-0)^2}{2} - M\frac{(z_C-0,6)^2}{2} =$$

$$= \frac{4,5\cdot 1,5^3}{6} - \frac{3\cdot 1,5^4}{24} - \frac{2,375\cdot 1,5^2}{2} - \frac{1\cdot 0,9^2}{2} = -1,18\text{ кН·м}^3.$$

Прогиб в сечении B

$$EIV_B = A_y\frac{(z_B-0)^3}{6} - q\frac{(z_B-0)^4}{24} - M_A\frac{(z_B-0)^2}{2} =$$

$$= \frac{4,5\cdot 0,6^3}{6} - \frac{3\cdot 0,6^4}{24} - 2,375\cdot\frac{0,6^2}{2} = -0,282\text{ кН·м}^3.$$

Задача 5.15

Для двухопорной деревянной балки, рис. 5.24, построить эпюру прогибов и определить наибольший относительный прогиб, если E = 10 ГПа.

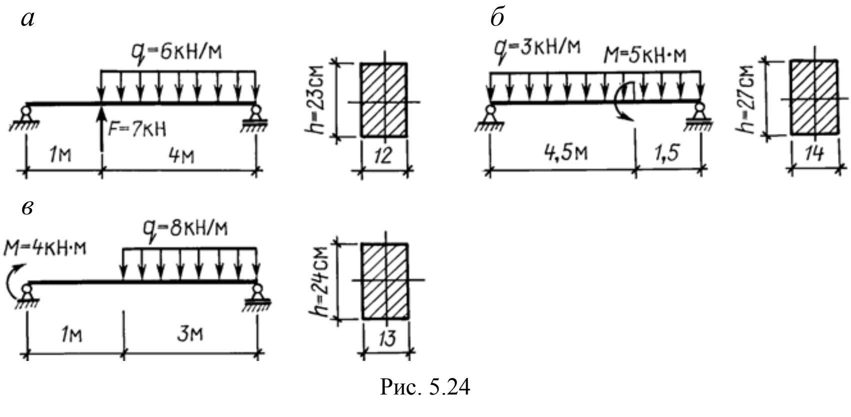


Рис. 5.24

Ответы: *а*. z = 1 м, $V = -1,49$ см;

z = 2,5 м, $V = -2,79$ см.

$$\frac{V_{\max}}{l} = \frac{2,79}{500} = \frac{1}{179}.$$

б. $z = 3$ м, $V = -2{,}57$ см;

$z = 4{,}5$ м, $V = -1{,}81$ см.

$$\frac{V_{\max}}{l} = \frac{2,57}{600} = \frac{1}{233}.$$

в. $z = 1$ м, $V = -1{,}29$ см;

$z = 2$ м, $V = -1{,}77$ см.

$$\frac{V_{\max}}{l} = \frac{1,77}{400} = \frac{1}{226}.$$

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

$$I_x = \frac{12 \cdot 23^3}{12} = 12167 \text{ см}^4,$$

$$EI_x V = EI_x \theta_0 z + \frac{4z^3}{6}\Bigg|_1 + \frac{7(z-1)^3}{6} - \frac{6(z-1)^4}{24}\Bigg|_2 =$$

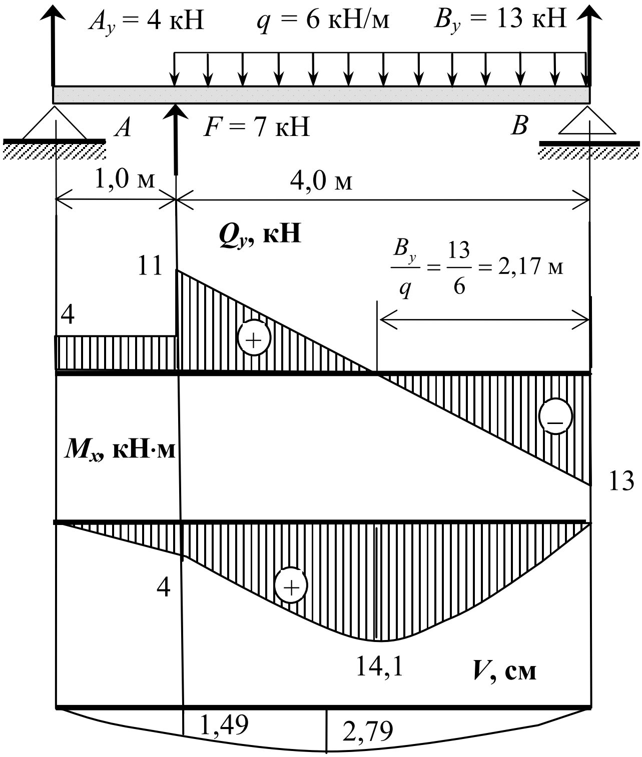
$$= EI_x \theta_0 z + 0,667 z^3 + 1,167(z-1)^3 - 0,25(z-1)^4, \text{ рис. 5.25.}$$

При $z = 5$ м $EI_x V_B = 0$, $EI_x \theta_0 = -18{,}81$ кН·м^2;

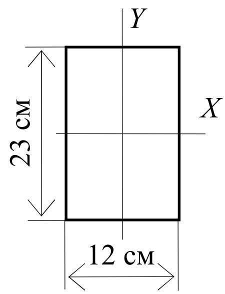
$z = 1$ м $EI_x V = -18{,}14$ кН·м^3, $V = -1{,}49$ см;

$z = 2{,}5$ м $EI_x V = -33{,}94$ кН·м^3, $V = -2{,}79$ см.

$$\frac{V_{\max}}{l} = \frac{2,79}{500} = \frac{1}{179}.$$



A_y = 4 кН
q = 6 кН/м
B_y = 13 кН
A
F = 7 кН
B
1,0 м
4,0 м
Q_y, кН
11
$\frac{B_y}{q} = \frac{13}{6} = 2,17$ м
4
+
–
13
M_x, кН·м
4
+
14,1
V, см
1,49
2,79



Y
X
23 см
12 см

Рис. 5.25

Задача 5.16

Для двухопорной балки с консолью, рис. 5.26, подобрать номер прокатного профиля, построить эпюру прогибов, проверить жесткость, если $E = 200$ ГПа, $R = 210$ МПа, $\left(\dfrac{V}{l}\right)_{\text{adm}} = \dfrac{1}{160}$.

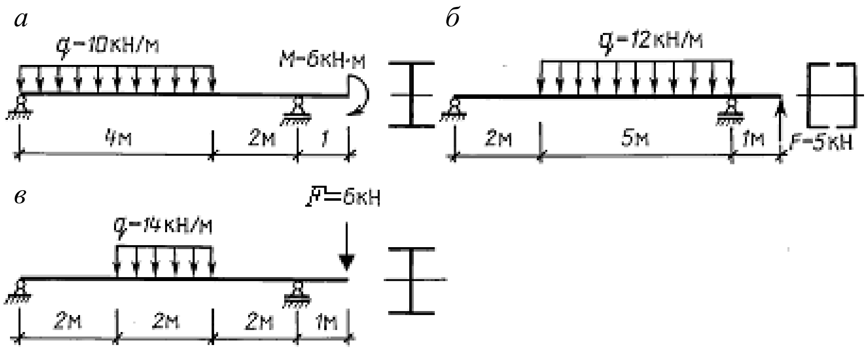


Рис. 5.26

Ответы:

а. Двутавр № 20; при $z = 3$ м $\vartheta = -3{,}09$ см; при $z = 7$ м $\vartheta = 1{,}28$ см; $\dfrac{\vartheta_{\max}}{l} = \dfrac{1}{194}$ – жесткость обеспечена.

б. Швеллер № 22; при $z = 3{,}5$ м $\vartheta = -3{,}8$ см; при $z = 8$ м $\vartheta = 1{,}87$ см; $\dfrac{\vartheta_{\max}}{l} = \dfrac{1}{184}$ – жесткость обеспечена.

в. Двутавр № 20; при $z = 3$ м $\vartheta = -2{,}89$ см; при $z = 7$ м $\vartheta = 1{,}27$ см; $\dfrac{\vartheta_{\max}}{l} = \dfrac{1}{242}$ – жесткость обеспечена.

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

$$W_x = \frac{M_{\max}}{R} = \frac{33 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 157 \text{ см}^3.$$

Принимаем двутавр № 20, рис. 5.27:

$W_x = 184$ см^3; $I_x = 1840$ см^4;

$S_x = 33{,}7$ см^3; $d = 4{,}8$ мм;

$b = 64$ мм; $t = 7{,}3$ мм.

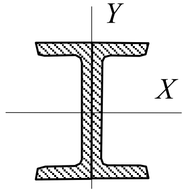


Рис. 5.27

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{33 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 179 \text{ МПа}.$$

$$EI_xV = EI_x\theta_0 z + \frac{25,7z^3}{6} - \frac{10z^4}{24}\Bigg|_1 + \frac{10(z-4)^4}{24}\Bigg|_2 + \frac{14,3(z-6)^3}{6}\Bigg|_3 =$$

$$= EI_x\theta_0 z + 4,283z^3 - 0,417z^4\Big|_1 + 0,417(z-4)^4\Big|_2 + 2,383(z-6)^3\Big|_3.$$

При $z = 6$ м $EI_xV_B = 0$, $EI\theta_0 = -65{,}23$ кН·м^2;

$z = 3$ м $EI_xV = -113{,}8$ кН·м^3,

$$V = -\frac{113,8 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = -3,09 \text{ см};$$

$z = 7$ м $EI_xV = 47{,}4$ кН·м^3, $V = 1{,}28$ см, рис. 5.28.

$$\frac{V_{\max}}{l} = \frac{3,09}{600} = \frac{1}{194} < \left(\frac{V}{l}\right)_{\text{adm}} = \frac{1}{160}.$$

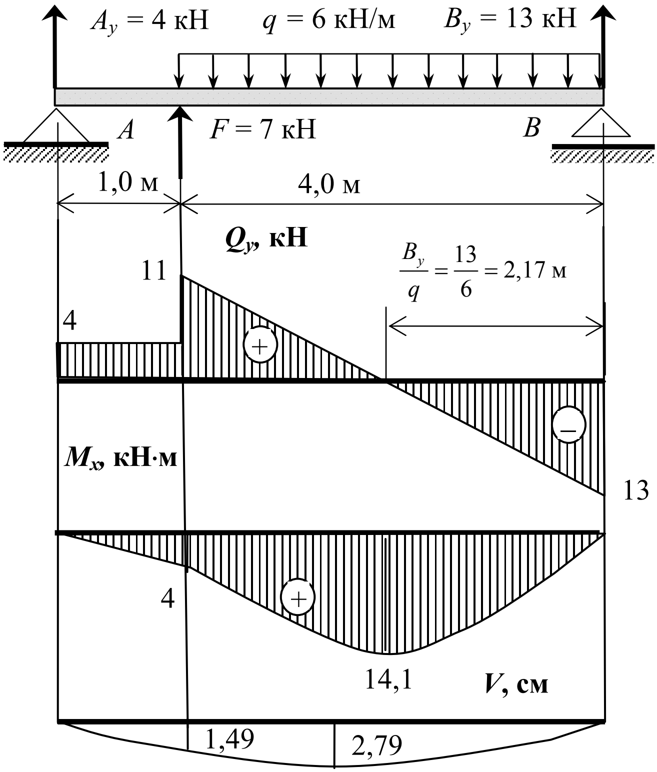


Рис. 5.28

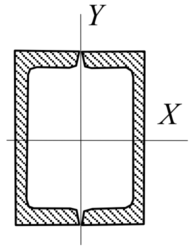
Задача 5.17

Для двухконсольной стальной балки из условия жесткости подобрать номер прокатного профиля при заданном относительном прогибе. Построить эпюру прогибов.

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

$$\left(\frac{V}{l}\right)_{\text{adm}}=\frac{1}{300}.$$



$V_0 \neq 0; \quad \theta_0 \neq 0.$

$$EI_xV=EI_xV_0+EI_x\theta_0 z-\frac{4z^2}{2}\bigg|_1+\frac{6(z-1)^3}{6}\bigg|_2-\frac{12(z-3)^3}{6}\bigg|_3+\frac{6(z-5)^3}{6}\bigg|_4=$$

$$=EI_xV_0+EI_x\theta_0 z-2z^2\Big|_1+1(z-1)^3\Big|_2-2(z-3)^3\Big|_3+1(z-5)^3\Big|_4.$$

При $z = 1$ м $EI_xV_A = EI_xV_0 + EI\theta_0\cdot 1 - 2\cdot 1 = 0;$

$z = 5$ м $EI_xV_B = EI_xV_0 + EI\theta_0\cdot 5 - 2\cdot 5^2 + 1(5-1)^3 - 2(5-3)^3 = 0.$

Решив систему уравнений, получим $EI_xV_0 = 2$ кН·м^3, $EI\theta_0 = 0$.

При $z = 3$ м $EI_xV_{C(\max)} = 2 - 2\cdot 3^2 + 1(3-1)^3 = -8$ кН·м^3.

$$V_{\max}=V_{\text{adm}},\quad V_{\text{adm}}=\frac{l}{300}=\frac{400}{300}=1{,}333\text{ см}.$$

$$I_x=\frac{8}{EV_{\max}}=\frac{8\cdot 10^3}{200\cdot 10^9\cdot 1{,}333\cdot 10^{-2}}=300\text{ см}^4;$$

$$I_x^1=\frac{300}{2}=150\text{ см}^4.$$

Принимаем два швеллера № 10, рис. 5.29: W_x^1 = 34,8 см^3; I_x^1 = = 174 см^4.

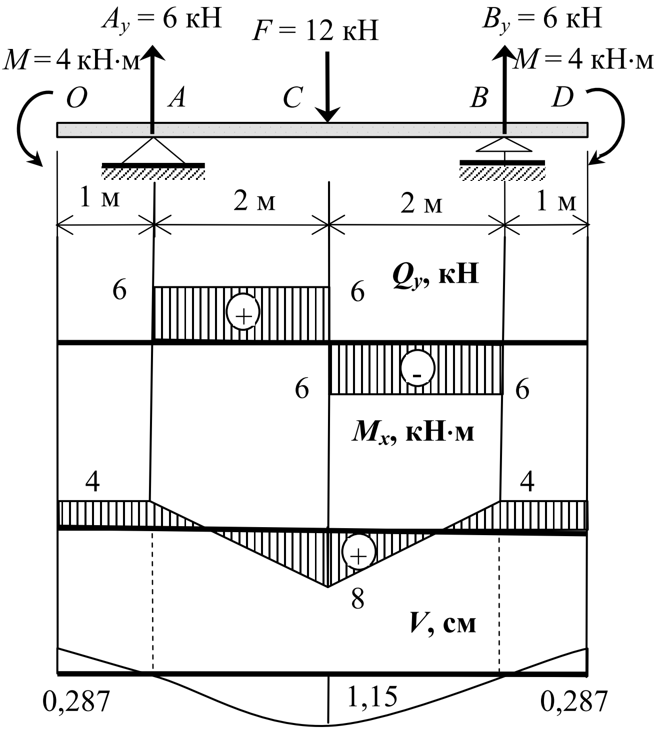


Рис. 5.29

При $z = 0$ $\quad V = V_0 = \dfrac{2 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 174 \cdot 10^{-8}} = 0,287$ см;

$z = 3$ м $\quad V = V_{max} = -1,15$ см;

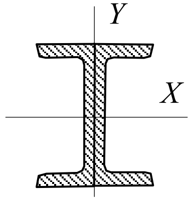
$z = 6$ м $\quad V = V_D = 0,287$ см.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{2W_x^1} = \frac{8 \cdot 10^3}{2 \cdot 34,8 \cdot 10^{-6}} = 115 \text{ МПа}.$$

Вариант *б)*

Р е ш е н и е

$$\left(\frac{V}{l}\right)_{\text{adm}}=\frac{1}{250}.$$



$V_0 \neq 0; \quad \theta_0 \neq 0.$

$$EI_xV = EI_xV_0 + EI_x\theta_0 z\Big|_1 + \frac{5(z-1)^3}{6}\Bigg|_2 - \frac{10(z-4)^3}{6}\Bigg|_3 + \frac{5(z-6)^3}{6}\Bigg|_4 =$$

$$= EI_xV_0 + EI_x\theta_0 z\Big|_1 + 0{,}833(z-1)^3\Big|_2 - 1{,}667(z-4)^3\Big|_3 + 0{,}833(z-6)^3\Big|_4.$$

При $z = 1$ м $EI_xV_A = EI_xV_0 + EI\theta_0 \cdot 1 = 0;$

$z = 6$ м $EI_xV_B = EI_xV_0 + EI\theta_0 \cdot 6 + 0{,}833(6-1)^3 - 1{,}667(6-4)^3 = 0.$

Решив систему уравнений, получим

$$EI_xV_0 = 18{,}15 \text{ кН·м}^3;$$

$$EI\theta_0 = -18{,}15 \text{ кН·м}^2.$$

При $z = 3{,}5$ м

$$EI_xV_{\max} = 18{,}15 - 18{,}15 \cdot 3{,}5 + 0{,}833(3{,}5-1)^3 = -32{,}4 \text{ кН·м}^3.$$

$$V_{\max} = V_{\text{adm}}, \quad V_{\text{adm}} = \frac{l}{250} = \frac{500}{250} = 2 \text{ см}.$$

$$I_x = \frac{32{,}4}{E \cdot V_{\max}} = \frac{32{,}4 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 810 \text{ см}^4.$$

Принимаем двутавр № 16, у которого W_x = 109 см^3; I_x = 873 см^4, рис. 5.30.

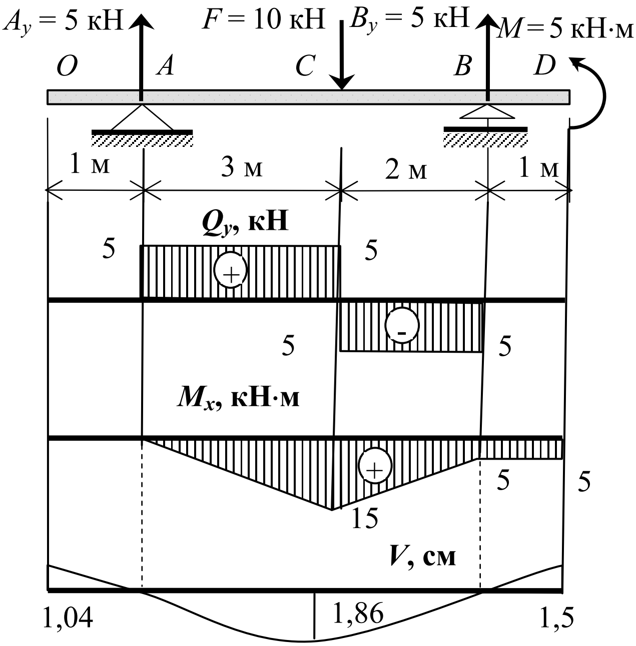


Рис. 5.30

При $z = 0$ $\quad V = V_0 = \dfrac{18{,}15\cdot 10^3}{200\cdot 10^9\cdot 873\cdot 10^{-8}} = 1{,}04$ см;

$z = 3{,}5$ м $\quad V = V_{\max} = -1{,}86$ см;

$z = 7$ м $\quad V = V_D = 1{,}54$ см.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{15\cdot 10^3}{109\cdot 10^{-6}} = 138\ \text{МПа}.$$

Задача 5.18

Определить угол поворота и прогиб конца консольной балки (в долях от жесткости сечения EI_x), рис. 5.31.

