Министерство образования Республики Беларусь
Белорусская государственная политехническая академия

Кафедра инженерной математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Программа, методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников инженерных и
инженерно-экономических специальностей
приборостроительного факультета

В 2-х частях

Ч а с т ь I

М и н с к 2 0 0 0

УДК 501 517.9 519.62

Данное издание предназначено для студентов заочной формы обучения при самостоятельном изучении курса «Высшая математика».

Часть 1 содержит программу, методические указания, рекомендуемую учебную литературу и контрольные задания (1-4 контрольные работы) для студентов-заочников инженерных и инженерно-экономических специально-стей приборостроительного факультета.

Составители:
В.А.Ибрагимов, С.В.Стрельцов,
А.Н.Мелешко, О.Г.Вишневская

Рецензент И.В.Прусова

1. Общие рекомендации студенту-заочнику по работе над курсом высшей математики

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, ответы на вопросы для самопроверки, выполнение контрольных работ. В помощь заочникам институты организуют чтение лекций, практические занятия и лабораторные работы. Кроме этого студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной или устной консультации. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Однако студент должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь института будет достаточно эффективной. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса высшей математики является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, выполняя на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ради краткости опущены в учебнике) и вычерчивая имеющиеся в учебнике чертежи.

2. Особое внимание следует обращать на определение основных понятий курса, которые отражают количественную сторону или пространственные свойства реальных объектов и процессов и возникают в результате абстракции из этих свойств и процессов. Без этого невозможно успешное изучение математики. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

3. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.

Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями.

3. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную

формулу подставляют числовые значения (если таковые даны). В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.п.

4. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Консультации

Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации.

Контрольные работы

В процессе изучения курса математики студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых - оказать студенту помощь в его работе. Рецензии на эти работы позволяют судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса; указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы; помогают сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

Лекции, практические занятия и лабораторные работы

Во время экзаменационно-лабораторных сессий для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия. Они носят по преимуществу обзорный характер. Их цель - обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела курса, подчеркнуть важнейшие места, указать главные практические приложения теоретического материала, привести факты из истории науки. Кроме того, на этих занятиях могут быть более подробно рассмотрены отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освещенные в рекомендуемых пособиях.

Зачеты и экзамены

На экзаменах и зачетах выясняется, прежде всего, четкое усвоение всех теоретических и практических вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; решение задач в простейших случаях должно проделываться без ошибок и уверенно; всякая письменная и графическая работа должна быть выполнена аккуратно и четко. Только при выполнении этих условий знания могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторять по учебнику и конспекту.

2. Типовые программы курса «Высшая математика». Рекомендуемая литература

2.1. Программа курса «Высшая математика» для инженерных специальностей

Тема 1. Введение в математический анализ

1. Элементы математической логики, логические символы, необходимые и достаточные условия. Множество вещественных чисел. Определение функции. Основные элементарные функции, их простейшие свойства. Сложные и обратные функции.

2. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности и его свойства. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности.

3. Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности. Предел монотонной функции. Непрерывность функции в точке. Непрерывность основных элементарных функций. Предел сложных и обратных функций.

4. Бесконечно малые и бесконечно большие величины, их свойства. Сравнение бесконечно малых. Символы "o" и "O" .

5. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений.

Тема 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

6. Понятие дифференцируемой функции в точке, его геометрический смысл. Дифференциал функции. Производная функции. Правила дифференцирования.

7. Производная сложной и обратной функции. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. Дифференцирование функций, заданных параметрически, неявно.

8. Точки экстремума функции. Теорема Ферма. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя.

9. Производная и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Представление функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора в вычислительной математике.

Тема 3. Применение дифференциального исчисления для исследования функции и построения графиков

10. Условия монотонности функции. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции, дифференцируемой на отрезке. Исследование выпуклости функции, точки перегиба.

11. Асимптоты функции. Понятие об асимптотическом разложении. Общая схема исследования функций. Векторная функция скалярной переменной, ее предел, непрерывность, производная. Уравнение касательной и нормальной плоскости к кривой.

Тема 4. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

12. Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Уравнение плоскости в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей.

13. Кривые второго порядка. Приложения геометрических свойств кривых в технике.

14. Уравнения алгебраических поверхностей 2-го порядка. Их простейшие свойства. Технические приложения геометрических свойств поверхностей. Полярная система координат. Цилиндрическая и сферическая системы координат. Различные способы задания линий и поверхностей на плоскости и в пространстве.

15. Матрицы, операции над ними. Элементарные преобразования матриц. Определители 2-го и высших порядков; их вычисление. Обратная матрица. Решение невырожденных линейных систем.

16. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Решение произвольных систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

17. Линейное векторное пространство. Пространства R^2, R^3, R^n. Скалярное произведение векторов. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Ортогональный базис. Линейные операторы. Собственные значения и собственные векторы. Классификация операторов (сопряженные, самосопряженные, ортогональные).

18. Векторы в пространстве R^2, R^3, R^n. Операции над ними. Их свойства. Проекция вектора на ось. Направляющие косинусы. Длина вектора. Примеры использования понятия вектора (определение координат центра масс).

19. Скалярное произведение векторов, его свойства. Длина вектора, угол между векторами в координатной форме. Условие ортогональности. Механиче-

ский смысл скалярного произведения. Векторное произведение, его свойства. Условие коллинеарности двух векторов. Геометрический смысл определителя 2-го порядка. Вычисление векторного произведения. Простейшие приложения векторного произведения в науке и технике: моменты сил, скорость точки вращающегося тела, направление распространения магнитных волн.

20. Смешанное произведение векторов. Геометрический смысл определителя 3-го порядка. Условие компланарности.

21. Свойство собственных значений и собственных векторов самосопряженного линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора, координат вектора при переходе к новому базису.

22. Линейные и квадратичные формы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

Тема 5. Элементы высшей алгебры

23. Комплексные числа. Операции над ними, их свойства. Алгебраическая, тригонометрическая, показательная формы записи комплексного числа. Формула Эйлера. Корни из комплексных чисел. Формула Муавра.

24. Многочлены. Алгебраические уравнения. Основная теорема алгебры. Канонические представления многочлена. Разложение рациональных дробей на простейшие.

Тема 6. Неопределенный интеграл

25. Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства. Методы интегрирования. Интегрирование рациональных функций.

26. Интегрирование иррациональных выражений. Подстановки Эйлера. Интегрирование тригонометрических выражений.

Тема 7. Определенный интеграл

27. Определенный интеграл, его свойства. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Формула Ньютона- Лейбница. Ее применение для вычисления определённых интегралов.

28. Методы вычисления определенного интеграла. Приближенные методы вычисления определенных интегралов (по формулам прямоугольника, трапеции, Симпсона).

29. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода. Их основные свойства. Теоремы сравнения.

Тема 8. Функции нескольких переменных

30. Функции нескольких переменных. Область определения. Пределы функции. Непрерывность. Частные производные, полный дифференциал. Дифференцируемость функции.

31. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Производные сложных функций.

32. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций нескольких переменных. Неявные функции, теорема существования. Дифференцирование неявных функций.

33. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Метод наименьших квадратов. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Примеры применений при поиске оптимальных решений.

Тема 9. Интегральное исчисление функций нескольких переменных

34. Задачи, приводящие к понятиям кратных, криволинейных и поверхностных интегралов. Интеграл по фигуре и его общие свойства. Двойной интеграл, его свойства и вычисления в декартовой и полярной системах координат.

35. Тройной интеграл, его свойства и вычисления в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

36. Криволинейные и поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода, их свойства и вычисление. Их приложения, формулы Грина, Стокса, Остроградского- Гаусса.

Тема 10. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ДУ) и системы дифференциальных уравнений (СДУ)

37. Физические задачи, приводящие к ДУ. ДУ с разделяющимися переменными. ДУ первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

38. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах (уравнения в полных дифференциалах, однородные ДУ, уравнения Бернулли и т.д.).

39. ДУ высших порядков. Задача Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка. Приложения к решению задач о 2-й космической скорости, движении физического маятника. Понятие о краевых задачах для ДУ.

40. Линейные ДУ, их общие свойства. Линейные ДУ с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Метод Лагранжа.

41. Системы ДУ (СДУ). Нормальные системы ДУ, свойства их решений. Задача Коши. Линейные СДУ. Методы их решения. Автономные системы. Свойства их решений. Фазовые пространства, плоскость, фазовая кривая. Простейшие численные методы решения ДУ и СДУ.

42. Понятие о качественных методах исследования ДУ и СДУ. Понятие об устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову. Устойчивость решения системы ДУ с постоянными коэффициентами.

Тема 11. Теория рядов

43. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами. Методы исследования сходимости рядов. Теоремы сравнения. Признак Даламбера. Признак Коши. Интегральный признак сходимости.

44. Знакопеременные ряды, их свойства. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость.

45. Функциональные ряды, область сходимости, свойства функциональных рядов. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.

46. Степенные ряды. Радиус сходимости. Теорема Абеля. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях. Ряды Тейлора для функции нескольких переменных.

47. Ряды Фурье. Основная тригонометрическая система функций. Разложение функций в ряд Фурье (периодических, непериодических, четных, нечетных).

48. Приложения рядов Фурье. Достаточные условия сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Тема 12. Теория вероятностей (ТВ) и математическая статистика (МС)

49. Предмет ТВ. Классификация событий. Операции над событиями. Диаграммы Эйлера - Венна. Связь с теорией множеств. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Способы задания вероятности. Понятие об аксиоматическом построении ТВ. Комбинаторика.

50. Теоремы умножения и сложения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

51. Дискретные случайные величины (СВ). Схема Бернулли. Биномиальный закон распределения. Распределение Пуассона. Показательное распределение.

52. Непрерывные СВ. Функции распределения дискретной и непрерывной одномерных СВ, их свойства. Основные непрерывные распределения. Нормальное распределение. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

53. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое ожидание, моменты.

54. Законы больших чисел. Теоремы Бернулли, Чебышева. Центральные предельные теоремы. Теорема Ляпунова.

55. Двумерные СВ. Функция распределения двумерных СВ, ее свойства. Нормальный закон распределения для двумерных СВ. Числовые характеристики двумерных СВ.

56. Основные понятия МС: варианты, генеральная и выборочная совокупности. Эмпирическая функция распределения, гистограмма, полигон частот.

57. Точечные и интервальные оценки параметров распределения. Интервальная оценка математического ожидания случайной величины, подчиняющейся нормальному закону распределения при известном "сигма".

58. Распределение Стьюдента. Интервальные оценки для дисперсии нормально распределенной СВ и математического ожидания при неизвестном "сигма".

59. Функция регрессии. Коэффициенты корреляции и регрессии. Корреляционное поле. Выборочный коэффициент корреляции. Определение параметров функции регрессии методом наименьших квадратов.

