

**БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

УДК 539.3

**Ван Чживэй**

**АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ  
КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНСТРУКТИВНО  
АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКА**

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**Минск, 2011**

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель

**Босяков Сергей Михайлович**,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент, доцент кафедры теоретической  
и прикладной механики Белорусского  
государственного университета

Официальные оппоненты:

**Смирнов Геннадий Васильевич**,  
доктор технических наук, главный  
научный сотрудник ГНУ НИИ импульс-  
ных процессов Института порошковой  
металлургии НАН Беларуси;

**Корчевская Елена Алексеевна**,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент, доцент кафедры прикладной  
математики и механики Витебского  
государственного университета  
имени П. Е. Машерова

Оппонирующая организация

**Белорусский государственный  
технологический университет**

Защита состоится «20» января 2012 года в 14<sup>00</sup> на заседании совета по защите диссертаций Д 02.05.07 при Белорусском национальном техническом университете, по адресу: 220013, г. Минск, проспект Независимости, 65, 1-й корпус, ауд. 202, тел. ученого секретаря 292-24-04.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского национального технического университета.

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г.

Ученый секретарь совета  
по защите диссертаций Д 02.05.07  
кандидат физико-математических наук,  
доцент

\_\_\_\_\_ Нифагин В. А.

© Ван Чживэй, 2011

© БНТУ, 2011

## ВВЕДЕНИЕ

Оболочками в механике сплошных сред называют тела, ограниченные двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами. Они относятся к одному из самых распространенных видов конструкций, поскольку позволяют оптимально распределить материал в сооружениях при удовлетворении граничных условий, и при рациональном проектировании выдерживают большую нагрузку при незначительной толщине. Одной из важнейших задач на стадии проектирования оболочечных конструкций является динамический расчет. Необходимым элементом исследования динамики оболочек является определение собственных частот и форм малых колебаний. В случае параметрически возбуждаемых колебаний работоспособность оболочки зависит от соотношения параметров задачи, при которых она динамически устойчива. Поэтому для оболочек, испытывающих силовые периодические воздействия, во многих случаях определяющим является расчет на параметрическую устойчивость. Поскольку степень анизотропии стеклопластиков можно регулировать изменением ориентации стекловолокна, представляет практический и теоретический интерес анализ влияния анизотропии свойств материала на свободные и параметрические колебания.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния угла намотки стеклонити конструктивно анизотропных цилиндрических круговых оболочек на частоты свободных колебаний и параметрическую устойчивость при различных граничных условиях.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Связь работы с крупными научными программами и темами** Диссертационная работа выполнялась в рамках задания 1.8.01 «Разработать математические модели и методы решения новых классов краевых задач механики сплошных сред применительно к актуальным современным проблемам науки и техники» Государственной программы научных исследований «Конвергенция» (сроки выполнения 2011–2013 гг., № ГР 20113045 от 07.09.2011 г.).

**Цель и задачи исследования** Цель диссертационной работы заключается в нахождении зависимостей собственных частот свободных колебаний цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки от угла намотки стекловолокна на основании метода приближенного удовлетворения граничным условиям и энергетического метода при различных граничных условиях, а также анализу влияния угла намотки стекловолокна на параметрические колебания с учетом и без учета сил неупругого сопротивления.

Для достижения поставленной в работе цели были решены следующие основные задачи:

1. Выведено характеристическое уравнение относительно частот свободных колебаний при приближенном удовлетворении граничных условий на концах конструктивно анизотропной оболочки в случае, когда оболочка является длинной с малым числом продольных волн и большим числом волн в окружном направлении.

2. Из граничных условий, соответствующих случаю шарнирному закреплению оболочки и случаю, когда один конец оболочки шарнирно закреплён, а другой жестко заделан, получены соотношения для параметра волнообразования.

3. Найдены зависимости частот свободных колебаний конструктивно анизотропных сравнительно длинных оболочек с малым числом продольных волн и большим числом волн в окружном направлении от угла намотки стекловолокна для двух видов граничных условий.

4. Выполнена реализация метода Рэля–Ритца применительно к нахождению частот свободных колебаний конструктивно анизотропных оболочек при граничных условиях Навье, жесткой заделке двух концов оболочки, а также при жесткой заделке одного конца и шарнирном закреплении другого конца.

5. Получено выражение для критической осевой нагрузки, уравнение Маттье, описывающее параметрические колебания конструктивно анизотропной жестко заделанной двумя концами оболочки в случае действия распределенных продольных пульсирующих сил.

6. Выведены выражения, описывающие границы областей неустойчивости при параметрических колебаниях конструктивно анизотропных оболочек, с учетом и без учета сил неупругого сопротивления.

*Объектом исследования* являются однослойные конструктивно анизотропные цилиндрические круговые оболочки, получаемые методом непрерывной намотки стекловолокна под произвольным углом к окружному направлению, с различными видами граничных условий.

*Предмет исследования* – свободные и параметрические колебания однослойных конструктивно анизотропных цилиндрических оболочек из стеклопластика при различных граничных условиях.

Для решения поставленных в диссертационной работе задач применены метод приближенного удовлетворения граничных условий, метод Рэля–Ритца, метод малого параметра, а также методы дифференциального исчисления и высшей алгебры.

Численные результаты получены с применением функциональных возможностей компьютерной системы *Mathematica*.

**Положения, выносимые на защиту.** Новыми результатами, выносимыми на защиту, являются:

1. Система уравнений движения конструктивно анизотропной круговой цилиндрической оболочки, выполненной из стеклопластика, относительно компонент вектора перемещений для случая, когда материал оболочки рассматривается как однородный монолитный анизотропный материал, упругие свойства которого зависят от угла ориентации стекловолокна по отношению к основным направлениям упругости, отличающаяся учетом в уравнениях динамического равновесия членов, содержащих частные производные третьего порядка.

2. Характеристическое уравнение для определения частот свободных колебаний, выведенное на основании метода приближенного удовлетворения начальным условиям в предположении, что оболочка является длинной с малым

числом продольных волн и большим числом волн в окружном направлении; зависимости частот собственных частот свободных колебаний от угла намотки стекловолокна для конструктивно анизотропной цилиндрической шарнирно закрепленной оболочки, а также для оболочки при шарнирном закреплении одного конца и жесткой заделке другого конца.

3. Выражения для перемещений точек оболочки в продольном, окружном и радиальном направлении при свободных колебаниях длинной конструктивно анизотропной оболочки с малым числом продольных волн и большим числом волн в окружном направлении, для случая, когда оболочка является шарнирно закрепленной, и случая, когда, один конец которой шарнирно закреплён, а другой жестко заделан.

4. Характеристические уравнения, полученные на основании энергетического метода и их численные решения относительно частот свободных колебаний цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки при граничных условиях, соответствующих свободному опиранию на круговые диафрагмы, при жесткой заделке концов оболочки, а также граничным условиям, соответствующим шарнирному закреплению одного конца и жесткому заземлению другого конца оболочки.

5. Диапазоны углов намотки стекловолокна, при которых наблюдаются параметрически неустойчивые колебания цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки под действием распределенной продольной нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону, а также определение областей параметрической неустойчивости при такой нагрузке на оболочку для отдельных углов намотки стекловолокна с учетом сил неупругого сопротивления.

**Личный вклад соискателя.** Все основные результаты выносимой на защиту работы получены лично соискателем. В совместных публикациях соавтору Босякову С.М. принадлежит предложенная постановка задач. Научный руководитель С.М. Босяков принимал участие в анализе полученных результатов.

**Апробация результатов диссертации.** Основные результаты, вошедшие в диссертационную работу, прошли апробацию на следующих международных и республиканских научных конференциях: 66-й и 67-й конференциях студентов и аспирантов Белорусского государственного университета (Минск, 16–21 мая 2009 г., 17–22 мая 2010 г.); V Международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (Минск, 14–19 сентября 2009 г.); Boundary Value Problems, Functional Equations and Applications 2 (BFA 2) (Krakow, 12–17 April 2010, Poland); Advanced Problems in Mechanics (APM) 2010 (Санкт-Петербург, 1–5 июля 2010 г.); XVIII Международных научно-технических конференциях «Прикладные задачи математики и механики» (Севастополь, 13–17 сентября 2010 г., Украина); VI Международном симпозиуме по трибофатике (Минск, 25 октября–1 ноября 2010 г.); XVII Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова (Ярополец, 14–18 февраля, Россия); XIV Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям

«Еругинские чтения–2011» (Новополоцк, 12–14 мая 2011 года), International Conference on Electronics and Mechanical Engineering and Information Technology 2011 (Harbin, China, 12–14 august, 2011).