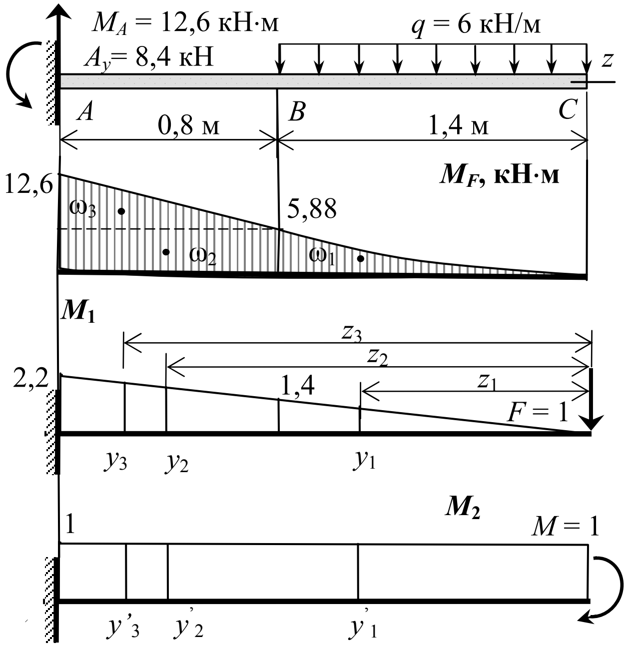


Рис. 5.31

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

$$EI_x V_C = \sum \omega_i y_i; \quad EI_x \theta_C = \sum \omega_i y_i'.$$

$$\omega_1 = \frac{1}{3} \cdot 5,88 \cdot 1,4 = 2,744 \text{ кН·м}^2;$$

$$\omega_2 = 5,88 \cdot 0,8 = 4,704 \text{ кН·м}^2;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(12,6 - 5,88\right) \cdot 0,8 = 2,688 \text{ кН·м}^2.$$

$$z_1 = \frac{3}{4} \cdot 1,4 = 1,05; \qquad y_1 = 1,05 \text{ м};$$

$$z_2 = 1,4 + \frac{0,8}{2} = 1,8; \qquad y_2 = 1,8 \text{ м};$$

$$z_3 = 1,4 + 2 \cdot \frac{0,8}{3} = 1,93; \qquad y_3 = 1,93 \text{ м};$$

$$y_1' = y_2' = y_3' = 1 \text{ м}.$$

$$EI_xV_C = 2,744 \cdot 1,05 + 4,704 \cdot 1,8 + 2,688 \cdot 1,93 = 16,54 \text{ кН}\cdot\text{м}^3;$$

$$EI_x\theta_C = 2,744 \cdot 1 + 4,704 \cdot 1 + 2,688 \cdot 1 = 10,14 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

Вариант *б)*

Р е ш е н и е

$$EI_xV_C = \sum \omega_i y_i; \qquad EI_x\theta_C = \sum \omega_i y_i'.$$

$$\omega_1 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 1 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$\omega_2 = 2 \cdot 1,2 = 2,4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \cdot 14,4 \cdot 1,2 = 8,64 \text{ кН}\cdot\text{м}^2, \text{ рис. 5.32.}$$

$$z_1 = \frac{3}{4} \cdot 1 = 0,75; \qquad y_1 = 0,75 \text{ м};$$

$$z_2 = 1 + \frac{1,2}{2} = 1,6; \qquad y_2 = 1,6 \text{ м};$$

$$z_3 = 1 + 2 \cdot \frac{1,2}{3} = 1,8; \qquad y_3 = 1,8 \text{ м};$$

$$y_1' = y_2' = y_3' = 1 \text{ м}.$$

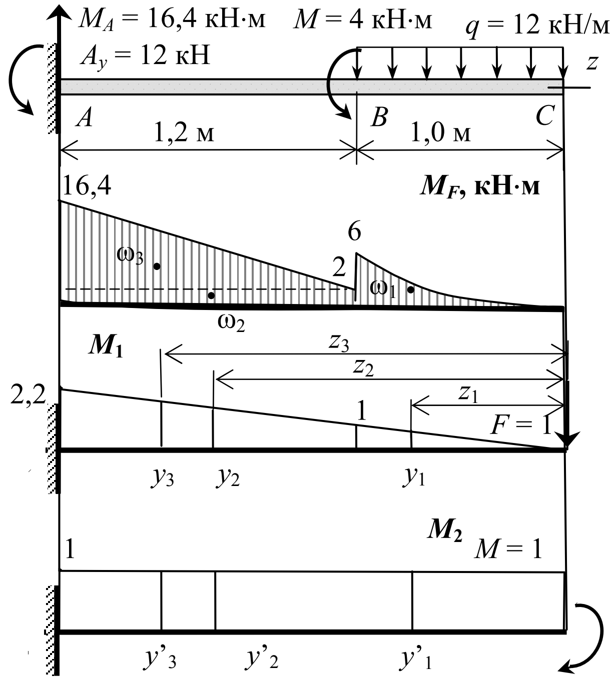


Рис. 5.32

$$EI_xV_C = 2{\cdot}0{,}75 + 2{,}4{\cdot}1{,}6 + 8{,}64{\cdot}1{,}8 = 20{,}89\ \text{кН·м}^3;$$

$$EI_x\theta_C = 2{\cdot}1 + 2{,}4{\cdot}1 + 8{,}64{\cdot}1 = 13{,}04\ \text{кН·м}^2.$$

Задача 5.19

Для двухопорной балки, рис. 5.33, определить прогиб в сечении C (в долях от жесткости сечения EI_x) и изобразить эпюру прогибов.

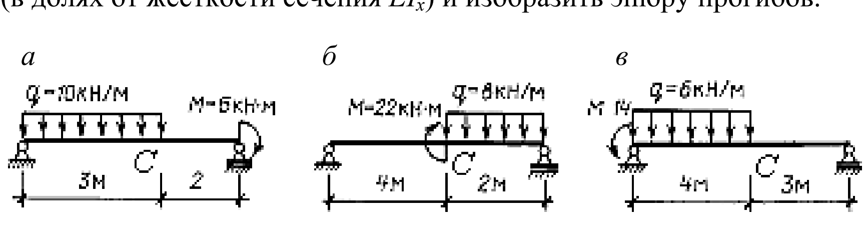


Рис. 5.33

Ответы:

а. $EJ_X \vartheta_C = 39{,}9$ кН·м^3 (вниз).

б. $EJ_X \vartheta_C = 12{,}45$ кН·м^3 (вниз).

в. $EJ_X \vartheta_C = 69{,}9$ кН·м^3 (вниз).

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

$$EI_x V_C = \sum \omega_i y_i .$$

$$\omega_1 = \frac{2}{3} \cdot 11{,}25 \cdot 3 = 22{,}5 \text{ кН·м}^2;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 14{,}4 \cdot 3 = 21{,}6 \text{ кН·м}^2;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \cdot 14{,}4 \cdot 2 = 14{,}4 \text{ кН·м}^2;$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6 \text{ кН·м}^2, \text{ рис. 5.34.}$$

$$z_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1{,}5; \quad y_1 = 0{,}4 \cdot 1{,}5 = 0{,}6 \text{ м};$$

$$z_2 = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2; \quad y_2 = 0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8 \text{ м};$$

$$z_3 = \frac{2}{3} \cdot 2 = 1{,}33; \quad y_3 = 0{,}6 \cdot 1{,}33 = 0{,}8 \text{ м};$$

$$z_4 = \frac{1}{3} \cdot 2 = 0{,}67; \quad y_4 = 0{,}6 \cdot 0{,}67 = 0{,}4 \text{ м}.$$

$$EI_x V_C = 22{,}5 \cdot 0{,}6 + 21{,}6 \cdot 0{,}8 + 14{,}4 \cdot 0{,}8 - 6 \cdot 0{,}4 = 39{,}9 \text{ кН·м}^3.$$

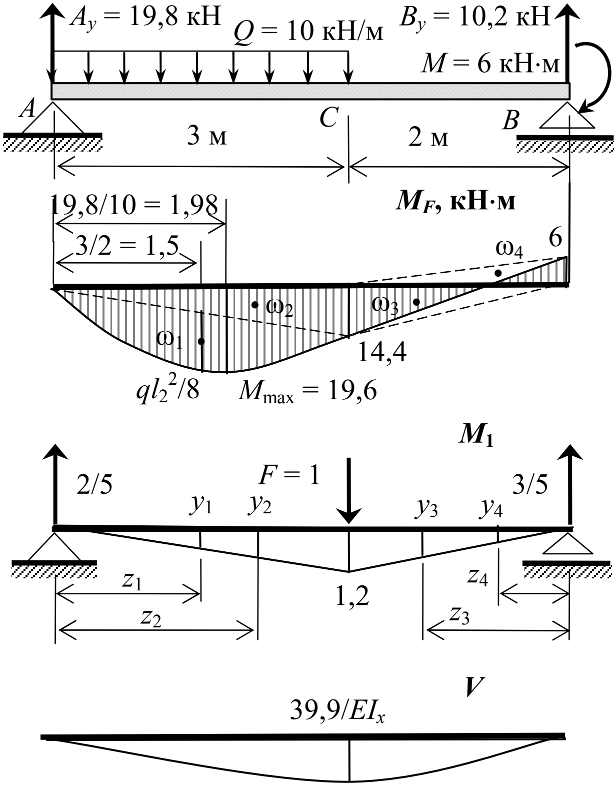


Рис. 5.34

Вариант *б)*

Р е ш е н и е

$$EI_xV_C = \sum \omega_i y_i .$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8 \text{ кН·м}^2; \qquad \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 2 = 18 \text{ кН·м}^2;$$

$$\omega_3 = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 = 5{,}33 \text{ кН·м}^2, \text{ рис. 5.35.}$$

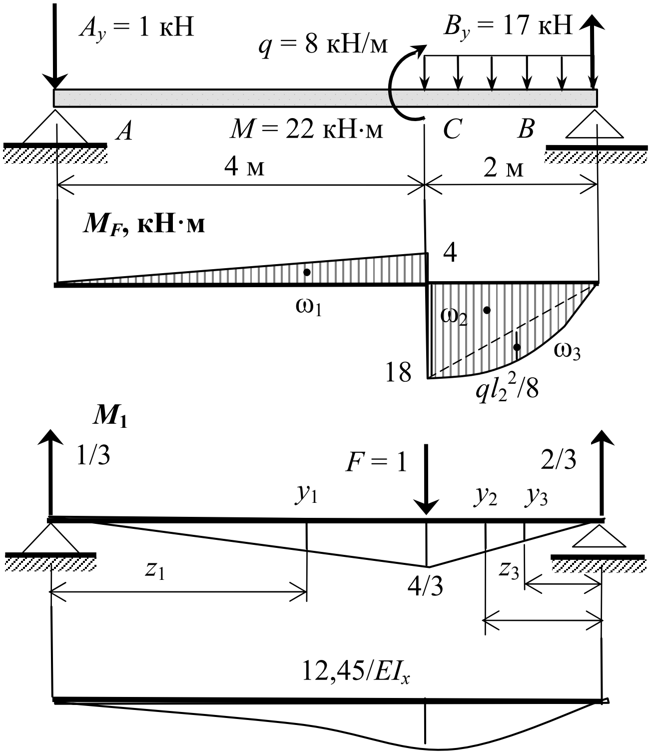


Рис. 5.35

$$z_1 = \frac{2}{3} \cdot 4 = 2,67; \qquad y_1 = \frac{1}{3} \cdot 2,67 = 0,89 \text{ м};$$

$$z_2 = \frac{2}{3} \cdot 2 = 1,33; \qquad y_2 = \frac{2}{3} \cdot 1,33 = 0,89 \text{ м};$$

$$z_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1; \qquad y_3 = 0,67 \cdot 1 = 0,67 \text{ м}.$$

$$EI_x V_C = -8 \cdot 0,89 + 18 \cdot 0,89 + 5,33 \cdot 0,67 = 12,45 \text{ кН·м}^3.$$

Задача 5.20

Для двухопорной балки с консолью, рис. 5.36, подобрать номер прокатного двутавра из условия жесткости, если R = 210 МПА, $\left(\dfrac{\vartheta}{l}\right)_{\text{adm}} = \dfrac{1}{300}$.

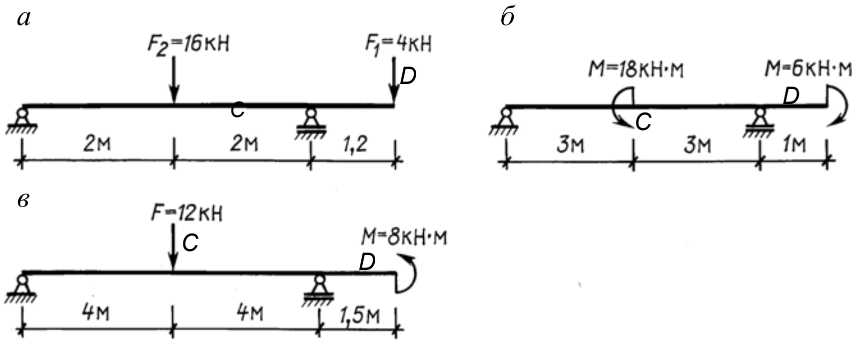


Рис. 5.36

Построить эпюру прогибов.

Ответы:

а. I № 16, $\vartheta_C = 0,946$ см (вниз), $\vartheta_D = 0,528$ см (вверх).

б. I № 12, $\vartheta_C = 1,93$ см (вверх), $\vartheta_D = 2,79$ см (вниз).

в. I № 24, $\vartheta_C = 2,31$ см (вниз), $\vartheta_D = 1,63$ см (вверх).

Вариант *а)*

Решение

$$EI_xV = \sum \omega_i y_i.$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\cdot 13,6\cdot 2 = 13,6 \text{ кН·м}^2; \qquad \omega_2 = \frac{1}{2}\cdot 13,6\cdot 2 = 13,6 \text{ кН·м}^2;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\cdot 4,8\cdot 2 = 4,8 \text{ кН·м}^2; \qquad \omega_4 = \frac{1}{2}\cdot 4,8\cdot 1,2 = 2,88 \text{ кН·м}^2,$$ рис. 5.37.

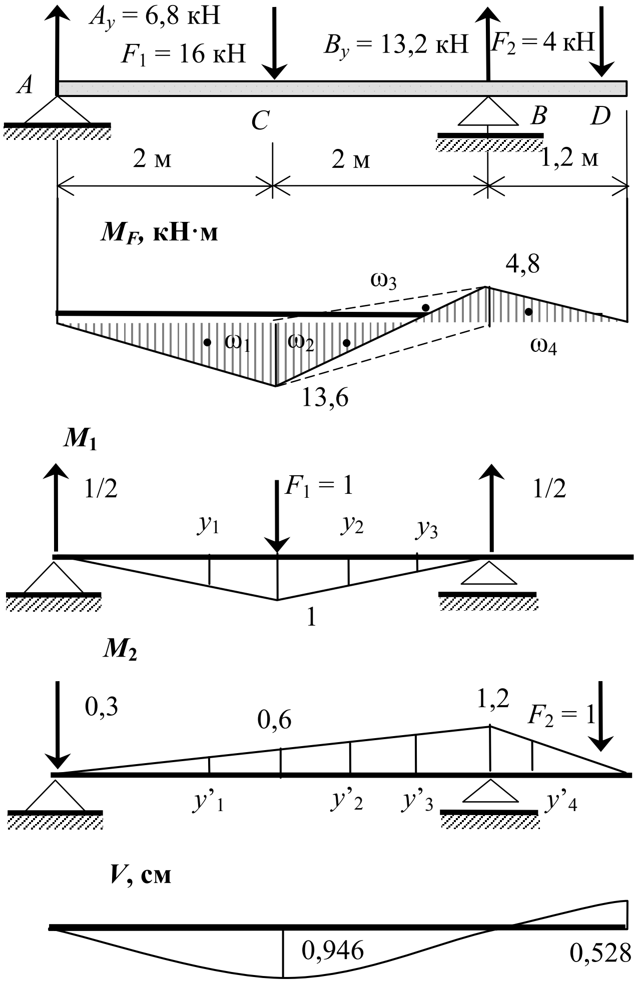


Рис. 5.37

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 0,667 \text{ м}; \qquad y_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 0,667 \text{ м};$$

$$y_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 0,333 \text{ м}; \qquad y_4 = 0.$$

$$y_1' = 0,3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 0,4 \text{ м}; \qquad y_2' = 0,3 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2\right) = 0,8 \text{ м};$$

$$y_3' = 0,3 \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 2\right) = 1 \text{ м}; \qquad y_4' = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 = 0,8 \text{ м}.$$

$$EI_x V_C = 13,6 \cdot 0,667 + 13,6 \cdot 0,667 - 4,8 \cdot 0,333 = 16,54 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$V_C = V_{\text{adm}} = \frac{l}{300} = \frac{400}{300} = 1,333 \text{ см};$$

$$I_x = \frac{16,54}{EV_C} = \frac{16,54 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 1,333 \cdot 10^{-2}} = 620 \text{ см}^4.$$

Принимаем двутавр № 16: $W_x = 109$ см^3; $I_x = 873$ см^4.

$$V_C = \frac{16,54 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 0,946 \text{ см (вниз)};$$

$$EI_x V_D = -13,6 \cdot 0,4 - 13,6 \cdot 0,8 + 4,8 \cdot 1 + 2,88 \cdot 0,8 = -9,22 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$V_D = \frac{-9,22 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = -0,528 \text{ см (вверх)}.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{13,6 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} = 125 \text{ МПа}.$$

Вариант *б)*

Р е ш е н и е

$$EI_x V = \sum \omega_i y_i.$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \qquad \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (12 - 6) = 9 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_3 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \qquad \omega_4 = 6 \cdot 1 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \text{ рис. 5.38.}$$

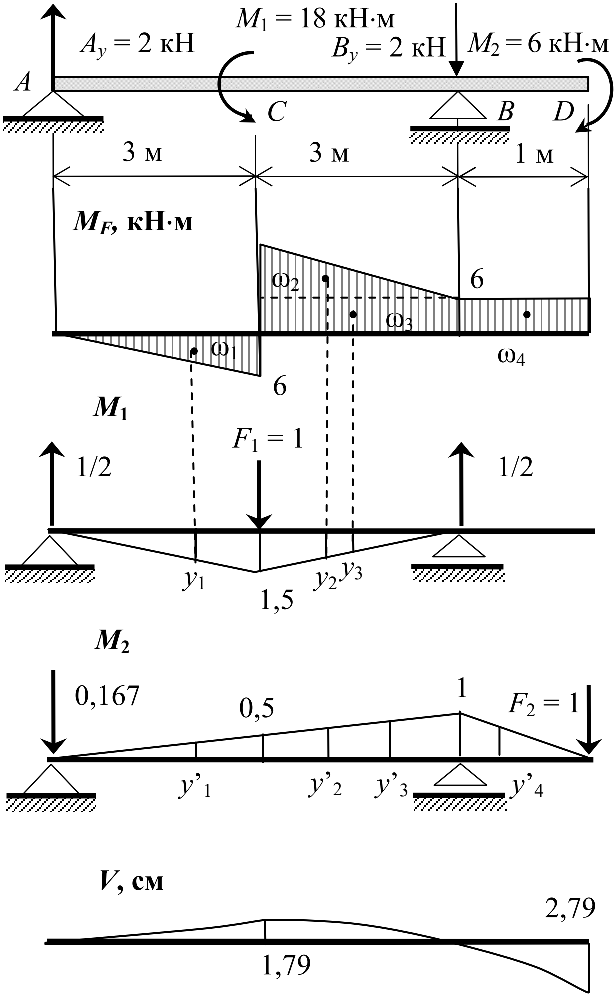


Рис. 5.38

$$y_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 3 = 1\text{ м};\qquad y_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 3 = 1\text{ м};$$

$$y_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3 = 0,75\text{ м};\qquad y_4 = 0.$$

$$y_1' = 0,167 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 0,334 \text{ м};$$

$$y_2' = 0,167 \cdot \left(3 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = 0,668 \text{ м};$$

$$y_3' = 0,167 \cdot \left(3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = 0,752 \text{ м};$$

$$y_4' = 1 \cdot \frac{1}{2} = 0,5 \text{ м}.$$

$$EI_xV_C = 9{\cdot}1 - 9{\cdot}1 - 18{\cdot}0,75 = -13,5 \text{ кН·м}^3;$$

$$V_C = V_{\text{adm}} = \frac{l}{300} = \frac{600}{300} = 2 \text{ см};$$

$$I_x = \frac{13,5}{EV_C} = \frac{13,5 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 338 \text{ см}^4.$$

Принимаем двутавр № 12: $W_x = 58,4$ см^3; $I_x = 350$ см^4.

$$V_C = -\frac{13,5 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 350 \cdot 10^{-8}} = -1,93 \text{ см (вверх)};$$

$$EI_xV_D = -9{\cdot}0,334 + 9{\cdot}0,668 + 18{\cdot}0,752 + 6{\cdot}0,5 = 19,55 \text{ кН·м}^3;$$

$$V_D = \frac{19,55 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 350 \cdot 10^{-8}} = 2,79 \text{ см (вниз)}.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{12 \cdot 10^3}{58,4 \cdot 10^{-6}} = 205 \text{ МПа}.$$

6. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Задача 6.1

Для балки с защемленным левым и шарнирно опертым правым концом, рис. 6.1, построить эпюры Q и M, определить прогиб посередине пролета, изобразить ось изогнутой балки.

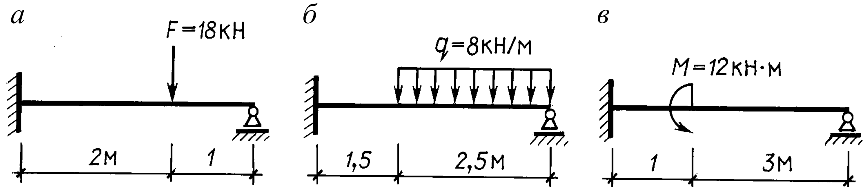


Рис. 6.1

Жесткость сечения балки EI_X.

Воспользоваться уравнениями метода начальных параметров.

Ответы:

а. $A_Y = 8{,}67$ кН; $B_Y = 9{,}33$ кН; $M_A = 8{,}0$ кН·м; $\nu = -4{,}12/EJ_X$.

б. $A_Y = 8{,}75$ кН; $B_Y = 11{,}25$ кН; $M_A = 10{,}0$ кН·м; $\nu = -8{,}35/EJ_X$.

в. $A_Y = 1{,}97$ кН; $B_Y = -1{,}97$ кН; $M_A = -4{,}12$ кН·м; $\nu = 4{,}87/EJ_X$.

