

**БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

УДК 624.016.5.001.24(043.3)

**ЩЕТЬКО**  
**Николай Сергеевич**

**УЧЕТ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ МАТЕРИАЛА  
ПРИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БАЛОК**

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук  
по специальности  
05.23.17 – Строительная механика

Минск, 2011

Работа выполнена в **Республиканском унитарном предприятии по строительству «Институт БелНИИС»**

Научный руководитель

**Босаков Сергей Викторович,**  
доктор технических наук, профессор,  
профессор кафедры «Строительная механика»  
Белорусского национального технического  
университета

Официальные оппоненты:

**Василевич Юрий Владимирович,**  
доктор физико-математических наук, профес-  
сор, заведующий кафедрой «Соппротивление  
материалов машиностроительного профиля»  
Белорусского национального технического  
университета;

**Уласевич Вячеслав Прокофьевич,**  
кандидат технических наук, доцент, профес-  
сор кафедры «Строительные конструкции»  
учреждения образования «Брестский государ-  
ственный технический университет»

Оппонирующая организация Учреждение образования «Белорусский  
государственный университет транспорта»

Защита состоится « 12 » января 2012 года в « 15<sup>00</sup> » на заседании совета по защите диссертаций Д 02.05.09 при Белорусском национальном техническом университете по адресу: 220114, г. Минск, проспект Независимости, 150, к. 15, ауд. 808, e-mail: [nrak@bntu.by](mailto:nrak@bntu.by), тел./факс (8-017) 265-96-97.

Отзывы на автореферат присылать по адресу: 220013, г. Минск, проспект Независимости, 65, ученому секретарю совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского национального технического университета.

Автореферат разослан «\_\_» декабря 2011 г.

Ученый секретарь совета  
по защите диссертаций

Рак Н.А.

© Щетько Н.С., 2011  
© БНТУ, 2011

## ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в строительной отрасли Республики Беларусь наметилась тенденция к увеличению пролетов жилых и общественных зданий и сооружений, увеличению этажности городской застройки. В связи с этим значительно возрастают нагрузки на несущие конструкции. При проектировании высоких и большепролетных зданий и сооружений возникает необходимость обеспечения динамической эксплуатационной надежности, определения фактических амплитудно-частотных характеристик, изучения поведения конструкций и их напряженно-деформированного состояния на всех стадиях жизненного цикла здания или сооружения.

Исследованию свободных и вынужденных колебаний строительных конструкций как физически нелинейных систем, в отличие от задач статического нелинейного деформирования, посвящено ограниченное количество публикаций в отечественной и зарубежной литературе. Классическая же динамика сооружений, как известно, базируется на теории линейных дифференциальных уравнений и рассматривает колебания конструкций относительно ненапряженного исходного состояния.

С переходом проектных организаций Республики Беларусь на новые нормы проектирования строительных конструкций и их расчета на статические воздействия, в которых заложены нелинейные законы зависимости между напряжениями и деформациями, актуальными стали исследования в области нелинейных динамических расчетов строительных конструкций, которые до настоящего времени проводятся по старым нормативным документам (по упрощенным линейным моделям).

В имеющихся немногочисленных публикациях по физически нелинейной динамике строительных конструкций основное внимание уделяется методам решения нелинейных уравнений движения, но не описана процедура получения этих уравнений, не рассмотрены методы определения нелинейных членов уравнений движения. Отличительной особенностью настоящей работы является тот факт, что автором восполнен отмеченный существующий пробел и последовательно показан порядок сведения задачи динамического расчета балок из физически нелинейного материала к решению нелинейных уравнений движения, и только потом решаются полученные уравнения.

В диссертации предложены методы определения нелинейных членов в уравнениях движения балок с любым количеством степеней свободы. Представлены результаты теоретических и теоретико-экспериментальных исследований свободных и вынужденных колебаний физически нелинейных балок различных форм поперечного сечения с учетом и без учета диссипации энергии. Рассмотрены все виды условий опирания балок из характерных моделей материалов строительных конструкций. В настоящей работе автор не претендует на раскрытие всех особенностей напряженно-деформированного состояния стержней из рассмотренных в диссертационной работе моделей материалов при колебаниях. Описанные модели используются в качестве примеров для оценки влияния, прежде всего, геометрических и физических параметров, а также раз-

личных законов деформирования материалов на нелинейные колебания стержней и балок.

Полученные результаты следует ориентировать на расчеты ответственных конструкций, а также конструкций, в которых динамические нагрузки способны вызвать значительные усилия и напряжения, в частности в рамках анализа элементов при оценке устойчивости каркасных зданий к прогрессирующему обрушению.

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

### **Связь работы с крупными научными программами, темами**

Диссертационная работа выполнена в рамках государственных научно-технических программ по темам Министерства архитектуры и строительства Республики Беларусь:

«Обобщить опыт проектирования и строительства, результаты экспериментально-теоретических исследований, провести дополнительные испытания с учетом требований СНБ 5.03.01-02, СНБ 3.02.04-03 и результатов огневых испытаний, выполнить переработку комплекта проектно-технической документации серии Б1.020.1-7, обеспечив расширение объемов внедрения и дальнейшее повышение эффективности зданий массового назначения». № Госрегистрации 20053337 (время выполнения: 30 сентября 2005 г. – декабрь 2007 г.),

а также Задания 37 Государственной научно-технической программы «Защита от чрезвычайных ситуаций» МЧС Республики Беларусь:

«Разработать программное обеспечение для обработки результатов, полученных с помощью ИВК «ТЕМБР». № Госрегистрации 2009025 (время выполнения: 26 ноября 2008 г. – декабрь 2009 г.).

### **Цель и задачи исследования**

Цель работы – учет физической нелинейности материала при динамических расчетах балок с различными начальными и граничными условиями.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1) провести анализ выполненных исследований по линейной и нелинейной динамике строительных конструкций и наметить план исследований;

2) разработать алгоритм получения нелинейных уравнений движения балок с конечным числом степеней свободы;

3) на основе разработанного подхода провести численные и теоретические исследования свободных и гармонических вынужденных нелинейных колебаний одно- и двухпорных балок из разных моделей материалов с различным числом степеней свободы при заданных начальных условиях;

4) решить задачу определения границ безопасных, по критериям прочности и жесткости (по I и II группам предельных состояний), начальных условий для колебаний стержней в линейной и нелинейной постановках;

5) исследовать влияние физической нелинейности материала конструкции на колебания балок модели Тимошенко в сравнении с балками модели Бернулли–Эйлера;

б) внести предложения по усовершенствованию действующих нормативных документов по определению амплитудно-частотных характеристик и напряженно-деформированного состояния балок при свободных и гармонических вынужденных нелинейных колебаниях.

Объект исследования – расчетные модели одно- и двухопорных балок из физически нелинейного материала как наиболее распространенного конструктивного элемента, способного обеспечить адекватное моделирование ряда несущих строительных конструкций, совершающих свободные и гармонические вынужденные колебания.

Предметом исследования являются методы получения уравнений движения балок из физически нелинейного материала при различных граничных условиях, а также динамические характеристики амплитуды и частоты колебаний, особенности поведения моделей конкретных балок с характерными геометрическими и физическими параметрами при колебаниях.