**Опубликованность результатов диссертации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 19 научных работах, из них 6 статей в научных журналах, соответствующих п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 3,15 авторского листа), 2 статьи в научных журналах, 7 статей в материалах и трудах конференций и 4 тезисов.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, общей характеристики работы, 4 глав, заключения и библиографического списка. Полный объем диссертационной работы составляет 100 страниц, из них 23 рисунка занимают 9 страниц, 4 таблицы занимают 2 страницы, количество использованных библиографических источников составляет 115 наименований, включая собственные публикации автора (на 12 страницах).

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

**В первой главе** выполнен обзор литературных источников по численным, численно-аналитическим методам определения собственных частот свободных и параметрических колебаний анизотропных оболочек, по применению метода малого параметра и энергетического метода решения задач динамики и устойчивости анизотропных оболочек. Проведен анализ работ, посвященных исследованиям влияния угла намотки конструктивно анизотропных армированных оболочек на частоты свободных колебаний и возникновение параметрически неустойчивых колебаний. Показано, что выполненные в диссертационной работе исследования являются актуальными и оригинальными.

**Вторая глава** посвящена определению собственных частот свободных колебаний анизотропных цилиндрических оболочек при приближенном удовлетворении граничным условиям. *В первой части* в соответствии с технической теорией оболочек выведена система уравнений движения цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки:

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= \rho R^2 \partial_t^2 u, \quad L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = \rho R^2 \partial_t^2 v, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= -\rho R^2 \partial_t^2 w, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $R$  – радиус срединной поверхности,  $u$ ,  $v$  и  $w$  – перемещения срединной поверхности оболочки в продольном, окружном и радиальном направлении соответственно,  $\rho$  – плотность,  $\partial_t = \partial/\partial t$ . Операторы  $L_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} L_{11} &= B_{1111} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{1212} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2B_{2111} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \theta}, \\ L_{12} &= B_{2111} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{1222} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (B_{1122} + B_{1212}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \theta}, \quad L_{13} = B_{1122} \frac{\partial}{\partial \alpha} + B_{1222} \frac{\partial}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{21} = L_{12}, \quad L_{22} = B_{1212} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{2222} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2B_{1222} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \theta}, \quad L_{23} = B_{1222} \frac{\partial}{\partial \alpha} + B_{2222} \frac{\partial}{\partial \theta} - \\
-K \left( B_{2111} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + B_{2222} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + (B_{1122} + 2B_{1212}) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \theta} + 3B_{1222} \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \theta^2} \right), \\
L_{31} = L_{13}, \quad L_{32} = B_{1222} \frac{\partial}{\partial \alpha} + B_{2222} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\
L_{33} = B_{2222} + K \left( B_{1111} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + B_{2222} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + 2(B_{1122} + 2B_{1212}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \theta^2} \right) + \\
+ 4K \left( B_{2111} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \theta} + B_{1222} \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \theta^3} \right), \quad K = \frac{h^2}{12R^2},
\end{aligned}$$

где  $h$  – толщина оболочки;  $\theta$  – угловая координата в окружном направлении и  $\alpha$  – выраженное в долях радиуса  $R$  расстояние по образующей. Постоянные упругости  $B_{1111}$ ,  $B_{2222}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{1212}$ ,  $B_{1222}$  и  $B_{2111}$  зависят от угла  $\varphi$  намотки стекловолокна и основных модулей упругости ортотропного материала  $b_{1111}$ ,  $b_{2222}$ ,  $b_{1212}$  и  $b_{1122}$ :

$$\begin{aligned}
B_{1111} &= b_{1111} \cos^4(\varphi) + b_{2222} \sin^4(\varphi) + \left( b_{1212} + \frac{1}{2} b_{1122} \right) \sin^2(2\varphi), \\
B_{2222} &= b_{1111} \sin^4(\varphi) + b_{2222} \cos^4(\varphi) + \left( b_{1212} + \frac{1}{2} b_{1122} \right) \sin^2(2\varphi), \\
B_{1122} &= (b_{1111} + b_{2222} - 4b_{1212}) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + b_{1122} (\sin^4(\varphi) + \cos^4(\varphi)), \\
B_{1212} &= (b_{1111} + b_{2222} - 2b_{1122}) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + b_{1212} \cos^2(2\varphi), \\
B_{1222} &= \frac{1}{2} (b_{2222} \cos^2 \varphi - b_{1111} \sin^2 \varphi) \sin(2\varphi) - \frac{1}{4} (b_{1122} + 2b_{1212}) \sin(4\varphi), \\
B_{2111} &= \frac{1}{2} (b_{2222} \sin^2(\varphi) - b_{1111} \cos^2(\varphi)) \sin(2\varphi) + \frac{1}{4} (b_{1122} + 2b_{1212}) \sin(4\varphi).
\end{aligned}$$

В части второй первой главы выполнена реализация метода приближенного удовлетворения граничным условиям применительно к нахождению частот свободных колебаний конструктивно анизотропных цилиндрических оболочек. Для этого система уравнений (1) преобразована таким образом, чтобы зависимыми переменными в первом уравнении были  $u$  и  $w$ , во втором –  $v$  и  $w$ , в третьем – только  $w$ :

$$\begin{aligned}
(L_1 \partial_t^4 + L_2 \partial_t^2 + L_3)u = (L_4 \partial_t^2 + L_5)w, \quad (L'_1 \partial_t^4 + L'_2 \partial_t^2 + L'_3)v = (L'_4 \partial_t^2 + L'_5)w, \\
\left( (\rho R^2)^3 \partial_t^6 + (\rho R^2)^2 l_1 \partial_t^4 - \rho R^2 l_2 \partial_t^2 + l_3 \right) w = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $L_i$ ,  $L'_i$  и  $l_k$  – дифференциальные операторы,  $i = \overline{1, 5}$ ,  $k = \overline{1, 3}$ .

Компоненты вектора перемещений при колебаниях с собственной круговой частотой  $\omega$ , представлены в следующем виде (предполагается, что узловые

линии оболочки являются спиральными при шарнирном или жестком закреплении концов оболочки):

$$u = \sum_{j=1}^8 A_j \cos(\lambda_j R \alpha / l - n \theta) \sin(\omega t), v = \sum_{j=1}^8 B_j \cos(\lambda_j R \alpha / l - n \theta) \sin(\omega t),$$

$$w = \sum_{j=1}^8 C_j \sin(\lambda_j R \alpha / l - n \theta) \sin(\omega t),$$
(3)

где  $n$  – число волн в окружном направлении,  $A_j, B_j, C_j$  – постоянные коэффициенты,  $\lambda_j$  – параметр волнообразования (пропорционален количеству волн в продольном направлении),  $l$  – длина оболочки. После подстановки выражений (3) в уравнения (2) получены выражения, связывающие константы  $A_j, B_j$  и  $C_j$ , а также бикубическое уравнение относительно собственной частоты свободных колебаний:

$$A_j \left( B_{1111}^2 \psi^2 - \psi n^2 (B_{2222} + B_{1212}) - n^4 (B_{1222}^2 + B_{2222} B_{1212}) \right) =$$

$$= C_j B_{1111} \left( \psi n B_{1222} + n^5 K B_{2222} B_{1222} \right),$$
(4)

$$B_j \left( B_{1111}^2 \psi^2 - \psi n^2 (B_{2222} + B_{1212}) - n^4 (B_{1222}^2 + B_{2222} B_{1212}) \right) =$$

$$= C_j \left( \psi n (n^2 K + 1) B_{1111} B_{2222} + n^3 (B_{1222}^2 - B_{2222} B_{1212}) - n^5 K B_{2222} B_{1212} \right),$$
(5)

$$\left( B_{1111} B_{2222} B_{1212} + 2 B_{1122} B_{2111} B_{1222} - B_{1111} B_{1222}^2 - B_{2222} B_{2111}^2 - B_{1122}^2 B_{1212} \right) \times$$

$$\times \left( \frac{\lambda_j R}{l} \right)^4 = \psi^3 - \psi^2 \left( B_{2222} + n^2 (B_{2222} + B_{1212}) + n^4 K B_{1122} \right) - \psi n^2 \left( B_{1222}^2 - \right.$$

$$\left. - B_{2222} B_{1212} + n^2 (K B_{2222}^2 + B_{1222}^2 - B_{2222} B_{1222}) \right) - n^4 K B_{1122} (B_{2222} + B_{1212}) +$$