Вариант *а)*

Решение

$$\sum M_B = A_Y \cdot 3 - M_A - 18 \cdot 1 = 0; \qquad (6.1)$$

$$\sum M_A = -B_Y \cdot 3 - M_A + 18 \cdot 2 = 0; \qquad (6.2)$$

$$EI_X v_B = -M_A \cdot \frac{3^2}{2} + A_Y \cdot \frac{3^3}{6} - 18 \cdot \frac{1^3}{6} = 0, \text{ рис. 6.2.} \qquad (6.3)$$

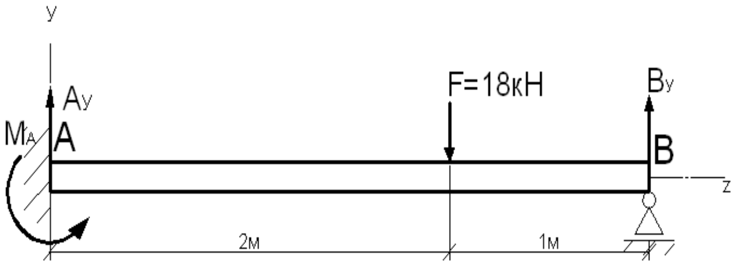


Рис. 6.2

Из (6.1), (6.2), (6.3)

$A_Y = 8,67$ кН, $B_Y = 9,33$ кН, $M_A = 8,0$ кН·м, рис. 6.3.

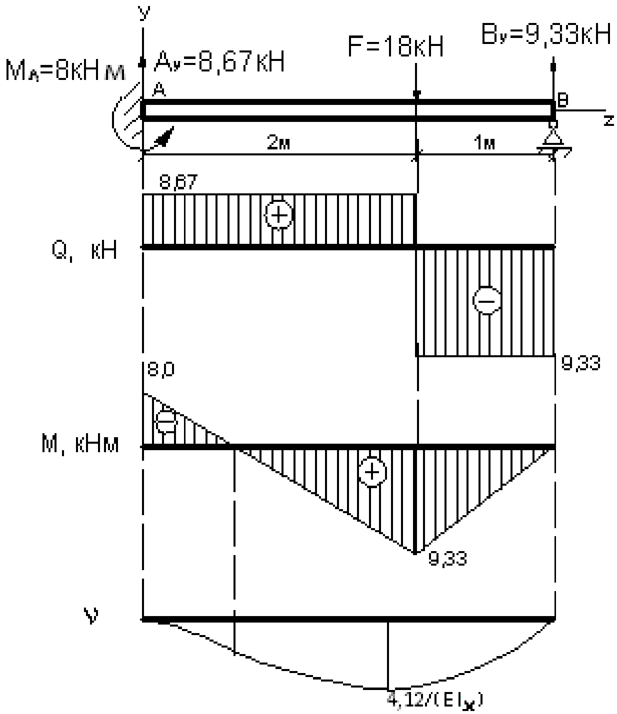


Рис. 6.3

При z = 1,5 м ($\nu_0 = 0$, $\theta_0 = 0$):

$$EI_X \nu = -8 \cdot \frac{1{,}5^2}{2} + 8{,}67 \cdot \frac{1{,}5^3}{6} = -4{,}12;$$

$$\nu = -\frac{4{,}12}{EI_X}.$$

Задача 6.2

Для двухпролетной балки, рис. 6.4, построить эпюры Q и M, подобрать номер прокатного двутавра, если R = 210 МПа.

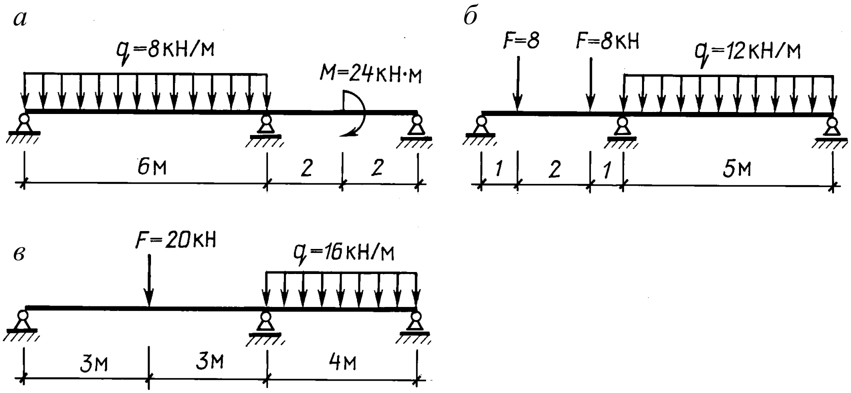


Рис. 6.4

Использовать уравнения метода сил.

Ответы:
а. $M_B = -20{,}4$ кН·м; $M_{X,\max} = 26{,}5$ кН·м; двутавр № 18.
б. $M_B = -24{,}8$ кН·м; $M_{X,\max} = 26{,}0$ кН·м; двутавр № 18.
в. $M_B = M_{X,\max} = -26{,}3$ кН·м; двутавр № 18.

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

$$x_1\delta_{11} + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\omega_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{8\cdot 6^2}{8}\cdot 6 = 144 \text{ кН·м}^2; \qquad \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 2 = 12 \text{ кН·м}^2,$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 6 = 3{,}0 \text{ кН·м}^2, \qquad \omega_5 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4 = 2{,}0 \text{ кН·м}^2, \text{ рис. 6.5.}$$

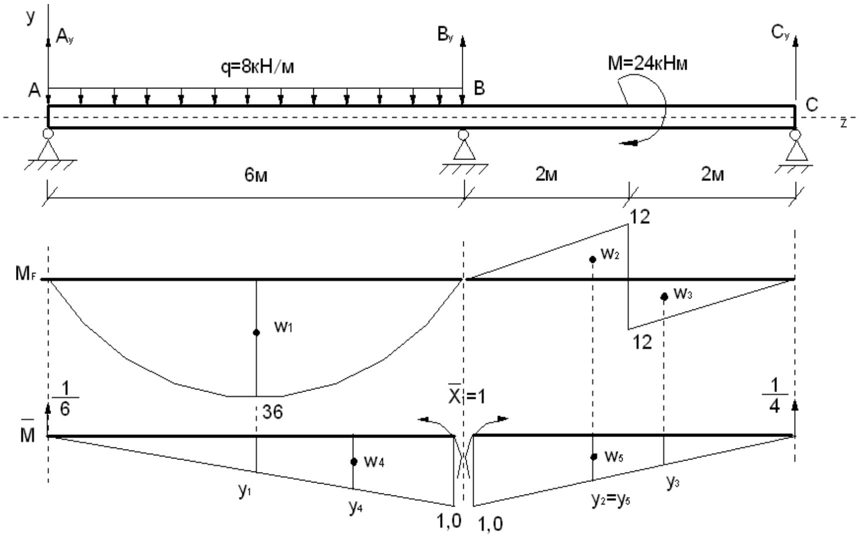


Рис. 6.5

$$y_1 = \frac{1}{6}\cdot 3 = 0{,}5 \text{ м}; \qquad y_2 = \frac{1}{4}\cdot\left(2 + \frac{1}{3}\cdot 2\right) = \frac{2}{3} = 0{,}667 \text{ м};$$

$$y_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 = 0{,}333 \text{ м}; \qquad y_4 = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot 6 = 0{,}667 \text{ м};$$

$$y_5 = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 4 = 0{,}667 \text{ м}.$$

$$\delta_{11} = \omega_4 y_4 + \omega_5 y_5 = 3{,}0 \cdot 0{,}667 + 2{,}0 \cdot 0{,}667 = 3{,}335;$$

$$\Delta_{1F} = \omega_1 y_1 - \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 = 144 \cdot 0{,}5 - 12 \cdot 0{,}667 + 12 \cdot 0{,}333 = 68{,}0;$$

$$x_1 \cdot 3{,}335 \; + \; 68{,}0 = 0 \to x_1 = -20{,}4 \text{ кН·м}, \quad x_1 = M_B, \text{ рис. 6.6.}$$

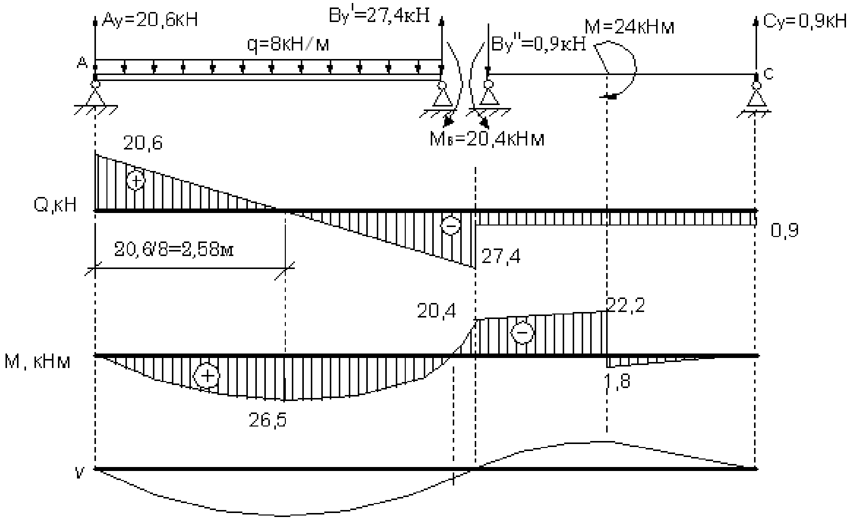


Рис. 6.6

При z = 2,58 м

$$M_{\max} = 20{,}6 \cdot 2{,}58 - 8 \cdot \frac{2{,}58^2}{2} = 26{,}5 \text{ кН;}$$

$$W_x = \frac{26{,}5 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 126 \text{ см}^3.$$

Принимаем I № 18, $W_x = 143$ см^3.

Задача 6.3

Для многопролетной балки, рис. 6.7, построить эпюры Q и M, подобрать номер прокатного двутавра, если R = 210 МПа, E = 200 ГПа.

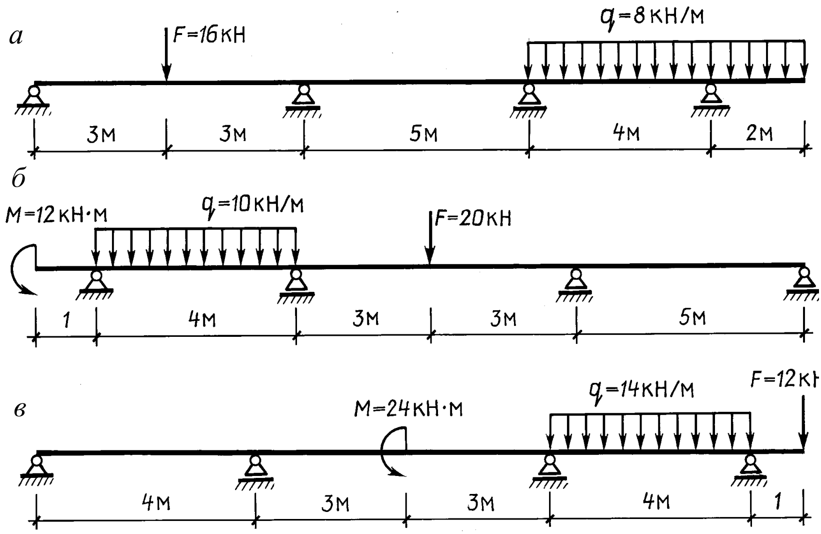


Рис. 6.7

Определить прогиб посередине ненагруженного пролета, изобразить ось изогнутой балки.

Ответы:
а. $M_B = -9{,}645$ кН·м; $M_C = -0{,}714$ кН·м; $Q_{\max} = -19{,}82$ кН;
$M_{X,\max} = 19{,}17$ кН·м; $\nu = 0{,}927$ см (вверх); двутавр № 16.
б. $M_B = -16{,}8$ кН·м; $M_C = -7{,}69$ кН·м; $Q_{\max} = 21{,}2$ кН;
$M_{X,\max} = 17{,}76$ кН·м; $\nu = 0{,}687$ см (вверх); двутавр № 16.
в. $M_B = 0{,}33$ кН·м; $M_C = -7{,}1$ кН·м; $Q_{\max} = 29{,}23$ кН;
$M_{X,\max} = 18{,}5$ кН·м; $\nu = 0{,}0016$ см (вниз); двутавр № 16.

Вариант *а)*

Решение

$$x_1\delta_{11} + x_2\delta_{12} + \Delta_{1F} = 0; \qquad x_1\delta_{21} + x_2\delta_{22} + \Delta_{2F} = 0;$$

$$\delta_{11} = \omega_5 y_5 + \omega_6 y_6 = \frac{1\cdot 6}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot 6 + \frac{1\cdot 5}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 5 = 3{,}667;$$

$$\delta_{22} = \omega_7 y_7 + \omega_8 y_8 = \frac{1\cdot 5}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 5 + \frac{1\cdot 4}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 4 = 3{,}0;$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\omega_6 y_6'=\omega_7 y_7'=\frac{1\cdot 5}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot 5=0,883;$$

$$\Delta_{1F}=\omega_1 y_1+\omega_2 y_2=\frac{24\cdot 3}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{24\cdot 3}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 4=36,0;$$

$$\Delta_{2F}=\omega_3 y_3-\omega_4 y_4=\frac{2}{3}\cdot 16\cdot 4\cdot\frac{1}{4}\cdot 2-\frac{16\cdot 4}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 4=10,66,\ \text{рис. 6.8.}$$

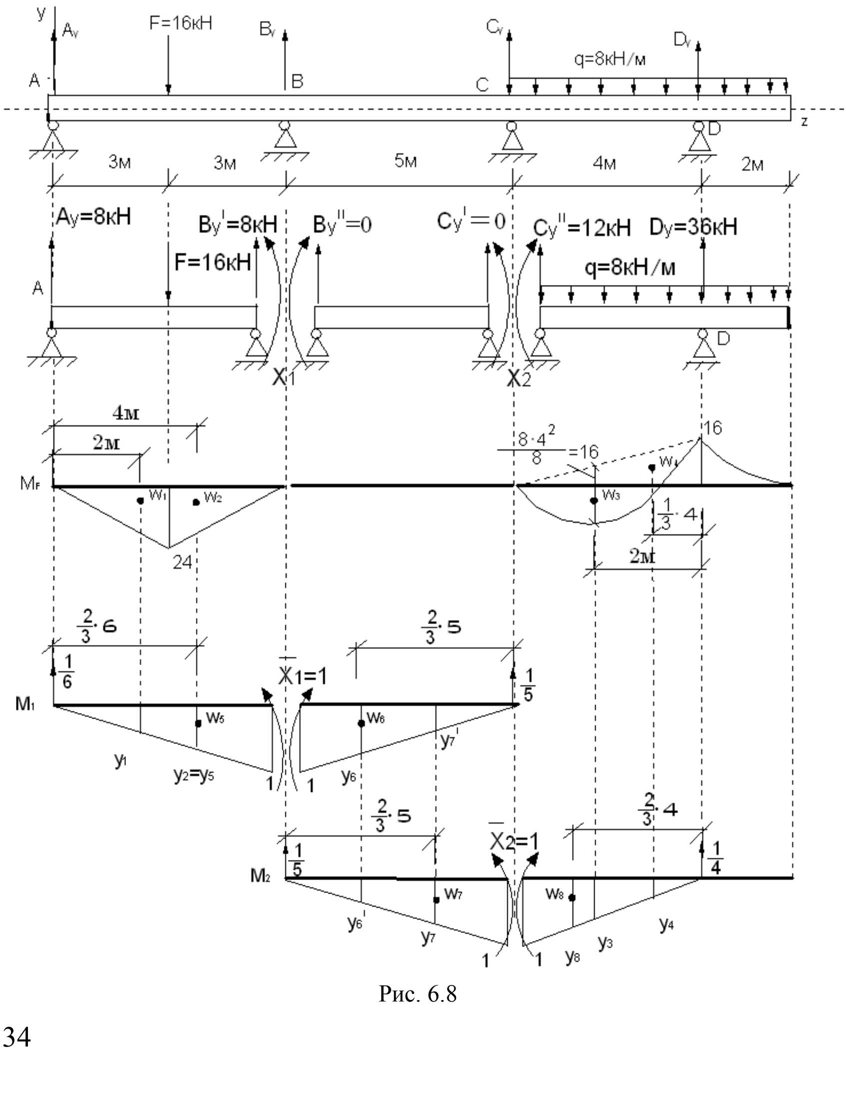


Рис. 6.8

$$3,667x_1 + 0,883x_2 + 36,0 = 0; \qquad (6.4)$$

$$0,883x_1 + 3,0x_2 + 10,66 = 0; \qquad (6.5)$$

$$x_1 = -9,645 \text{ кН·м} = M_B;$$

$$x_2 = -0,714 \text{ кН·м} = M_C, \text{ рис. 6.9.}$$

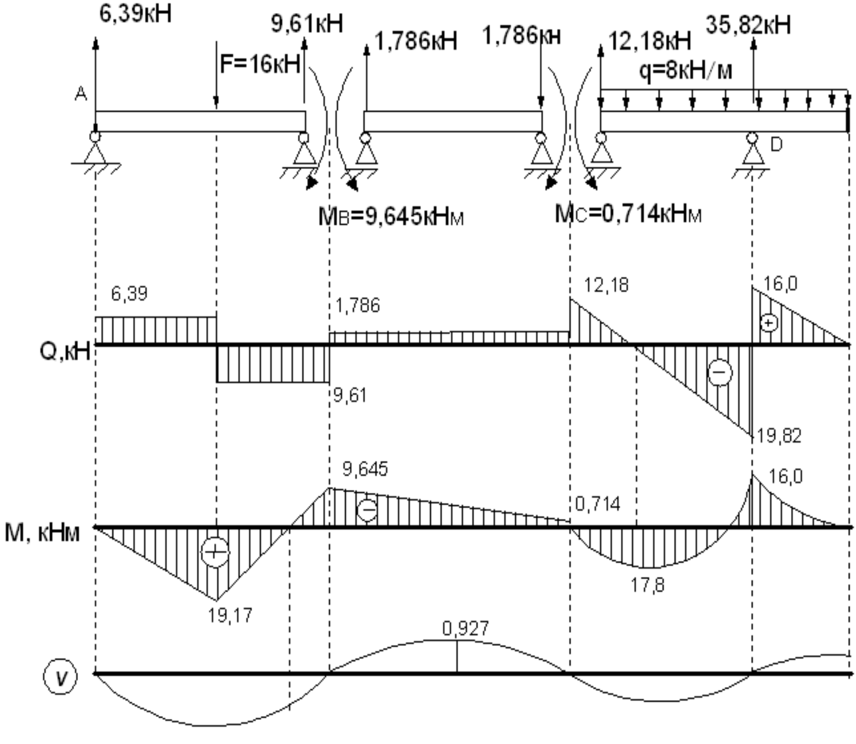


Рис. 6.9

Выбираем I № 16, $I_X = 873$ см^4.
Определим прогиб сечения K на участке BC, рис. 6.10.

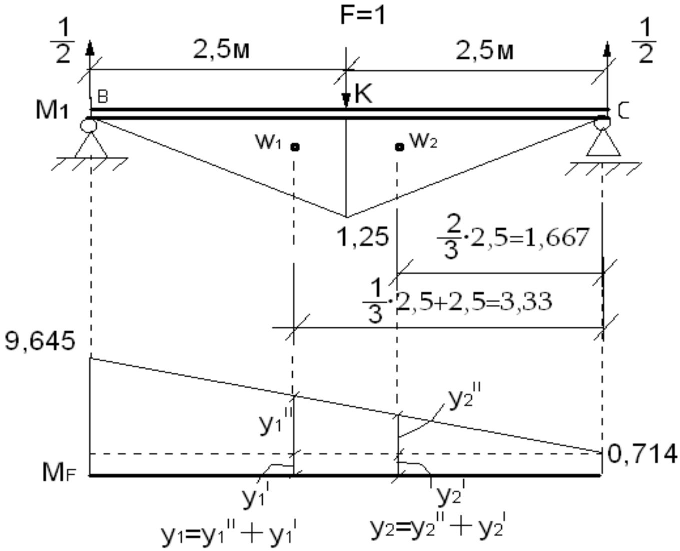


Рис. 6.10

$$EI_x \nu_K = -\omega_1 y_1 - \omega_2 y_2;,$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 2,5 = 1,563;$$

$$y_1' = y_2' = 0,714; \quad \frac{y_1''}{3,33} = \frac{9,645 - 0,714}{5};$$

$$y_1'' = 5,95; \quad y_1 = 0,714 + 5,95 = 6,66.$$

$$\frac{y_2''}{1,667} = \frac{9,645 - 0,714}{5}, \quad y_2'' = 2,98,$$

$$y_2 = 0,714 + 2,98 = 3,69;$$

$$EI_x \nu_K = -1,563 \cdot 6,66 - 1,563 \cdot 3,69 = -10,41 - 5,77 = -16,18;$$

$$\nu_K = \frac{-16,18 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = -0,927 \text{ см (вверх).}$$

7. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

7.1. Косой изгиб

Задача 7.1

Стальная консольная балка составного поперечного сечения, рис. 7.1, нагружена внешней силой (q, M, F), направленной под углом α к вертикальной оси сечения.