При расчете балок с учетом физической нелинейности автором используется гипотеза о нелинейно-упругом материале. Балки рассматриваются как геометрически линейные консервативные системы. Предполагается также справедливость гипотезы плоских сечений.

#### **Положения, выносимые на защиту**

1. Универсальный подход к решению задачи о колебаниях балок с конечным числом степеней свободы для всех видов граничных условий, позволяющий учитывать физическую нелинейность материала в практических расчетах, а также результаты расчета балок с конечным и бесконечным числом степеней свободы как физически нелинейных систем.

В имеющихся немногочисленных публикациях по физически нелинейной динамике строительных конструкций основное внимание уделяется методам решения нелинейных уравнений движения, но не описана процедура получения этих уравнений, не рассмотрены методы определения нелинейных членов уравнений движения.

Автором восполнен отмеченный существующий пробел и показан порядок сведения задачи динамического расчета балок из физически нелинейного материала к решению нелинейных уравнений движения, и только потом решаются полученные уравнения.

2. Новое точное аналитическое решение уравнения Дюффинга с мягкой нелинейностью (уравнения движения приведенной массы стержня), в отличие от известных, учитывает оба параметра (амплитуду и период), определяющих начальные условия задачи, благодаря чему предлагаемое автором решение следует признать более корректным по сравнению с имеющимися.

Впервые представлена графическая интерпретация предложенного автором решения, отражающая геометрический и физический смысл всех входящих в него параметров.

Таким образом, получено наглядное законченное решение, значительно более удобное для практических расчетов строительных конструкций, чем решения, предложенные другими авторами.

3. Алгоритм определения границ начальных условий, определяющих область устойчивых нелинейных колебаний, посредством сведения задачи к уравнению Дюффинга с мягкой нелинейностью и результаты исследования влияния вида граничных условий на устойчивость нелинейных колебаний балок. Результаты теоретических исследований нелинейных колебаний конкретных стержней как систем с одной степенью свободы.

4. Результаты исследований влияния учета физической нелинейности материала конструкции на свободные колебания балок модели Тимошенко в сравнении с балками модели Бернулли–Эйлера. Автором на основании закона сохранения энергии впервые получена формула для частоты свободных колебаний балки, учитывающая снижение жесткости балки (в процессе ее нагружения), энергию сдвига сечений и инерцию вращения сечений.

5. Введены понятия и построены эллипсы прочности и трещиностойкости линейных и нелинейных колебаний стержней на фазовых диаграммах « $u_0 - V_0$ », ограничивающих область допустимых (по прочности и трещиностойкости) сочетаний начальных условий. Предложенные решения позволяют еще на стадии проектирования оценить надежность эксплуатации конструкции при колебаниях.

#### **Личный вклад соискателя**

Выносимые на защиту положения базируются на результатах теоретических и экспериментально-теоретических исследований нелинейных колебаний балок, полученных автором при консультативном участии научного руководителя С. В. Босакова.

В публикациях [6, 8, 21] автором предложены математические модели и выполнена интерпретация результатов испытаний.

#### **Апробация результатов диссертации**

Основные положения диссертации, выносимые на защиту, доложены и обсуждены на следующих семинарах и конференциях:

– XII Международном научно-методическом семинаре «Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь». Могилев, 2005;

– IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (подсекция I-3 «Колебания механических систем»). Нижний Новгород, 2006;

– Международной научно-технической конференции молодых ученых «Новые материалы, оборудование и технологии в промышленности» (секция «Инновации в строительстве»). Могилев, 2007;

– 64-й научно-технической конференции НГАСУ (Сибстрин) (секция «Строительные конструкции и расчет сооружений»). Новосибирск, 2007;

– Международной научно-технической конференции «Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии» (секция «Прогрессивные технологии, конструкции и материалы в строительстве»). Могилев, 2007;

– 5-й Международной научно-технической конференции «Наука – образованию, производству, экономике» 60-й научно-технической конференции про-

фессоров, преподавателей, научных работников и аспирантов Белорусского национального технического университета (секция «Строительная механика»). Минск, 2007;

– III Белорусском конгрессе по теоретической и прикладной механике «Механика – 2007» (подсекция «Строительная механика»). Минск, 2007;

– Международной научно-технической конференции молодых ученых «Новые материалы, оборудование и технологии в промышленности» (секция «Инновации в строительстве»). Могилев, 2008;

– II Международной научно-практической конференции «Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса». Гомель, 2008;

– XV Международном научно-методическом семинаре «Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь». Новополоцк, 2008;

– XVI Международном научно-методическом семинаре «Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь» (секция «Строительная механика»). Брест, 2009;

– втором Международном симпозиуме «Проблемы современного бетона и железобетона». Минск, 2009;

– Международной конференции «Актуальные проблемы исследований по теории сооружений» (секция «Проблемы расчета и проектирования зданий и сооружений»). Москва, 2009;

– XVII Международном научно-методическом семинаре «Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь». Гродно, 2010.

### **Опубликованность результатов диссертации**

По теме диссертации опубликовано 21 научная работа: шесть статей в научных журналах по перечню ВАК Республики Беларусь общим объемом 3,91 авторского листа, две статьи в других журналах, 10 статей в сборниках трудов и материалов конференций, три публикации в аннотациях и тезисах докладов.

### **Структура и объем диссертации.**

Диссертация состоит из общей характеристики работы; основной части, представленной пятью главами; заключения; библиографического списка. Общий объем диссертации – 123 страницы; количество иллюстраций – 73 на 59 страницах, таблиц – 3 на 3 страницах, наименований в списке использованных источников – 130 на 9 страницах, приложений – 4 приложения на 4 страницах.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**В первой главе** представлены аналитический обзор литературы по теме диссертации, результаты анализа исследований по методам динамических расчетов балок, обзор методов решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Решение ряда важных инженерных задач с использованием теории линейных колебаний освещено в публикациях С. П. Тимошенко, М. Ф. Барштейна, А. И. Цейтлина, А. М. Сизова, Б. Г. Коренева. Отдельные вопросы нелинейных колебаний железобетонных балок исследованы в работах В. М. Бондаренко, Н. Н. Попова и Б. С. Расторгуева. Среди зарубежных исследований вопросов динамики сооружений отмечены работы Р. Клафа и Дж. Пензиена, а также работы К. Worden, G. Tomlinson и D. Thorby по теории колебаний, в которых рассмотрены порядок составления и решения уравнений движения, методы экспериментальных динамических исследований механических систем.

Отмечен факт использования линейных моделей в большинстве исследований и публикаций по теории колебаний балок, что обеспечивает упрощение процедуры составления уравнений движения и получения их решения.

Проанализированы характерные виды нелинейностей, присутствующих при колебаниях строительных конструкций, и вызываемые их учетом особенности решений задач динамики, особенности работы конструкции. Рассмотрены возможные аналитические выражения для описания зависимости « $\sigma - \epsilon$ ».

Показаны основные методы решения дифференциальных уравнений движения. Описана процедура решения нелинейного уравнения с помощью методов возмущений: прямого разложения, методики Линштедта-Пуанкаре, метода перенормировки, метода вариации произвольных постоянных. Важнейшие методы аналитического исследования нелинейных колебаний созданы усилиями Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского и развиты в работах Н. Н. Моисеева, Н. В. Бутенина, И. М. Бабакова, Ю. М. Неймарка, Я. Г. Пановко, Б. Ван-дер-Поля, А. Найфэ.