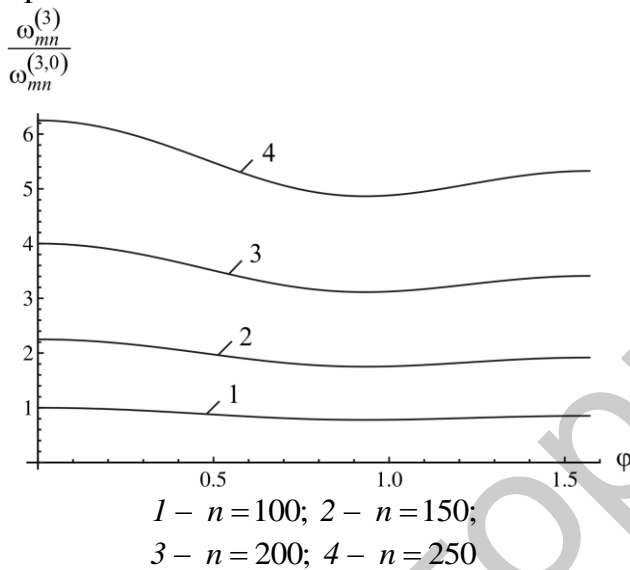
$$+ n^6 K (n^2 B_{1122} - B_{2222}) (B_{1222}^2 - B_{2222} B_{1212}), \psi = \rho R^2 \omega^2, j = \overline{1, 4}.$$
(6)

Соотношения (4)–(6) выведены в предположении, что оболочка является сравнительно длинной с малым числом продольных волн и большим числом волн в окружном направлении и выполняется неравенство  $|\lambda_j| R / (nl) \ll 1$ . Третья и четвертая части посвящены определению параметра волнообразования  $\lambda_j$  из граничных условий и нахождению решения характеристического уравнения (6). Для шарнирно опертой оболочки получено  $\lambda_{1,2} = \pm m\pi$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm im\pi$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Для оболочки, шарнирно закрепленной одним концом и жестко защемленной другим концом, выражение для параметра волнообразования принимают тот же вид, но  $m = 1, 2, 5; 2, 2, 5; 3, 2, 5; 4, 2, 5, \dots$

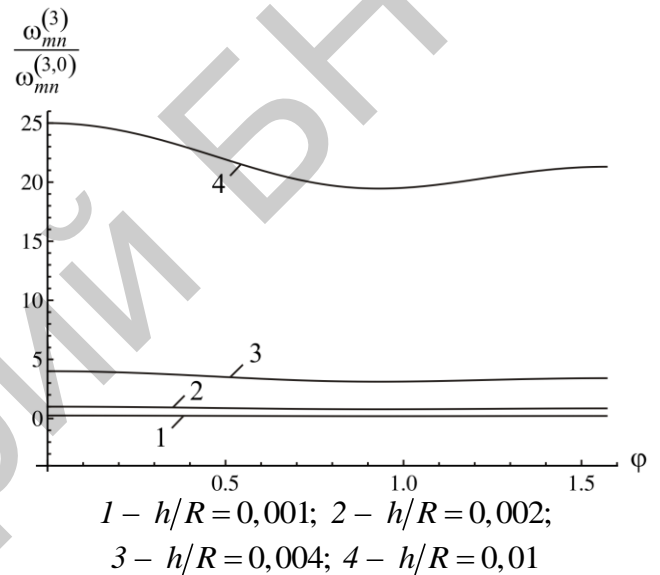
Расчет собственных частот свободных колебаний в работе проводился для оболочки из тканевого стеклопластика при основных модулях упругости  $b_{1111} = 18,3$ ,  $b_{2222} = 25,2$ ,  $b_{1212} = 3,5$ ,  $b_{1122} = 2,77$  ГПа, плотность  $\rho = 1850$  кг/м<sup>3</sup>.



На рисунках 1 и 2 показаны зависимости отношения  $\omega_{mn}^{(3)}/\omega_{mn}^{(3,0)}$  от угла намотки стекловолокна  $\varphi$  при  $m=1$  для различных значений параметра волнообразования  $n$  и отношения  $h/R$ . Здесь  $\omega_{mn}^{(3)}$  – наименьшая частота свободных колебаний для цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки, полученная при решении характеристического уравнения (6),  $\omega_{mn}^{(3,0)}$  – наименьшая частота свободных колебаний шарнирно закрепленной ортотропной оболочки, рассчитанная на основании решения уравнения (6) при  $\varphi=0$ ,  $m=1$  и  $n=100$ ,  $h=0,001$ ,  $R=0,5$ ,  $l=10$  м. В первом случае геометрические параметры оболочки описываются постоянными  $h=0,001$ ,  $R=0,5$ ,  $l=10$  м. Во втором случае принимается  $n=100$ .



**Рисунок 1 – Зависимость отношения частот  $\omega_{mn}^{(3)}/\omega_{mn}^{(3,0)}$  от угла намотки стекловолокна для различных значений параметра волнообразования  $n$  ( $m=1$ )**



**Рисунок 2 – Зависимость отношения частот  $\omega_{mn}^{(3)}/\omega_{mn}^{(3,0)}$  от угла намотки стекловолокна для различных значений отношения  $h/R$  ( $n=100$ ,  $m=1$ )**

Рисунки 1 и 2 показывают, что частота свободных колебаний конструктивно анизотропной оболочки возрастает как с увеличением количества волн в окружном направлении при постоянном значении  $h/R$ , так и с увеличением отношения  $h/R$  при неизменном параметре  $n$ . С увеличением отношения  $h/R$  и количества волн в окружном направлении  $n$  зависимость частоты свободных колебаний от угла намотки стекловолокна становится более выраженной. Максимальные значения частоты наблюдаются при предельных значениях угла намотки  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi/2$ . При углах намотки, близких к углу  $\pi/4$ , частота свободных колебаний принимает наименьшие значения. Также из рисунков 1 и 2 видно, что влияние параметра  $n$  аналогично влиянию отношения  $h/R$  на изменение собственной частоты свободных колебаний.

Анализ зависимостей отношений  $\omega_{mn}^{(3)} / \omega_{mn}^{(3,0)}$  от угла намотки стекловолокон на  $\varphi$  при  $m=1$  для различных значений параметра волнообразования  $n$  и отношения  $h/R$  для оболочки с одним шарнирно закрепленным концом и другим жестко заделанным концом показывает, что кривые имеют вид, аналогичный тому, что представлен на рисунках 1 и 2. Частота  $\omega_{mn}^{(3,0)}$  в данном случае соответствует частоте свободных колебаний ортотропной оболочки с одним шарнирно закрепленным и другим жестко заделанным концом. В то же время, при двух рассмотренных типах граничных условий, значения  $\omega_{mn}^{(3,0)}$  почти одинаковы, поскольку в связи с принятым допущением рассматриваются длинные оболочки с малым числом продольных волн и большим числом волн в окружном направлении.