60. Понятие о статистических гипотезах и о критериях согласия. Критерии Пирсона и Колмогорова. Простые и сложные гипотезы, ошибки 1-го и 2-го рода.

Тема 13. Уравнения математической физики

61. Уравнения математической физики. Классификация уравнений. Краевые условия, типы условий. Задача Коши. Волновое уравнение. Уравнение теплопроводности.

62. Задача Коши о колебании бесконечной струны. Формула Даламбера и ее анализ.

63. Задачи Коши о колебании конечной струны и о теплопроводности в конечном стержне. Метод разделения переменных.

64. Задача Коши о колебании круглой мембраны.

Тема 14. Элементы операционного исчисления

65. Преобразование Лапласа, его свойства. Таблица изображений. Теорема существования. Обратное преобразование Лапласа. Преобразование Фурье. Связь преобразований Лапласа и Фурье.

66. Основные теоремы операционного исчисления. Способы восстановления оригинала по изображениям. Интеграл Дюамеля.

67. Решение ДУ и СДУ с помощью операционного исчисления.

68. Понятие о дискретном преобразовании Фурье. Разложение по синусам, сдвинутым синусам. Разложение по косинусам. Преобразование действительной и комплексной периодических сеточных функций.

Основная литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М., 1980.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М.: Наука, 1980.

3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения, кратные интегралы, ряды, функции комплексного переменного. - М.: Наука, 1981.

4. Ефимов А.В. Краткий курс аналитической геометрии. - М.: Наука, 1965.

5. Герасимович А.И. Математическая статистика. – Мн., 1983.

6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. школа, 1972.

7. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. школа, 1982.

8. Элементы линейной алгебры / Под ред. Р.Ф.Апатенок. - Мн.: Выш. школа, 1977.

9. Араманович В.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1964.

10. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 ч. / Под ред. проф. А.П.Рябушко. – Мн.: Выш. школа, 1990.

11. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике / Под ред. проф. А.П.Рябушко. – Мн.: Выш. школа, 1992.

Дополнительная литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. - М.: Высш. школа, 1981.

2. Воеводин В.В. Линейная алгебра. - М.: Физматгиз, 1980.

3. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. В 5 ч. – Мн.: Выш. школа, 1985.

2.2. Программа курса «Высшая математика» для экономических специальностей

Тема 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

1. Матрицы, определители. Операции над матрицами. Обратная матрица. Системы линейных уравнений и неравенств и их геометрический смысл. Экономическая интерпретация многомерных векторов и матриц и их использование в плановых расчетах.

2. Решение Крамеровских систем уравнений. Метод Гаусса для решения произвольных систем алгебраических уравнений.

3. Линейное пространство. Базис, размерность. Линейные операторы. Пространства R^1, R^2, R^3. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

4. Скалярное, векторное и смешанное произведение в R^3. Евклидово пространство. Ортогональный базис. Угол между двумя векторами.

5. Метод координат. Расстояние между точками в пространстве. Уравнение линии на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве. Расстояние от точки до прямой и плоскости.

Тема 2. Введение в математический анализ

6. Логическая символика. Основные числовые множества. Элементарные функции, их свойства и графики.

7. Предел функции и его свойства. Непрерывность функции в точке и классификация точек разрыва. Непрерывность основных элементарных функций.

8. Техника вычисления пределов. Бесконечно большие и малые функции. Сравнение бесконечно малых.

9. Глобальные свойства непрерывных функций. Приближенное решение уравнений (методом половинного деления).

10. Производная функции, ее механический и геометрический смысл. Связь непрерывности и дифференцируемости функции.

11. Основные правила дифференцирования. Теоремы о производной сложной и обратной функции.

12. Понятие о производных высших порядков. Дифференциал и его геометрический смысл.

Тема 3. Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения графиков

13. Экстремумы функций. Основные теоремы о дифференцируемых функциях (Ферма, Ролля, Лагранжа). Оценка погрешности вычислений.

14. Формула Тейлора. Правило Лопиталя. Примеры.

15. Условия монотонности функции. Признаки точек экстремума и перегиба. Выпуклость функции и ее достаточное условие.

16. Асимптоты функции и общая схема исследования функции и построения графиков.

Тема 4. Функции нескольких переменных

17. Понятие функции нескольких переменных. Частные производные. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Полный дифференциал.

18. Частные производные высших порядков. Формула Тейлора.

19. Экстремум функций нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума. Обзор методов определения локальных и глобальных экстремумов функций нескольких переменных.

20. Эмпирические формулы. Выбор параметров эмпирических формул методом наименьших квадратов.

Тема 5. Неопределенный интеграл

21. Первообразная и неопределенный интеграл. Простейшие приемы интегрирования: интегрирование заменой переменной и по частям.

22. Интегрирование рациональных функций и функций, допускающих рационализацию.

Тема 6. Определенный интеграл

23. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Приемы вычисления определенного интеграла.

24. Теорема существования определенного интеграла. Понятие о численных методах нахождения определенных интегралов.

25. Приложения определенного интеграла в геометрии и механике.

26. Несобственные интегралы первого и второго рода. Понятие о двойном интеграле.

Тема 7. Ряды

27. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Простейшие свойства числовых рядов. Необходимый признак сходимости.

28. Достаточные признаки сходимости: сравнения, Даламбера, Коши, интегральный. Примеры.

29. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница.

30. Степенные ряды. Область сходимости. Теорема Абеля. Нахождение радиуса сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов (обзор).

31. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение в степенной ряд основных элементарных функций.

32. Применение рядов к приближенным вычислениям.

Тема 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)

33. Задачи, приводящие к ОДУ. Порядок ОДУ, общее и частное решение. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

34. Основные ОДУ, интегрируемые в квадратурах (в полных дифференциалах, однородные, линейные первого порядка).

35. Линейные ОДУ второго порядка. Линейно зависимые и независимые решения. Теорема о структуре общего решения.

36. Решение линейных ОДУ высших порядков с постоянными коэффициентами: со специальной правой частью и методом вариации произвольных постоянных.

37. Понятие о приближенных методах решения ОДУ.

Тема 9. Теория вероятностей (ТВ)

38. Основные понятия ТВ. События, виды событий. Предмет и задачи теории вероятностей. Вероятность и частота. Основные комбинаторные формулы.

39. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности. Геометрическая вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Примеры.

40. Полная группа событий. Формулы полной вероятности и Байеса. Зависимые и независимые события. Примеры.

41. Дискретные и непрерывные случайные величины и их распределения вероятностей. Числовые характеристики случайных величин.

42. Схема независимых испытаний. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число наступлений события при повторении испытаний. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

43. Формула Пуассона. Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности в независимых испытаниях.

44. Функция распределения и плотность распределения случайных величин. Их свойства. Примеры.

45. Математическое ожидание для дискретной и непрерывной случайной величины. Дисперсия и квадратическое отклонение, их свойства.

46. Законы распределения случайных величин: равномерный, биномиальный, Пуассона, нормальный.

47. Понятие о предельных теоремах. Закон больших чисел.

48. Элементы теории массового обслуживания.

Тема 10. Математическая статистика (МС)

49. Задачи математической статистики. Выборка. Эмпирическая функция распределения. Полигон, гистограмма.

50. Точечные оценки неизвестных параметров распределения. Методы получения оценок.

51. Интервальные оценки неизвестных параметров распределения.

52. Проверка статистических гипотез.

53. Элементы корреляционного анализа.

54. Элементы регрессионного анализа и прогнозирование.

Тема 11. Методы оптимизации (МО)

55. Общая постановка задач линейного программирования. Из ометрический метод.

56. Симплекс-метод. Метод искусственного базиса. Двойственный симплекс-метод.

57. Транспортная задача. Метод распределения ресурсов.

58. Метод потенциалов.

59. Задачи целочисленного программирования. Метод Гомори. Градиентные методы решения задач на безусловный экстремум.

60. Условный экстремум. Теорема Куна-Таккера.

Основная литература

1. Карасев А.И. и др. Курс высшей математики для экономических вузов. В 2 ч. - М.: Высш. Школа, 1982. - Ч. 1. - 272 с. - Ч .2 - 320 с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. - М.: Наука, 1978. - Т. 1. - 456 с. - Т. 2. - 576 с.

3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М., 1980.

4. Шипачев В.С. Основы высшей математики. - М., 1989.

5. Шипачев В.С. Высшая математика. - М., 1985.
6. Шестаков А.А. и др. Курс высшей математики. - М., 1987.
7. Мантуров О.В. и др. Курс высшей математики. - М., 1986.
8. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М., 1977.
9. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М., 1980.
10. Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г.И.Кручковича. - М., 1973.
11. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М., 1979.
12. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 ч. / Под ред. проф. А.П.Рябушко. - Мн., 1990. – Ч 1-3.
13. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике / Под ред. проф. А.П.Рябушко. - Мн., 1992.
14. Четыркин Е.М., Калихман И.Л. Вероятность и статистика. - М.: Финансы и статистика, 1982.
15. Акулич И.Л.. Математическое программирование в примерах и задачах. - М.: Высш. школа, 1993.
16. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике / Под ред. А.П.Рябушко. - Мн.: Выш. школа, 1992.
17. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию. - Мн.: Выш. школа, 1978.
18. Кузнецов А.В., Новиков Г.И., Холод Н.И. Сборник задач по математическому программированию. - Мн.: Выш. школа, 1985.

Дополнительная литература

1. Никольский С.М. Математический анализ. - М., 1987.
2. Воеводин В.В. Линейная алгебра. - М., 1980.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М., 1979.
4. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1980.
5. Гачев Э.М., Кушниренко А.Г., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимальному управлению. - М.: Изд-во МГУ, 1980.
6. Карманов В.Г. Математическое программирование. - М.: Наука, 1975.
7. Зайченко Ю.П. Исследование операций. - Киев: Вища школа, 1975.

3. Контрольные работы

3.1. Правила оформления контрольных работ

При выполнении работ необходимо:

1) указывать на титульном листе номер работы, название дисциплины, номер курса и название факультета, номер зачетной книжки, фамилию, имя и отчество, обратный адрес;

2) решения задач приводить в порядке, указанном в задании;

3) перед каждым решением указывать полный номер задачи (например, 4.2.17 - четвертая работа, задание 2, вариант 17) и ее условие согласно заданию;

4) решения приводятся с необходимыми краткими пояснениями, крупным и разборчивым почерком;

5) после каждого решения оставлять место для возможных замечаний рецензента;

6) незачтенные работы не оформлять заново (если на необходимость этого не указано рецензентом). Исправленные решения задач приводятся в конце работы.

При несоблюдении указанных требований работа не рецензируется.

Прорецензированные и зачтенные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена.