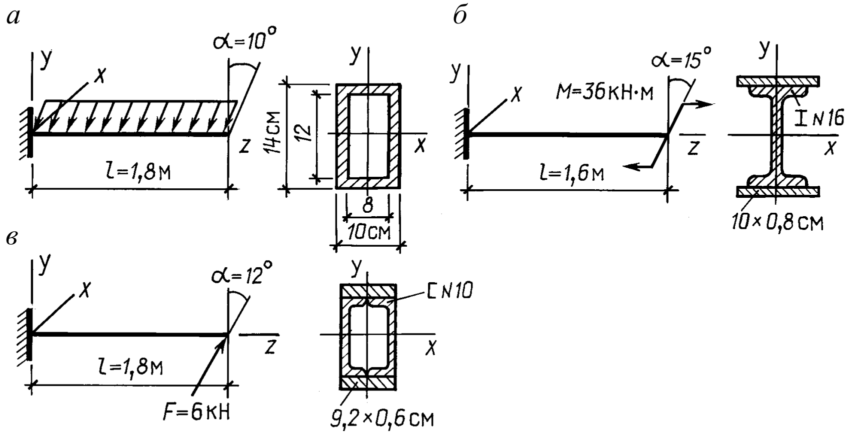


Рис. 7.1

Проверить прочность и жесткость балки, если $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа, а допустимый относительный прогиб

$$\left(\frac{v}{l}\right)_{adm} = \frac{1}{150}.$$

Ответы:

а. $\sigma_{max} = 204$ МПа; $\varphi_o = -17^o$; $\dfrac{v_{max}}{l} = \dfrac{1}{178}$.

б. $\sigma_{max} = 120,8$ МПа; $\varphi_o = -70,2^o$; $\dfrac{v_{max}}{l} = \dfrac{1}{158}$.

в. $\sigma_{max} = 120,63$ МПа; $\varphi_o = -22,38'$; $\dfrac{v_{max}}{l} = \dfrac{1}{191}$.

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

Для определения прогиба на конце консоли воспользуемся формулами:

$$q_x = q\sin\alpha = 17 \cdot 0{,}174 = 2{,}958 \text{ кН/м};$$

$$q_y = q\cos\alpha = 17 \cdot 0{,}985 = 16{,}75 \text{ кН/м};$$

$$I_x = \frac{10 \cdot 14^3}{12} - \frac{8 \cdot 12^3}{12} = 11{,}35 \text{ см}^4, \quad W_x = \frac{11{,}35}{7} = 162 \text{ см}^3;$$

$$I_y = \frac{14 \cdot 10^3}{12} - \frac{12 \cdot 8^3}{12} = 655 \text{ см}^4, \quad W_y = \frac{655}{5} = 131 \text{ см}^3;$$

$$M_{x\max} = \frac{q_y l^2}{2} = \frac{16{,}75 \cdot 1{,}8^2}{2} = 27{,}14 \text{ кН·м};$$

$$M_{y\max} = \frac{q_x l^2}{2} = \frac{2{,}958 \cdot 1{,}8^2}{2} = 4{,}792 \text{ кН·м}.$$

В сечении A, рис. 7.2:

$$\sigma_{\max} = \frac{27{,}14 \cdot 10^3}{162 \cdot 10^{-6}} + \frac{4{,}79 \cdot 10^3}{131 \cdot 10^{-6}} = (0{,}168 + 0{,}0356) \cdot 10^9 = 204 \text{ МПа} < R;$$

$$\nu_x = \frac{q_x l^4}{8EJ_y} = \frac{2{,}958 \cdot 1{,}8^4 \cdot 10^3}{8 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 655 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0000296 \cdot 10^2 \text{ м} = 0{,}296 \text{ см};$$

$$\nu_y = \frac{q_y l^4}{8EJ_x} = \frac{16{,}75 \cdot 1{,}8^4 \cdot 10^3}{8 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 11{,}35 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0000968 \cdot 10^2 \text{ м} = 0{,}968 \text{ см};$$

$$\nu_B = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{0,296^2 + 0,968^2} = 1,012 \text{ см};$$

$$\frac{\nu}{l} = \frac{1,012}{180} = \frac{1}{178} < \frac{1}{150};$$

$$\text{tg}\varphi_0 = -\frac{(-4,79)}{(-27,14)} \cdot \frac{11,35}{655} = -0,306, \quad \varphi_0 = -17°.$$

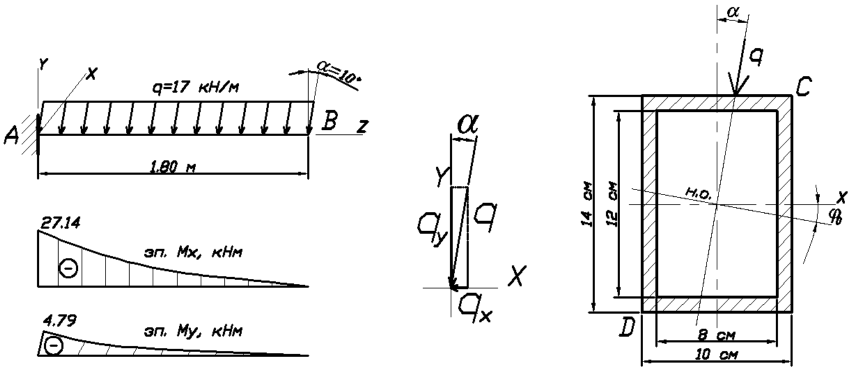


Рис. 7.2

В точке C

$$\sigma = 204 \text{ МПа};$$

в точке D

$$\sigma = -204 \text{ МПа}.$$

Задача 7.2

Стальная консольная балка, рис. 7.3, заданного поперечного сечения нагружена внешними силами, действующими в главных плоскостях сечения.

Расположив сечение балки рационально по отношению к нагрузке, определить ее наибольшее допустимое значение, если R = 210 МПа. Скручиванием швеллера пренебречь.

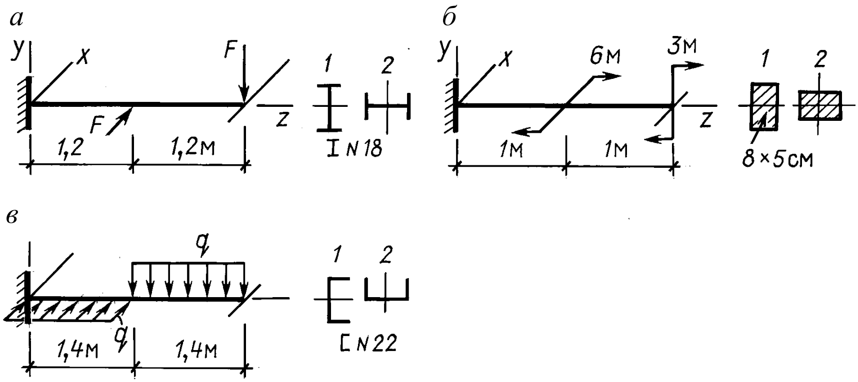


Рис. 7.3

Ответы:
а. Положение 1; $F = 2{,}56$ кН; $\varphi_0 = 82{,}7^{\circ}$.
б. Положение 2; $M = 3{,}11$ кН; $\varphi_0 = -38{,}0^{\circ}$.
в. Положение 1; $q = 3{,}867$ кН; $\varphi_0 = 77{,}5^{\circ}$.

Вариант *а)*

Решение

Сечение – двутавр № 18: $I_x = 1290$ см^4, $I_y = 82{,}6$ см^4, $W_x = 143$ см^3, $W_y = 18{,}4$ см^3, рис. 7.4.

Для расчета принимаем положение двутавра в положении *1*, так как $M_x > M_y$.

В сечении A

$$\sigma_{\max} = \frac{2{,}4F}{143\cdot10^{-6}} + \frac{1{,}2F}{18{,}4\cdot10^{-6}} = 210 \text{ МПа, откуда } F = 2{,}56 \text{ кН.}$$

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} = -\frac{1{,}2\cdot2{,}56\cdot1290}{-2{,}4\cdot2{,}56\cdot82{,}6} = 7{,}809,\quad \varphi_0 = 82{,}7^{\circ}.$$

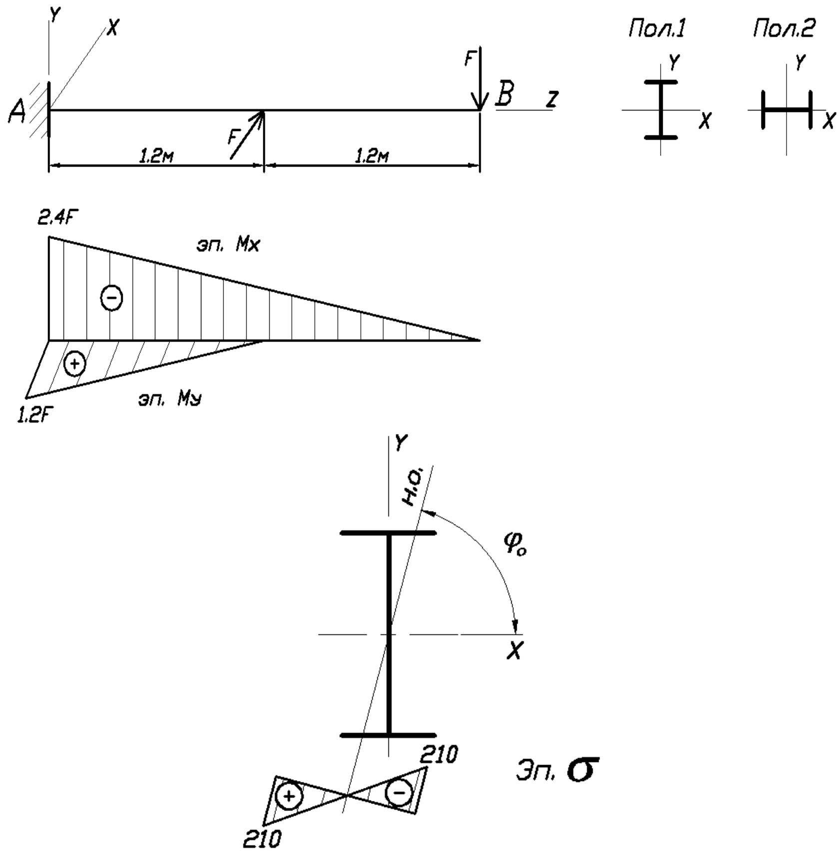


Рис. 7.4

Задача 7.3

Двухопорная деревянная (стальная) балка, рис. 7.5, подвергается изгибу в двух главных плоскостях сечения.

Определить размеры сечения (номер профиля) при заданном соотношении моментов сопротивления W_x / W_y. Построить суммарную эпюру нормальных напряжений. Указать точку сечения с наибольшим растягивающим напряжением.

Расчетные сопротивления: для древесины R = 14 МПа, для стали R = 210 МПа.

Виды опор балки в вертикальной и горизонтальной плоскостях одинаковы. Скручиванием швеллера пренебречь.

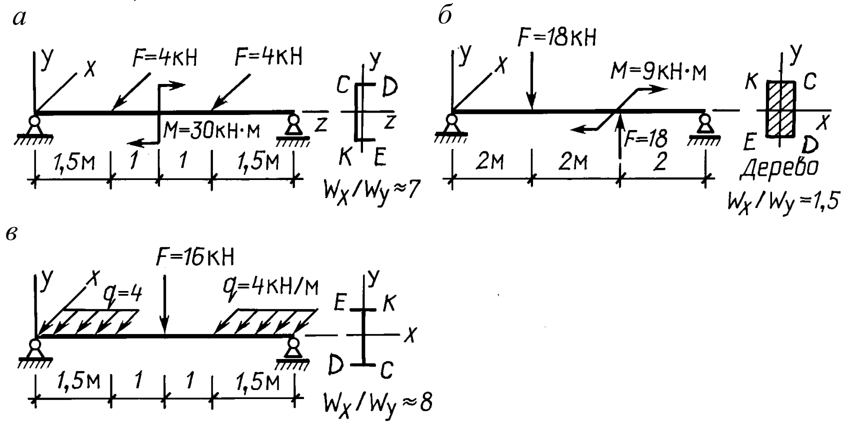


Рис. 7.5

Ответы:

а. Швеллер № 27: $\sigma_{max} = 209{,}6$ МПа в точке C; $\varphi_0 = 81{,}1^{\circ}$.

б. Сечение 16 × 24 см: $\sigma_{max} = 13{,}6$ МПа в точке K; $\varphi_0 = 48{,}37^{\circ}$.

в. Двутавр № 24: $\sigma_{max} = 199{,}2$ МПа в точке D; $\varphi_0 = -75{,}4^{\circ}$.

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

K~7, R = 210 МПа.

Опасное сечение – *И*, рис. 7.6.

$$\sigma_{max} = \frac{M_x + KM_y}{W_x} = \frac{(15 + 7 \cdot 6) \cdot 10^3}{W_x} = 210 \text{ МПа};$$

$$W_x = \frac{57 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 271{,}4 \text{ см}^3.$$

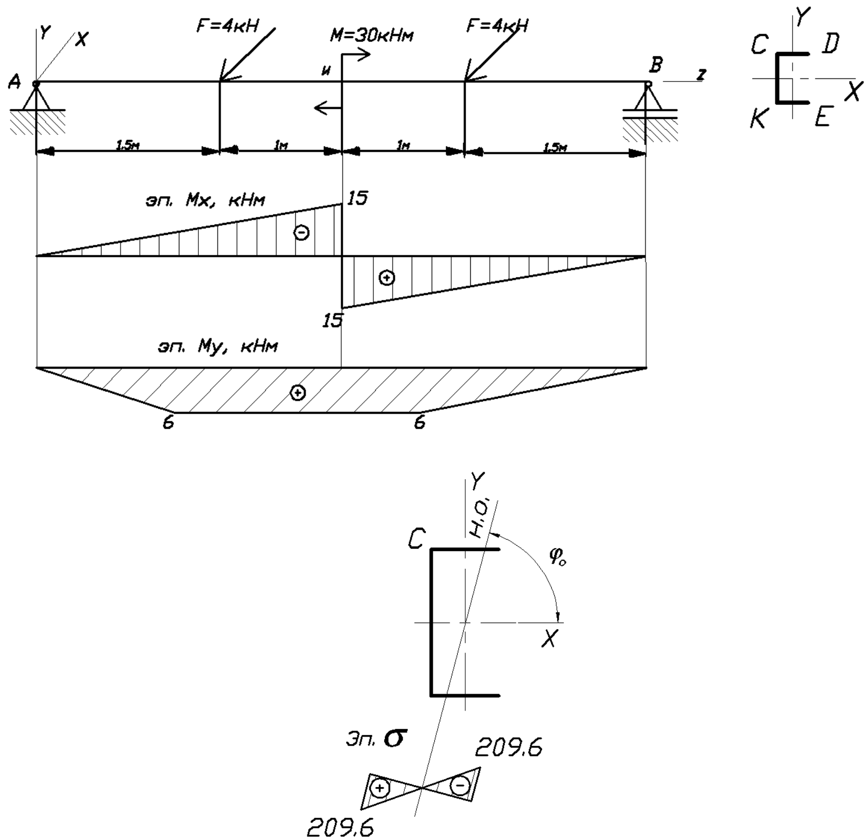


Рис. 7.6

Принимаем швеллер № 27: $W_x = 308$ см^3, $W_y = 37{,}3$ см^3, $I_x = 4160$ см^4, $I_y = 262$ см^4.

$$\sigma_{\max} = \frac{15 \cdot 10^3}{308 \cdot 10^{-6}} + \frac{6 \cdot 10^3}{37{,}3 \cdot 10^{-6}} = (48{,}7 + 160{,}9) \cdot 10^6 = 209{,}6 \text{ МПа};$$

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = -\frac{6 \cdot 10^3 \cdot 4160}{-15 \cdot 10^3 \cdot 262} = 6{,}35, \quad \varphi_0 = 81{,}1°.$$

Задача 7.4

Определить наибольшее нормальное напряжение в балке из двутавра № 40, расположив его сечение рационально по отношению к нагрузке, рис. 7.7.

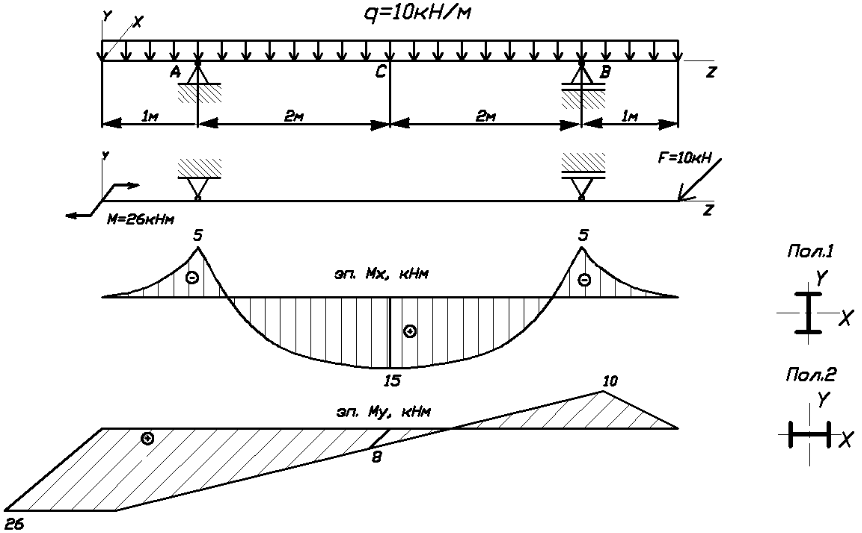


Рис. 7.7

Р е ш е н и е

Для двутавра № 40 $W_{max} = 953$ см^3; $W_{min} = 86$ см^3.

Неблагоприятное сочетание изгибающих моментов – в сечении *A* и *C*.

Положение 1, сечение *A*:

$$\sigma_{max} = \frac{5\cdot10^3}{953\cdot10^{-6}} + \frac{26\cdot10^3}{86\cdot10^{-6}} = (5{,}25 + 302)\cdot10^6 = 307 \text{ МПа}.$$

Положение 1, сечение *C*:

$$\sigma_{max} = \frac{15\cdot10^3}{953\cdot10^{-6}} + \frac{8\cdot10^3}{86\cdot10^{-6}} = (15{,}7 + 93)\cdot10^6 = 108{,}7 \text{ МПа}.$$

Положение 2, сечение A:

$$\sigma_{\max} = \frac{5 \cdot 10^3}{86 \cdot 10^{-6}} + \frac{26 \cdot 10^3}{953 \cdot 10^{-6}} = (58{,}1 + 27{,}3) \cdot 10^6 = 85{,}4 \text{ МПа.}$$

Положение 2, сечение C:

$$\sigma_{\max} = \frac{15 \cdot 10^3}{86 \cdot 10^{-6}} + \frac{8 \cdot 10^3}{953 \cdot 10^{-6}} = (174 + 8{,}4) \cdot 10^6 = 182{,}4 \text{ МПа.}$$

Рациональное положение – 2, $\sigma_{\max}$ = 182,4 МПа.

Задача 7.5

В прямоугольном с отверстием сечении стержня, рис. 7.8, возникает изгибающий момент M = 10 кН·м, действующий в плоскости, совпадающей с диагональю AB.

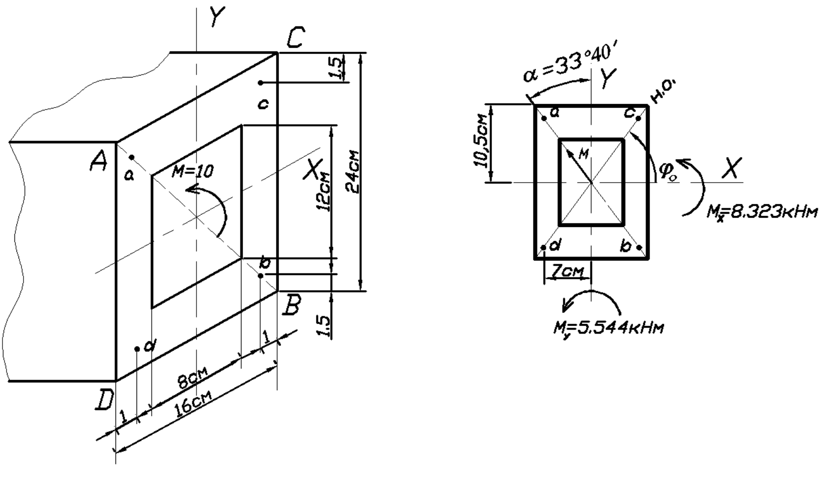


Рис. 7.8

Вычислить напряжения в точках a, b, c и d, а также наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения; определить положение нейтральной оси.