Из работ белорусских ученых в области динамики и устойчивости сооружений отмечены труды Е. М. Сидоровича, в которых представлены системы общих уравнений нелинейного деформирования в конечных приращениях шарнирно стержневых систем, а также методы и алгоритмы высокого порядка точности для прямого решения больших систем нелинейных уравнений квазистатического деформирования.

В диссертации рассмотрены методы и виды динамических расчетов балок, реализованные в современных программных комплексах, используемых для расчетов строительных конструкций.

На основании анализа выполненных до настоящего времени работ по динамическим расчетам балок сделан вывод об отсутствии общего подхода к нелинейному динамическому расчету балок из различных строительных материалов. Расчеты по имеющимся методикам не дают возможности инженеру с единых позиций оценить влияние физической нелинейности на напряженно-деформированное состояние балок при колебаниях.

**Вторая глава** посвящена рассмотрению отдельных ключевых вопросов теории нелинейных колебаний балок.

Задача о свободных нелинейных колебаниях шарнирно опертой балки сведена к решению уравнения Дюффинга с мягкой нелинейностью; получено его точное решение.



При законе деформирования материала балки, описываемом уравнением в виде кубической параболы:

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon - \frac{4}{27} \frac{E^3}{\sigma_{lim}^2} \varepsilon^3, \quad (1)$$

где  $E$  – начальный модуль упругости материала конструкции, Н/м<sup>2</sup>;

$\sigma_{lim}$  – предельное значение напряжения, Н/м<sup>2</sup>;

$\varepsilon$  – линейная деформация,

уравнение колебаний массы в середине шарнирно опертой балки имеет вид

$$\ddot{A}(t) + \omega_0^2 A(t) - \alpha^2 A^3(t) = 0, \quad (2)$$

где  $\omega_0$  – частота собственных линейных колебаний;

$\alpha$  – параметр нелинейности.

Амплитуда колебаний балки, описываемых уравнением (2), определится по формуле

$$A = \sqrt{\frac{2C_1}{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}}. \quad (3)$$

Формула для определения периода колебаний сосредоточенной массы на балке имеет вид

$$T = \frac{4\sqrt{2}K(m)}{\sqrt{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}}, \quad (4)$$

где  $K(m)$  – полный эллиптический интеграл.

В выражениях (3), (4) постоянная интегрирования  $C_1$  определяется с учетом постоянной интегрирования  $C_2$  для заданных начальных условий решением системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2C_1}{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}} \operatorname{Sn}(u(0), m) = Z_0 \\ \sqrt{C_1} \operatorname{Cn}(u(0), m) \operatorname{Dn}(u(0), m) = V_0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\operatorname{Cn}(u, m)$ ,  $\operatorname{Dn}(u, m)$  – эллиптические функции Якоби;

$Z_0$ ,  $V_0$  – начальные отклонение и скорость.

$$u(t) = \frac{C_2 + t}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}, \quad m = \frac{\omega_0^2 - \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}. \quad (6)$$

На рисунке 1 показан график полученных колебаний и физический смысл постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ .

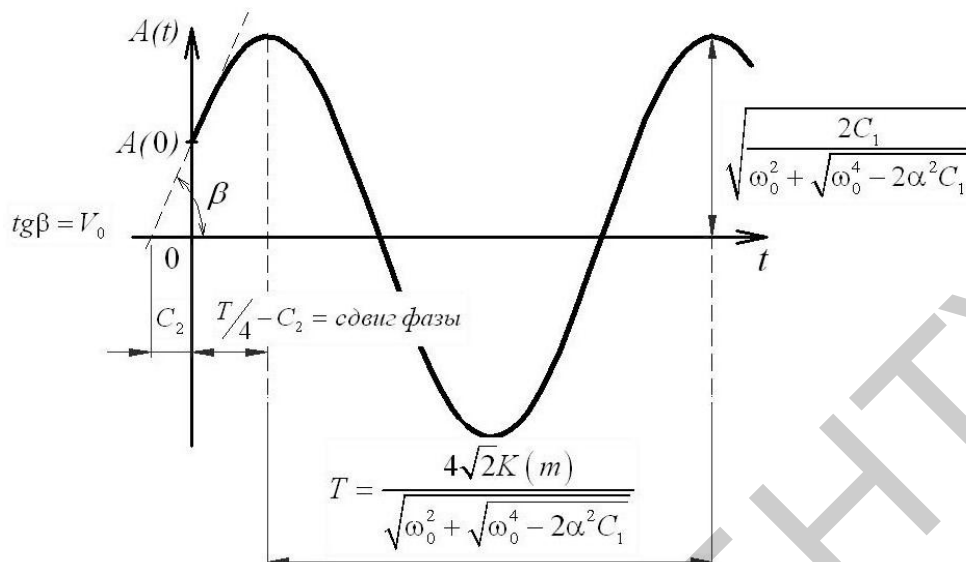


Рисунок 1 – Колебания системы, описываемой уравнением (2)

В первом приближении предлагается коэффициенты  $C_1$ ,  $C_2$  определять по формулам:

$$C_1 = Z_0^2 \left( \omega_0^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 Z_0^2 \right), \quad C_2 = \frac{1}{4} \frac{4\sqrt{2}K(m)}{\sqrt{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}} \quad (7)$$

и итерационно уточнять решением системы (5).

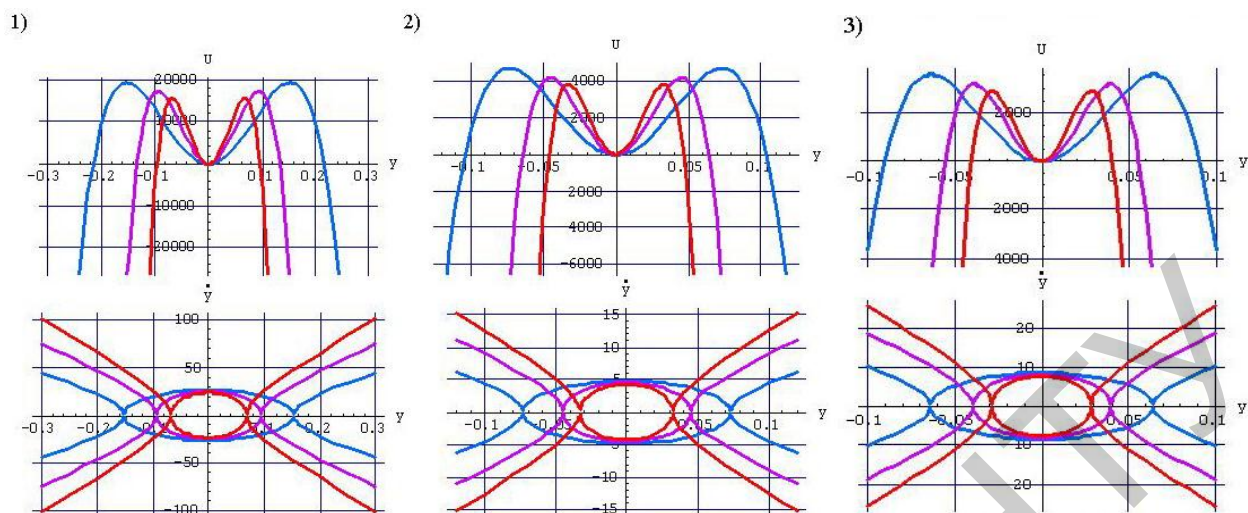
Полученные выше точные решения уравнения (2) для амплитуды (3) и периода (4) учитывают значения обоих параметров, определяющих начальные условия, благодаря чему их, вероятно, следует признать более корректными по сравнению с известными.