3.2. Выбор варианта контрольной работы

Номер варианта для каждой задачи выбирается по двум последним цифрам номера зачетной книжки. Если это число превышает 30, то из него вычитается число, кратное 30, так, чтобы остаток оказался меньше 30. Этот остаток есть номер варианта. Например, номер зачетной книжки оканчивается на 76. Тогда номер варианта задания равен

$$76-2*30=16.$$

Примечание. Количество и содержание заданий контрольных работ, выполняемых в каждом семестре, определяется студентам на установочной сессии.

3.3. Задания контрольных работ

Контрольная работа № 1

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Задание 1.1

Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее:

а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = -7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_2 + 4x_3 = -20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

18. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$

19.

$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = +8. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -10. \end{cases}$

Задание 1.2

Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

1. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 = 0, \\ 3x_1 - 11x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ 28. $\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

Задание 1.3

По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти:
а) модуль вектора a;
б) скалярное произведение векторов a и b;
в) проекцию вектора c на вектор d;
г) координаты точки M, делящей отрезок l в отношении $\frac{\alpha}{\beta}$.

1. A (4, 6, 3), B (-5, 2, 6), C (4, -4, -3), a = $\vec{CB} - \vec{AC}$, b = $\vec{AB}$, c = $\vec{CB}$, d = $\vec{AC}$, l = AB, $\alpha = 5$, $\beta = 4$.

2. A (4, 3, -2), B (-3, -1, 4), C (2, 2, 1), a = $\vec{AC} + \vec{CB}$, b = $\vec{AB}$, c = $\vec{AC}$, d = $\vec{CB}$, l = BC, $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

3. A (-2, -2, 4), B (1, 3, -2), C (1, 4, 2), a = $\vec{AC} - \vec{BA}$, b = $\vec{BC}$, c = $\vec{BC}$, d = $\vec{AC}$, l = BA, α =2, β =1.

4. A (2, 4, 3), B (3, 1, -4), C (-1, 2, 2), a = $\vec{BA} + \vec{AC}$, b = $\vec{BA}$, c = b, d = $\vec{AC}$, l = BA, $\alpha = 1$, $\beta = 4$.

5. A (2, 4, 5), B (1, -2, 3), C (-1, -2, 4), a = $\vec{AB} - \vec{AC}$, b = $\vec{BC}$, c = b, d = $\vec{AB}$, l = AB, $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

6. A (-1, -2, 4), B (-1, 3, 5), C (1, 4, 2), a = $\vec{AC} - \vec{BC}$, c = b = $\vec{AB}$, d = $\vec{AC}$, l = AC, $\alpha = 1$, $\beta = 7$.

7. A (1, 3, 2), B (2, 4, 1), C (1, 3, 2), a = $\vec{AB} + \vec{CB}$, B = $\vec{AC}$, c = b, d = $\vec{AB}$, l = AB, $\alpha = 2, \beta = 4$.

8. A (2, -4, 3), B (-3, -2, 4), C (0, 0, -2), a = $\vec{AC}$ - $\vec{CB}$, b = c = $\vec{AC}$, d = $\vec{CB}$, l = AC, $\alpha = 2, \beta = 1$.

9. A (3, 4, -4), B (-2, 1, 2), C (2, -3, 1), a = $\vec{CB}$ - $\vec{AC}$, b = c = $\vec{BA}$, d = $\vec{AC}$, l = AB, $\alpha = 2$, $\beta = 5$.

10. A (0, 2, 5), B (2, -3, 4), C (3, 2, -5), a = $\vec{AB} + \vec{CB}$, b = c = $\vec{AC}$, d = $\vec{AB}$, l = AC, $\alpha = 3$, $\beta = 2$.

11. A (-2,-3, -4), B (2, -4, 0), C (1, 4, 5), a = $\vec{AC}$ - $\vec{BC}$, b = c = $\vec{AB}$, d= $\vec{BC}$, l =AB, $\alpha = 4$, $\beta = 2$.

12. A (-2, -3, -2), B (1, 4, 2), C (1, -3, 3), a = $\vec{AC}$ - $\vec{BC}$, b = c= $\vec{AB}$, d = $\vec{AC}$, l = BC, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.

13. A (5, 6, 1), B (-2, 4,-1), C (3,-3,3), a = $\vec{AB}$ - $\vec{BC}$, b = c = $\vec{AC}$, d = $\vec{AC}$, l = BC, $\alpha = 3$, $\beta = 2$.

14. A (10, 6, 3), B (-2, 4, 5), C (3, -4, -6), a = $\vec{AC}$-$\vec{CB}$, b = c= $\vec{BA}$, d = $\vec{AC}$, l = AC, α = 2, β = 4.

15. A (3, 2, 4), B (-2, 1, 3), C (2, -2, -1), a = $\vec{BC}$ - $\vec{AC}$, b = $\vec{AB}$, c = $\vec{AC}$, d = $\vec{BC}$, l = AB, α = 2, β = 5.

16. A (-2, 3, -4), B (3, -1, 2), C (4, 2, 4), a = $\vec{AC}+\vec{CB}$, b = c = $\vec{AB}$, d = $\vec{CB}$, l = BC, α = 2, β = 5.

17. A (4, 5, 3), B (-4, 2, 3), C (5, -6, -2), a = $\vec{AC}$-$\vec{BC}$, b = c= $\vec{AC}$, d = $\vec{AB}$, l = BC, α = 5, β = 1.

18. A (2, 4, 6), B (-3, 5, 1), C (4, -5, -4), a = $\vec{BC}+\vec{BA}$, b = c = $\vec{CA}$, d = $\vec{BA}$, l = BC, α = 1, β = 3.

19. A (-4, -2, -5), B (3, 7, 2), C (4, 6, -3), a = $\vec{BA}+\vec{BC}$, b = c = $\vec{\mathrm{AC}}$, d = $\vec{\mathrm{BC}}$, l = BA, α = 4, β = 3.

20. A (5, 4, 4), B (-5, 2, 3), C (4, 2, -5), a = $\vec{AC}$ - $\vec{AB}$, b = $\vec{\mathrm{BC}}$, c = $\vec{AB}$, d = $\vec{AC}$, l = BC, α = 3, β = 1.

21. A (3, 4, 6), B (-4, 6, 4), C (5, -2, -3), a = $\vec{BC}+\vec{CA}$, b = $\vec{BA}$, c = $\vec{CA}$, d = $\vec{BC}$, l = BA, α = 5, β = 3.

22. A (-5, -2, -6), B (3, 4, 5), C (2, -5, 4), a = $\vec{AC}$-$\vec{BC}$, b = c = $\vec{AB}$, d = $\vec{AC}$, l = AC, α = 3, β = 4.

23. A (3, 4, 1), B (5, -2, 6), C (4, 2, -7), a = $\vec{AC}+\vec{AB}$, b = c = $\vec{BC}$, d = $\vec{\mathrm{AC}}$, l = AB, α = 2, β = 3.

24. A (4, 3, 2), B (-4, -3, 5), C (6, 4, -3), a = $\vec{AC}$-$\vec{BC}$, b = c = $\vec{BA}$, d = $\vec{AC}$, l = BC, α = 2, β = 5.

25. A (-5, 4, 3), B (4, 5, 2), C (2, 7, -4), a = $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$, b = c = $\overrightarrow{CA}$, d = $\overrightarrow{AB}$, l = BC, $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

26. A (6, 4, 5), B (-7, 1, 8), C (2, -2, -7), a = $\overrightarrow{CB}$ - $\overrightarrow{AC}$, b = $\overrightarrow{AB}$, c = $\overrightarrow{CB}$, d = $\overrightarrow{AC}$, l = AB, $\alpha = 3$, $\beta = 2$.

27. A (6, 5, -4), B (-5, -2, 2), C (3, -3, 2), a = $\overrightarrow{AB}$ - $\overrightarrow{CB}$, b = c = $\overrightarrow{AC}$, d = $\overrightarrow{CB}$, l = BC, $\alpha = 1$, $\beta = 5$.

28. A (-3, -5, 6), B (3, 5, -4), C (2, 6, 4), a = $\overrightarrow{AC}$ - $\overrightarrow{BA}$, b = $\overrightarrow{CB}$, c = $\overrightarrow{BA}$, d = $\overrightarrow{AC}$, l = BA, $\alpha = 4$, $\beta = 2$.

29. A (3, 5, 4), B (4, 2, -3), C (-2, 4, 7), a = $\overrightarrow{BA}$ - $\overrightarrow{AC}$, b = $\overrightarrow{AB}$,c = $\overrightarrow{BA}$ d = $\overrightarrow{AC}$, l = BA, $\alpha = 2$, $\beta = 5$.

30. A (4, 6, 7), B (2, -4, 1), C (-3, -4, 2), a = $\overrightarrow{AB}$ - $\overrightarrow{AC}$, b = c = $\overrightarrow{BC}$, d = $\overrightarrow{AB}$, l = AB, $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

Задание 1.4

Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Необходимо: а) найти модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$; б) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{c}$; в) вычислить смешанное произведение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и проверить, будут ли они компланарны.

1. a = 2i - 3j + k, b = j + 4k, c = 5i + 2j - 3k.

2. a = 3i + 4j + k, b = i - 2j + 7k, c = 3i - 6j + 21k.

3. a = 2i - 4j - 2k b = 7i + 3j c = 3i + 5j - 7k.

4. a= -7i + 2k, b = 2i - 6j + 4k, c = i-3j + 2k.

5. a = -4i + 2j - k, b = 3i + 5j - 2k, c = j + 5k.

6. a = 3i - 2j + k, b = 2j - 3k, c = -3i + 2j - k.

7. $a = 4i - j + 3k$, $b = 2i + 3j - 5k$, $c = 7i + 2j + 4k$.
8. $a = 4i + 2j - 3k$, $b = 2i + k$, $c = -12i - 6j + 9k$.

9. $a = -i + 5k$, $b = -3i + 2j + 2k$, $c = -2i - 4j + k$.

10. $a = 6i - 4j + 6k$, $b = 9i - 6j + 9k$, $c = i - 8k$.

11. $a = 5i - 3j + 4k$, $b = 2i - 4j - 2k$, $c = 3i + 5j - 7k$.

12. $a = -4i + 3j - 7k$, $b = 4i + 6j - 2k$, $c = 6i + 9j - 3k$.

13. $a= -5i + 2j - 2k$, $b = 7i - 5k$, $c = 2i + 3j - 2k$.

14. $a = -4i - 6j + 2k$, $b = 2i + 3j - k$, $c = -i + 5j - 3k$.

15. $a = -4i + 2j - 3k$, $b = -3j + 5k$, $c = 6i + 6j -4k$.

16. $a = -3i + 8j$, $b = 2i + 3j - 2k$, $c = 8i + 12j - 8k$.

17. $a = 2i - 4j - 2k$, $b = -9i + 2k$, $c = 3i + 5j - 7k$.