Р е ш е н и е

$$I_x = \frac{16 \cdot 24^3}{12} - \frac{8 \cdot 12^3}{12} = 17\,280 \text{ см}^4; \quad W_x = \frac{17280}{12} = 1440 \text{ см}^3;$$

$$I_y = \frac{24 \cdot 16^3}{12} - \frac{12 \cdot 8^3}{12} = 7680 \text{ см}^4; \quad W_y = \frac{7680}{8} = 960 \text{ см}^3;$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{8}{12} = 0{,}667, \quad \alpha = 33°40',$$

$$M_x = M\cos\alpha = 10 \cdot 0{,}8323 = 8{,}323 \text{ кН·м};$$

$$M_y = M\sin\alpha = 10 \cdot 0{,}5544 = 5{,}544 \text{ кН·м}.$$

$$\text{tg}\varphi_0 = \frac{M_y I_x}{M_x I_y} = \frac{5{,}544 \cdot 17280}{8{,}323 \cdot 7680} = 1{,}4987, \quad \varphi_0 = 56°30'.$$

Нейтральная ось совпадает с диагональю CD.

$$\sigma_A = -\frac{8{,}323 \cdot 10^3}{1440 \cdot 10^{-6}} - \frac{5{,}544 \cdot 10^3}{960 \cdot 10^{-6}} = (-5{,}78 - 5{,}78) \cdot 10^6 = -11{,}56 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = (\ 5{,}78 + 5{,}78) \cdot 10^6 = 11{,}56 \text{ МПа};$$

$$\sigma_a = -\frac{8{,}323 \cdot 10^3 \cdot 10{,}5 \cdot 10^{-2}}{17280 \cdot 10^{-8}} - \frac{5{,}544 \cdot 10^3 \cdot 7 \cdot 10^{-2}}{7680 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= (-5{,}057 - 5{,}053) \cdot 10^6 = -10{,}11 \text{ МПа};$$

$$\sigma_b = (5{,}057 + 5{,}053) \cdot 10^6 = 10{,}11 \text{ МПа};$$

$$\sigma_c = (-5{,}057 + 5{,}053) \cdot 10^6 = -0{,}004 \text{ МПа} \approx 0;$$

$$\sigma_d = (5{,}057 - 5{,}053) \cdot 10^6 = 0{,}004 \text{ МПа} \approx 0.$$

7.2. Внецентренное растяжение-сжатие

Задача 7.6

Стальная полоса, рис. 7.9, имеющая конструктивные элементы (отверстия, выточки, выступы), нагружена растягивающими силами F, направленными по продольной оси Z.

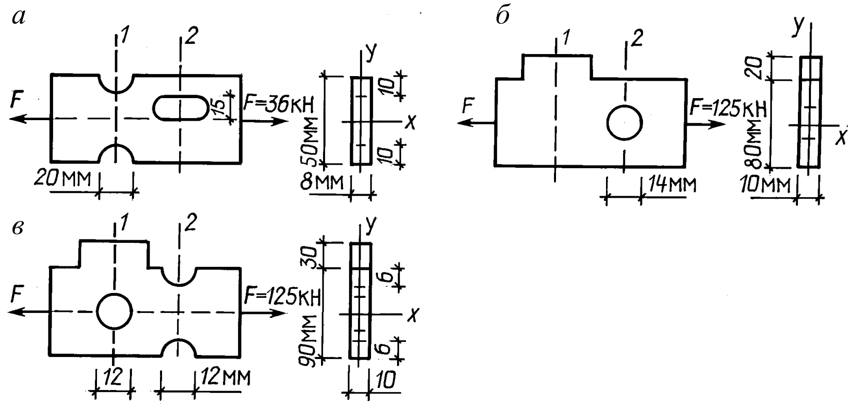


Рис. 7.9

Определить наибольшее нормальное напряжение в полосе. Построить эпюры напряжений в отмеченных сечениях.

Ответы:

а. В сечении *1* σ = 150 МПа;

в сечении *2* σ_{max} = 174,1 МПа, σ_{min} = 83,1 МПа.

б. В сечении *1* σ_{max} = 200 МПа; σ_{min} = 50 МПа;

в сечении *2* σ = 189 МПа.

в. В сечении *1* σ_{max} = 207,4 МПа; σ_{min} = 29,1 МПа;

в сечении *2* σ = 160,3 МПа.

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

В сечении I – центральное (осевое) растяжение:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{36 \cdot 10^3}{\left(50 - 10 \cdot 2\right) \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = 150 \text{ МПа, рис. 7.10, 7.11.}$$

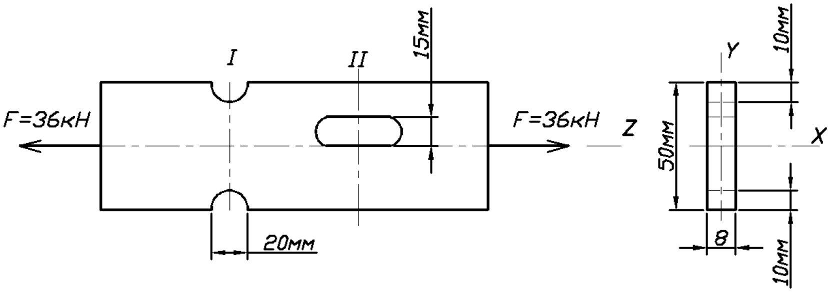


Рис. 7.10

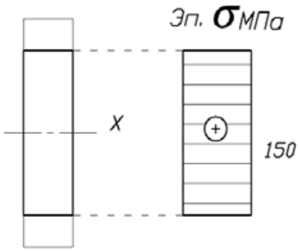


Рис. 7.11

В сечении II – внецентренное растяжение, рис. 7.12:

$$y_c = \frac{50 \cdot 8 \cdot 25 - 15 \cdot 8 \cdot 32{,}5}{50 \cdot 8 - 15 \cdot 8} = 21{,}8 \text{ мм;}$$

$$A = 50 \cdot 8 - 15 \cdot 8 = 280 \text{ мм}^2;$$

$$I_x = \frac{8 \cdot 50^3}{12} + 8 \cdot 50 \cdot 3{,}2^2 - \frac{8 \cdot 13^3}{12} - 8 \cdot 15 \cdot 10{,}7^2 = 71\,441 \text{ мм}^4;$$

$$y_F = 3{,}2 \text{ мм}, \quad y_0 = -\frac{I_x}{Ay_F} = -\frac{71\,441}{280 \cdot 3{,}2} = -79{,}7 \text{ мм};$$

$$N = F = 36 \text{ кН}; \quad M_x = Fy_F = 36 \cdot 3{,}2 = 115{,}2 \text{ кН·мм};$$

$$\sigma_A = \frac{36 \cdot 10^3}{280 \cdot 10^{-6}} + \frac{115{,}2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{71\,441 \cdot 10^{-12}} 28{,}2 \cdot 10^{-3} =$$

$$= (128{,}6 + 45{,}5) \cdot 10^6 = 174{,}1 \text{ МПа};$$

$$\sigma_C = 128{,}6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = \frac{36 \cdot 10^3}{280 \cdot 10^{-6}} - \frac{115{,}2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{71\,441 \cdot 10^{-12}} \cdot 21{,}8 \cdot 10^{-3} = 93{,}4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{max} = 174{,}1 \text{ МПа}.$$

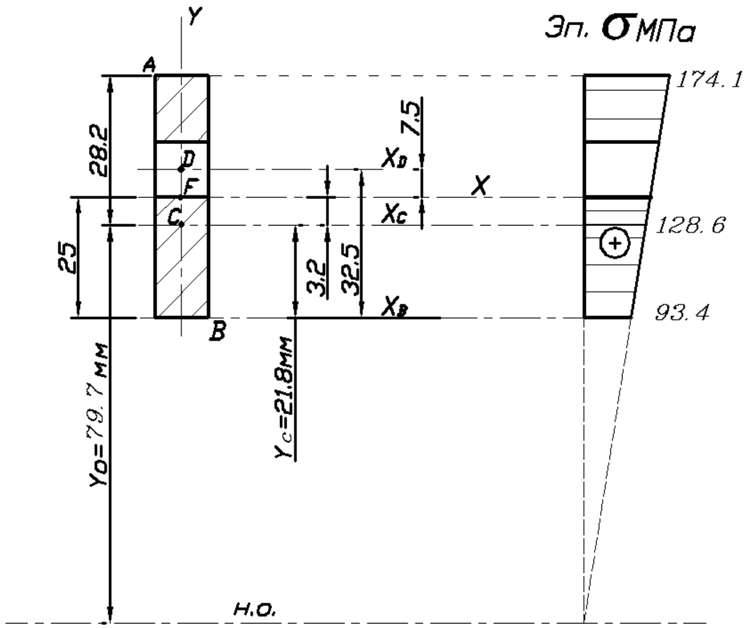


Рис. 7.12

Задача 7.7

Определить наибольшее допустимое значение сжимающей силы F_{adm}, приложенной в точке K поперечного сечения короткой бетонной колонны, если R_t = 1,4 МПа, R_c = 20 МПа, рис. 7.13.

а *б* *в*

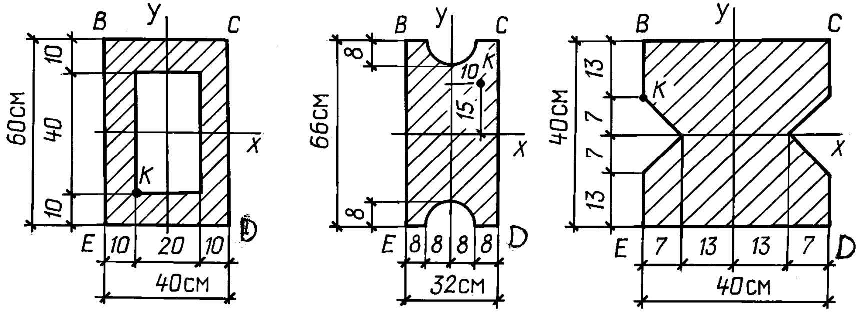


Рис. 7.13

Построить эпюру напряжений и ядро сечения.

Ответы:

а. F_{adm} = 135,3 кН; x_0 = 18,33 см; y_0 = 19,17 см; σ_C = 1,4 МПа; σ_E = –3,09 МПа; $y_я$ = ±12,78 см при $x_я$ = 0; $x_я$ = ±9,17 см при $y_я$ = 0.

б. F_{adm} = 114,7 кН; x_0 = –9,26 см; y_0 = –20,57 см; σ_C = –2,27 МПа; σ_E = 1,4 МПа; $y_я$ = ±9,35 см при $x_я$ = 0; $x_я$ = ±5,79 см при $y_я$ = 0.

в. F_{adm} = 64,2 кН; x_0 = 6,08 см; y_0 = –20,2 см; σ_D = 1,4 МПа; σ_B = –2,25 МПа; $y_я$ = ±7,07 см при $x_я$ = 0; $x_я$ = ±6,08 см при $y_я$ = 0.

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

$$M_x = 20F, \qquad M_y = 10F.$$

$$A = 60\cdot 40 - 20\cdot 40 = 1600 \text{ см}^2;$$

$$I_x = \frac{40\cdot 60^3}{12} - \frac{20\cdot 40^3}{12} = 613\ 300 \text{ см}^4;$$

$$W_x = \frac{613\,300}{30} = 20\,440 \text{ см}^3;$$

$$I_y = \frac{60 \cdot 40^3}{12} - \frac{40 \cdot 20^3}{12} = 293\,300 \text{ см}^4;$$

$$W_y = \frac{293\,300}{20} = 14\,670 \text{ см}^3;$$

$$x_0 = \frac{-293\,300}{1600 \cdot (-10)} = 18{,}33 \text{ см};$$

$$y_0 = \frac{-613\,300}{1600 \cdot (-20)} = 19{,}17 \text{ см};$$

$$\sigma_C = -\frac{N}{A} + \frac{20F}{W_x} + \frac{10F}{W_y} = \frac{-F}{1600 \cdot 10^{-4}} + \frac{20 \cdot F \cdot 10^{-2}}{20\,440 \cdot 10^{-6}} +$$

$$+\frac{10F \cdot 10^{-2}}{14\,670 \cdot 10^{-6}} = 1{,}4 \text{ МПа};$$

$$F = 135{,}3 \text{ кН};$$

$$\sigma_E = -\frac{135{,}3 \cdot 10^3}{1600 \cdot 10^{-4}} - \frac{20 \cdot 135{,}3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{20\,440 \cdot 10^{-6}} -$$

$$-\frac{10 \cdot 135{,}3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{14\,670 \cdot 10^{-6}} = -3{,}09 \text{ МПа}.$$

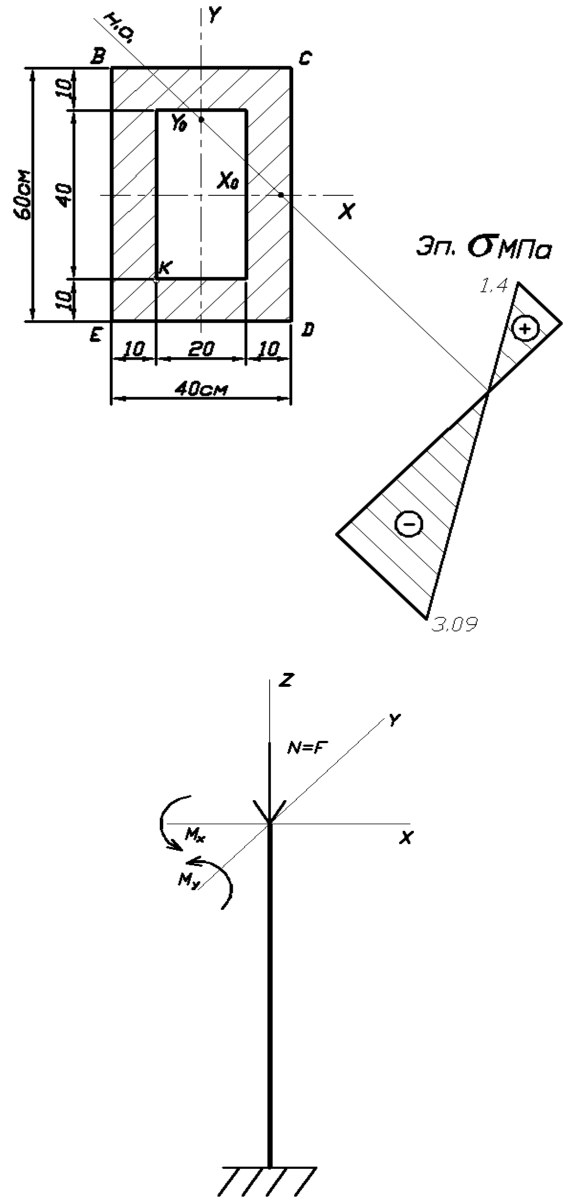

Y
Н.О.
B
C
10
40
10
60см
Y₀
X₀
X
K
E
D
10
20
10
40см
Эп. σ МПа
1.4
3.09
Z
Y
N=F
M_x
M_y
X

Рис. 7.14

Координаты ядра сечения

$$x_я = -\frac{I_y}{Ax_0};$$

$$y_я = -\frac{I_x}{Ay_0}.$$

Положение нулевой линии *1–1*: $y_0 = 30$ см, $x_0 = \infty$, рис. 7.15.

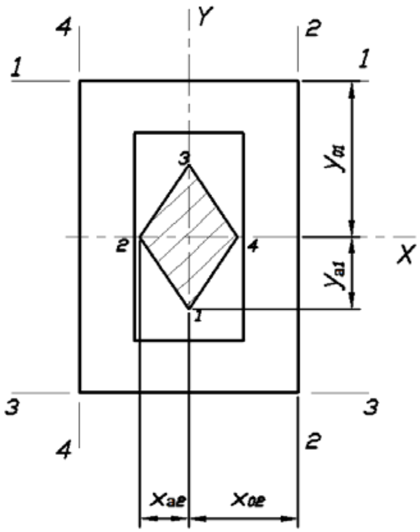


Рис. 7.15

$$x_{я1} = 0, \quad y_{я1} = -\frac{613\,300}{1600 \cdot 30} = -12{,}78 \text{ см}.$$

Положение нулевой линии *2–2*: $x_0 = 20$ см, $y_0 = \infty$.

$$x_{я2} = -\frac{293\,300}{1600 \cdot 20} = -9{,}17 \text{ см}, \quad y_{я2} = 0.$$

Положение нулевой линии *3–3*: $y_{я3} = 12{,}78$ см.
Положение нулевой линии *4–4*: $x_{я4} = 9{,}17$ см.

Задача 7.8

Определить положение точки приложения сжимающей силы F, наиболее удаленной от центра тяжести сечения (по оси Y), при котором в сечении колонны не будет растягивающих напряжений, рис. 7.16.

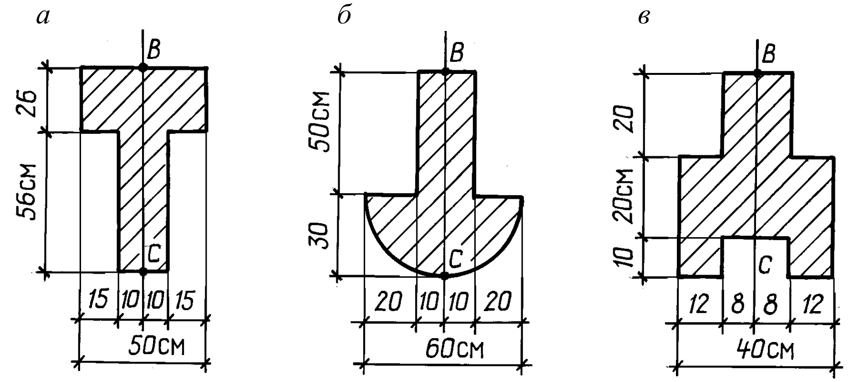


Рис. 7.16

Построить ядро сечения и эпюру нормальных напряжений.

Ответы:

а. $y_{max} = -17{,}85$ см, вниз от нулевой оси; $\sigma_C = -10{,}6F$, $\sigma_B = 0$.

б. $y_{max} = 14{,}18$ см, вверх от нулевой оси; $\sigma_B = -10{,}03F$, $\sigma_C = 0$.

в. $y_{max} = 7{,}18$ см, вверх от нулевой оси; $\sigma_B = -16{,}6F$, $\sigma_C = 0$.

Вариант *а)*

Решение

$$A = 50 \cdot 26 + 56 \cdot 20 = 2420 \text{ см}^2;$$

$$y_0 = \frac{50 \cdot 26 \cdot 69 + 56 \cdot 20 \cdot 28}{2420} = 50 \text{ см};$$

$$I_x = \frac{50 \cdot 26^3}{12} + 50 \cdot 26 \cdot 19^2 + \frac{20 \cdot 56^3}{12} + 56 \cdot 20 \cdot 22^2 = 1\ 377\ 000\ \text{см}^4;$$

$$I_y = \frac{26 \cdot 50^3}{12} + \frac{56 \cdot 20^3}{12} = 308\ 100\ \text{см}^4;$$

$$i_x = \sqrt{\frac{1\,377\,000}{2420}} = 23{,}9\ \text{см}, \quad i_y = \sqrt{\frac{308\,100}{2420}} = 11{,}28\ \text{см, рис. 7.17.}$$

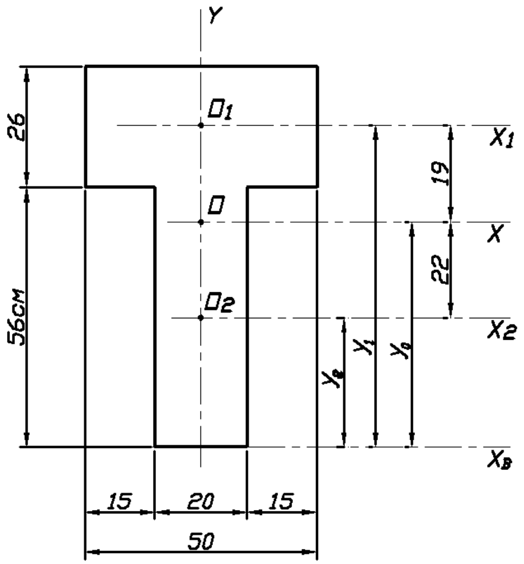


Рис. 7.17

Положение *1–1*: $y_0 = 32$ см; $x_0 = \infty$,

откуда $x_{я1} = 0, \quad y_{я1} = -\frac{23{,}9^2}{32} = -17{,}85$ см.

Положение *2–2*: $x_0 = 25$ см, $y_0 = \infty$, $x_{я2} = -\frac{11{,}28^2}{25} = -5{,}09$ см.

Положение *3–3*: $\dfrac{15}{56} = \dfrac{10}{a} \to a = 37{,}3$ см;

$$y_{03} = -(50 + 37{,}3) = -87{,}3 \text{ см};$$

$$\frac{x_{03}}{50 + 37{,}3} = \frac{15}{56} \to x_{03} = 23{,}4 \text{ см};$$

$$y_{я3} = -\frac{23{,}9^2}{-87{,}3} = 6{,}54 \text{ см}; \quad x_{я3} = -\frac{11{,}28^2}{23{,}4} = -5{,}44 \text{ см, рис. 7.18.}$$

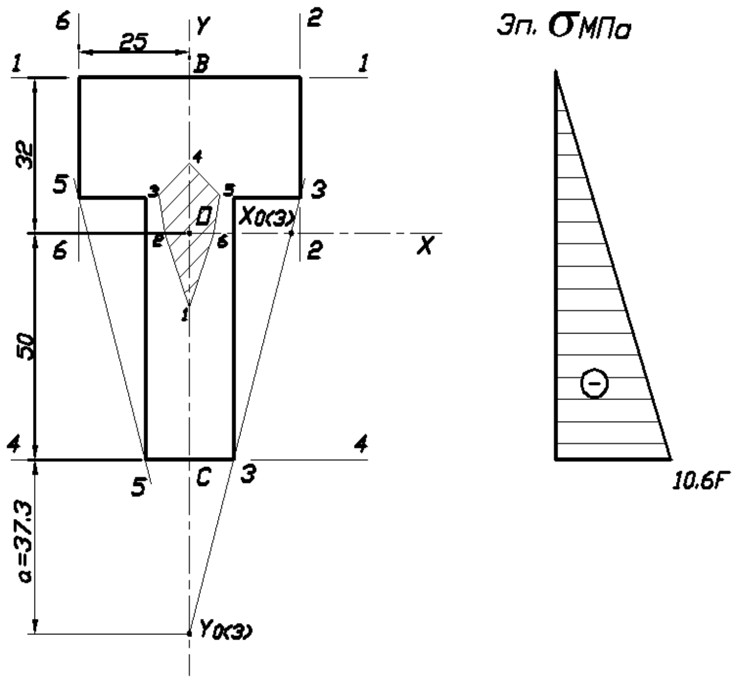


Рис. 7.18

Положение *4–4*: $y_0 = -50$ см; $x_0 = \infty$, $y_{я4} = -\dfrac{23{,}9^2}{-50} = 11{,}42$ см.

$$y_{max} = y_F = -17{,}85 \text{ см}.$$

$$\sigma_C = -\frac{F}{A} - \frac{Fy_F}{I_x}y_C = -\frac{F}{2420\cdot 10^{-4}} - \frac{17{,}85\cdot F\cdot 10^{-2}}{1377000\cdot 10^{-8}}\ 50\cdot 10^{-2} =$$

$$= -0{,}01058\cdot 10^4 F = -10{,}6F.$$

$$\sigma_B = 0.$$

Задача 7.9

В точках A и B колонны прямоугольного поперечного сечения, рис. 7.19, приложены одинаковые силы.