На примере однопролетной балки с одной степенью свободы из моделей основных конструктивных материалов – металла, железобетона, древесины – при законе деформирования материала в виде кубической параболы показан порядок определения безопасных (по критерию устойчивости решения) начальных условий.

Решения получены для трех типов опирания балок: свободного опирания, заделки, заделки на одном конце балки и опирания на другом. Для рассмотренных типов граничных условий и материалов распределенная масса приведена к одной сосредоточенной. Принятые размеры сечений обеспечивают равное значение начальной изгибной жесткости каждой из трех балок.

Для балки из железобетона принято допущение о симметричном армировании, т. е. равной изгибной жесткости в противоположных направлениях вертикальной плоскости. Это позволило избежать расчетных сложностей, вызванных особенностями нелинейных колебаний железобетонных конструкций, проследить некоторые общие закономерности и сделать соответствующие выводы.

Графическая интерпретация полученных решений показана на рисунке 2.



1 – металлическая балка; 2 – железобетонная балка; 3 – балка из деревянного бруса

**Рисунок 2 – Зависимость потенциальной энергии однопролетной балки от начального отклонения и эллипсы критических значений начальных условий, вызывающих нелинейные колебания одиночной массы с нарастающей амплитудой**

Из представленных данных следует, что при повышении общей изгибной жесткости балок, обусловленной условиями закрепления (при переходе от свободного опирания к защемлению), прослеживается тенденция снижения значений начальных «критических» условий. Это соответствует меньшему количеству потенциальной энергии и скорейшему преодолению энергетического барьера, что легко проследить по графикам зависимости  $U$  от  $y_0$  (энергии от начального отклонения массы).

Рассмотрены возможные формы записи координатных балочных функций, используемых в задачах динамики однопролетных балок: фундаментальных – гиперболо-тригонометрических и альтернативных – тригонометрических.

При расчете конструкций энергетическими методами возникает необходимость в определении минимума функционала полной энергии системы. Для определения функционала необходимо составить выражение, определяющее энергию деформации системы.

Энергия изгиба может быть найдена в виде определенного интеграла по объему тела от деформаций либо на основании зависимости «изгибающий момент – кривизна оси», которая в ряде нормативных документов рекомендуется к использованию в расчетах балок.

Для балки с заданными граничными условиями, определяющими вид координатной функции, и формой поперечного сечения для нелинейного закона деформирования материала потенциальная энергия может быть определена по формуле

$$U = \iiint_V \left( \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \right) dV, \quad (8)$$

где  $V$  – объем конструкции балки;

$\sigma(\varepsilon)$  – закон деформирования материала балки.

При использовании для расчетов зависимости « $M - 1/\rho$ » энергия изгиба определится формулой

$$U = \int_0^L dx \int_0^{Z'(x)} M \left( \frac{1}{\rho} \right) d \left( \frac{1}{\rho} \right), \quad (9)$$

где  $\frac{1}{\rho}$  – кривизна оси балки;

$Z(x)$  – форма изогнутой оси балки.

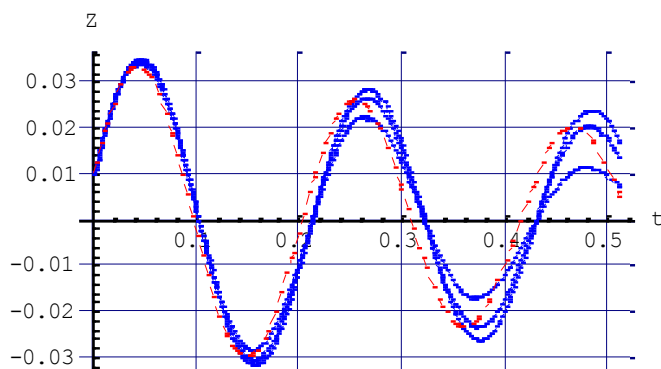
Выражение (9) позволяет по известным зависимостям изгибающего момента в балке от ее кривизны для всех сечений нелинейно деформируемой балки найти ее потенциальную энергию и, пользуясь теоремами Кастилиано, определить нелинейную силу упругости балки.

Показано влияние учета начального деформированного состояния конструкции на свободные колебания вертикальных и горизонтальных балок с одной степенью свободы. Сделан вывод о незначительном влиянии сил собственного веса массы балки на периоды и амплитуды свободных колебаний рассматриваемых балок.

При решении задачи расчета свободно опертой балки с одной степенью свободы модели Тимошенко установлено, что величина поправки в нелинейной постановке будет определяться с учетом коэффициента, определяющего степень нелинейности системы. Общая закономерность относительно увеличения вклада поправки на сдвиг и инерцию вращения с ростом отношения  $h/L$  сохраняется, как и для линейного решения.

**В третьей главе** рассмотрены свободные и вынужденные нелинейные колебания балок с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления.

Рассмотрено влияние трех моделей сил сопротивления (модели Фойгта, турбулентного и сухого трения) на свободные нелинейные колебания балок. Для консольной железобетонной балки с сосредоточенной массой  $M = 2000$  кг на краю консоли получены графики свободных затухающих колебаний, представленные на рисунке 3.



Сплошной линией показано нелинейное решение, штриховой – линейное

**Рисунок 3 – Колебания массы при  $y_0 = 0,01$  м и  $V_0 = 1,00$  м/с**

При выполнении расчетов отмечено качественное изменение поведения исследуемых систем (нелинейной в сравнении с линейной), совершающих вынужденные колебания, причем изменения неоднозначны в определенных интервалах частот и времени.

Для оценки корректности решений, полученных с использованием предлагаемого подхода, в каждом из рассмотренных примеров для сопоставления, как частный случай, приведено линейное решение, получаемое опусканием нелинейных членов в выражении для восстанавливающей силы разрешающего уравнения движения. Линейные решения автора точно совпадают с приведенными в многочисленной литературе по линейной динамике.

Для сопоставления результатов выполнен численный расчет балки методом конечных элементов с помощью современных программных комплексов, который подтвердил корректность предложенного автором подхода.

**В четвертой главе** предложена следующая последовательность динамического расчета балок из физически-нелинейного материала со многими степенями свободы.

1. Задается форма колебаний балки в виде совокупности координатных функций  $y(x)$ , число которых равно числу степеней свободы балки:

$$y(x,t) = A_1(t) \cdot y_1(x) + A_2(t) \cdot y_2(x) + \dots + A_i(t) \cdot y_i(x), \quad (10)$$

где  $A_i(t)$  – неопределенные коэффициенты, зависящие от времени.

2. Определяется энергия изгиба балки, соответствующая заданной форме колебаний и закону деформирования материала балки, по формуле (8) или (9).