18. $a = 9i - 3j + k$, $b = 3i - 15j + 21k$, $c = i - 5j + 7k$.

19. $a = -2i + 4j - 3k$, $b = 5i + j - 2k$, $c = 7i + 4j - k$.

20. $a = -9i + 4j - 5k$, $b = i - 2j + 4k$, $c = -5i + 10j - 20k$.

21. $a = 2i - 7j + 5k$, $b = -i + 2j - 6k$, $c = 3i + 2j - 4k$.

22. $a = 7i - 4j - 5k$, $b = i - 11j + 3k$, $c = 5i + 5j + 3k$.

23. $a = 4i - 6j - 2k$, $b = -2i + 3j + k$, $c = 3i - 5j + 7k$.

24. $a = 3i - j + 2k$, $b = -i + 5j - 4k$, $c = 6i - 2j + 4k$.

25. $a = -3i - j - 5k$, $b = 2i - 4j + 8k$, $c = 3i + 7j - k$.

26. $a = -3i + 2j + 7k$, $b = i - 5k$, $c = 6i + 4j - k$.

27. $a = 3i - j + 5k$, $b = 2i - 4j + 6k$, $c = i - 2j + 3k$.
28. $a = 4i - 5j - 4k$, $b = 5i - j$, $c = 2i + 4j - 3k$.

29. a = -9i + 4k, b = 2i - 4j + 6k, c = 3i - 6j + 9k.

30. a = 5i - 6j - 4k, b = 4i + 8j - 7k, c = 3j - 4k.

Задание 1.5

Даны четыре точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ и $A_4(x_4, y_4, z_4)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1 A_2 A_3$;

б) прямой $A_1 A_2$;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2 A_3$;

г) прямой A_3N, параллельной прямой $A_1 A_2$;

д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой $A_1 A_2$.

Вычислить:

е) синус угла между прямой $A_1 A_4$ и плоскостью $A_1 A_2 A_3$.

ж) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1 A_2 A_3$.

1. $A_1(3, 1, 4)$, $A_2(-1, 6, 1)$, $A_3(1, 1, 6)$, $A_4(0, 4, -1)$.

2. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(5, 8, 3)$, $A_3(1, 2, -26)$, $A_4(-1, 0, 2)$.

3. $A_1(2, 4, 3)$, $A_2(1, 1, 5)$, $A_3(4, 9, 3)$, $A_4(3, 6, 7)$.

4. $A_1(9, 5, 5)$, $A_2(-3, 7, 1)$, $A_3(5, 7, 8)$, $A_4(6, 9, 2)$.

5. $A_1(0, 7, 1)$, $A_2(2, -1, 5)$, $A_3(1, 6, 3)$, $A_4(3, -9, 8)$.

6. $A_1(5, 5, 4)$, $A_2(1, -1, 4)$, $A_3(3, 5, 1)$, $A_4(5, 8, -1)$.

7. $A_1(6, 1, 1)$, $A_2(4, 6, 6)$, $A_3(4, 2, 0)$, $A_4(1, 2, 6)$.

8. $A_1(7, 5, 3)$, $A_2(9, 4, 4)$, $A_3(4, 5, 7)$, $A_4(7, 9, 6)$.

9. $A_1(6, 8, 2)$, $A_2(5, 4, 7)$, $A_3(2, 4, 7)$, $A_4(7, 3, 7)$.

10. $A_1(4, 2, 5)$, $A_2(0, 7, 1)$, $A_3(0, 2, 7)$, $A_4(1, 5, 0)$.

11. $A_1(4, 4, 10)$, $A_2(7, 10, 2)$, $A_3(2, 8, 4)$, $A_4(9, 6, 9)$.

12. $A_1(4, 6, 5)$, $A_2(6, 9, 4)$, $A_3(2, 10, 10)$, $A_4(7, 5, 9)$.

13. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(8, 7, 4)$, $A_3(5, 10, 4)$, $A_4(4, 7, 8)$.

14. $A_1(10, 9, 6)$, $A_2(2, 8, 2)$, $A_3(9, 8, 9)$, $A_4(7, 10, 3)$.

15. $A_1(1, 8, 2)$, $A_2(5, 2, 6)$, $A_3(5, 7, 4)$, $A_4(4, 10, 9)$.

16. $A_1(6, 6, 5)$, $A_2(4, 9, 5)$, $A_3(4, 6, 11)$, $A_4(6, 9, 3)$.

17. $A_1(7, 2, 2)$, $A_2(-5, 7, -7)$, $A_3(5, -3, 1)$, $A_4(2, 3, 7)$.

18. $A_1(8, -6, 4)$, $A_2(10, 5, -5)$, $A_3(5, 6, -8)$, $A_4(8, 10, 7)$.

19. $A_1(1, -1, 3)$, $A_2(6, 5, 8)$, $A_3(3, 5, 8)$, $A_4(8, 4, 1)$.

20. $A_1(1, -2, 7)$, $A_2(4, 2, 10)$, $A_3(2, 3, 5)$, $A_4(5, 3, 7)$.

21. $A_1(4, 2, 10)$, $A_2(1, 2, 0)$, $A_3(3, 5, 7)$, $A_4(2, -3, 5)$.

22. $A_1(2, 3, 5)$, $A_2(5, 3, -7)$, $A_3(1, 2, 7)$, $A_4(4, 2, 0)$.

23. $A_1(5, 3, 7)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(4, 2, 10)$, $A_4(1, 2, 7)$.

24. $A_1(4, 3, 5)$, $A_2(1, 9, 7)$, $A_3(0, 2, 0)$, $A_4(5, 3, 10)$.

25. $A_1(3, 2, 5)$, $A_2(4, 0, 6)$, $A_3(2, 6, 5)$, $A_4(6, 4, -1)$.

26. $A_1(2, 1, 6)$, $A_2(1, 4, 9)$, $A_3(2, -5, 8)$, $A_4(5, 4, 2)$.

27. $A_1(2, 1, 7)$, $A_2(3, 3, 6)$, $A_3(2, -3, 9)$, $A_4(1, 2, 5)$.

28. $A_1(2, -1, 7)$, $A_2(6, 3, 1)$, $A_3(3, 2, 8)$, $A_4(2, -3, 7)$.

29. $A_1(0, 4, 5)$, $A_2(3, -2, 1)$, $A_3(4, 5, 6)$, $A_4(3, 3, 2)$.

30. $A_1(3, -1, 2)$, $A_2(-1, 0, 1)$, $A_3(1, 7, 3)$, $A_4(8, 5, 8)$.

Задание 1.6

Решить следующие задачи

1. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(-2, 7, 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1, 5, 6)$, $M_2(-1, 7, 10)$.

3. Найти расстояние от точки $M(2; 0; -0,5)$ до плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, -3, 5)$ параллельно плоскости Oxy.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2, 5, -1)$.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 5, -1)$, $B(-3, 1, 3)$ параллельно оси Oy.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, 4, 0)$ и прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

9. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3, 2, -5)$.

10. Составить уравнение плоскости в <<отрезках>>, если она проходит через точку $M(6, -10, 1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a = -3$, а на оси Oz - отрезок $c = 2$.

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, 3, -4)$ параллельно двум векторам $a = (4, 1, -1)$ и $b = (2, -1, 2)$.

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,1,0)$, $B(2,-1,-1)$ перпендикулярно к плоскости $5x+ 2y + 3z -7= 0$.

13. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x - 3y + z - 1 = 0$ и $x - y + 5z +3 = 0$.

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3, -1, 2)$, $B(2, 1, 4)$ параллельно вектору $a = (5, -2, -1)$.

15. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к вектору $\vec{AB}$, если $A(5, -2, 3)$, $B(1, -3, 5)$.

16. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2, -3, 3)$ параллельно плоскости $3x + y - 3z = 0$.

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, -1, 2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2, если $M_1(2, 3, -4)$, $M_2(-1, 2, -3)$.

18. Показать, что прямая $\frac{x}{12}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{3}$ параллельна плоскости

$x + 3y - 2z + 1 = 0$, а прямая $x = t + 7$, $y = t - 2$, $z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости.

19. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, -4, 1)$ параллельно координатной плоскости Oxz.

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(3, -5, 2)$.

21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1, 2, 3)$ и $N(-3, 4, -5)$ параллельно оси Oz.

22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, 3, -1)$ и прямую $x = t - 3$, $y = 2t + 5$, $z = -3t + 1$.

23. Найти проекцию точки $M(4, -3, 1)$ на плоскость $x - 2y - z - 15 = 0$.

24. Определить, при каком значении B плоскости $x - 4y + z - 1 = 0$ и $2x + By + 10z - 3 = 0$ будут перпендикулярны.

25. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2, -3, -4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины.

26. При каких значениях n и A прямая $\frac{x}{3}=\frac{y-5}{n}=\frac{z+5}{6}$ перпендикулярна

к плоскости $Ax + 2y - 2z - 7 = 0$?

27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 3, -1)$, $B(1, 1, 4)$ перпендикулярно к плоскости $x - 4y + 3z + 2 = 0$.

28. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x + 5y - z + 7=0$ и $3x - y + 2z - 3=0$.

29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2, 3, -5)$ и $N(-1, 1, -6)$ параллельно вектору a = (4, 4, 3).

30. Определить, при каком значении C плоскости $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ и $x - 3y + 2z + 5 = 0$ будут перпендикулярны.

Задание 1.7

Решить следующие задачи

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y - 7 = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3.

2. Найти проекцию точки $A(-8, 12)$ на прямую, проходящую через точки $B(2, -3)$ и $C(-5, 1)$.

3. Даны две вершины треугольника ABC: $A(-4, 4)$, $B(4, -12)$ и точка $M(4, 2)$ пересечения его высот. Найти вершину C.

4. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y - x = 3$.

5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -3)$ и точку пересечения прямых $2x - y = 5$ и $x + y = 1$.

6. Доказать, что четырёхугольник $ABCD$ - трапеция, если $A(3, 6)$, $B(5, 2)$, $C(-1, -3)$, $D(-5, 5)$.

7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, 1)$ перпендикулярно к прямой BC, если $B(2, 5)$, $C(1, 0)$.

8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 1)$ параллельно прямой MN, если $M(-3, -2)$, $N(1, 6)$.

9. Найти точку, симметричную точке $M(2, -1)$ относительно прямой $x - 2y + 3 = 0$.

10. Найти точку O пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, если $A(-1, -3)$, $B(3, 5)$, $C(5, 2)$, $D(3, -5)$.

11. Через точку пересечения прямых $6x-4y+5=0$, $2x+5y+8=0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс.

12. Известны уравнения стороны AB треугольника ABC $4x + y = 12$, его высот BH $5x - 4y = 12$ и AM $x + y = 6$. Найти уравнения двух других сторон треугольника ABC.