В третьей главе проведена реализация энергетического метода применительно к нахождению собственных частот свободных колебаний конструктивно анизотропных оболочек. В части первой сформулировано характеристическое уравнение

$$|M\omega_{mn}^2 - K| = 0, \quad (7)$$

где  $M$ ,  $K$  – матрицы масс и жесткости,  $\omega_{mn}$  – частота свободных колебаний,  $m$  – число полуволин вдоль образующей оболочки,  $n$  – число волн в окружном направлении. В части второй определены компоненты матриц  $M$  и  $K$  в случае выполнения граничных условий Навье ( $v=w=M_{11}=N_{11}=0$  при  $\alpha=0$  и  $\alpha=l/R$ ) на торцах оболочки и найдены численные решения уравнения (7). При этом компоненты перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$ , приближенно описывающие форму изогнутой поверхности колеблющейся оболочки, задавались в виде

$$\begin{aligned} u &= A_{mn} \cos(m\pi R\alpha/l) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn}t), \quad v = B_{mn} \sin(m\pi R\alpha/l) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mn}t), \\ w &= C_{mn} \sin(m\pi R\alpha/l) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn}t), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$  – амплитуды колебаний вдоль соответствующих направлений. Компоненты матриц масс и жесткости при перемещениях (8) принимают вид

$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = \frac{hlR\rho\pi}{2}, \quad M_{12} = M_{13} = M_{21} = M_{23} = M_{31} = M_{32} = 0,$$

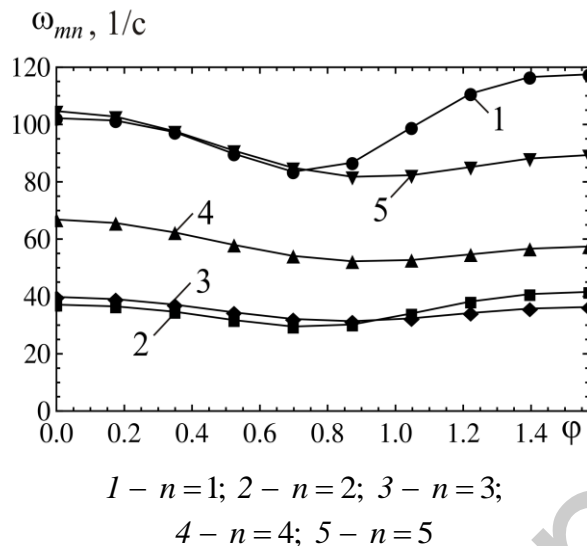
$$K_{11} = \frac{h\pi}{2Rl} (m^2 R^2 \pi^2 B_{1111} + n^2 l^2 B_{1212}), \quad K_{12} = -\frac{mn\pi^2 h}{2} (B_{1122} + B_{1212}),$$

$$K_{13} = -\frac{m\pi^2 h}{2} B_{1122}, \quad K_{21} = K_{12}, \quad K_{22} = \frac{h\pi}{2Rl} (m^2 R^2 \pi^2 B_{1212} + n^2 l^2 B_{2222}),$$

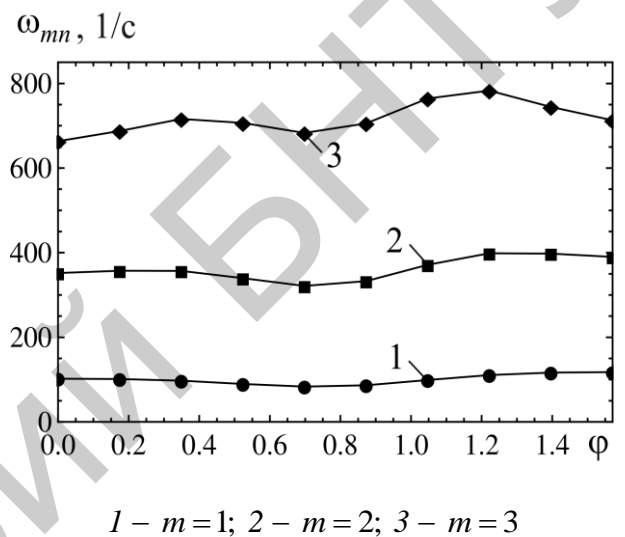
$$K_{23} = \frac{n\pi h}{2R} B_{2222}, \quad K_{31} = -\frac{m\pi^2 h}{2} B_{1122}, \quad K_{32} = K_{23},$$

$$K_{33} = \frac{\pi}{24l^3} \left( m^4 \pi^4 R h^3 + l h (h^2 n^4 + 12R^2) \right) B_{1111} + \frac{m^2 n^2 \pi^3 R h^3}{12lR} (B_{1122} + B_{1212}).$$

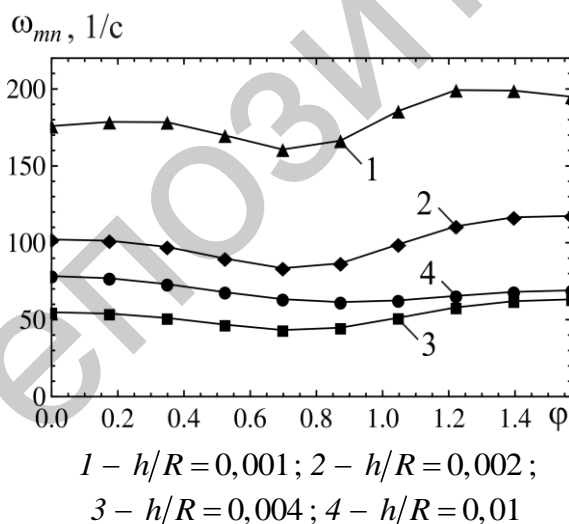
Численное решение уравнения (7) выполнено для оболочки из тканевого стеклопластика, геометрические параметры которой  $h=0,001$ ,  $R=0,5$ ,  $l=10$  м. Зависимости собственных частот  $\omega_{mn}$  от угла намотки стекловолокна  $\varphi$  при различных параметрах волнообразования представлены на рисунках 3 и 4. На рисунках 5 и 6 показаны зависимости частоты  $\omega_{11}$  от угла намотки  $\varphi$  для различных отношений  $h/R$  и  $R/l$  ( $m=n=1$ , длина оболочки  $l=10$  м).



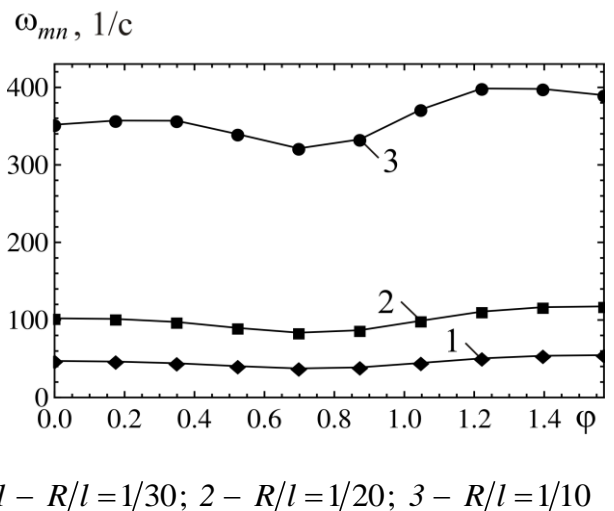
**Рисунок 3 – Зависимость собственных частот свободных колебаний  $\omega_{mn}$  от угла намотки  $\varphi$  при  $m=1$**



**Рисунок 4 – Зависимость собственных частот свободных колебаний  $\omega_{mn}$  от угла намотки  $\varphi$  при  $n=1$**



**Рисунок 5 – Зависимость собственных частот свободных колебаний  $\omega_{mn}$  от угла намотки  $\varphi$  при  $m=n=1$  для различных отношений  $h/R$**



**Рисунок 6 – Зависимость собственных частот свободных колебаний  $\omega_{mn}$  от угла намотки  $\varphi$  при  $m=n=1$  для различных отношений  $R/l$**

Из рисунка 3 видно, что при угле  $\varphi \leq 55^\circ$  частотой основного тона является частота  $\omega_{12}$ , при  $\varphi > 55^\circ$  – частота  $\omega_{13}$ . Рисунок 4 показывает, что зависимости частот от угла намотки аналогичны для трех рассмотренных мод колебаний. Минимум частот  $\omega_{11}$  и  $\omega_{21}$  достигается при  $\varphi = 39^\circ$ , наименьшее значение частоты  $\omega_{31}$  соответствует углу  $\varphi = 0^\circ$ . Сравнение зависимостей, представленных на рисунках 3 и 4, показывает, что влияние изменения параметра  $m$  на величины собственных частот свободных колебаний более существенно, чем параметра  $n$ . Из рисунка 5 следует, что влияние изменения отношения  $h/R$  на величину собственной частоты  $\omega_{11}$  имеет достаточно сложный характер. Характер зависимости усложняется при уменьшении отношения  $h/R$ . Как видно из рисунка 6, при малых значениях отношения  $R/l$  величины собственных частот свободных колебаний практически не изменяются для различных углов намотки стекловолокна. При увеличении значения  $R/l$  зависимость  $\omega_{11}(\varphi)$  приобретает более сложный характер, и возрастают значения частот.

Сравнительный анализ значений частот свободных колебаний  $\omega_{mn}$ , определенных экспериментально для ортотропных оболочек и частот, найденных в диссертационной работе методом Рэлея–Ритца при угле намотки  $\varphi = 0$ , для одних и тех же отношений между количествами волн в продольном и окружном направлениях, длины, толщины и радиуса срединной поверхности оболочки, показывает, что минимальное различие между соответствующими частотами составляет 0,3 %, максимальное отличие – 17,8 %. Наибольшее различие между частотами, рассчитанными на основании метода Рэлея–Ритца при нулевом угле намотки, и частотами, вычисленными для ортотропной оболочки с теми же характерными параметрами, при точном удовлетворении граничным условиям Навье составляет 3,5 %.