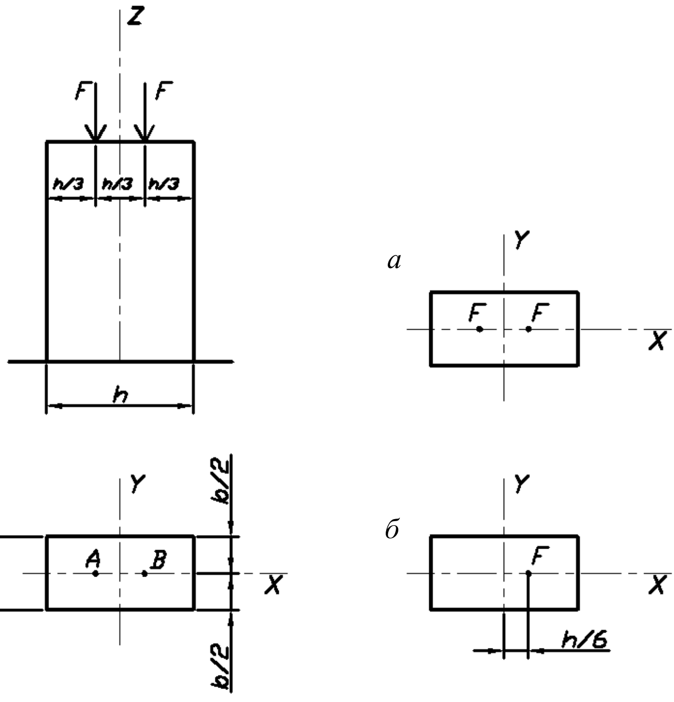


Рис. 7.19

Как изменится наибольшее сжимающее напряжение в колонне, если одну из сил удалить?

Р е ш е н и е

$$\sigma_{\max} = \frac{2F}{hb},$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_y x_{\max}}{J_y} = \frac{F}{hb} + \frac{Fh}{6} \cdot \frac{12}{bh^3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{2F}{hb}.$$

Задача 7.10

Сопоставить напряжения в короткой колонне двутаврового сечения (*а*) и «усиленной» швеллером (*б*), приваренным к двутавру по всей длине, рис. 7.20.

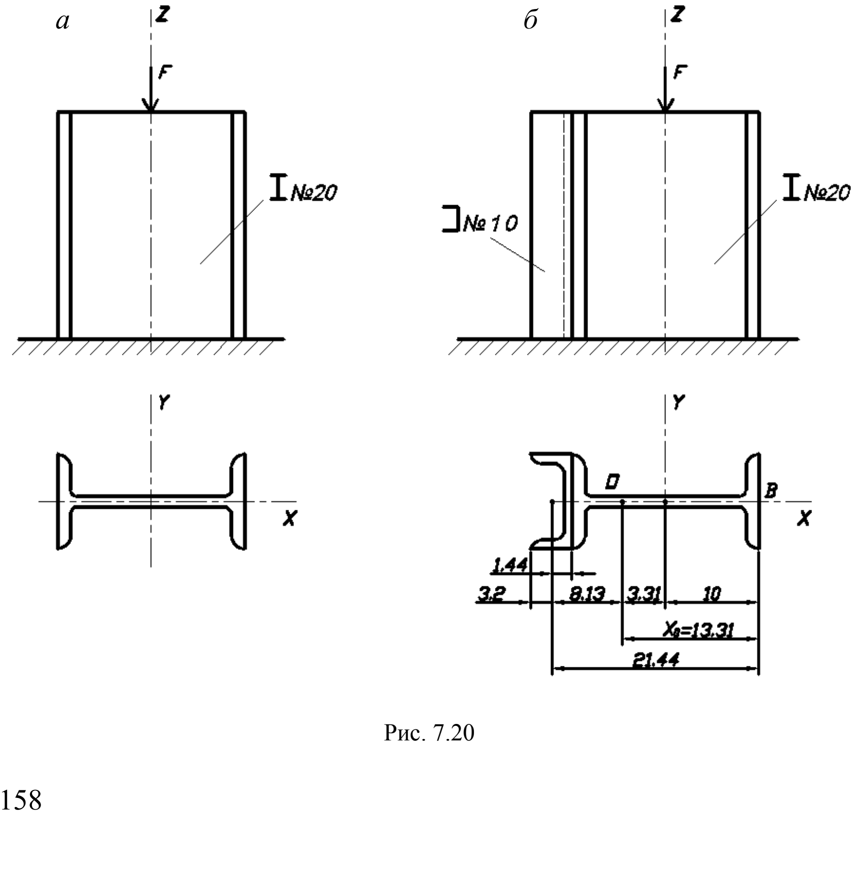


Рис. 7.20

Сжимающая сила F = 500 кН приложена по продольной оси двутавра.

Р е ш е н и е

Двутавр № 20: $A = 26{,}8$ см^2, $J_y = 1840$ см^4.
Швеллер № 10: $A = 10{,}9$ см^2, $J_y = 20{,}4$ см^4, $x_C = 1{,}44$ см.

$$A' = 26{,}8 + 10{,}9 = 37{,}7 \text{ см}^2;$$

$$x_0 = \frac{26{,}8 \cdot 10 + 10{,}9\left(20 + 1{,}44\right)}{37{,}7} = 13{,}31 \text{ см};$$

$$I_y = 20{,}4 + 10{,}9 \cdot 8{,}13^2 + 1840 + 26{,}8 \cdot 3{,}31^2 = 2873 \text{ см}^4.$$

Для варианта *а*

$$\sigma_{\max} = -\frac{500 \cdot 10^3}{26{,}8 \cdot 10^{-4}} = -186{,}6 \text{ МПа}.$$

Для варианта *б*

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = -\frac{500 \cdot 10^3}{37{,}7 \cdot 10^{-4}} - \frac{500 \cdot 10^3 \cdot 3{,}31 \cdot 10^{-2}}{2873 \cdot 10^{-8}} 13{,}31 \cdot 10^{-2} =$$

$$= -\left(13{,}26 + 7{,}67\right) \cdot 10^7 = -209{,}3 \text{ МПа}.$$

Напряжения в варианте *б* увеличатся в

$$\frac{209{,}3}{186{,}6} = 1{,}1 \text{ раза},$$

или на 12,2 %.

7.3. Изгиб с кручением

Задача 7.11

Определить диаметр стального консольного стержня, рис. 7.21, если σ_{adm} = 170 МПа. Использовать 4-ю (энергетическую) теорию прочности.

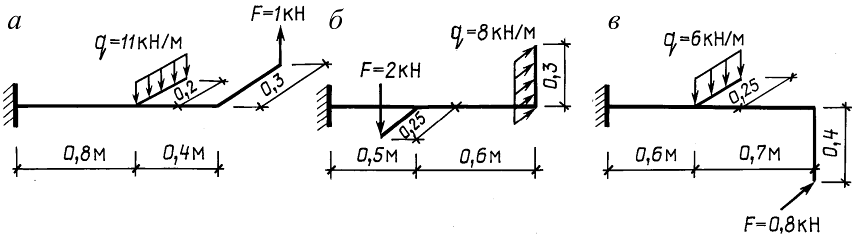


Рис. 7.21

Ответы:
а. d = 3,2 см.
б. d = 5,5 см.
в. d = 4,4 см.

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

Построим эпюру изгибающих моментов $M_{\text{я}}$ и эпюру крутящих моментов T, рис. 7.22.

Определим приведенный момент в сечении A и B.

В сечении A

$$M_{red} = \sqrt{M_x + 0,75T} = \sqrt{0,56^2 + 0,75 \cdot 0,08^2} = 0,564 \text{ кН·м}.$$

В сечении B

$$M_{red} = \sqrt{0,40^2 + 0,75 \cdot 0,3^2} = 0,477 \text{ кН·м}.$$

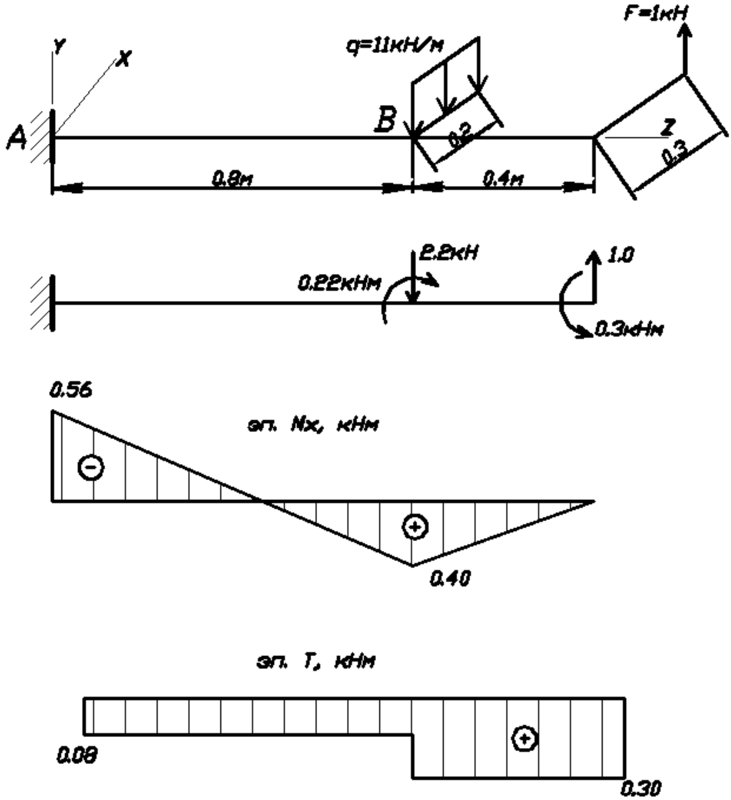


Рис. 7.22

Для большего значения приведенного момента требуемый момент сопротивления

$$W_x = \frac{0,564 \cdot 10^3}{170 \cdot 10^6} = 0,00332 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 3,32 \text{ см}^3;$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_x \cdot 32}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3,32 \cdot 32}{3,14}} = 3,23 \text{ см.}$$

Принимаем d = 3,2 см.

Задача 7.12

Дорожный знак, рис. 7.23, укреплен на полой круглой стойке с наружным диаметром D = 80 мм и толщиной стенки 5 мм.

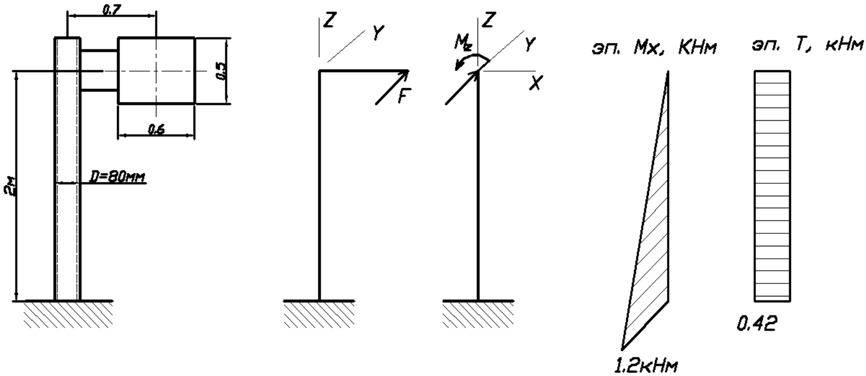


Рис. 7.23

Используя четвертую теорию прочности, определить коэффициент запаса прочности стойки при наибольшей ветровой нагрузке на плоскость знака q = 2 кН/м^2.

Предел текучести материала стойки σ_y = 180 МПа.

Решение

$$F = q \cdot 0,5 \cdot 0,6 = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,6 = 0,6 \ = 0,6 \text{ кН};$$

$$M_z = F \cdot 0,7 = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42 \ \text{ кН·м};$$

$$M_{x,\max} = 0,6 \cdot 2 = 1,2 \ = 1,2 \text{ кН·м};$$

$$M_{\text{red}} = \sqrt{1,2^2 + 0,75 \cdot 0,42^2} = 1,254 \ \text{ кН·м},$$

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32}(1 - C^4) = \frac{3,14 \cdot 8^3}{32}(1 - (\frac{7}{8})^4) = 20,8 \ \text{см}^3,$$

где $C = \dfrac{d}{D}$.

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{M_{\text{red}}}{W_x} = \frac{1,254 \cdot 10^3}{20,8 \cdot 10^{-6}} = 0,0603 \cdot 10^9 \text{ Па} = 60,3 \text{ МПа};$$

$$K = \frac{\sigma_y}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{180}{60,3} = 2,99.$$

Задача 7.13

Определить значение наибольшего допустимого груза *F*, который можно поднять при помощи ворота, рис. 7.24.

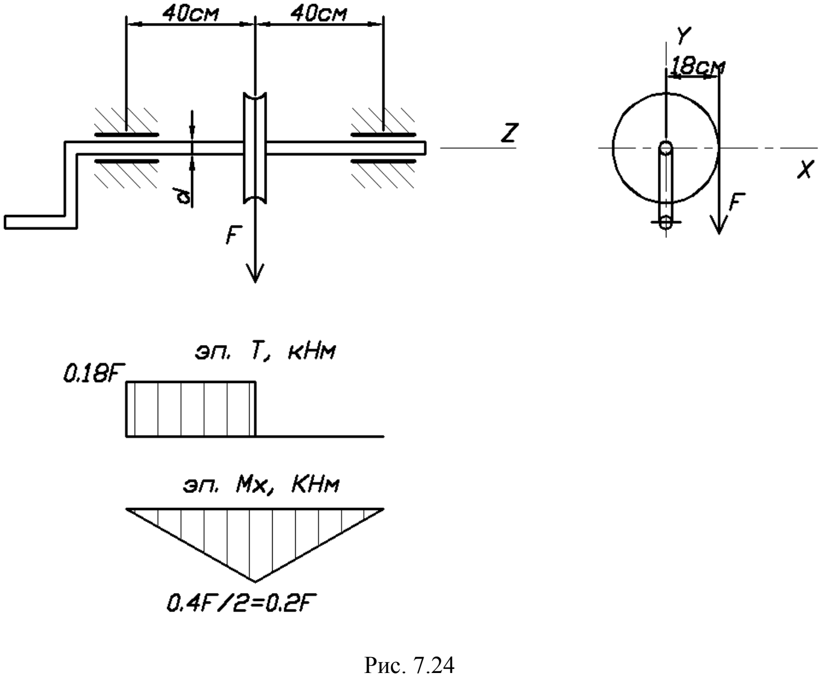


Рис. 7.24

Ворот круглого поперечного сечения диаметром d = 30 мм, стальной, с расчетным сопротивлением R = 100 МПа.

Р е ш е н и е

$$M_{\text{red}} = \sqrt{\left(0,2F\right)^2 + 0,75\left(0,18F\right)^2} = 0,254F \text{ кН·м};$$

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 3^3}{32} = 2,649 \text{ см}^3;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{red}}}{W_x} = R;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{0,254F}{2,649 \cdot 10^{-6}} = 0,0959F \cdot 10^6 = R.$$

$$0,0959F \cdot 10^6 = 100 \cdot 10^6;$$

$$F = 1043 \text{ Н}.$$

7.4. Пространственный стержень

Задача 7.14

Проверить прочность стальных стержней пространственной системы, рис. 7.25, если R = 210 МПа, R_s = 130 МПа.

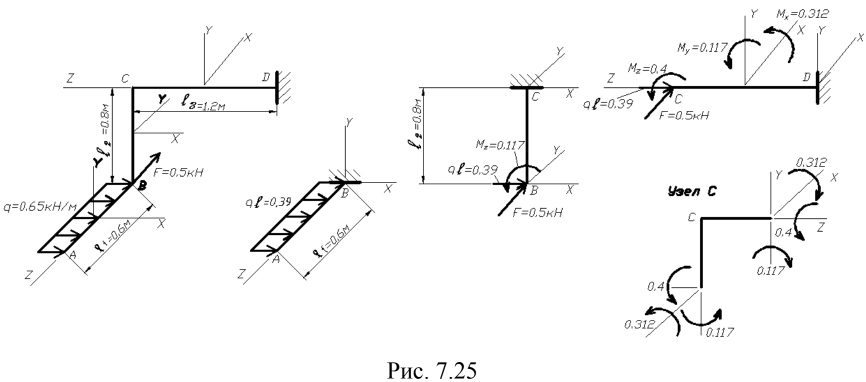


Рис. 7.25

Диаметр стержней d = 3,2 см.

Р е ш е н и е

$$A = \frac{3,14 \cdot 3,2^2}{4} = 8,04 \text{ см}^2;$$

$$W_x = W_y = \frac{3,14 \cdot 3,2^3}{32} = 3,22 \text{ см}^3;$$

$$W_p = \frac{3,14 \cdot 3,2^3}{16} = 6,44 \text{ см}^3.$$

Стержень AB – изгиб, рис. 7.26:

$$\sigma = \frac{M_y}{W_y} = \frac{0,117 \cdot 10^3}{3,22 \cdot 10^{-6}} = 36,3 \text{ МПа} < R.$$

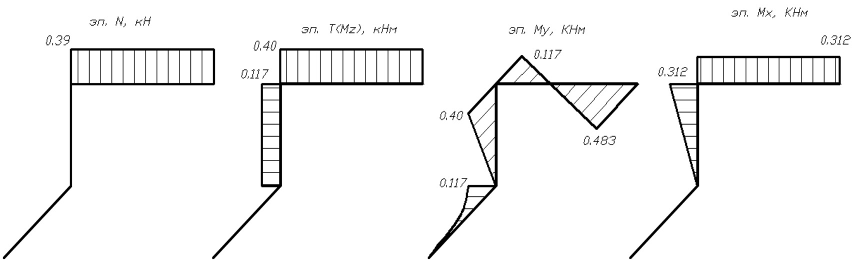


Рис. 7.26

Стержень BC – изгиб с кручением:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{0,117 \cdot 10^3}{6,44 \cdot 10^{-6}} = 18,2 \text{ МПа} < R_s.$$

$$M_{\text{и}} = \sqrt{0,312^2 + 0,40^2} = 0,507 \text{ кН·м};$$

$$\sigma_{max} = \frac{0,507 \cdot 10^3}{3,22 \cdot 10^{-6}} = 157,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{des} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{157,5^2 + 3 \cdot 18,2^2} = 160,6 \text{ МПа} < R.$$

Стержень *CD* – сжатие, изгиб, кручение:

$$\tau_{max} = \frac{0,4 \cdot 10^3}{6,44 \cdot 10^{-6}} = 62,1 \text{ МПа} < R_s;$$

$$\sigma_{сжат} = \frac{0,39 \cdot 10^3}{8,04 \cdot 10^{-4}} = 0,485 \text{ МПа};$$

$$M_и = \sqrt{0,312^2 + 0,483^2} = 0,575 \text{ кН·м};$$

$$\sigma_{изг} = \frac{0,575 \cdot 10^3}{3,22 \cdot 10^{-6}} = 178,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{des} = \sqrt{\left(\sigma_{из} + \sigma_{сж}\right)^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(178,6 + 0,485\right)^2 + 3 \cdot 62,1^2} =$$

$$= 209 \text{ МПа} < R.$$

8. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

Статически определимые системы

Задача 8.1

Стальная стойка, рис. 8.1, длиной *l* загружена сжимающей силой *F*.

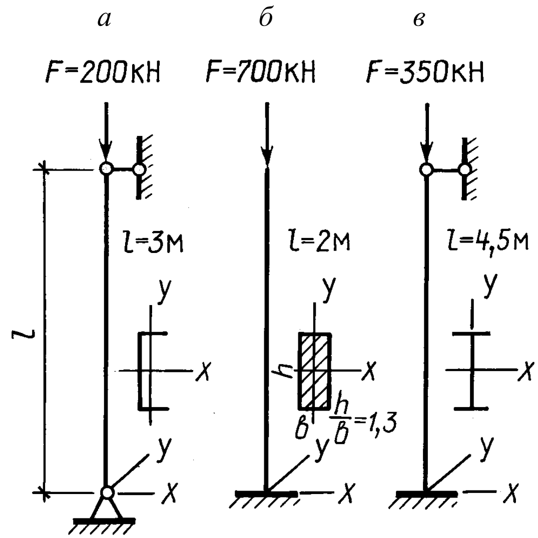


Рис. 8.1

Подобрать номер прокатного профиля (размеры поперечного сечения) и определить значение коэффициента запаса устойчивости, если $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.