13. Даны две вершины треугольника ABC: $A(-6, 2)$, $B(2, -2)$ и точка пересечения его высот $H(1, 2)$. Найти координаты точки M пересечения стороны AC и высоты BH.

14. Найти уравнения высот треугольника ABC, проходящих через вершины A и B, если $A(-4, 2)$, $B(3, -5)$, $C(5, 0)$.

15. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки $A(2, 3)$, $B(0, -3)$, $C(6, -3)$.

16. Составить уравнение высоты, проведённой через вершину A треугольника ABC, зная уравнения его сторон: AB - $2x - y - 3 = 0$, AC - $x + 5y - 7 = 0$, BC - $3x - 2y + 13 = 0$.

17. Дан треугольник с вершинами $A(3, 1)$, $B(-3, -1)$ и $C(5, -12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведённой из вершины C.

18. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x + 5y - 8 = 0$ и $2x + 3y + 4 = 0$.

19. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x + 5y - 15 = 0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.

20. Даны уравнения сторон четырехугольника: $x - y = 0$, $x + 3y = 0$, $x - y - 4 = 0$, $3x + y - 12 = 0$. Найти уравнения его диагоналей.

21. Составить уравнения медианы CM и высоты CK треугольника ABC, если $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$, $C(-1, -4)$.

22. Через точку $P(5, 2)$ провести прямую: а) отсекающую равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси Ox; в) параллельную оси Oy.

23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45^0; б) 90^0; в)0^0.

24. Какую ординату имеет точка C, лежащая на одной прямой с точками A(-6, -6) и B(-3, -1) и имеющая абсциссу, равную 3?

25. Через точку пересечения прямых $2x - 5y - 1 = 0$ и $x + 4y - 7 = 0$ провести прямую, делящую отрезок между точками A(4, -3) и B(-1, 2) в отношении $\lambda = 2/3$.

26. Известны уравнения двух сторон ромба $2x - 5y - 1 = 0$ и $2x - 5y - 34 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $x+3y-6=0$. Найти уравнение второй диагонали.

27. Найти точку E пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки A(-3, 1), B(7, 5) и C(5, -3).

28. Записать уравнения прямых, проходящих через точку A(-1, 1) под углом 45^0 к прямой $2x + 3y = 6$.

29. Даны уравнения высот треугольника ABC $2x-3y +1=0$, $x + 2y + 1 = 0$ и координаты его вершины A(2, 3). Найти уравнения сторон AB и AC треугольника.

30. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - 2y = 0$, $x - y - 1 = 0$ и точка пересечения его диагоналей M(3, -1). Найти уравнения двух других сторон.

Задание 1.8

Построить поверхности и определить их вид (название).

1. а) $4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$; б) $x^2 + 4z = 0$.

2. а) $3x^2 + y^2 + 9z^2 - 9 = 0$; б) $x^2 + 2y^2 - 2z = 0$.

3. а) $-5x^2 + 10y^2 - z^2 + 20 = 0$; б) $y^2 + 4z^2 = 5x^2$.

4. а) $4x^2 - 8y^2 + z^2 + 24 = 0$; б) $x^2 - y = -9z^2$.

5. а) $x^2 - 6y^2 + z^2 = 0$; б) $7x^2 - 3y^2 - z^2 = 21$.

6. а) $z = 8 - x^2 - 4y^2$; б) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 72$.

7. а) $4x^2 + 6y^2 - 24z^2 = 96$; б) $y^2 + 8z^2 = = 20x^2$.

8. а) $4x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 40 = 0$; б) $y = 5x^2 + 3z^2$.

9. а) $x^2 = 8(y^2 + z^2)$; б) $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 18$.
10. а) $5z^2 + 2y^2 = 10x$; б) $4z^2 - 3y^2 - 5x^2 + 60 = 0$.

11. а) $x^2 - 7y^2 - 14z^2 - 21 = 0$; б) $2y = x^2 + 4z^2$.

12. а) $6x^2 - y^2 + 3z^2 - 12 = 0$; б) $8y^2 + 2z^2 = x$.

13. а) $-16x^2 + y^2 + 4z^2 - 32 = 0$; б) $6x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$.

14. а) $5x^2 - y^2 - 15z^2 + 15 = 0$; б) $x^2 + 3z = 0$.

15. а) $6x^2 + y^2 + 6z^2 - 18 = 0$; б) $3x^2 + y^2 - 3z = 0$.

16. а) $-7x^2 + 14y^2 - z^2 + 21 = 0$; б) $y^2 + 2z^2 = 6x^2$.

17. а) $-3x^2 + 6y^2 - z^2 - 18 = 0$; б) $x^2 - 2y = -z^2$.

18. а) $4x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 0$; б) $4x^2 - y^2 - 3z^2 = 12$.

19. а) $z = 4 - x^2 - y^2$; б) $3x^2 + 12y^2 + 4z^2 = 48$.

20. а) $4x^2 + 5y^2 - 10z^2 = 60$; б) $7y^2 + z^2 = 14x^2$.

21. а) $9x^2 - 6y^2 - 6z^2 + 1 = 0$; б) $15y = 10x^2 + 6y^2$.

22. а) $x^2 = 5\,(y^2 + z^2)$; б) $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 36$.

23. а) $4x^2 + 3y^2 = 14x$; б) $3x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 12 = 0$.

24. а) $8x^2 - y^2 - 2z^2 - 32 = 0$; б) $y - 4z^2 = 3x^2$.

25. а) $x^2 - 6y^2 + z^2 - 12 = 0$; б) $x - 3z^2 = 9y^2$.

26. а) $2x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 30 = 0$; б) $2x^2 + 3z = 0$.

27. а) $7x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 42 = 0$; б) $2x^2 + 4y^2 - 5z = 0$.

28. а) $-4x^2 + 12y^2 - 3z^2 + 24 = 0$; б) $2y^2 + 6z^2 = 3x$.

29. а) $3x^2 - 9y^2 + z^2 + 27 = 0$; б) $z^2 - 2y = -4x^2$.

30. а) $27x^2 - 63y^2 + 21z^2 = 0$; б) $3x^2 - 7y^2 - 2z^2 = 42$.

К о н т р о л ь н а я   р а б о т а   № 2

Дифференцирование и исследование функций

Задание 2.1

Найти $\dfrac{dy}{dx}$.

1. $y=\dfrac{\cos 2x}{\sin x}+\ln tgx^2;\qquad y=e^{-x^2}arctg 2x;\qquad y=(\arcsin x)^{\frac{1}{x^2}}.$

2. $y=\dfrac{\sin x}{\cos 2x}+\ln(1+tgx);\qquad y=\ln\left(e^x+e^{-2x}\right);\qquad y=(tgx)^{arctgx}.$

3. $y=\dfrac{\sin 2x}{1+\cos x}+\dfrac{1}{\ln(1+\sin x)};\qquad y=\left(1+e^{2x}\right)\arccos x;\qquad y=(arctgx)^{\frac{1}{1+x}}.$

4. $y=\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x};\qquad y=e^{-3x}(1+\ln x);\qquad y=(\arccos x)^{\frac{1}{\arccos x}}.$

5. $y=\ln\left(1+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right);\qquad y=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}};\qquad y=(1+x)^{\left(1+x^2\right)}.$

6. $y=\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{\cos 2x}};\qquad y=arctg\left(e^{-x^2}\right);\qquad y=(1+\cos x)^{\sin x}.$

7. $y=\ln\left(1+\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\right);\qquad y=e^{\cos x}(1+arctg 4x);\qquad y=(1+2x)^{\frac{1}{\cos x}}.$

8. $y=arctg\left(1+\dfrac{\cos^2 x}{\cos 2x}\right);\qquad y=\dfrac{ctg^2 x}{x-\cos x};\qquad y=(\ln(1+x))^{1+x^2}.$

9.

$$y=\frac{2\sin x+\cos x}{2\cos x+\sin x};\qquad y=\ln\left(1+e^{-x}\right)\arccos 2x;\quad y=(\arcsin x)^{\frac{1}{x}}\ln(1+x)\ .$$

10. $y=\dfrac{1}{1+\cos^2 x}+e^{\frac{-1}{\cos x}}\ ;\qquad y=\cos x\sin(\ln x);\qquad y=x^{\sin x}.$

11. $y=\ln\left(1+\dfrac{1}{\cos 2x}\right)+\dfrac{\cos x+\cos 3x}{\sin x+\sin 3x};$

$y=\arccos(1+x)\arcsin\left(1+4x^2\right);\qquad y=x^{x+\frac{1}{x}}.$

12. $y=\cos x\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x};\qquad y=e^{-2x}arctg\left(x^2+1\right);\quad y=(\cos x+\sin x)^{x^2+x}.$

13. $y=\dfrac{\cos 2x+\sin x}{1+tg^2 x};\qquad y=e^{-x^2}tg\left(2x+x^2\right);\qquad y=(x+\sin x)^{x^2+1}.$

14. $y=\dfrac{tgx+ctgx}{\cos x+\sin x};\qquad y=\ln\left(1+x^2\right)e^{x+4x^2};\qquad y=\left(x+x^2+1\right)^{tgx}.$

15.

$$y=\frac{ctg2x}{1+ctg2x}+\ln(1+ctg2x);\ y=e^{1+x+arctg\left(1+x^2\right)};\ y=(1+\arcsin x)^{\cos^2 x}.$$

16. $y=\ln tg\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}};\qquad y=x^2\left(1+\sqrt{1-arctg^2 x}\right);$

$y=\left(\dfrac{\cos^2 x}{1+4\cos x+4\cos^2 x}\right)^{\cos x}.$

17. $y=\ln tg\dfrac{e^{2\cos x}}{4}+\sqrt{1-e^{2x}};\qquad y=\sqrt{x}+\sqrt{x-a}+\arcsin x;$

$y=\left(1+\sqrt{x^2-a^2}\right)^{\sqrt{x^2-a^2}}.$

18. $y=\sqrt{x^2+e^x+e^{\cos x}}\,x^x$; $\quad y=e^{x^2+arctgx^2}$; $\quad y=\left(e^x+1\right)^{x^2+x+1}$.

19. $y=\ln\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)+arctg\dfrac{x}{x^2+1}$; $\quad y=arctg\left(\dfrac{ax+b}{cx^2+dx+e}\right)$;

$y=(1+arctgx)^{\left(1+\cos^2 x\right)}$.

20. $y=\ln\left(1+4\cos^2 x\right)+\dfrac{1}{1+tg^2x+x}$; $\quad y=xe^{x^2}(1+\arccos 4x)$;

$y=\dfrac{(x+1)^3}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}x^x$.

21. $y=\cos(x\ln x)\left(x^2+11\right)$; $\quad y=\arccos\left(\dfrac{1}{1+(ax+b)^2}\right)$; $\quad y=\left(\sin x^2+2\right)^{x^2+1}$.