В третьей части главы 3 представлены результаты нахождения частот свободных колебаний при заделке концов оболочки. В этом случае при  $\alpha = 0$  или  $\alpha = l/R$  выполняются равенства

$$u = v = w = \partial w / \partial \alpha = 0. \quad (9)$$

Компоненты перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$ , удовлетворяющие граничным условиям (9) и приближенно описывающие форму изогнутой поверхности колеблющейся оболочки, заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= A_{mn} \varphi(\alpha) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mnt}), \quad v = B_{mn} \psi(\alpha) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mnt}), \\ w &= C_{mn} \psi(\alpha) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mnt}), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\psi(\alpha) = \text{ch}(\alpha \Lambda_m) - \cos(\alpha \Lambda_m) - \sigma_m (\text{sh}(\alpha \Lambda_m) - \sin(\alpha \Lambda_m))$  – балочная функция, описывающая продольные колебания оболочки,  $\varphi(\alpha) = \psi'(\alpha) / \Lambda_m$ ,  $\Lambda_m = \lambda_m R \pi / l$ ,  $\lambda_m$  – параметр, который зависит от числа волн вдоль образующей цилиндра и определяется граничными условиями на концах оболочки,  $\sigma_m$  – величина, определяемая коэффициентом  $\lambda_m$ .

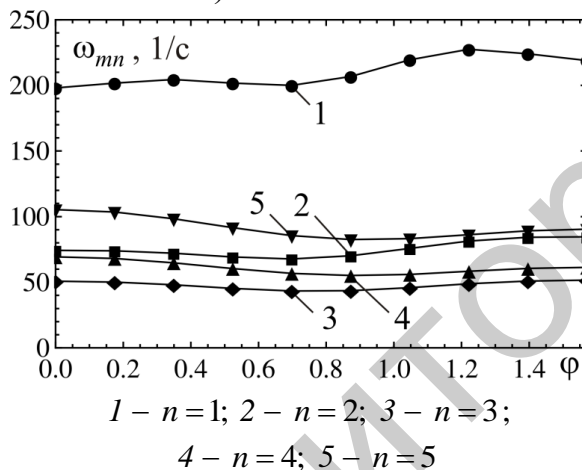
После подстановки выражений (10) в граничные условия (9) получены уравнения для нахождения параметров  $\lambda_m$  и  $\sigma_m$ :

$$\cos(\pi\lambda_m)\operatorname{ch}(\pi\lambda_m)-1=0, \quad \sigma_m = \frac{\operatorname{ch}(\pi\lambda_m)-\cos(\pi\lambda_m)}{\operatorname{sh}(\pi\lambda_m)-\sin(\pi\lambda_m)}. \quad (11)$$

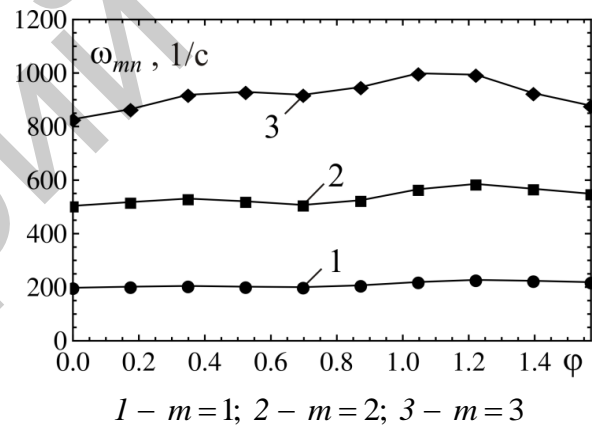
Опираясь на результаты численного решения уравнений (11), сформулированы приближенные решения (случай  $\lambda_m=0$ , соответствующий нулевым перемещениям не рассматривался):

$$\lambda_m = m + 1/2, \quad \sigma_m \approx 1.$$

С учетом найденных параметров  $\lambda_m$  и  $\sigma_m$  определены компоненты матриц масс и жесткости для уравнения (7), получено его численное решение для тканевой цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки из стеклопластика при различном количестве волн в продольном и окружном направлениях и соотношениях между геометрическими размерами оболочки. Результаты расчета представлены на рисунках 7–10 (при построении принимались основные модули упругости и геометрические размеры оболочки те же, что и в третьей части главы 3).

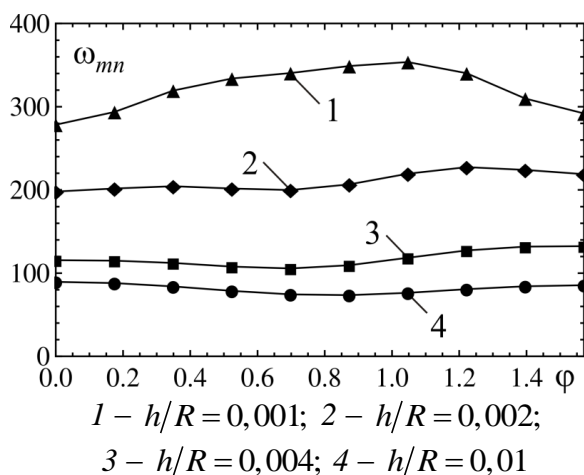


**Рисунок 7 – Зависимость собственных частот свободных колебаний  $\omega_{mn}(\varphi)$  при  $m=1$**



**Рисунок 8 – Зависимость собственных частот свободных колебаний  $\omega_{mn}$  от угла намотки  $\varphi$  при  $n=1$**

Анализ зависимостей, показанных на рисунке 7, показывает, что с увеличением угла намотки частоты  $\omega_{11}$  и  $\omega_{12}$  постепенно уменьшаются, достигая минимума при  $\varphi \approx 40^\circ$ . Для других мод наименьшее значение частоты наблюдается при  $\varphi \approx 50^\circ$ . Таким образом, минимальные значения частот для различных мод имеют место при различных углах намотки. Характер изменений частот аналогичен для различных мод. Частоты  $\omega_{21}$  и  $\omega_{31}$  достигают минимальных значений при углах намотки  $\varphi=0$  или  $\varphi=\pi/2$ . Частота  $\omega_{11}$  имеет наименьшее значение при  $\varphi=40^\circ$ . Сравнивая зависимости частот  $\omega_{mn}$ , представленные на рисунках 7 и 8, можно сделать вывод, что влияние изменения параметра  $m$  на изменение собственных частот более велико, чем изменения параметра  $n$ .



**Рисунок 9 – Зависимость собственных частот свободных колебаний  $\omega_{mn}$  от угла намотки  $\varphi$  при  $m = n = 1$  для различных отношений  $h/R$**

Из рисунка 9 видно, что при увеличении отношения  $h/R$  значение угла намотки, соответствующее минимальному значению частоты свободных колебаний, изменяется, в частности, при  $h/R = 0,001$  и  $h/R = 0,002$  наименьшее значение  $\omega_{11}$  наблюдается для угла  $\varphi \approx 40^\circ$ . При значениях  $R/l = 1/30$  и  $R/l = 1/20$  угол намотки на частоту свободных колебаний практически не влияет; при увеличении значений отношения  $R/l$  наименьшие частоты наблюдаются при углах  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$ , а максимальная частота наблюдается для углов  $\varphi \approx \pi/4$ .