3. Дифференцированием энергии изгиба по прогибам точек расположения масс определяются коэффициенты системы нелинейных дифференциальных уравнений равновесия для каждой массы, и далее, на основании теоремы Кастилиано, определяется нелинейная сила упругости материала балки в месте расположения каждой из масс:

$$R_k(t) = \frac{\partial U}{\partial z_k} = \frac{\partial U}{\partial A_1} \frac{\partial A_1}{\partial z_k} + \frac{\partial U}{\partial A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z_k} + \dots + \frac{\partial U}{\partial A_i} \frac{\partial A_i}{\partial z_k} = \sum_{n=1}^i \frac{\partial U}{\partial A_n} \alpha_{nk}, \quad \alpha_{ik} = \frac{\partial A_i(t)}{\partial z_k(t)}. \quad (11)$$

4. Численно решаются полученные уравнения движения и находятся законы колебаний каждой массы.

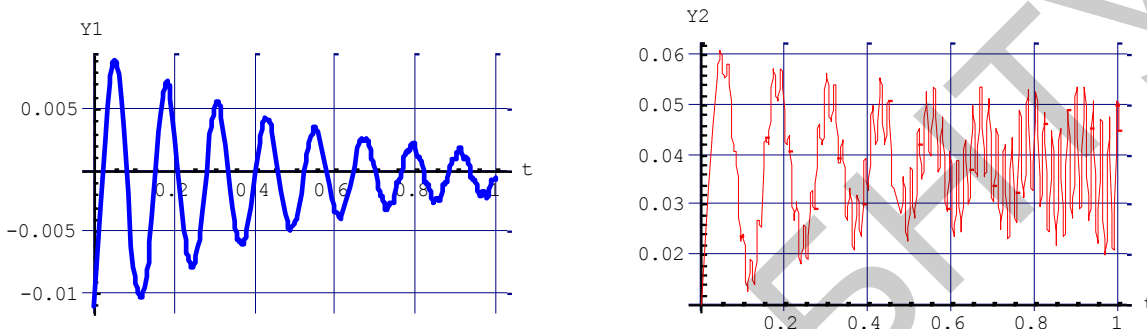
Предложенный алгоритм расчета однопролетных балок с конечным числом степеней свободы и различными опорными закреплениями в нелинейной постановке позволяет определить законы движения всех колеблющихся масс, расположенных на балке.

Для подтверждения корректности использования предлагаемого подхода выполнен динамический расчет свободно опертой балки прямоугольного поперечного сечения с тремя степенями свободы.

Подробно исследованы вынужденные нелинейные колебания консольной балки с двумя сосредоточенными массами, законы движения которых в общем виде записываются системой уравнений

$$\begin{cases} M_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + R_1 + F_{S1} = P_1 \cos(\theta_1 t), \\ M_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} + R_2 + F_{S2} = P_2 \cos(\theta_2 t). \end{cases} \quad (12)$$

На рисунке 4 приведены графики колебаний точек расположения масс на этой балке при следующих исходных данных:  $P_1 = 150$  кг,  $P_2 = 50$  кг,  $\theta_1 = 20$  с<sup>-1</sup>,  $\theta_2 = 30$  с<sup>-1</sup>.

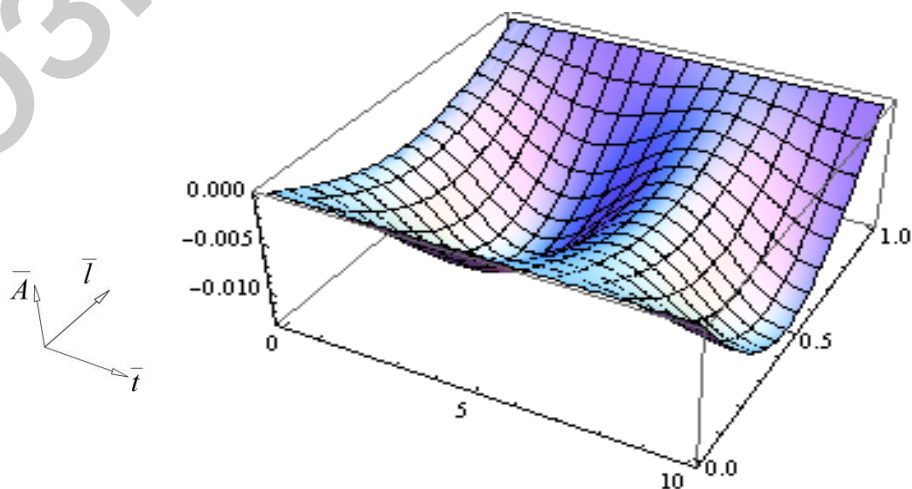


**Рисунок 4 – Колебания точек расположения масс на консольной балке при  $z_1(0) = 0,02$  м;  $z_2(0) = -0,01$  м;  $V_1(0) = 1,0$  м/с;  $V_2(0) = 0,0$**

В четвертой главе получено решение уравнения свободных нелинейных колебаний балки с бесконечным числом степеней свободы (рисунки 5, 6) для двух типов граничных условий:

$$3(2z'' z'''' + z'' z''''') - \beta \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \xi, \quad (13)$$

где  $\beta = \omega_0^2 \frac{mL^4}{E_0 I} \frac{15L^4 \sigma^2}{h^4 E_0^2}$ ;  $\varepsilon = \frac{15L^4 \sigma^2}{h^4 E_0^2}$ ;  $\xi = \frac{mgL^4}{E_0 h l}$ .



**Рисунок 5 – Симметричная функция прогибов шарнирно опертой балки от времени,  $T = 0,04794$  с**

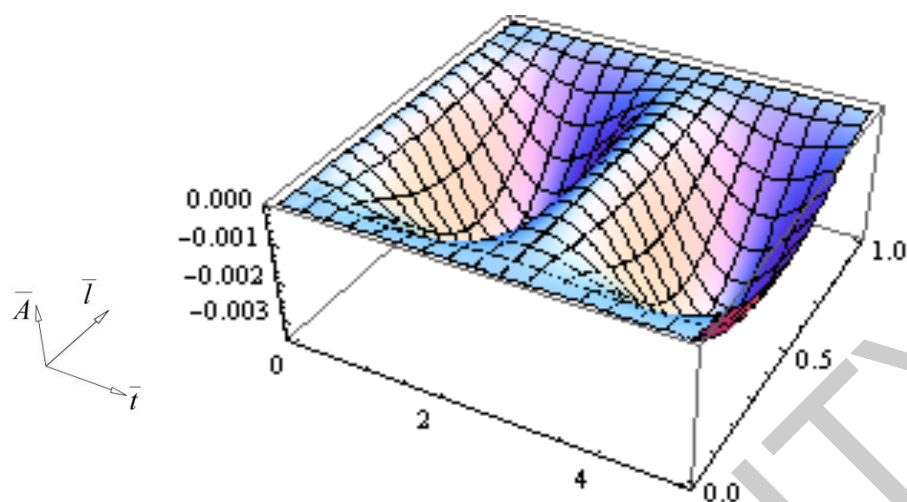


Рисунок 6 – Симметричная функция прогибов защемленной балки от времени,  $T = 0,0212$  с