Ответы:

а. Швеллер № 22, $n = 1{,}65$.

б. $h = 12$ см, $b = 9{,}24$ см, $n = 1{,}39$.

в. Двутавр № 27, $n = 1{,}48$.

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

Принимаем коэффициент продольного изгиба

$$\varphi_1 = 0,5.$$

Тогда требуемая площадь поперечного сечения, рис. 8.2:

$$A = \frac{200 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 19,05 \text{ см}^2.$$

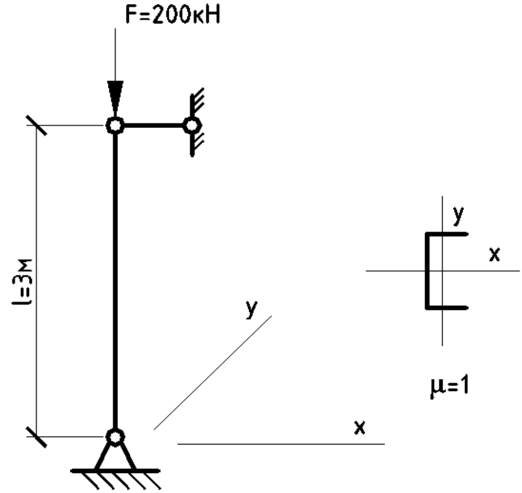


Рис. 8.2

Выбираем швеллер № 16: $A = 19,5\,\text{см}^2$, $I_x = 823 \text{ см}^4$, $I_y = 78,8 \text{ см}^4$, $i_x = 6,49$ см, $i_y = 2,01$ см.

Гибкость стойки

$$\lambda = \frac{1 \cdot 300}{2,01} = 149,3 \rightarrow \varphi = 0,303.$$

Проверяем устойчивость:

$$\sigma = \frac{200 \cdot 10^3}{19,5 \cdot 10^{-4}} = 102,6 \text{ МПа};$$

$$\varphi R = 0,303 \cdot 210 \cdot 10^6 = 63,6 \text{ МПа}.$$

Имеет место перенапряжение, так как $\sigma > \varphi R.$ Принимаем новое значение коэффициента:

$$\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,303}{2} = 0,40;$$

$$A = \frac{200 \cdot 10^3}{0,40 \cdot 210 \cdot 10^6} = 23,8 \text{ см}^2;$$

[№ 20: $A = 23,4$ см^2, $I_x = 1520$ см^4, $I_y = 113$ см^4, $i_x = 8,07$ см, $i_y = 2,2$ см,

$$\lambda = \frac{1 \cdot 300}{2,2} = 136,4 \to \varphi = 0,36;$$

$$\sigma = \frac{200 \cdot 10^6}{23,8 \cdot 10^{-4}} = 84,0 \text{ МПа};$$

$$\varphi R = 0,36 \cdot 210 = 75,6 \text{ МПа} \ \text{– перенапряжение 11 \%}.$$

$$\varphi_3 = 0,38;$$

$$A = 25,1 \text{ см}^2;$$

[№ 22: $A = 26,7$ см^2, $I_y = 151$ см^4, $i_y = 2,37$ см;

$$\lambda = \frac{1\cdot 300}{2,37} = 126,6 \rightarrow \varphi = 0,41;$$

$$\sigma = 74,9 \text{ МПа};$$

$$\varphi R = 0,41\cdot 210 = 86,1 \text{ МПа} \text{ – недонапряжение } 13,0\ \%.$$

Окончательно принимаем швеллер № 22.

$$F_{\text{cr}} = \frac{3,14\cdot 200\cdot 10^{9}\cdot 151\cdot 10^{-8}}{(1\cdot 3)^{2}} = 330,8 \text{ кН};$$

$$n = \frac{F_{\text{cr}}}{F} = \frac{330,8}{200} = 1,65.$$

Задача 8.2

Стальная стойка центрально нагружена сжимающей силой F. Способы закрепления концов стойки в главных плоскостях сечения различны (рис. 8.3).

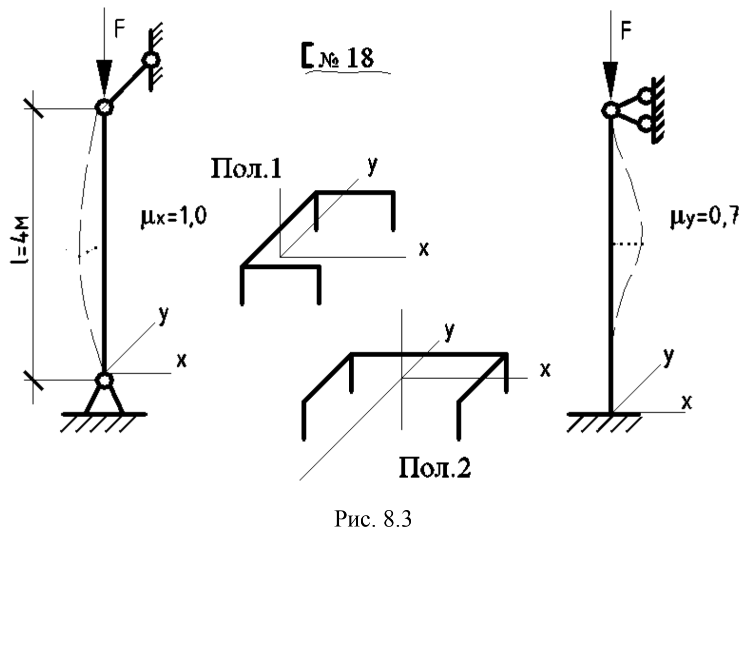


Рис. 8.3

Расположив сечение стойки рационально по отношению к осям *OX*, *OY*, определить наибольшую допустимую нагрузку *F* и коэффициент запаса устойчивости, если *R* = 210 МПа.

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

Положение *1*, см. рис. 8.3:

$$A = 20,7\ \text{см}^2, \quad I_x = 1090\ \text{см}^4, \quad I_y = 86\ \text{см}^4,$$

$$i_x = 7,24\ \text{см}, \qquad i_y = 2,04\ \text{см}.$$

$$\lambda_x = \frac{1 \cdot 400}{7,24} = 55,2; \qquad \lambda_y = \frac{0,7 \cdot 400}{2,04} = 137,3;$$

$$\lambda'_{\max} = \lambda_y = 137,3.$$

Положение *2*:

$$A = 20,7\ \text{см}^2, \quad I_x = 86\ \text{см}^4, \quad I_y = 1090\ \text{см}^4, \quad i_x = 2,04\ \text{см},$$

$$i_y = 7,24\ \text{см}.$$

$$\lambda_x = \frac{1 \cdot 400}{2,04} = 196, \qquad \lambda_y = \frac{0,7 \cdot 400}{7,24} = 38,7;$$

$$\lambda''_{\max} = 196.$$

Принимаем положение *1*, так как $\lambda'_{\max} < \lambda''_{\max}$.

При $\lambda = 137,3$ и $\varphi = 0,36$:

$$F_{\text{adm}} = A\varphi R = 20,7 \cdot 10^{-4} \cdot 0,36 \cdot 210 \cdot 10^{6} = 156,5 \text{ кН};$$

$$F_{\text{cr}} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 86 \cdot 10^{-8}}{(0,7 \cdot 4)^2} = 216,3 \text{ кН};$$

$$n = \frac{216,3}{156,5} = 1,38;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{156,5 \cdot 10^6}{20,7 \cdot 10^{-4}} = 75,6 \text{ МПа}.$$

Вариант *б)*

Р е ш е н и е

Положение *1*, рис. 8.4:

$$A = 5 \cdot 10 = 50 \text{ см}^2;$$

$$I_x = \frac{5 \cdot 10^3}{12} = 416,7 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{10 \cdot 5^3}{12} = 104,2 \text{ см}^4;$$

$$i_x = 2,89 \text{ см},$$

$$i_y = 1,44 \text{ см}.$$

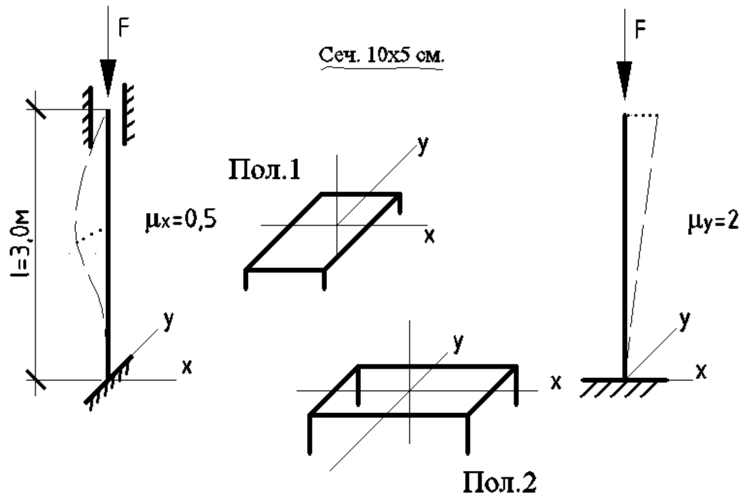


Рис. 8.4

$$\lambda_x = \frac{0,5 \cdot 300}{2,89} = 51,9; \qquad \lambda_y = \frac{2 \cdot 300}{1,44} = 416,7;$$

$$\lambda'_{\max} = \lambda_y = 416,7.$$

Положение *2*:

$$A = 50 \text{ см}^2, \quad I_x = 104,2 \text{ см}^4, \quad I_y = 416,7 \text{ см}^4,$$

$$i_x = 1,44 \text{ см}, \qquad i_y = 2,89 \text{ см};$$

$$\lambda_x = \frac{0,5 \cdot 300}{1,44} = 104,2; \qquad \lambda_y = \frac{2 \cdot 300}{2,89} = 207,6,$$

$$\lambda''_{\max} = 207,6.$$

Принимаем положение *2*, так как $\lambda'_{\max} > \lambda''_{\max}$.

При $\lambda = 207,6$ и $\varphi = 0,17$

$$F_{\text{adm}} = A\varphi R = 50 \cdot 10^{-4} \cdot 0,17 \cdot 210 \cdot 10^{6} = 178,5 \text{ кН};$$

$$F_{\text{cr}} = \frac{3,14^{2} \cdot 200 \cdot 10^{9} \cdot 104,2 \cdot 10^{-8}}{\left(0,5 \cdot 3\right)^{2}} = 913 \text{ кН};$$

$$n = \frac{913}{178,5} = 5,11;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{178,5 \cdot 10^{6}}{50 \cdot 10^{-4}} = 35,7 \text{ МПа}.$$

Задача 8.3

Жесткая балка, рис. 8.5, поддерживается стальными стержнями круглого поперечного сечения диаметром d.

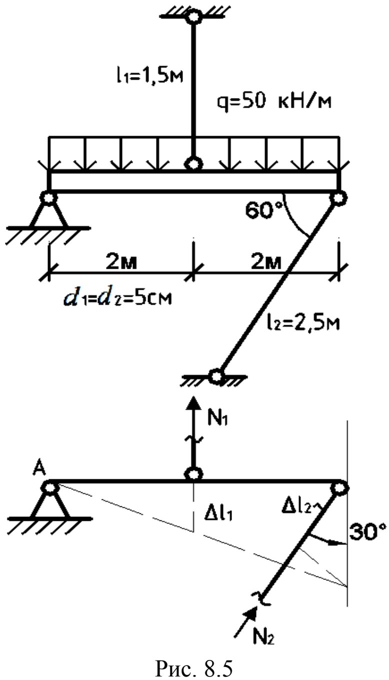


Рис. 8.5

Проверить прочность и устойчивость стержней, если R = 210 МПа.

Вариант *а)*

Р е ш е н и е

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3{,}14 \cdot 5^4}{64} = 30{,}7 \text{ см}^4;$$

$$A_1 = A_2 = \frac{3{,}14 \cdot 5^2}{4} = 19{,}63 \text{ см}^2.$$

Определяем продольные силы в стержнях:

$$\sum M_A = -N_1 \cdot 2 - N_2 \cos 30^\circ \cdot 4 + q 4 \cdot 2 = 0;$$

$$\sum M_\text{А} = -N_1 \cdot 2 - N_2 0{,}866 \cdot 4 + 50 \cdot 4 \cdot 2 = 0;$$

$$N_1 + 1{,}732 N_2 = 200;$$

$$N_1 = 200 - 1{,}732 N_2. \qquad (8.1)$$

Составим дополнительное уравнение совместности перемещений:

$$\frac{\Delta l_1}{2} = \frac{\Delta l_2}{\cos 30^\circ \cdot 4};$$

$$\frac{\Delta l_1}{2} = \frac{\Delta l_2}{0{,}866 \cdot 4};$$

$$\frac{N_1 l_1}{EA \cdot 2} = \frac{N_2 l_2}{EA \cdot 3{,}46};$$

$$\frac{N_1 \cdot 1{,}5}{2} = \frac{N_2 \cdot 2{,}5}{3{,}46};$$

$$N_1 = 0{,}963 N_2. \qquad (8.2)$$

Решая совместно уравнения (8.1) и (8.2), найдем

$$N_1 = 71{,}4 \text{ кН};$$

$$N_2 = 74{,}25 \text{ кН}.$$

Проверяем прочность:

$$\sigma_1 = \frac{71{,}4 \cdot 10^3}{19{,}63 \cdot 10^{-4}} = 36{,}37 \text{ МПа} < R;$$

$$\sigma_2 = \frac{74{,}25 \cdot 10^3}{19{,}63 \cdot 10^{-4}} = 37{,}82 \text{ МПа} < R.$$

Прочность обеспечена.

Расчет на устойчивость второго стержня ($\mu = 1$):

$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{30{,}7}{19{,}63}} = 1{,}25 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i};$$

$$\lambda = \frac{1 \cdot 250}{1{,}25} = 200;$$

$$\varphi = 0{,}176;$$

$$\sigma_2 = \frac{74{,}25 \cdot 10^3}{19{,}63 \cdot 10^{-4}} = 37{,}82 \text{ МПа} > \varphi R = 0{,}176 \cdot 210 = 36{,}96 \text{ МПа}.$$

Из условия устойчивости напряжение в стержне *2* превышает допустимое на 2,3 %, что допустимо.

Вариант *б)*

$$d_1 = d_2 = 4,6 \text{ см};$$

$$A = \frac{3,14 \cdot 4,6^2}{4} = 16,61 \text{ см}^2;$$

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 4,6^4}{64} = 21,97 \text{ см}^4.$$

Из рис. 8.6

$$\sum M_A = 0:$$

$$-N_1 \sin 30^{\circ} \cdot 3 - N_2 \cdot 6 + F \cdot 3 = 0,$$

$$-N_1 \cdot 0,5 \cdot 3 - N_2 \cdot 6 + 130 \cdot 3 = 0,$$

$$N_1 + 4N_2 = 260. \qquad (8.3)$$

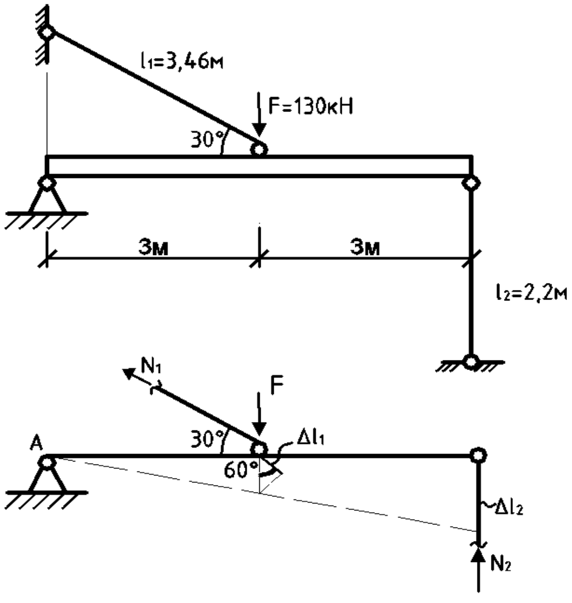


Рис. 8.6

Составим дополнительное уравнение:

$$\frac{\Delta l_1}{\sin 30^{\circ} \cdot 3} = \frac{\Delta l_2}{6};$$

$$\frac{\Delta l_1}{0,5 \cdot 3} = \frac{\Delta l_2}{6} \to \Delta l_1 = 0,25 \Delta l_2,$$

$$\frac{N_1 l_1}{EA} = 0,25 \frac{N_2 l_2}{EA};$$

$$N_1 \cdot 3,46 = 0,25 N_2 \cdot 2,2;$$

$$N_1 = 0,159 N_2. \qquad (8.4)$$

Решая совместно уравнения (8.3) и (8.4), получим

$$N_1 = 9,94 \text{ кН}; \qquad N_2 = 62,52 \text{ кН}.$$

Проверим прочность:

$$\sigma_1 = \frac{9,94 \cdot 10^3}{16,61 \cdot 10^{-4}} = 5,98 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{62,52 \cdot 10^3}{16,61 \cdot 10^{-4}} = 37,64 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Расчет на устойчивость второго стержня:

$$i = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{21,97}{16,61}} = 1,15 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 220}{1,15} = 191,3, \quad \varphi = 0,207;$$

$$\sigma_2 = 37,64 \text{ МПа} < \varphi R = 0,207 \cdot 210 = 43,47 \text{ МПа}.$$

Устойчивость обеспечена.

Задача 8.4

Жесткая балка, рис. 8.7, укреплена на шарнирно-неподвижной опоре A и двух стальных стержнях длиной 2,2 м, выполненных из равнополочных уголков $70 \times 70 \times 7$ мм.

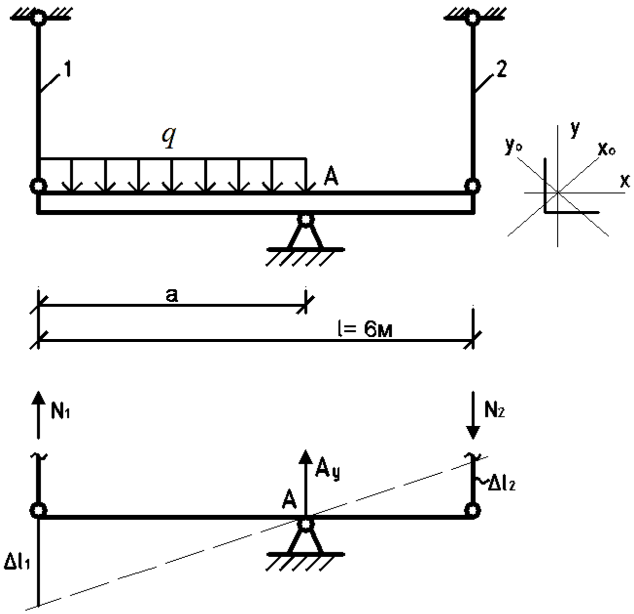


Рис. 8.7

Определить расстояние a, при котором в стержнях будут максимально допустимые внутренние силы, если R = 210 МПа. Какова при этом будет нагрузка q?

Решение

Для уголка $70 \times 70 \times 7$

$$A = 9{,}42 \text{ см}^2, \quad I_x = I_y = 42{,}98 \text{ см}^4, \quad I_{x_0} = 68{,}19 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_{y_0} = 17{,}77 \text{ см}^4; \quad i_{\min} = i_{y_0} = 1{,}37 \text{ см}.$$

Определим допускаемые усилия в стержнях.
В 1-м, растянутом, из условия прочности на растяжение

$$N_{1\,\max} = AR = 9{,}42 \cdot 210 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{6} = 197{,}8 \text{ кН}.$$

Во 2-м, сжатом, из условия устойчивости

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 220}{1{,}37} = 160{,}6 \to \varphi = 0{,}265,$$

$$N_{2\,\max} = 9{,}42 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}265 \cdot 210 \cdot 10^{6} = 52{,}4 \text{ кН}.$$

Дополнительное уравнение деформации

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{l-a};$$

$$N_1 = N_2 \frac{a}{6-a};$$

$$197{,}8 = 52{,}4 \frac{a}{6-a} \to a = 4{,}74 \text{ м}.$$

$$\sum M_A = 0: \quad N_1 a + N_2 (l-a) - q\frac{a^2}{2} = 0;$$

$$197{,}8 \cdot 4{,}74 + 52{,}4(6-4{,}74) - q\frac{4{,}74^2}{2} = 0;$$

$$q = 89{,}4 \text{ кН/м}.$$

Задача 8.5

Какое из приведенных сечений, рис. 8.8, центрально-сжатой стойки, имеющих одинаковую площадь сечения A = 23,4 см^2 (для равнополочного уголка A = 22,8 см^2), обладает наибольшей и наименьшей несущей способностью и каково соотношение допустимых нагрузок при $l = 1$ м, $\mu = 1,0$?