В части четвертой главы 3 найдены частоты свободных колебаний конструктивно анизотропной оболочки в случае заделки одного конца и шарнирного закрепления другого конца оболочки, при котором выполняются равенства:

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0 \text{ при } \alpha = 0, \quad u = v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0 \text{ при } \alpha = l/R. \quad (12)$$

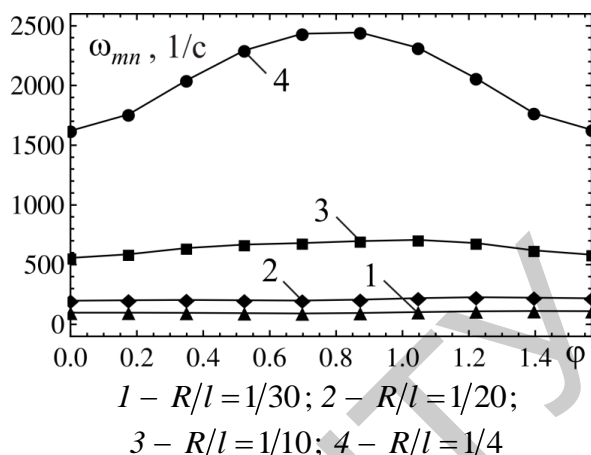
Уравнения для нахождения параметров  $\lambda_m$  и  $\sigma_m$  получены из граничных условий (12) после подстановки перемещений (10)

$$\operatorname{tg}(\pi\lambda_m) - \operatorname{th}(\pi\lambda_m) = 0, \quad \sigma_m = \frac{\operatorname{ch}(\pi\lambda_m) - \cos(\pi\lambda_m)}{\operatorname{sh}(\pi\lambda_m) - \sin(\pi\lambda_m)}. \quad (13)$$

На основании численного решения приближенные корни уравнений (13) сформулированы следующим образом:

$$\lambda_m = m + 1/4, \quad \sigma_m \approx 1.$$

С учетом этих решений найдено численное решение характеристического уравнения (7) и получены зависимости собственных частот  $\omega_{mn}(\varphi)$  для оболочки из тканевого стеклопластика, аналогичные тем, что представлены на рисунках 7–10. Сравнительный анализ рассчитанных частот свободных колебаний оболочки для трех вариантов граничных условий показывает, что при жесткой



**Рисунок 10 – Зависимость собственных частот свободных колебаний  $\omega_{mn}$  от угла намотки  $\varphi$  при  $m = n = 1$  для различных отношений  $R/l$**

заделке ее двух концов частоты больше соответствующих частот свободных колебаний оболочки при граничных условиях Навье и граничных условиях, соответствующих жесткой заделке одного конца и шарнирному закреплению другого конца оболочки.

**Четвертая глава** посвящена анализу параметрической устойчивости цилиндрических конструктивно анизотропных оболочек. Исследование параметрической устойчивости цилиндрической оболочки проведено в пренебрежении тангенциальными составляющими сил инерции для случая, когда на оболочку действуют распределенные продольные силы  $P(t) = P_0 + P_1 \cos(\Omega t)$ , изменяющиеся по гармоническому закону. В этом случае система уравнений (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= 0, \quad L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = 0, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= -\frac{P(t)}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \rho R^2 \partial_t^2 w. \end{aligned} \quad (14)$$

В первой части система уравнений (14) с помощью операторного метода сведена к одному разрешающему дифференциальному уравнению восьмого порядка относительно функции  $\Phi(\alpha, \theta, t)$ :

$$\rho R^2 \nabla_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\alpha, \theta, t) + \frac{P(t)}{h} \nabla_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \Phi(\alpha, \theta, t) + \nabla_2 \Phi(\alpha, \theta, t) = 0, \quad (15)$$

где  $\nabla_1, \nabla_2$  – дифференциальные операторы.

Решение дифференциального уравнения (15) при осесимметричных колебаниях принималось в виде ( $m$  – число полуволн вдоль образующей цилиндра):

$$\Phi(\alpha, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \cos(m\pi R\alpha/l), \quad (16)$$

удовлетворяющем при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = l/R$  краевым условиям:

$$u = v = \partial w / \partial \alpha = 0, \quad w \neq 0. \quad (17)$$

После соответствующих преобразований из уравнения (15) получим

$$\frac{d^2 T_m(\tau)}{d\tau^2} + \delta(1 - 2\mu \cos(2\tau)) T_m(\tau) = 0, \quad \tau = \frac{\Omega t}{2}, \quad \delta = \frac{4\omega^2}{\Omega^2}, \quad \mu = \frac{P_1}{2(P^* - P_0)}, \quad (18)$$

где  $P^*$  – критическое значение осевой нагрузки,  $\omega$  – частота свободных колебаний, которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} P^* &= K\lambda^2 B_{1111} (B_{1111} B_{1212} - B_{2111}^2) + K B_{2111} (B_{1122} B_{2111} - B_{1111} B_{1222}) + \\ &+ \frac{1}{\lambda^2} (B_{1111} (B_{2222} B_{1212} - B_{1222}^2) - B_{1122} (B_{1122} B_{1212} - 2B_{2111} B_{1222}) - B_{2111}^2 B_{2222}), \\ \omega^2 &= \frac{1}{\rho R^2} (K\lambda^4 B_{1111} (B_{1111} B_{1212} - B_{2111}^2) + K\lambda^2 B_{2111} (B_{1122} B_{2111} - B_{1111} B_{1222}) + \\ &+ B_{1111} (B_{2222} B_{1212} - B_{1222}^2) - B_{1122} (B_{1122} B_{1212} - 2B_{2111} B_{1222}) - B_{2111}^2 B_{2222} - \lambda^2 P_0). \end{aligned}$$



При данных  $\mu$ ,  $\delta$  и  $\tau \rightarrow \infty$  решение уравнения (18) будет неограниченно возрастать в областях неустойчивости (первой, второй и третьей), описываемых следующими выражениями:

$$\delta_1 = 1 \pm \mu + \frac{7}{8}\mu^2 \pm \frac{117}{192}\mu^3, \quad \delta_2 = 4 \pm \frac{4}{3}\mu^2, \quad \delta_3 = 9 + \frac{81}{16}\mu^2 \pm \frac{729}{64}\mu^3.$$

Во второй части проведен расчет значений угла намотки стекловолокна  $\varphi$ , для которых возникают параметрические колебания в области неустойчивости для конструктивно анизотропной оболочки из тканевого стеклопластика при  $h=0,001$ ,  $R=0,5$ ,  $l=10$  м. Распределенные продольные периодические силы характеризуются значениями  $P_0=7$  ГН/м,  $P_1=90$  МН/м,  $\Omega=3000$  1/с, число полуволн вдоль образующей цилиндра  $m=1$ . На рисунке 11 одновременно показаны области неустойчивости и зависимость параметра  $\mu$  и  $\delta$  от угла  $\varphi$ , принадлежащему интервалу  $[0, 41\pi/400)$  (кривая  $AB$ ). Точка  $A$  кривой  $AB$  соответствует углу  $\varphi=41\pi/400$ , точка  $B$  – углу  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi/2$ .

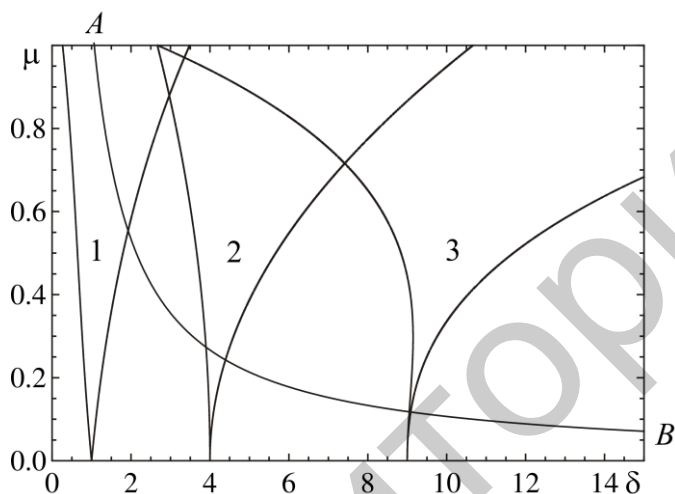


Рисунок 11 – Положение кривой отношения  $\mu$  и  $\delta$  при изменении  $\varphi$  от 0 до  $\pi/2$

Из рисунка 11 видно, что кривая проходит через первую, вторую и третью области неустойчивости. В частности, предельные значения угла намотки, при которых возникают параметрически неустойчивые колебания, составляют  $2009\pi/20000 \leq \varphi \leq 41\pi/400$  в первой области неустойчивости,  $779\pi/8000 \leq \varphi \leq 783\pi/8000$  во второй области неустойчивости. Аналогичный расчет значений угла  $\varphi$  из промежутка  $(37\pi/80, \pi/2]$  показывает, что параметрически неустойчивые колебания возникают при  $37\pi/80 \leq \varphi \leq 18701\pi/40000$  для первой области неустойчивости и при  $18997\pi/40000 \leq \varphi \leq 19083\pi/40000$  для второй области неустойчивости.