В пятой главе рассмотрены некоторые вопросы практического использования полученных в диссертации теоретических результатов. Установлены граничные значения начальных условий  $y_0$  и  $V_0$ , при которых не происходит трещинообразование в железобетонных балках и их разрушение. В линейной постановке это приводит к уравнению эллипсов прочности и трещиностойкости:

$$\frac{Z_0^2}{a^2} + \frac{V_0^2}{b^2} = 1; \quad a = \left( \frac{M_{lim}}{M_1} - \bar{M}g \right) / \bar{M}\omega^2, \quad b = \omega a \quad (14)$$

где  $M_1$  – изгибающий момент от действия единичной силы, приложенной в точке расположения массы по направлению изгибных колебаний балки;

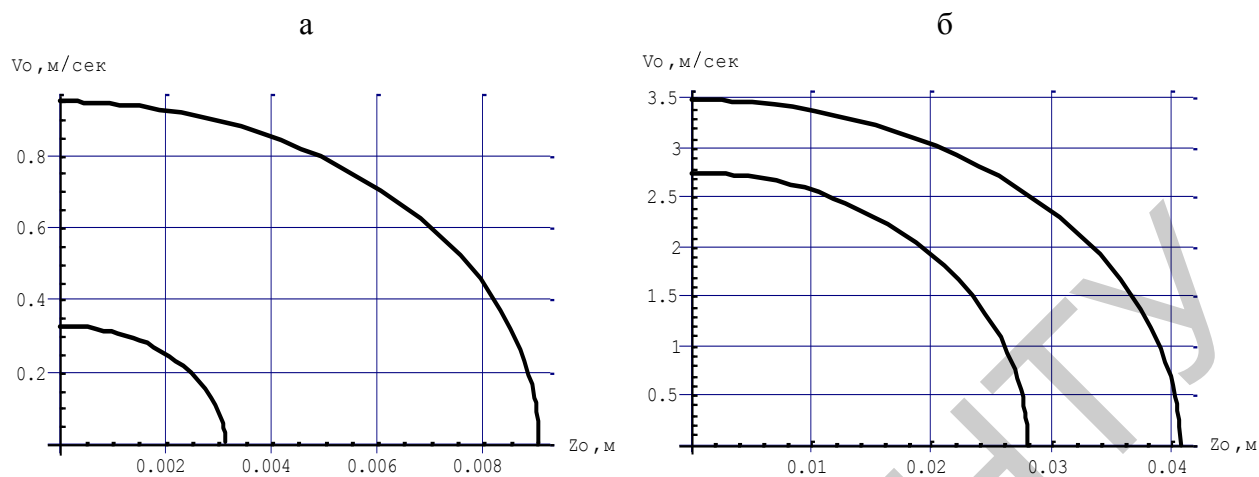
$M_{lim}$  – предельный момент по прочности или трещинообразованию;

$\bar{M}$  – приведенная масса балки.

Выражение для предельного начального отклонения в нелинейной постановке получено с использованием результатов решения уравнения Дюффинга.

Для среднего ригеля каркаса зданий серии Б1.020.1-7 конструктивной системы РУП «Институт БелНИИС» с исходными данными:  $L = 4,8$  м,  $\bar{M} = 660$  кг,  $\omega_0 = 104,72$  с<sup>-1</sup>,  $M_1 = L/4$ ,  $M_d = 180$  кН·м,  $M_{crc} = 35$  кН·м,  $M_{lim} = 52,5$  кН·м получены графики, представленные на рисунке 7.

При построении эллипса прочности использованы результаты исследований О. Я. Берга, согласно которым предел выносливости бетона при действии многократно повторяющейся нагрузки принимается равным  $0,48f_{cd}$ , что соответствует  $M_{lim} = 52,5$  кН·м.



*a* – линейное решение; *б* – нелинейное решение  
**Рисунок 7 – Кривые безопасных начальных условий ригеля по трещинообразованию и прочности**

Анализ кривых на рисунке 7 позволяет сделать вывод, что учет нелинейной работы материала железобетонной балки существенно сказывается на предельных значениях начального отклонения  $Z_0$  и скорости  $V_0$ , вызывающих трещинообразование и потерю прочности балки.

Для таких материалов, как металл, древесина, пластмассы, композитные материалы, первостепенное значение будут иметь кривые прочности. В качестве аналога момента трещинообразования и соответствующих ему кривых для этих материалов в расчетах следует использовать значение усилия, нежелательного при многоцикловых колебательных воздействиях, например момента, соответствующего пределу выносливости или динамической прочности при циклическом процессе деформирования материала.

В пятой главе обозначен также алгоритм уточненного исследования нелинейных колебаний железобетонных балок с учетом несимметричной жесткости (армирования) в разных направлениях вертикальной плоскости.

Приведен пример динамического расчета по предлагаемой методике балки при внезапном удалении промежуточной опоры. Выполнено сопоставление результатов экспериментальных исследований, проведенных БрГТУ, с результатами, полученными в настоящей работе.

Показано, что нелинейные модели дают лучшее приближение результатов расчета к результатам, полученным экспериментально.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты

1. Предложена новая универсальная методика для динамических расчетов балок при любом числе степеней свободы и виде граничных условий с учетом произвольной физической нелинейности материала балки [1, 9, 12, 14, 15, 20]. На многочисленных примерах показана ее эффективность.

2. Определены параметры безопасного уровня начальных условий, определяющих область устойчивых колебаний, посредством сведения задачи к уравнению Дюффинга с мягкой нелинейностью для балок с одной степенью свободы [5]. Полученные точные решения уравнений нелинейных колебаний с использованием специальных математических функций и обозначенные области устойчивого решения могут быть весьма полезны при анализе результатов численных расчетов, что весьма актуально с учетом возможной неустойчивости и чувствительности решений к начальным условиям.

3. Получено новое точное решение уравнения Дюффинга с мягкой нелинейностью через эллиптические функции, отражающее влияние обоих параметров (периода и амплитуды), определяющих начальные условия задачи [4]. Дана графическая интерпретация полученного решения.

4. Исследовано влияние физической нелинейности материала конструкции на колебания балок модели Тимошенко в сравнении с балками модели Бернулли–Эйлера. Вопрос о характере влияния учета поправки на сдвиг и инерцию вращения в задачах о нелинейных колебаниях балок до настоящего времени не был освещен в литературе [7].

5. Впервые введено понятие эллипса прочности при линейных колебаниях балок, а также кривых прочности и трещиностойкости нелинейных колебаний железобетонных балок [3, 19, 11, 16].

6. Получены новые результаты динамического расчета балок с конечным и бесконечным числом степеней свободы как автономных и неавтономных физически нелинейных систем [1, 2].

Тот факт, что при решении задач динамики балок из физически нелинейного материала применен энергетический подход (без привлечения, где это возможно, сложного математического аппарата), использованы и получены наглядные, физически понятные результаты, позволяет ориентировать и рекомендовать его к практическому использованию инженерными работниками, студентами старших курсов и аспирантами.

Полученные зависимости могут быть использованы в методике динамического обследования либо мониторинга ответственных конструкций [6, 8, 10, 13, 21], зданий и сооружений (так как изменение жесткости может быть не только следствием физической нелинейности, но и деструктивных процессов), что позволяет получать интегральные характеристики качества строительных конструкций.