22. $y=-\dfrac{1+\ln\left(\cos^2 x\right)}{\cos x}$; $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}+artge^x$; $\quad y=\left(1+4x^2+4x^4\right)^x$.

23. $y=(x+1)\left(1-\dfrac{1}{x^2+1}\right)\left(1+\dfrac{1}{1+\cos^2 x}\right)$; $\quad y=tgx+\cos(n\arccos x)$;

$y=tg\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)+x^{1+x^2}$.

24. $y=\sqrt{x\left(1+e^x\right)\sqrt{1-e^{-x}}}$; $\quad y=\sin(n\arccos x)+2xe^{-\arccos x}$;

$y=\left(ax^2+bx+c\right)^x$.

25. $y=x^x\left(1+\cos^2 x\right)$; $\quad y=\dfrac{e^{-x^2}}{1+e^{-x^2}}\cos(n\arccos x)$;

$y=\left(\dfrac{1}{1+x^2}+\cos x\right)^{x^2+x+1}$.

26. $y = \arccos\sqrt{1-e^{-x^2}}$; $y = \dfrac{1}{1+2tg^2 x} + \arccos\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$;

$y = \left(\dfrac{1}{1+\cos^2 x}\right)^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$.

27. $y = \ln\left(1+\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\right)$; $y = e^{\cos x}(1+arctg 4x)$; $y = (1+2x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

28. $y = arctg\left(1+\dfrac{\cos^2 x}{\cos 2x}\right)$; $y = \dfrac{ctg^2 x}{x-\cos x}$; $y = (\ln(1+x))^{1+x^2}$.

29. $y = \dfrac{2\sin x + \cos x}{2\cos x + \sin x}$; $y = \ln\left(1+e^{-x}\right)\arccos 2x$; $y = (\arcsin x)^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$.

30. $y = \dfrac{1}{1+\cos^2 x} + e^{-\frac{1}{\cos x}}$; $y = \cos x \sin(\ln x)$; $y = x^{\sin x}$.

Задание 2.2

Найти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

1. $y = x^2(1+\ln x)$; $y + x = e^{y+x}$; $\begin{cases} y = arctg(t+1); \\ x = 1+t^2. \end{cases}$

2. $y = arctg\left(e^{-x^2}\right)$; $x + y + 1 = \ln(1+x-y)$; $\begin{cases} y = \cos t; \\ x = \sin\left(1+t^2\right). \end{cases}$

3. $y = \cos^2 x e^{2x}$; $y = x^2 + e^{\frac{y}{x}}$; $\begin{cases} y = \ln t; \\ x = e^{1-t^2}. \end{cases}$

4. $y = xe^{3x}$; $e^{x-y} = \cos(x+2y+1)$; $\begin{cases} y = \cos t; \\ x = \sin 2t. \end{cases}$

5. $y = x^2 \cos 3x$; $y + x = \sin \dfrac{y}{x}$; $\begin{cases} y = e^t; \\ x = \sin t. \end{cases}$

6. $y = \cos\left(4x^2 + x\right)$; $y = e^{y+x}$; $\begin{cases} y = t \cos t; \\ x = \sin t. \end{cases}$

7. $y = ctgx + x^2 e^x$; $y = \ln(x-y) + y^2 - x^2$; $\begin{cases} y = e^{2t}; \\ x = sht. \end{cases}$

8. $y = (x+1)\cos 2x$; $x - y = arctg\left(x^2 + y^2\right)$; $\begin{cases} y = \ln t; \\ x = e^{-2t}. \end{cases}$

9. $y = x^x$; $e^{xy} = \ln(1 + x - y)$; $\begin{cases} y = \cos^2 t + \arccos t; \\ x = 2t + e^{-t}. \end{cases}$

10. $y = x^2 \ln\left(1 + x^2\right)$; $y = x^3 + e^{xy}$; $\begin{cases} y = \sin t; \\ x = \dfrac{t^2}{1+t}. \end{cases}$

11. $y = \left(x^2 + 1\right)e^{-3x}$; $e^{x+y} = x^2 - y^2$; $\begin{cases} y = \cos 2t; \\ x = e^{-2t^2}. \end{cases}$

12. $y = \left(x^3 + 1\right)\ln\left(1 + x^2\right)$; $(y+x)^2 + (y-x)^2 = e^{x+y}$; $\begin{cases} y = \cos^2 t; \\ x = e^{-t^2}. \end{cases}$

13. $y = \left(\sin^2 x + 1\right)e^{-3\cos x}$; $e^{x + y^2} = \cos\left(x^2 - y^2\right)$; $\begin{cases} y = \cos t^2; \\ x = \ln \cos t. \end{cases}$

14. $y = \left(1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\ln x$; $x^2 + 4y^2 = ye^x$; $\begin{cases} y = \cos\left(1 + t^2\right); \\ x = 2arctgt^2. \end{cases}$

15. $y = x^{\ln x}$; $\quad arctg(x+y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$; $\quad \begin{cases} y = 2\sin t; \\ x = \dfrac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

16. $y = x^2 \cos(x^2+1)$; $\quad y^3 - x^3 = 2xy + 1$; $\quad \begin{cases} y = \sqrt{1-t^2}; \\ x = \ln\left(1+\sqrt{1-t^2}\right). \end{cases}$

17. $y = arctg \dfrac{x}{x^2+1}$; $\quad y = x^2 + e^{\frac{y}{x}}$; $\quad \begin{cases} y = 2t^2 + 3t; \\ x = \sin^2\left(1+\dfrac{t}{1+t^2}\right). \end{cases}$

18. $y = \sin(n \arcsin x)$; $\quad y = x + \ln(x^2+y^2)$; $\quad \begin{cases} y = 2t^2 + 1; \\ x = e^t + e^{at}. \end{cases}$

19. $y = e^{ax^2+bx+c}$; $\quad y + x = \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$; $\quad \begin{cases} y = a\cos^2 t; \\ x = b\sin t. \end{cases}$

20. $y = \sqrt{x^2-a^2}$; $\quad xy^3 + 2y - x^3 = a$; $\quad \begin{cases} y = 2t\cos t; \\ x = 2t\sin t. \end{cases}$

21. $y = \ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$; $\quad \dfrac{x+y}{x-y} = e^{2x+y}$; $\quad \begin{cases} y = e^{-\frac{1}{1+t^2}}; \\ x = \cos(1+t^2). \end{cases}$

22. $y = \dfrac{a}{b+\sqrt{1-x^2}}$; $\quad x^2 - y^2 = \ln\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)$; $\quad \begin{cases} y = 2a\cos(1+t^2); \\ x = 2b\sin(1+t^2). \end{cases}$

23. $y = \sin(1+\arcsin x)$; $\quad x^2 arctgy = y^2 - x^2$; $\quad \begin{cases} y = 2at\cos t; \\ x = at\sin t. \end{cases}$

24. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$; $\cos^3 x+\cos^3 y=3\cos x\cos y$; $\begin{cases} y=\dfrac{2m}{1+4tg^2 t}; \\ x=\dfrac{\pi}{2}e^{-t^2}. \end{cases}$

25.

$y=x^2+\sqrt{x^2+1}+\ln x$; $x^2=\arcsin(x+y)+y^2$; $\begin{cases} y=arctg\left(t^2+1\right); \\ x=2\sin(t+1). \end{cases}$

26.

$y=\left(1+x^2\right)\arccos(\alpha\cos x)$; $y=\cos\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)+x$; $\begin{cases} y=2t^2+e^{-\frac{a}{t^2}}; \\ x=e^{2\alpha t+1}. \end{cases}$

27. $y=arctg\dfrac{x}{x^2+1}$; $y=x^2+e^{\frac{y}{x}}$; $\begin{cases} y=2t^2+3t; \\ x=\sin^2\left(1+\dfrac{t}{1+t^2}\right). \end{cases}$

28. $y=\sin(n\arcsin x)$; $y=x+\ln\left(x^2+y^2\right)$; $\begin{cases} y=2t^2+1; \\ x=e^t+e^{at}. \end{cases}$

29. $y=e^{ax^2+bx+c}$; $y+x=\sin\dfrac{y}{x}$; $\begin{cases} y=a\cos^2 t; \\ x=b\sin t. \end{cases}$

30. $y=\sqrt{x^2-a^2}$; $xy^3+2y-x^3=a$; $\begin{cases} y=2t\cos t; \\ x=2t\sin t. \end{cases}$

Задание 2.3

Вычислить предел, пользуясь правилом Лопиталя.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\ln\left(1+x^2\right)}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}(\ln ctgx)^{tgx}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{5}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{3x}}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x^2}}{\ln\left(1-x^2\right)};\qquad \lim_{x\to 0}\left(ctg\frac{x}{3}-\frac{1}{\sin\frac{x}{3}}\right);\qquad \lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{ctgx}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln^2 x}{1-x};\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\frac{1}{\cos x}\right);\qquad \lim_{x\to 0}\left(\sin x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x);\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\ln x};\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x(1-\cos x)};\qquad \lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}};\qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{p}{1-x^p}-\frac{q}{1-x^q}\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x};\qquad \lim_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}};\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{ctgx^2}\right).$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-1}{2arctgx^2-\frac{\pi}{2}};\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tgx\right);\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{tgx}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin\frac{x}{2}-\cos x-x}{\ln\left(1+x^2\right)};\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{tgx}-\frac{1}{x}\right);\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+7\sqrt{x+1}\right)^{\frac{3}{\sqrt{x}}}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{\frac{-1}{x}}}{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)};\qquad \lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1+x^2}{x}};\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{ctgx}{x}\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{x^3+\ln\left(1+x^2\right)};\qquad \lim_{x\to 0}\left(1+5\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x+1}};\qquad \lim_{x\to a}\left(\frac{x}{x-a}-\frac{a}{\ln\frac{x}{a}}\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}-x}{\sin x^2+x^2};\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\frac{1}{1-\sin x}\right);\ \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{ctgx}.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(\cos x-1)}{x^2}\cdot\sin\frac{1}{x}\right);\qquad \lim_{x\to\infty}\left(x^2+x+1\right)^{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)};\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{tgx}-\frac{1}{x}\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1-e^{-x}}{x+\sin x}\right);\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{ctgx}{x}\right);\qquad \lim_{x\to 0}(1+2tgx)^{3ctgx}.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{2\left(e^{2\pi x}-1\right)}\right);\qquad \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^x;\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right).$$

16. $$\lim_{x\to 1}\frac{1-2\sin\frac{\pi x}{6}}{1-tg\frac{\pi x}{4}};\qquad \lim_{x\to 0}(1-\sin\alpha x)^{\frac{1}{\sin\beta^2x^2}};\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

17. $$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\left(x^5-1\right)\sin(x-1)};\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{(2x)^2}-\frac{1}{\cos x-1}\right);\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta^2x^2}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-tg^2\frac{\pi}{4}x}{1-\sin\frac{\pi}{2}x};\qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{4}{1-x^4}\right);\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{1-2\ln x}}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{e^{-x^2}-1};\qquad \lim_{x\to\infty}\left(x^2-x^2\cos\frac{1}{x}\right);\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\alpha x^2}{1-\cos\beta x^2};\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{ctgx}-\frac{\pi}{2\cos x}\right);\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\alpha x}{tg^2\beta x};\quad \lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{tg\frac{\pi x}{2a}};\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\frac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5};\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{5}{1-x^5}-\frac{3}{1-x^3}\right);\quad \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{a}{x^2}\right)^{x^2}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin^2\frac{\pi x}{2}}{(x-1)^2};\quad \lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right);\quad \lim_{x\to 0}\left(x+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\ln(1+x)};\quad \lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{\sin(x-4)}\right);\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)^{x}.$$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\frac{x^2}{2}}{\sin^2 x};\quad \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right);\quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}.$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2ax}-e^{ax}}{x^2\sin x};\quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2tgx};\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{100}}{e^x}.$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x(1-\cos x)};\quad \lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}};\quad \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{p}{1-x^p}-\dfrac{q}{1-x^q}\right).$

28. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x);\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\ln x};\quad \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right).$

29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x}{1-x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x^2}}{\ln\left(1-x^2\right)}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{ctgx}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{3}}\right)$.