Третья часть посвящена анализу влияния сил неупругого сопротивления на параметрическую устойчивость конструктивно анизотропной оболочки. Силы неупругого сопротивления в уравнении (15) учитываются посредством введения в соответствующие дифференциальные уравнения дополнительных членов, содержащих первые производные от перемещений во времени:

$$\begin{aligned} & \rho R^2 \nabla_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\alpha, \theta, t) + \frac{P(t)}{h} \nabla_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \Phi(\alpha, \theta, t) + \\ & + \nabla_2 \Phi(\alpha, \theta, t) + \frac{R^2 \omega}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_3 \Phi(\alpha, \theta, t)) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$



где  $\nabla_3$  – дифференциальный оператор, зависящий от постоянных упругости конструктивно анизотропной оболочки и декрементов затухания стеклопластика  $\delta'_{1111}$ ,  $\delta'_{2222}$ ,  $\delta'_{1122}$ ,  $\delta'_{1212}$ ,  $\delta'_{1222}$  и  $\delta'_{2111}$ , которые определяются через основные декременты  $\delta_{1111}$ ,  $\delta_{2222}$ ,  $\delta_{1212}$  и  $\delta_{1122}$ .

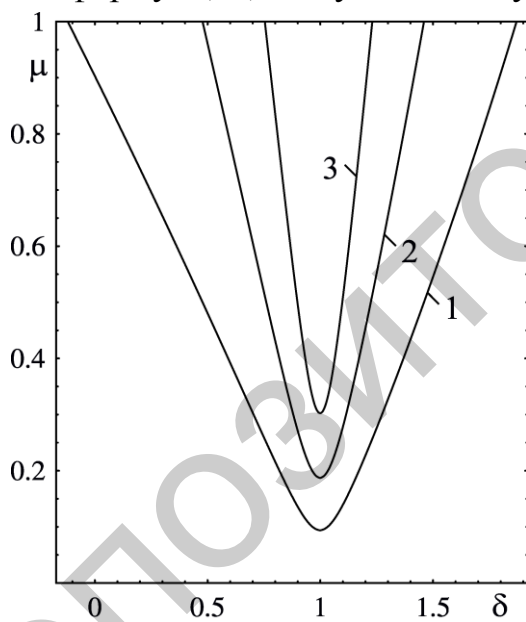
Решение дифференциального уравнения (19) при граничных условиях (17) принимается в виде (16). После преобразований выведено уравнение Матье с учетом вязкого затухания

$$\frac{d^2 T_m(t)}{dt^2} + \hat{\mu} \frac{dT_m(t)}{dt} + \omega^2 (1 - 2\mu \cos(\Omega t)) T = 0, \quad \hat{\mu} = \omega \delta'_{1111} / \pi. \quad (20)$$

Методом малого параметра из уравнения (20) получены следующие выражения, ограничивающие первую и вторую области неустойчивости:

$$\delta_1 = 1 \pm \sqrt{\mu^2 - 4\epsilon^2}, \quad \delta_2 = 4 \pm \frac{4}{3}\mu^2. \quad (21)$$

Влияние затухания на области динамической неустойчивости исследовано в четвертой части при углах намотки  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/20$  и  $\varphi = \pi/2$  (численные данные для оболочки принимаются те же, что и части 2 четвертой главы). Результаты построения первой области устойчивости, выполненного на основании формул (21) для указанных углов намотки представлены на рисунке 12.



- 1 – граница раздела при  $\varphi = \pi/2$ ;
- 2 – граница раздела при  $\varphi = \pi/20$ ;
- 3 – граница раздела при  $\varphi = 0$

**Рисунок 12 – Влияние затухания на область неустойчивости**

Декременты стеклопластика на основе стеклоткани  $\delta_{1111} = 0,01933$ ,  $\delta_{2222} = 0,01825$ ,  $\delta_{1212} = 0,02$ . При построении границ раздела первой области неустойчивости и области устойчивости в случае, когда углы намотки составляют  $\varphi = \pi/20$  и  $\varphi = \pi/2$  использованы коэффициенты масштабирования, равные 2 и 4 соответственно.

Из рисунка 12 видно, что первая область неустойчивости при увеличении угла намотки увеличивается. Влияние затухания на вторую и третью области неустойчивости пренебрежимо мало.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**Основные научные результаты.** В диссертационной работе получены следующие новые научные результаты:

1. Система уравнений движения конструктивно анизотропной круговой цилиндрической оболочки, выполненной из стеклопластика, относительно перемещений точек срединной поверхности оболочки в продольном, окружном и радиальном направлениях для случая, когда оболочка выполнена из однородного монолитного анизотропного материала, упругие свойства которого зависят от угла ориентации стекловолокна по отношению к окружному направлению, отличающаяся учетом в уравнениях динамического равновесия членов, содержащих частные производные третьего порядка [4, 6].

2. Характеристическое уравнение для определения частот свободных колебаний, полученное на основании метода приближенного удовлетворения начальным условиям в предположении, что оболочка является длинной с малым числом продольных волн и большим числом волн в окружном направлении, а также зависимости собственных частот свободных колебаний от угла намотки стекловолокна для конструктивно анизотропной цилиндрической шарнирно закрепленной оболочки, а также для оболочки при шарнирном закреплении одного конца и жесткой заделке другого конца [4, 6, 11, 13, 17].

3. Выражения, определяющие перемещения точек оболочки в продольном, окружном и радиальном направлениях с точностью до постоянной, при свободных колебаниях длинной конструктивно анизотропной оболочки с малым числом продольных волн и большим числом волн в окружном направлении, для случая, когда оболочка является шарнирно закрепленной, и случая, когда, один конец которой шарнирно закреплен, а другой жестко заделан.

4. Характеристические уравнения, полученные на основании энергетического метода и их численные решения относительно частот свободных колебаний цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки при граничных условиях, соответствующих свободному опиранию на круговые диафрагмы, при жесткой заделке концов оболочки, а также граничным условиям, соответствующим шарнирному закреплению одного конца и жесткому защемлению другого конца оболочки, позволяющие получить зависимости частот свободных колебаний оболочек от угла намотки стекловолокна при рассмотренных граничных условиях [1, 2, 3, 7, 9, 10, 18].

5. Диапазоны углов намотки стекловолокна, при которых наблюдаются параметрически неустойчивые колебания цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки при действии распределенной продольной нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону, а также определение областей параметрической неустойчивости для отдельных углов намотки стекловолокна с учетом сил неупругого сопротивления [5, 8, 12, 14, 15, 16, 19].

**Рекомендации по практическому использованию результатов.** Полученные результаты могут быть использованы при проектировании цилиндрических однослойных оболочек из армированного стеклопластика, рассматриваемого как однородный монолитный анизотропный материал, в случае, когда оболочка подвергается динамическим нагрузкам. В соответствии с полученными зависимостями частот свободных колебаний от угла ориентации стекловолокна по отношению к основным направлениям упругости, можно задавать та-

кой угол намотки стеклонити, который позволит избежать возникновения резонанса при вибрации. С учетом найденных диапазонов углов намотки стекловолокна можно избежать появления параметрически неустойчивых колебаний цилиндрических оболочек под действием продольных сил, изменяющихся по гармоническому закону, на практике.

Результаты исследований могут быть использованы в ходе преподавания специальных учебных курсов по теории оболочек.

## **СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Статьи в научных журналах**

1. Босяков, С. М. Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье / С. М. Босяков, Чживэй Ван // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 3. – С. 24–27.

2. Босяков, С. М. Анализ влияния угла намотки стекловолокна на частоты свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при несимметричных граничных условиях / С. М. Босяков, Чживэй Ван // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 2. – С. 409–412.

3. Босяков, С. М. Реализация метода Рэлея–Ритца применительно к расчету частот свободных колебаний цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки / С. М. Босяков, Чживэй Ван // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2011. – № 2. – С. 106–108.

4. Босяков, С. М. Определение собственных частот анизотропной цилиндрической шарнирно опертой оболочки из ориентированного стеклопластика / С. М. Босяков, Чживэй Ван // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 2. – С. 54–57.

5. Ван, Чживэй. Анализ параметрической устойчивости цилиндрических осесимметричных анизотропных оболочек из стеклопластика с учетом затухания / Чживэй Ван, С. М. Босяков // Вестник Полоцкого государственного университета. – 2011. – Сер. С. Фундаментальные науки. – № 4. – С. 84–89.