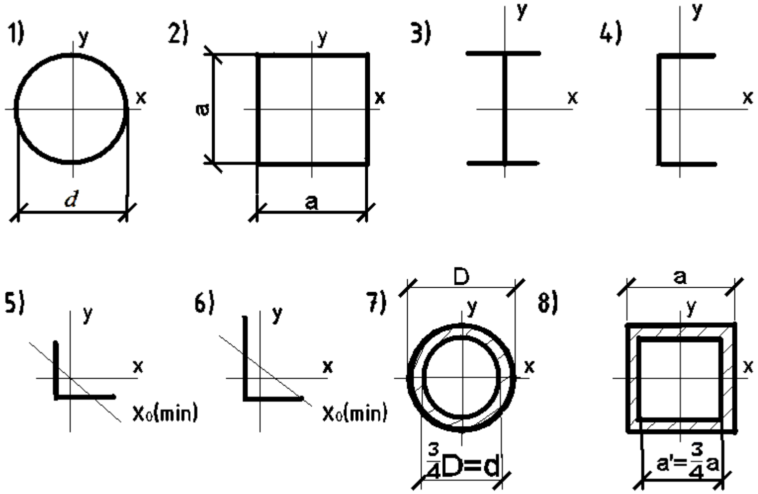


Рис. 8.8

Р е ш е н и е

1) Для круглого сечения:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 23,4 \text{ см}^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{23,4 \cdot 4}{3,14}} = 5,46 \text{ см };$$

$$I_x = I_y = I_{\min} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 5,46^4}{64} = 43,6 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{43,6}{23.4}} = 1,365 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{1 \cdot 100}{1,365} = 73,3 \text{ см};$$

$$\varphi = 0,748;$$

$$F_{\text{adm}} = 23,4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,748 \cdot 210 \cdot 10^{6} = 367,6 \text{ кН}.$$

2) Для квадратного сечения:

$$A = a^2 = 23,4 \text{ см}^2, \qquad a = 4,84 \text{ см};$$

$$I_x = I_y = I_{\min} = \frac{4,84^4}{12} = 45,7 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{45,7}{23,4}} = 1,397 \text{ см};$$

$$\lambda = 71,6;$$

$$\varphi = 0,759;$$

$$F_{\text{adm}} = A\varphi R = 23,4 \cdot 10^{-4} \cdot 210 \cdot 10^{6} \cdot 0,759 = 372,97 \text{ кН}.$$

3) Для двутавра № 18:

$$A = 23,4 \text{ см}^2, \qquad I_y = I_{\min} = 82,6 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{82,6}{23,4}} = 1,88 \text{ см};$$

$$\lambda = 53,2;$$

$$\varphi = 0,845;$$

$$F_{\text{adm}} = A\varphi R = 23,4 \cdot 0,845 \cdot 210 \cdot 10^{6} \cdot 10^{-4} = 415,2 \text{ кН}.$$

4) Для швеллера № 20:

$$A = 23{,}4 \text{ см}^2, \qquad I_y = I_{\min} = 113 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{113}{23{,}4}} = 2{,}2 \text{ см};$$

$$\lambda = 45{,}5;$$

$$\varphi = 0{,}879;$$

$$F_{\text{adm}} = A\varphi R = 23{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}879 \cdot 210 \cdot 10^6 = 431{,}9 \text{ кН}.$$

5) Для равнополочного уголка № $100 \times 100 \times 12$:

$$A = 22{,}8 \text{ см}^2, \qquad I_{\min} = 86{,}9 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{86{,}9}{22{,}8}} = 1{,}95 \text{ см};$$

$$\lambda = 51{,}2;$$

$$\varphi = 0{,}85;$$

$$F_{\text{adm}} = 407 \text{ кН}.$$

6) Для неравнополочного уголка № $125 \times 80 \times 12$:

$$A = 23{,}4 \text{ см}^2, \quad I_{\min} = 69{,}5 \text{ см}^4, \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{69{,}5}{23{,}4}} = 1{,}723 \text{ см},$$

$$\lambda = 58{,}04;$$

$$\varphi = 0{,}825;$$

$$F_{\text{adm}} = 405{,}4 \text{ кН}.$$

7) Для трубчатого сечения:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}\left[D^2 - \left(\frac{3}{4}D\right)^2\right] = \frac{3{,}14}{4} \cdot 0{,}437 D^2 =$$

$$= 0{,}343 D^2 = 23{,}4 \text{ см}^2;$$

$$D = \sqrt{\frac{23{,}4}{0{,}343}} = 8{,}26 \text{ см};$$

$$d = \frac{3}{4} \cdot 8{,}26 = 6{,}195 \text{ см};$$

$$I_x = I_y = I_{\min} = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{3{,}14}{64}\left(8{,}26^4 - 6{,}195^4\right) = 156{,}2 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{156{,}2}{23{,}4}} = 2{,}584 \text{ см};$$

$$\lambda = 38{,}77, \quad \varphi = 0{,}905;$$

$$F_{\text{adm}} = 444{,}7 \text{ кН}.$$

6) Для коробчатого сечения:

$$a' = 0{,}75a;$$

$$A = a^2 - \left(a'\right)^2 = a^2 - \left(0{,}75a\right)^2 = 0{,}4375a^2 = 23{,}4 \text{ см}^2;$$

$$a = \sqrt{\frac{23{,}4}{0{,}437}} = 7{,}318 \text{ см}, \qquad a' = 5{,}485 \text{ см};$$

$$I_x = I_y = I_{\min} = \frac{7{,}318^4}{12} - \frac{5{,}485^4}{12} = 163{,}4 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{163,4}{23,4}} = 2,643;$$

$$\lambda = \frac{1 \cdot 100}{2,643} = 37,8;$$

$$\varphi = 0,909,$$

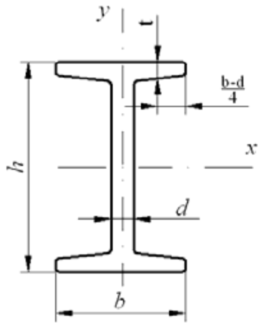
$$F_{\text{adm}} = A\varphi R = 23,4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,909 \cdot 210 \cdot 10^{6} = 446,7 \text{ кН}.$$

Наибольшую несущую способность имеет квадратное коробчатое сечение ($F_{\text{adm}} = 446,7$ кН), наименьшую – круглое сплошное ($F_{\text{adm}} = 367,6$ кН), т. е. на 17,7 % меньше.

Трубчатое сечение практически равноценно квадратному коробчатому.

ПРИЛОЖЕНИЯ
ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (по ГОСТ 8239–89*)

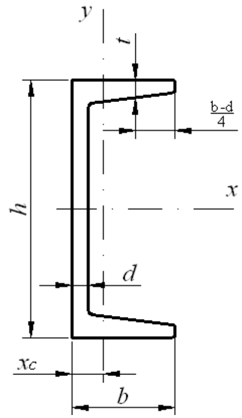


I – момент инерции;
W – момент сопротивления;
S – статический момент площади полусечения;
i – радиус инерции

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения A, см^2	Линейная плотность ρ, кг/м	Геометрические характеристики относительно осей						
							x				y		
	h	b	d	t			I_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	I_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5	7,8	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6	9,8	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7	11,2	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13	72,6	57	19062	953	16,2	545	667	86	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	92,6	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	108	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Сталь горячекатаная. Швеллеры (по ГОСТ 8240–89)

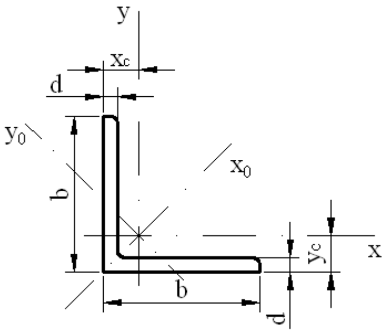


I – момент инерции;
W – момент сопротивления;
S – статический момент площади полусечения;
i – радиус инерции

Номср профиля	Размеры, мм				Площадь сечения A, см^2	Линейная плотность ρ, кг/м	Геометрические характеристики относительно осей							x_c, см
							x				y			
	h	b	d	t			I_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	I_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	
5	50	32	4,4	7	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,6	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,9	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	23,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	12,3	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	160	64	5	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16а	160	68	5	9	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18а	180	74	5,1	9,3	22,2	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	220	82	5,4	9,5	26,7	21	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10	30,6	24	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	270	95	6	10,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11	40,5	31,8	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	400	115	8	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Рекомендуемый сортамент равнополочных уголков (по ГОСТ 8509–86)



I – момент инерции;
W – момент сопротивления;
S – статический момент площади полусечения;
i – радиус инерции

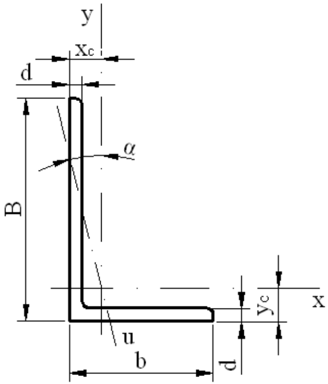
Номер профиля	Размеры, мм		Площадь сечения A, см^2	Линейная плотность ρ, кг/м	Геометрические характеристики относительно осей							x_c, y_c, см
					x		x_0		y_0			
	b	d			I_x, см^4	i_x, см	I_{x0}, см^4	i_{x0}, см	I_{y0}, см^4	i_{y0}, см	I_{xy}, см^4	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	20	3	1,13	0,89	0,4	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,23	0,6
		4	1,46	1,15	0,5	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,28	0,64
3	30	3	1,74	1,36	1,45	0,91	2,3	1,15	0,6	0,59	0,85	0,85
		4	2,27	1,78	1,84	0,9	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,9	0,78	2,68	1,13
		5	3,79	2,98	5,53	1,21	8,75	1,52	2,3	0,78	3,22	1,17
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1	4,16	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,63	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
		5	4,8	3,77	11,2	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
		6	5,69	4,47	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	7,65	1,46

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
6,3	63	4	4,96	3,9	18,86	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
		6	7,28	5,72	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	15,9	1,78
7	70	5	6,86	5,38	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,7	1,9
		6	8,15	6,39	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,1	1,94
		7	9,42	7,39	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,2	1,99
		8	10,67	8,37	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,2	2,02
7,5	75	5	7,39	5,8	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	23,1	2,02
		6	8,78	6,89	46,57	2,3	73,87	2,9	19,28	1,48	27,3	2,06
		7	10,15	7,97	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,47	31,2	2,1
		8	11,5	9,02	59,84	2,28	94,89	2,87	24,8	1,47	35	2,15
		9	12,83	10,07	66,1	2,27	104,72	2,86	27,48	1,46	38,6	2,18
8	80	6	9,38	7,36	56,97	2,47	90,4	3,11	23,54	1,58	33,4	2,19
		7	10,85	8,51	65,31	2,45	103,6	3,09	26,97	1,58	38,3	2,23
		8	12,3	9,65	73,36	2,44	116,3	3,08	30,32	1,57	43	2,27
9	90	6	10,61	8,33	82,1	2,78	130	3,5	33,97	1,79	48,1	2,43
		7	12,28	9,64	94,3	2,77	149,6	3,49	38,94	1,78	55,4	2,47
		8	13,93	10,93	106,1	2,76	168,4	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	68	2,55
10	100	7	13,75	10,79	130,5	3,08	207	3,88	54,16	1,98	76,4	2,71
		8	15,6	12,25	147,1	3,07	233	3,87	60,92	1,98	86,3	2,75
		10	19,24	15,1	178,9	3,05	283	3,84	74,08	1,96	110	2,83
		12	22,8	17,9	208,9	3,03	330	3,81	86,84	1,95	122	2,91
		14	26,28	20,63	237,1	3,00	374	3,78	99,32	1,94	138	2,99
12,5	125	8	19,69	15,46	294	3,87	466	4,87	121,9	2,49	172	3,36
		9	22	17,3	327	3,86	520	4,86	135,8	2,48	192	3,4
		10	24,33	19,1	359	3,85	571	4,84	148,5	2,47	211	3,45
		12	28,89	22,68	422	3,82	670	4,82	174,4	2,46	248	3,53
		14	33,37	26,2	481	3,8	763	4,78	199,6	2,45	282	3,61
		16	37,77	29,65	538	3,78	852	4,75	224,2	2,44	315	3,68
14	140	9	24,72	19,41	465	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
		10	27,33	21,45	512	4,33	813	5,46	210	2,78	301	3,82
		12	32,49	25,5	602	4,31	956	5,43	248	2,76	354	3,9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16	160	10	31,43	24,67	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,3
		11	34,42	27,02	844	4,95	1340	6,24	347	3,18	496	4,35
		12	37,39	29,35	912	4,94	1450	6,23	375	3,17	537	4,39
		14	43,57	33,97	1046	4,92	1662	6,2	430	3,16	615	4,47
		16	49,07	38,52	1175	4,89	1865	6,17	484	3,14	690	4,55
		18	54,79	43,01	1290	4,87	2061	6,13	537	3,13	771	4,63
		20	60,4	47,44	1418	4,85	2248	6,1	589	3,12	830	4,7
20	200	12	47,1	36,97	1822	6,22	2896	7,84	749	3,99	1073	5,37
		13	50,85	39,92	1960	6,21	3116	7,83	805	3,98	1156	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,2	3333	7,81	861	3,97	1236	5,46
		16	61,98	48,65	2362	6,17	3755	7,78	969	3,96	1393	5,54
		20	76,54	60,08	2871	6,12	4560	7,72	1181	3,93	1689	5,7
		25	94,29	74,02	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	2028	5,89
		30	111,54	87,56	4019	6	6351	7,55	1698	3,89	2332	6,07
25	250	16	78,4	61,55	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	2775	6,75
		18	87,72	68,86	5247	7,73	8336	9,75	2157	4,96	3089	6,83
		20	96,96	76,11	5764	7,71	9159	9,72	2370	4,94	3395	6,91
		22	106,12	83,31	6270	7,09	9961	9,69	2579	4,93	3691	7
		25	119,71	93,97	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	4119	7,11
		28	133,12	104,5	7716	7,61	12243	9,59	3189	4,9	4527	7,23
		30	141,96	111,44	8176	7,59	12964	9,56	3388	4,89	4788	7,31

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Рекомендуемый сортамент неравнополочных уголков (по ГОСТ 8510–86)



B – ширина большой полки;
b – ширина малой полки;
d – толщина полки;
I – момент инерции;
i – радиус инерции;
x_c, y_c – расстояние от центра тяжести до наружных граней полок;
α – угол наклона главной центральной оси

Номер профиля	Размеры, мм			Площадь сечения A, см^2	Линейная плотность ρ, кг/м	Геометрические характеристики относительно осей						x_c, см	y_c, см	I_{xy}, см^4	tgα
						x		y_0		u					
	B	b	d			I_x, см^4	i_x, см	I_y, см^4	i_y, см	I_u, см^4	i_u, см				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	0,13	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3,2/2	32	20	3	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382
			4	1,94	1,52	1,93	1	0,57	0,54	0,35	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	0,56	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385
			4	2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	0,63	1,37	1,22	0,281
			5	3,03	2,37	4,73	1,25	1,41	0,68	0,86	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374
5/3,2	50	32	3	2,42	1,9	6,18	1,6	1,99	0,91	1,18	0,7	0,72	1,60	2,01	0,403
			4	3,17	2,4	7,98	1,59	2,56	0,9	1,52	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401
6,3/4,0	63	40	4	4,04	3,17	16,33	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397
			5	4,98	3,91	19,91	2	6,26	1,12	3,73	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396
			6	5,9	4,63	23,31	1,99	7,29	1,11	4,36	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393
			8	7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	1,07	2,2	9,27	0,386
7,5/5	75	60	5	6,11	4,79	34,81	2,39	12,47	1,43	7,24	1,09	1,17	2,39	12	0,436
			6	7,25	5,69	40,92	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	1,21	2,44	14,1	0,435
			7	8,37	6,57	46,77	2,36	16,61	1,41	9,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435
			8	9,47	7,43	52,38	2,35	18,52	1,4	10,87	1,07	1,29	2,52	17,8	0,43
9/5,6	90	56	5,5	7,86	6,17	65,28	2,88	19,67	1,58	11,77	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384
			6	8,54	6,7	70,58	2,88	21,22	1,58	12,7	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384
			8	11,18	8,77	90,87	2,85	27,08	1,56	16,29	1,21	1,36	3,04	28,33	0,38
10/6,3	100	63	6	9,58	7,53	98,29	3,2	30,58	1,79	18,2	1,38	1,42	3,23	31,5	0,393
			7	11,09	8,7	112,86	3,19	34,99	1,78	20,83	1,37	1,46	3,28	36,1	0,392
			8	12,57	9,87	126,96	3,18	39,21	1,77	23,38	1,36	1,5	3,32	40?5	0,391
			10	15,47	12,14	153,95	3,15	47,18	1,75	28,34	1,35	1,58	3,4	48,6	0,387

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
12,5/8	125	80	7	14,06	11,04	226	4,01	73,73	2,29	43,4	1,76	1,8	4,01	74,7	0,407
			8	15,98	12,58	225	4	80,95	2,28	48,82	1,75	1,84	4,05	84,1	0,406
			10	19,7	15,47	311	3,98	100,47	2,26	59,33	1,74	1,92	4,14	102	0,404
			12	23,36	18,34	364	3,95	116,84	2,24	69,47	1,72	2	4,22	118	0,4
16/10	160	100	9	22,87	17,96	605	5,15	186	2,85	110,4	2,2	2,24	5,19	194	0,391
			10	25,28	19,85	666	5,13	204	2,84	121,16	2,19	2,28	5,23	213	0,390
			12	30,04	23,58	784	5,11	238	2,82	142,14	2,18	2,36	5,32	249	0,388
			14	34,72	27,26	897	5,08	271	2,8	162,49	2,16	2,43	5,4	282	0,385
20/12,5	200	125	11	34,87	27,37	1449	6,45	446	3,58	263	2,75	2,79	6,5	465	0,392
			12	37,89	29,74	1568	6,43	481	3,57	285	2,74	2,83	6,54	503	0,392
			14	43,87	34,43	1800	6,41	550	3,54	326	2,73	2,91	6,62	575	0,390
			16	49,77	39,07	2026	6,38	616	3,52	366	2,72	2,99	6,71	643	0,388

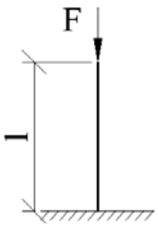
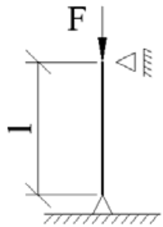
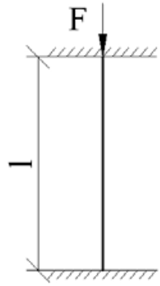
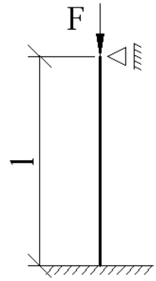
ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Коэффициент φ продольного изгиба центрально-сжатых элементов

Гибкость, λ	Значения φ для элементов из							
	стали с расчетным сопротивлением *R*, МПа						чугуна	древесины
	200	240	280	320	360	400		
0	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0,988	0,987	0,985	0,984	0,983	0,982	0,97	0,992
20	0,967	0,962	0,959	0,955	0,952	0,949	0,91	0,968
30	0,939	0,931	0,924	0,917	0,911	0,905	0,81	0,928
40	0,906	0,894	0,883	0,873	0,863	0,854	0,69	0,872
50	0,869	0,852	0,836	0,822	0,809	0,796	0,57	0,8
60	0,827	0,805	0,785	0,766	0,749	0,721	0,44	0,712
70	0,782	0,754	0,724	0,687	0,654	0,623	0,34	0,608
80	0,734	0,686	0,641	0,602	0,566	0,532	0,26	0,469
90	0,665	0,612	0,565	0,522	0,483	0,447	0,2	0,37
100	0,599	0,542	0,493	0,448	0,408	0,369	0,16	0,3
110	0,537	0,478	0,427	0,381	0,338	0,306	–	0,248
120	0,479	0,419	0,366	0,321	0,287	0,26	–	0,208
130	0,425	0,364	0,313	0,276	0,247	0,223	–	0,178
140	0,376	0,315	0,272	0,24	0,215	0,195	–	0,153
150	0,328	0,276	0,239	0,211	0,189	0,171	–	0,133
160	0,29	0,244	0,212	0,187	0,167	0,152	–	0,117
170	0,259	0,218	0,189	0,167	0,15	0,136	–	0,104
180	0,233	0,196	0,17	0,15	0,135	0,123	–	0,093
190	0,21	0,177	0,154	0,136	0,122	0,111	–	0,083
200	0,191	0,161	0,14	0,124	0,111	0,101	–	0,075
210	0,174	0,147	0,128	0,113	0,102	0,093	–	0,068
220	0,16	0,135	0,118	0,104	0,094	0,086	–	0,062

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы

Схема стойки				
μ	2	1	0,5	0,7

Значение коэффициентов a и b в формуле Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda$$

Материал	$\lambda_{пред}$	a, МПа	b, МПа
Ст. 2, Ст. 3	100	310	1,14
Ст. 5	100	464	3,26
Сталь 40	90	321	1,16
Кремнистая сталь	100	589	3,82
Дерево	110	29,3	0,194
Чугун	80	776	12
Для чугуна $\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$, где $c = 0{,}53$			

Содержание

Учебное издание

ЗИНЕВИЧ Сергей Иванович
ПЕНЬКЕВИЧ Владимир Александрович
ЮГОВА Марина Викторовна и др.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие
для студентов строительных специальностей

В 2 частях

Часть 2

СБОРНИК ЗАДАЧ

Редактор *Т. Н. Микулик*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 22.08.2017. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 11,45. Уч.-изд. л. 8,95. Тираж 300. Заказ 801.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.