Задание 2.4

Исследовать функцию и построить ее график.

1. $y=\sqrt{x^2+2x+2}.$
2. $y=\dfrac{1}{x}+x^2.$
3. $y=1+\dfrac{1}{e^{(x-1)}}.$
4. $y=x^3e^{-4x}.$
5. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}.$
6. $y=e^{-|x|}.$
7. $y=4e^{-\frac{1}{x-1}}.$
8. $y=\dfrac{\ln x}{x}.$
9. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}.$
10. $y=|x-1|+\ln x.$
11. $y=\dfrac{1}{x}e^{-x^2}.$
12. $y=(x+1)\ln(x+1).$
13. $y=x\ln|x|.$
14. $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}.$
15. $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-9}.$
16. $y=\sqrt{x^2+2x}.$
17. $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}.$
18. $y=(x-2)e^{-x}.$

19. $y = x - \dfrac{1}{x^4}$.

25. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

20. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

26. $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$.

21. $y = x^3 \cdot e^{-x}$.

27. $y = \sqrt{x^2 - 2x}$.

22. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

28. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$.

23. $y = x + \ln|x|$.

29. $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

24. $y = (x + 1)e^{-x}$.

30. $y = x\ln|x|$.

Контрольная работа № 3

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Задание 3.1

Найти градиент, уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_o(X_o,Y_o,Z_o)$.

S: $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$, $Mo(2,1,-1)$.
S: $x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy$, $Mo(-2,1,2)$.
S: $x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7$, $Mo(1,2,1)$.
S: $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8$, $Mo(-1,1,2)$.
S: $2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13$, $Mo(2,1,-1)$.
S: $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0$, $Mo(2,1,-1)$.
S: $x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46$, $Mo(1,2,-3)$.
S: $x^2 + y^2 - xz - yz = 0$, $Mo(0,2,2)$.

$S: x^2+y^2+2yz-z^2+y-2z=2,\qquad Mo(1,11).$

$S: x^2+y^2-z^2-2xz+2x=z,\qquad Mo(1,1,1).$

$S: x^2+y^2-2xy+2x-y=z,\qquad Mo(-1,-1,-1).$

$S: y^2-x^2+2xy-3y=z,\qquad Mo(1,-1,1).$

$S: x^2-y^2-2xy-x-2y=z,\qquad Mo(-1,1,1).$

$S: x^2-2y^2+z^2+xz-4y=13,\qquad Mo(3,1,2).$

$S: 4y^2-z^2+4xy-xz+3z+9,\qquad Mo(1,-2,1).$

$S: x^2+y^2-3xy-x+y+2=z,\qquad Mo(2,1,0).$

$S: 2x^2-y^2+2z^2+xy+xz=3,\qquad Mo(1,2,1).$

$S: x^2-y^2+z^2-4x+2y=14,\qquad Mo(3,1,4).$

$S: x^2+y^2-z^2+xz+4y=4,\qquad Mo(1,1,2).$

$S: x^2-y^2-z^2+xz+4x=-5,\qquad Mo(-2,1,0).$

$S: x^2+y^2-xz+yz-3x=11,\qquad Mo(1,4,-1).$

$S: x^2+2y^2+z^2-4xz=8,\qquad Mo(0,2,0).$

$S: x^2-y^2-2z^2-2y=0,\qquad Mo(-1,-1,1).$

$S: x^2+y^2-3z^2+xy=-2z,\qquad Mo(1,0,1).$

$S: 2x^2-y^2+z^2-6x+2y+6=0,\qquad Mo(1,-1,1).$

$S: x^2+y^2-z^2+6xy-z=8,\qquad Mo(1,1,0).$

$S: 2x^2-3y^2+4x-2y+10=z,\qquad Mo(-1,1,3).$

$S: x^2+y^2-4x+3x-15=z,\qquad Mo(-1,3,4).$

$S: 2x^2-3y^2+xy+3x+1=z,\qquad Mo(1,-1,2).$

$S: x^2+2y^2+4xy-5y-10=z,\qquad Mo(-7,1,8).$

Задание 3.2

Найти наибольшее и наименьшее значения функции Z=Z(X,Y) в области D, ограниченной заданными линиями.

$z=3x+y-xy,\quad D: y=x,\ \ y=4,\quad x=4,\quad x=0.$

$z=xy-x-2y,\quad D: x=3,\quad y=x, y=0.$

$z=x^2+2xy-4x+8y,\quad D: x=0,\quad x=1,\quad y=0,\quad y=2.$

$z = 5x^2 - 3xy + y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \; y = 0, \quad y = 1.$

$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad D: x - y + 1 = 0, \quad x = 3, \quad y = 0.$

$z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad D: x = 0, \; y = 0, \; x + y - 1 = 0.$

$z = 2x^3 - xy^2 + y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 6.$

$z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \; y = 1.$

$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \; D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 3 = 0.$

$z = x^2 + 2xy - 10, \quad D: y = 0, \quad y = x^2 - 4.$

$z = xy - 2x - y, \quad D: x = 0, \quad x = 3, \quad y = 0, \quad y = 4.$

$z = \frac{1}{2}x^2 - xy, \quad D: y = 8, \; y = 2x^2.$

$z = 2x^2 + 3y^2 + 1, \quad D: y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}, \quad y = 0.$

$z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1, \quad D: x = -3, \quad y = 0, \quad x + y + 1 = 0.$

$z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1, \quad D: x = 5, \quad y = 0, \quad x - y - 1 = 0.$

$z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x, \; D: y = 2x, y = 2, x = 0.$

$z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \quad D: x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = 2.$

$z = xy - 3x - 2y, \quad D: x = 0, \; x = 4, \; y = 0, \; y = 4.$

$z = x^2 + xy - 2, \; D: y = 4x^2 - 4, \quad y = 0.$

$z = x^2 y(4 - x - y), \; D: x = 0, \quad y = 0, \quad y = 6 - x.$

$z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad D: x = 0, \quad x = 2, \quad y = -1, \quad y = 2.$

$z = 4(x - y) - x^2 - y^2, \quad D: x + 2y = 4, \quad x - 2y = 4, \quad x = 0.$

$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \; D: x = 3, \quad y = 0, \quad y = x + 1.$

$z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 2.$

$z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y, \quad D: y = x + 2, \quad y = 0, \quad x = 2.$

$z = 4 - 2x^2 - y^2, \quad D: y = 0, \quad y = \sqrt{1 - x^2}.$

$z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \quad D: x = -1, \quad x = 1, \quad y = -1, \quad y = 1.$

$z = x^2 + 2xy + 4x - y^2, \quad D: x + y + 2 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0.$

$z = 2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 6.$

$z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2, \; D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0.$

Задача 3.3. Найти полные дифференциалы указанных функций:

1. $z = 2x^3 y - 4xy^5$;
2. $z = x^2 y \sin x - 3y$;
3. $z = arctgx + \sqrt{y}$;
4. $z = \arcsin(xy) - 3xy^2$;
5. $z = 5xy^4 + 2x^2 y^7$;
6. $z = \cos\left(x^2 - y^2\right) + x^3$;
7. $z = \ln\left(3x^2 - 2y^2\right)$;
8. $z = 5xy^2 - 3x^3 y^4$;
9. $z = \arcsin(x + y)$;
10. $z = arctg(2x - y)$;
11. $z = 7x^3 y - \sqrt{xy}$;
12. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}$;
13. $z = e^{x+y-4}$;
14. $z = \cos(3x + y) - x^2$;
15. $z = tg\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$;
16. $z = ctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$;
17. $z = xy^4 - 3x^2 y + 1$;
18. $z = \ln\left(x + xy - y^2\right)$;
19. $z = 2x^2 y^2 + x^3 - y^3$;
20. $z = \sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}$;
21. $z = \arcsin\left(\dfrac{x+y}{x}\right)$;
22. $z = arcctg(x - y)$;
23. $z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x}$;
24. $z = y^2 - 3xy - x^4$;
25. $z = \arccos(x + y)$;
26. $z = \ln\left(y^2 - x^2 + 3\right)$;
27. $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x$;
28. $z = 7x - x^3 y^2 + y^4$;
29. $z = e^{y-x}$;
30. $z = \ln\left(3x^2 - 2y^2\right)$;

Задача 3.4. Найти вторые частные производные указанных функций. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

4.1. $z = e^{x^2 - y^2}$

4.2. $z = ctg(x + y)$

4.3. $z = tg(x / y)$

4.4. $z = \cos(xy^2)$

4.5. $z = \sin(x^2 - y)$

4.6. $z = arctg(x + y)$

4.7. $z = \arcsin(x - y)$

4.8. $z = \arccos(2x + y)$

4.9. $z = arcctg(x - 3y)$

4.10. $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$

4.11. $z = e^{2x^2 + y^2}$

4.12. $z = ctg(y / x)$

4.13. $z = tg\sqrt{xy}$

4.14. $z = \cos(x^2 y^2 - 5)$

4.15. $z = \sin\sqrt{x^3 y}$

4.16. $z = \arcsin(x - 2y)$

4.17. $z = \arccos(4x - y)$

4.18. $z = arctg(5x + 2y)$

4.19. $z = arctg(2x - y)$

4.20. $z = \ln(4x^2 - 5y^3)$

4.21. $z = e^{\sqrt{x + y}}$

4.22. $z = \arcsin(4x + y)$

4.23. $z = \arccos(x - 5y)$

4.24. $z = \sin\sqrt{xy}$

4.25. $z = \cos(3x^2 - y^3)$

4.26. $z = arctg(3x + 2y)$

4.27. $z = \ln(5x^2 - 3y^4)$

4.28. $z = arcctg(x - 4y)$

4.29. $z = \ln(3xy - 4)$

4.30. $z = tg(xy^2)$

Задача 3.5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

5.1. $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $t_0 = 0$.