6. Босяков, С. М. Определение собственных частот свободных колебаний тонкой цилиндрической оболочки из стеклопластика при несимметричных граничных условиях / С. М. Босяков, Чживэй Ван // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2011. – № 1. – С. 110–115.

7. Ван, Чживэй. Численный анализ свободных колебаний цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки при различных граничных условиях / Чживэй Ван, С. М. Босяков // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – Вып. 26. – С. 76–82.

8. Ван, Чживэй. Влияние угла намотки стекловолокна на параметрическую устойчивость цилиндрических осесимметричных конструктивно анизотропных оболочек / Чживэй Ван, С. М. Босяков // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2011. – № 1. – С. 156–159.

### Материалы конференций

9. Wang, Zhiwei. Analysis of parametric vibration of cylindrical shells considering material viscous damping / Zhiwei Wang, S. M. Bosiakov // Proceedings of 2011 International Conference on Electronic and Mechanical Engineering and Information Technology (Harbin, China, 12 – 14 august, 2011). – Vol. 7. – Harbin University of Science and Technology, IEEE press, 2011. – P. 3692–3695.

10. Босяков, С. М. Определение частот свободных колебаний цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки при различных граничных условиях / С. М. Босяков, Чживэй Ван // Материалы XVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова: в 2 т. – М. : ТР-принт, 2011. Т. 1. – С. 42–44.

11. Босяков, С. М. Определение частот свободных колебаний жестко заделанной армированной цилиндрической оболочки / С. М. Босяков, Чживэй Ван // Трибофатика = Tribo-fatigue : труды VI Междунар. симп. по трибофатике МСТФ 2010, Минск, 25 окт. – 1 нояб. 2010 г. : в 2 ч. Ч. 2. / редкол. : М. А. Журавков (пред.) [и др.]. – Минск : БГУ, 2010. – С. 285–288.

12. Ван, Чживэй. Влияние угла намотки стекловолокна на динамическую устойчивость армированных осесимметричных оболочек из стеклопластика / С. М. Босяков, Чживэй Ван // Труды 5-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» : в 2 т. – Т. 2. Дифференциальные уравнения и современные проблемы механики. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2010. – С. 23–27.

13. Ван, Чживэй. Анализ собственных частот свободных колебаний цилиндрической шарнирно опертой оболочки из стеклопластика / Чживэй Ван // Прикладные задачи математики и механики: матер. XVIII международной науч.-техн. конф., 13 – 17 сент. 2010 г. / М-во образования и науки Украины, Севастоп. нац. техн. ун-т; редкол.: Е. В. Пашков (предс.) [и др.] ; научн. ред. Ю. Е. Обжерин. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2010. – С. 57–61.

14. Ван, Чживэй. Анализ динамической устойчивости цилиндрических осесимметричных армированных оболочек / Чживэй Ван // Прикладные задачи математики и механики: матер. XVII Международной науч.-техн. конф., 14 – 18 сент. 2009 г. / редкол.: Ю. Е. Обжерин [и др.]. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2009. – С. 60–64.

15. Ван, Чживэй. Влияние угла намотки стекловолокна на динамическую устойчивость цилиндрических осесимметричных армированных оболочек / Чживэй Ван // 66-я научная конференция студентов и аспирантов, Минск, 16–21 мая 2009 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск, 2009. – С. 24–27.

### Тезисы докладов

16. Ван, Чживэй. Анализ параметрической устойчивости цилиндрических конструктивно анизотропных оболочек / Чживэй Ван, С. М. Босяков // Еругинские чтения – 2011: тез. докладов XIV Междунар. науч. конф. по дифференци-

альным уравнениям (Новополоцк, 12 – 14 мая 2011 г.) / Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2011. – С. 142.

17. Wang, Zhiwei. Influence of fiber winding angle on intrinsic frequencies of free vibration of cylindrical shell under symmetry boundary conditions / Zhiwei Wang, S. M. Bosiakov // Book of abstracts, XXXVIII Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics», July 1 – 5, 2010, St. Petersburg (Repino), Russia, IPME RAS. – 2010. – P. 32.

18. Bosiakov, S. M. Realization Rayleigh–Ritz method with reference to calculation of intrinsic frequency of free vibration of physically anisotropic cylindrical shells / S. M. Bosiakov, Zhiwei Wang // Boundary Value Problems, Functional Equations and Applications 2 (BFA 2), April 14 – 17, 2010 / Pedagogical University in Krakow. – P. 7–8.

19. Босяков, С. М. Влияние угла намотки стекловолокна на динамическую устойчивость армированных осесимметричных оболочек из стеклопластика / С. М. Босяков, Чживэй Ван // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: докл. междунар. конф. 14 – 19 сент. 2009 г., Минск, Беларусь. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2009. – С. 34–35.

**РЭЗІЮМЭ**  
Ван Чживэй

**Аналіз свабодных і параметрычных ваганняў цыліндрычных канструктыўна анізатропных абалонак са шклапластыку**

*Ключавыя словы:* шклапластык, канструктыўна анізатропная цыліндрычная абалонка, вугал намоткі шкловалакна, свабодныя ваганні, метады набліжанага задавальнення межавым умовам, энергетычны метады, параметрычныя ваганні, раўнанне Мацье, метады малога параметра, глейкае згасанне, вобласці няўстойлівасці.

*Аб'ектам даследавання з'яўляюцца аднаслаёвыя канструктыўна анізатропныя цыліндрычныя кругавыя абалонкі, якія атрымліваюцца метадамі бесперапыннай намоткі шкловалакна пад адвольным вуглом да акруговага кірунку, з рознымі відамі межавых умоў.*

*Прадмет даследавання – свабодныя і параметрычныя ваганні аднаслаёвых канструктыўна анізатропных цыліндрычных абалонак са шклапластыку пры розных межавых умовах.*

*Мэта дысертацыйнай працы складаецца з знаходжання залежнасцяў ўласных частот свабодных ваганняў цыліндрычнай канструктыўна анізатропнай абалонкі ад кута намотвання шкловалакна на падставе метаду набліжанага задавальнення межавым умовам і энергетычнага метаду пры розных межавых умовах, а таксама аналізу ўплыву вугла намоткі шкловалакна на параметрычныя ваганні з улікам і без уліку сіл няпружкіх супраціву.*

**РЕЗЮМЕ**  
Ван Чживэй

**Анализ свободных и параметрических колебаний цилиндрических конструктивно анизотропных оболочек из стеклопластика**

*Ключевые слова:* стеклопластик, конструктивно анизотропная цилиндрическая оболочка, угол намотки стекловолокна, свободные колебания, метод приближенного удовлетворения граничным условиям, энергетический метод, параметрические колебания, уравнение Матье, метод малого параметра, вязкое затухание, области неустойчивости.

*Объектом исследования являются однослойные конструктивно анизотропные цилиндрические круговые оболочки, получаемые методом непрерывной намотки стекловолокна под произвольным углом к окружному направлению, с различными видами граничных условий.*

*Предмет исследования – свободные и параметрические колебания однослойных конструктивно анизотропных цилиндрических оболочек из стеклопластика при различных граничных условиях.*

*Цель* диссертационной работы заключается в нахождении зависимостей собственных частот свободных колебаний цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки от угла намотки стекловолокна на основании метода приближенного удовлетворения граничным условиям и энергетического метода при различных граничных условиях, а также анализу влияния угла намотки стекловолокна на параметрические колебания с учетом и без учета сил неупругого сопротивления.

## **SUMMARY**

Wang Zhiwei

### **The analysis of free and parametric vibrations of cylindrical structurally anisotropic shells from fiberglass**

*Keywords:* fiberglass, circular cylindrical shell, winding angle of fiberglass, free vibration, method of approximately satisfying boundary condition, energy method, parametric vibration, equation Mathieu, little parametric method, viscous damping, unstable region.

*Object of research:* single-layered reinforced structurally anisotropic circular cylindrical shells made by uninterrupted winding fiberglass, which forms any angle with circular direction, with various boundary conditions.

*Subject of research:* free and parametric vibrations of reinforced structurally anisotropic single-layered circular cylindrical shells made of fiberglass with various boundary conditions

*The purpose of work* is to find dependencies of natural frequencies of free vibrations of a cylindrical shell of structurally anisotropic from fiber winding angle on the basis of an approximate method of satisfying the boundary conditions and the energy method under various boundary conditions, as well as analysis of the influence of the angle of winding glass on parametric vibration with and without damping forces.