## **Рекомендации по практическому использованию результатов и направления дальнейших исследований**

Результаты проведенных исследований, представленные в диссертации, могут найти применение в практике проектирования и обследования технического состояния строительных конструкций (для выявления износа либо остаточного ресурса), зданий и сооружений, а также в курсах динамики сооружений, читаемых студентам строительных специальностей вузов.

Актуальным при расчетах, проектировании и обследовании технического состояния является вопрос жесткости узлов сопряжения конструкций, ответ на который также может быть получен по результатам экспериментально определенных динамических характеристик [6, 8, 21].

В качестве дальнейшего направления исследования по данной теме можно обозначить изучение особенностей нелинейных колебаний других типов конструкций, плит, оболочек, а также более сложных моделей стержневых систем – плоских и пространственных рам, каркасов зданий и сооружений. Это оправданно, так как предлагаемая методика с некоторыми изменениями может быть применена к любым стержневым системам, будучи основанной на энергетических подходах и законах МДТТ.

Параллельно с развитием аналитических и численных исследований следует осуществлять мониторинг состояния натурных моделей для совершенствования алгоритмов и верификации результатов исследований, а также выявления мест расположения дефектов.

Полученные результаты могут быть использованы при подготовке нормативных документов и рекомендаций по учету нелинейности в динамических расчетах балок, а также при оценке уровня напряжений в конструкциях, рассчитываемых на прогрессирующее обрушение.

Представленная автором наглядная инженерная методика определения амплитуд, скоростей, ускорений в функции времени при внезапном разрушении промежуточной опоры двухпролетной балки как модели фрагмента сооружения может быть использована в практике проектирования для динамических расчетов стержней и балок в рамках анализа устойчивости каркаса здания к прогрессирующему обрушению [17, 18].

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Статьи в журналах в соответствии со списком и перечнем ВАК

1 Босаков, С. В. К теории свободных колебаний балок из физически нелинейного материала / С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Вестник БНТУ. – 2006. – № 1. – С. 10–14.

2 Босаков, С. В. Исследование свободных затухающих колебаний балок из физически нелинейного материала / С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Вестник БрГТУ. – 2006. – № 1. – С. 134–138.

3 Босаков, С. В. Об одном свойстве зависимости «момент – кривизна» для балок и его использовании в инженерных расчетах / С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Строительная наука и техника. – 2006. – № 1. – С. 58–61.

4 Босаков, С. В. К теории нелинейных колебаний балок с одной степенью свободы / С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Вестник БНТУ. – 2007. – № 3. – С. 5–9.

5 Босаков, С. В. Некоторые вопросы свободных нелинейных колебаний балочных конструкций / С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Вестник БНТУ. – 2008. – № 5. – С. 5–12.

6 Бранцевич, П. Ю. Оценка технического состояния строительных конструкций по результатам анализа отклика на динамическое воздействие / П. Ю. Бранцевич, Е. В. Бобрук, Н. С. Щетько // Строительная наука и техника. – 2010. – № 3. – С. 52–58.

### Статьи в других журналах

7 Босаков, С. В. Учет энергии сдвига и инерции вращения при колебаниях элементов конструкций / С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Механика машин, механизмов и материалов. – 2008. – № 3. – С. 63–66.

8 Бранцевич, П. Ю. Оценка технического состояния строительных конструкций по результатам анализа отклика на динамическое воздействие / П. Ю. Бранцевич, Е. В. Бобрук, Н. С. Щетько // Чрезвычайные ситуации: предупреждение и ликвидация. – 2010. – № 1(27). – С. 11–23.

### Материалы конференций

9 Босаков, С. В. Вынужденные нелинейные колебания простых балок / С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь: сб. науч. тр. Междунар. науч.-метод. межвузовского семинара, Могилев, 16–18 ноября 2005 г. / М-во образования Респ. Беларусь [и др.]; редкол.: И. С. Сазонов [и др.]. – Могилев, 2005. – С. 94–98.

10 Щетько, Н. С. К теории линейных колебаний железобетонных балок / Н. С. Щетько // Город и экологическая реконструкция жилищно-коммунального комплекса XXI века: матер. Четвертой Междунар. науч.-

практич. конф., Москва, 5–6 апреля 2006 г. – М.: МИКХиС, 2006. – С. 411–415.

11 Щетько, Н. С. Методика динамического расчета железобетонных балок / Н. С. Щетько // Новые материалы, оборудование и технологии в промышленности: материалы Междунар. науч.-техн. конф. молодых ученых, 24–25 января 2007 г. / М-во образования Респ. Беларусь, М-во образования и науки Рос. Федерации, Федеральное агентство по образованию, Бел.-Рос. ун-т; редкол.: И. С. Сазонов (гл. ред.) [и др.]. – Могилев: Бел.-Рос. ун-т, 2007. – С. 106.

12 Босаков, С. В. Нелинейные колебания однопролетных балок / С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Проблемы современного бетона и железобетона: сб. тр.: в 2 ч. / М. Ф. Марковский (отв. ред.) [и др.]. – Минск: Стринко, 2007. – Ч. 1. – С. 77–95.

13 Щетько, Н. С. Некоторые вопросы оценки надежности строительных конструкций по результатам динамических испытаний / Н. С. Щетько // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф.: в 3 ч., Могилев, 17–18 апреля 2008 г. / М-во образования Респ. Беларусь, М-во образования и науки Рос. Федерации, Федеральное агентство по образованию, Могилев. обл. исполн. ком., Нац. акад. наук Респ. Беларусь, Бел.-Рос. ун-т; редкол.: И. С. Сазонов (гл. ред.) [и др.]. – Могилев: Бел.-Рос. ун-т, 2008. – Ч. 2. – С. 146, 147.

14 Щетько, Н. С. Колебания элементов строительных конструкций как физически нелинейных систем / Н. С. Щетько // Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса: материалы II Междунар. науч.-практич. конференции / М-во образования Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т. трансп.; под общ. ред. В. И. Сенько. – Гомель: БелГУТ, 2008. – С. 262, 263.

15 Щетько, Н. С. Нелинейная работа балок при действии динамических нагрузок / Н. С. Щетько // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь: сб. тр. XV Междунар. науч.-метод. семинара: в 2 т.; под общ. ред. Д. Н. Лазовского, А. А. Хотько. – Новополоцк: ПГУ, 2008. – Т. I. – С. 151–158.

16 Щетько, Н. С. Нелинейные колебания балок относительно положения статического равновесия // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь: сб. тр. XVI Междунар. науч.-метод. семинара: в 2 ч., 28–30 мая 2009 г.; под общ. ред. П. С. Пойты, В. В. Тура. – Брест: БрГТУ, 2009. – Ч. 1. – С. 196–200.

17 Щетько, Н. С. Динамический расчет железобетонных балок при мгновенном удалении промежуточной опоры / Н. С. Щетько // Проблемы современного бетона и железобетона: сб. тр.: в 2 ч. / М. Ф. Марковский (гл. ред.) [и др.]. – Минск: Стринко, 2009. – Ч. 1. – С. 531–550.

18 Щетько, Н. С. К учету нелинейности деформирования стержней при динамических расчетах на прогрессирующее обрушение / Н. С. Щетько // Актуальные проблемы исследований по теории сооружений: сб. науч. статей в 2 ч. / ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко. – М.: ОАО «ЦПП», 2009.– Ч. 2. – С. 81–90.

#### **Аннотации и тезисы докладов**

19 Щетько, Н. С. К теории свободных колебаний железобетонных балок / Н. С. Щетько // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. в 3 т. Н. Новгород, 22–28 августа 2006 г. / Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского, 2006. – Т. I. – С. 122.

20 Щетько, Н. С. Теоретические основы нелинейных колебаний балок / Н. С. Щетько // Тезисы докладов 64-й науч.-техн. конф. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2007. – С. 13.

21 Бранцевич, П. Ю. Обработка результатов динамических испытаний конструкций / П. Ю. Бранцевич, Е. В. Бобрук, Н. С. Щетько // Сборник тезисов докладов V Междунар. науч.-практич. конф.: в 3 т.; редкол.: Э. Р. Бариев [и др.]. – Минск, 2009. – Т. 1. – С. 167–169.

## РЭЗІЮМЭ

Шчэцька Мікалай Сяргеевич

### Улік фізічнай нелінейнасці матэрыялу пры ізгібных ваганнях бэлек

Фізічна нелінейныя ваганні, ураўнанне Дзюфінга з мяккай нелінейнасцю, дэмпфаванне, эліпс трываласці, эліпс трэшчынатрываласці.

Мэта працы заснавана на ўліку фізічнай нелінейнасці матэрыялу пры дынамічных разліках для розных пачатковых і межавых умоў.

Вынікі працы атрыманы на падставе рашэння ўраўнанняў руху, аналізу лікавых мадэляў з дапамогай пакета кампутарнай праграмы Mathematica. Ураўнанні рашэння выведзены з выкарыстаннем метадаў будаўнічай механікі, прыкладной матэматыкі і механікі дэфармаванага цвёрдага цела.

Атрымана дакладнае рашэнне ўраўнання Дзюфінга з мяккай нелінейнасцю праз эліптычныя функцыі, якое адлюстроўвае ўплыў абодвух параметраў, якія вызначаюць пачатковыя ўмовы задачы. Даследаван ўплыў уліку пачатковага дэфармаванага стану канструкцыі на вольныя ваганні бэлек.

Прадстаўлены вынікі даследавання ўплыву фізічнай нелінейнасці матэрыялу на ваганні бэлек мадэлі Цімашэнкі.

Прапанаваны новы ўніверсальны алгарытм разліку бэлек з канчатковым лікам ступеняў свабоды ў нелінейнай пастаноўцы. Для адзнакі карэктнасці рашэнняў, атрыманых з выкарыстаннем прапанаванага падыходу для супастаўлення, прыведзена лінейнае рашэнне, атрыманае адкідваннем нелінейных членаў у выразе для аднаўлялай сілы дазволенага ўраўнання руху.

Прадстаўленыя вынікі разліку бэлек з канчатковым лікам ступеняў волі як фізічна нелінейных сістэм, пры ўліку дысіпацыі энергіі і без, бэзькі з бясконцым лікам ступеняў волі.

Уведзены новыя паняцці эліпсаў трываласці і трэшчынатрываласці лінейных і нелінейных ваганняў жалезабетонных бэлек.

Вынікі праведзеных даследаванняў могуць знайсці выкарыстанне пры праектаванні і маніторынгу тэхнічнага стану будаўнічых канструкцый, будынкаў і збудаванняў, пры разліках на прагрэсавальнае разбурэнне, у курсах дынамікі збудаванняў.

## РЕЗЮМЕ

**Щетько Николай Сергеевич**

### **Учет физической нелинейности материала при изгибных колебаниях балок**

Физически нелинейные колебания, уравнение Дюффинга с мягкой нелинейностью, демпфирование, эллипс прочности, эллипс трещиностойкости.

Цель работы состоит в учете физической нелинейности материала при динамических расчетах балок для различных начальных и граничных условий.

Результаты работы получены на основании решения уравнений движения, анализа численных моделей с помощью пакета компьютерной программы Mathematica. Разрешающие уравнения выведены с использованием методов строительной механики, прикладной математики и механики деформируемого твердого тела.

Получено новое точное решение уравнения Дюффинга с мягкой нелинейностью через эллиптические функции, отражающее влияние обоих параметров, определяющих начальные условия задачи. Исследовано влияние учета начального деформированного состояния конструкции на свободные колебания балок.

Представлены результаты исследования влияния физической нелинейности материала на колебания балок модели Тимошенко.

Предложен новый универсальный алгоритм расчета балок с конечным числом степеней свободы в нелинейной постановке. Для оценки корректности решений, полученных с использованием предлагаемого подхода для сопоставления, приведено линейное решение, получаемое опусканием нелинейных членов в выражении для восстанавливающей силы разрешающего уравнения движения.

Представлены результаты расчета балок с конечным числом степеней свободы как физически нелинейных систем, при учете диссипации энергии и без, балки с бесконечным числом степеней свободы.

Введены новые понятия эллипсов прочности и трещиностойкости линейных и нелинейных колебаний железобетонных балок.

Результаты проведенных исследований могут найти применение при проектировании и мониторинге технического состояния строительных конструкций, зданий и сооружений, при расчетах на прогрессирующее разрушение, в курсах динамики сооружений.

## SUMMARY

**Shchetska Mikalai Siarheevich**

### **The account of physical nonlinearity of material while flexural beam oscillations**

Physically nonlinear oscillations, Duffing equation with weak nonlinearity, damping, ellipse of strength, ellipse of crack resistance.

The aim of the work is taking into account physical nonlinearity of material while dynamic computations of beams having different initial and boundary conditions.

The results of the work are obtained while solving the equations of motion, after the analysis of numerical models with the help of mathematical program Mathematica. The main relations are obtained with the use of methods of building mechanics, applied mathematics and mechanics of materials.

The new exact solution of Duffing equation with weak nonlinearity reflecting the influence of both parameters which determine initial conditions is obtained with the usage of elliptic functions. The influence of taking into account the initial deformed condition to the free oscillations of beams is also analyzed.

The results of research of physical nonlinearity of construction material influences on the beam oscillations of Timoshenko model are presented.

The new universal algorithm of calculation of beams with finite number of degrees of freedom in nonlinear statement is offered. For an estimation of a correctness of the decisions received with use of the suggested approach for comparison, the linear decision received by lowering of nonlinear members in expression for restoring force of the resolving equation of movement is resulted.

The results of calculations of beams with finite degrees of freedom as physically nonlinear systems with and without energy dissipation, free oscillations of beams with infinite degrees of freedom are presented.

New terms of ellipse of strength and ellipse of crack resistance of reinforced beams are appointed.

The results of the carried out researches can find application in designing and monitoring of a technical condition of structural elements and buildings, at calculations on progressive collapse and also in the courses of building dynamics.



Научное издание

ЩЕТЬКО  
Николай Сергеевич

УЧЕТ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ МАТЕРИАЛА  
ПРИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БАЛОК

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук  
по специальности  
05.23.17 – Строительная механика

---

Подписано в печать 29.11.2011.  
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.  
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.  
Усл. печ. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,09. Тираж 60. Заказ 1280.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский национальный технический университет.  
ЛИ №02330/0494349 от 16.03.2009.  
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.