5.2. $u = \ln(e^e + e^{-y})$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = -1$.

5.3. $u = y^x$, $x = \ln(t-1)$, $y = e^{t/2}$, $t_0 = 2$.

5.4. $u = e^{y-2x+2}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_o = \pi / 2$.

5.5. $u = x^2 e^y$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t_0 = \pi$.

5.6. $u = \ln(e^x + e^y)$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = 1$.

5.7. $u = x^y$, $x = e^t$, $y = \ln t$, $t_0 = 1$.

5.8. $u = e^{y-2x}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $t_0 = 0$.

5.9. $u = x^2 e^{-y}$, $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$, $t_0 = \pi / 2$.

5.10. $u = \ln(e^{-x} + e^y)$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = -1$.

5.11. $u = e^{y-2x-1}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t_0 = \pi / 2$.

5.12. $u = \arcsin(x / y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

5.13. $u = \arccos(2x / y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

5.14. $u = x^2 / (y+1)$, $x = 1 - 2t$, $y = arctgt$, $t_0 = 0$.

5.15. $u = x / y$, $x = e^t$, $y = 2 - e^{2t}$, $t_0 = 0$.

5.16. $u=\ln(e^{-x}+e^{-2y})$, $x=t^2$, $y=\frac{1}{3}t^3$, $t_0=1$.

5.17. $u=\sqrt{x+y^3+3}$, $x=\ln t$, $y=t^2$, $t_0=1$.

5.18. $u=\arcsin(x^2/y)$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\pi$.

5.19. $u=y^2/x$, $x=1-2t$, $y=1+arctgt$, $t_0=0$.

5.20. $u=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\frac{\pi}{4}$.

5.21. $u=\sqrt{x^2+y+3}$, $x=\ln t$, $y=t^2$, $t_0=1$.

5.22. $u=\arcsin\frac{x}{2y}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\pi$.

5.23. $u=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$, $x=\sin 2t$, $y=tg^2t$, $t_0=\frac{\pi}{4}$.

5.24. $u=\sqrt{x+y+3}$, $x=\ln t$, $y=t^2$, $t_0=1$.

5.25. $u=y/x$, $x=e^t$, $y=1-e^{2t}$, $t_0=0$.

5.26. $u=\arcsin(2x/y)$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\pi$.

5.27. $u=\ln(e^{2x}+e^y)$, $x=t^2$, $y=t^4$, $t_0=1$.

5.28. $u=arctg(x+y)$, $x=t^2+2$, $y=4-t^2$, $t_0=1$.

5.29. $u=\sqrt{x^2+y^2+3}$, $x=\ln t$, $y=t^3$, $t_0=1$.

5.30. $u=arctg(xy)$, $x=t+3$, $y=e^t$, $t_0=0$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4.

Интегральное исчисление.

Задача 4.1

С помощью интегрирования по частям вычислить неопределённый интеграл от функции вида

1. $x\sin x$
2. xe^{2x}
3. $x\cos x$
4. xe^{-x}
5. $x\ln x$
6. $xarctgx$
7. $x\cos^{2x}$
8. xe^{3x}
9. $x\sin 2x$
10. $x\cos 3x$
11. $x5^x$
12. xe^{-2x}
13. $x\cdot 2^x$
16. $x\sin(x-6)$
17. $(3x+4)\ln x$
18. $x\cdot 6^x$
19. $(x+7)\sin x$
20. $(x+5)3^x$
21. xe^{x+5}
22. $x\cos(x-4)$
23. $\ln(x^2+1)$
24. xe^{-3x}
25. $x\cdot 4^x$
26. $\arcsin\sqrt{x}$
27. xe^{-4x}
28. $(3x+8)e^x$

14. $(x+2)\sin x$

15. $(x-3)\cos x$

29. $(x-5)\cos x$

30. $(2x-7)e^{x}$

Задача 4.2.

Вычислить неопределённый интеграл с помощью разложения на простейшие дроби подинтегральной функции

1. $\dfrac{x+2}{x(x^2-2x-8)}$

2. $\dfrac{x+4}{x(x^2-4x+3)}$

3. $\dfrac{2x-1}{(x^2-9)x}$

4. $\dfrac{4}{x^3-x}$

5. $\dfrac{x^3}{x^2-1}$

6. $\dfrac{2}{x(x^2-3x+2)}$

7. $\dfrac{x^2}{x(x^2+x-2)}$

8. $\dfrac{x+3}{(x^2-16)x}$

9. $\dfrac{2x+1}{x(x^2+x-30)}$

16. $\dfrac{x^2+1}{(x+2)(x^2-3x-18)}$

17. $\dfrac{3}{(x+1)(x^2-5x+6)}$

18. $\dfrac{4x-7}{x(x^2-9)}$

19. $\dfrac{5x}{x(x^2+6x+8)}$

20. $\dfrac{x^2+2}{x(x^2-1)}$

21. $\dfrac{x-3}{x(x^2-2x+1)}$

22. $\dfrac{6}{(x^2-16)x}$

23. $\dfrac{x-1}{x(x^2-x-30)}$

24. $\dfrac{x^2-2}{(x^2-16)x}$

10. $\dfrac{x^2+x-1}{x(x^2+2x-8)}$

25. $\dfrac{7}{x(x^2-4x+3)}$

11. $\dfrac{x+4}{x(x^2-5x-6)}$

26. $\dfrac{3-x}{x(x^2+2x-8)}$

12. $\dfrac{x^2+3}{x(x^2+5x+4)}$

27. $\dfrac{3+x}{x(x^2-3x+2)}$

13. $\dfrac{2x-3}{x(x+1)(x-2)}$

28. $\dfrac{7-x}{x(x^2-2x-8)}$

14. $\dfrac{6x+1}{x(x^2+x-2)}$

29. $\dfrac{x^2+6}{x(x^2-9)}$

15. $\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$

30. $\dfrac{2x+1}{x^3-25x^2}$

Задача 4.3.

Вычислить с помощью подстановки неопределённый интеграл от функции

1. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+2}$

16. $\dfrac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+2}$

2. $\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-7}$

17. $(x+2)\sqrt[3]{x+1}$

3. $\dfrac{3x+2}{x-\sqrt{x}}$

18. $\sqrt{\dfrac{4}{x}+3}$

4. $\sqrt{\dfrac{2}{x}+1}$

5. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

6. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

7. $\sqrt{\dfrac{2+x}{x}}$

8. $x\sqrt{x+1}$

9. $\dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$

10. $\sqrt{\dfrac{x}{x+4}}$

11. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

12. $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+3}}$

13. $\dfrac{1-2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

14. $\dfrac{x+7}{\sqrt{x}+5}$

15. $\dfrac{1+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$

19. $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$

20. $\sqrt{\dfrac{x+3}{x+1}}$

21. $\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$

22. $\dfrac{x}{\sqrt{x+6}}$

23. $\dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}-4}$

24. $\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$

25. $(x+7)\sqrt[3]{x+2}$

26. $\dfrac{x}{2\sqrt{x}+7}$

27. $\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$

28. $x\sqrt[3]{x+5}$

29. $\sqrt{\dfrac{2}{x}-7}$

30. $\dfrac{2x+4}{\sqrt[3]{x+5}}$

Задача 4.4.

Вычислить с помощью подстановки неопределённый интеграл от функции

1. $\dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x}$

2. $\dfrac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$

3. $\dfrac{1}{\cos x \cdot \sin x}$

4. $\dfrac{1}{\cos 2x}$

5. $\dfrac{\sin 2x}{2(1-\cos x)^2}$

6. $\dfrac{1}{\sin^3 x}$

7. $\dfrac{1}{\cos^3 x}$

8. $\dfrac{1}{\sin x + \cos x}$

9. $tg^3 x$

16. $\dfrac{\cos^3 x}{3+\sin x}$

17. $\dfrac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$

18. $\dfrac{1}{3+4\sin^2 x}$

19. $\dfrac{1}{2+5\cos^2 x}$

20. $\dfrac{1}{2-3\sin^2 x}$

21. $\dfrac{1}{5-3\cos^2 x}$

22. $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x(2+\cos x)}$

23. $\dfrac{\cos x}{\sin x(4-\sin^2 x)}$

24. $\dfrac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$

10. $\dfrac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$

11. $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$

12. $\dfrac{1}{2+\sin^2 x}$

13. $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$

14. $\dfrac{1}{5+\cos^2 x}$

15. $\dfrac{1}{4+9\sin^2 x}$

25. $\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}$

26. $\dfrac{\sin^2 x}{1-tgx}$

27. $\dfrac{1}{1-\sin^4 x}$

28. $\dfrac{1}{5\sin^2 x+6}$

29. $\dfrac{1}{3+2\cos^2 x}$

30. $\dfrac{1}{8+5\sin^2 x}$

Задача 4.5.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $y=2^x,\ \ y=2x-x^2,\ x=0,\ x=2$

2. $y=\ln x,\ x=e,\ x=e^2,\ y=0$

3. $x=-2y^2,\ x=1-3y^2$

4. $y^2=x^3,\ y=8,\ x=0$

16. $y^2=x^3,\ x=4$

17. $y=e^x,\ x-y+2=0,\ x=\pm 1$

18. $x=y^2,\ x=\frac{3}{4}y^2+1$

19. $y=\ln(x+2),\ y=2\ln x,\ y=0$

5. $x^2 = 4y,\ y = \dfrac{8}{x^2+4}$

6. $y^2 = 4x,\ x^2 = 4y$

7. $y = x^2 + 4x,\ y = x + 4$

8. $x + y = 3,\ y = x^2 + 1$

9. $y^3 = x,\ y = x$

10. $y = x + 1,\ y = \cos x,\ y = 0$

11. $xy = 6,\ x + y - 7 = 0$

12. $y = 2x - x^2,\ y = -x$

13. $y = 4x^2,\ y = \dfrac{x^2}{9},\ y = 2$

14. $xy = 4,\ x = 1,\ 4y = x$

15. $y = (x-4)^2,\ y = 16 - x^2$

20. $x^2 + 4y^2 = 8,\ \ x^2 - 3y^2 = 1$

21. $4y = 8x - x^2,\ 4y = x + 6$

22. $y = 6x,\ 6y = x,\ xy = 6$

23. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1,\ y = 4,\ y = -4$

24. $y = \cos x,\ y = \sin x,\ x = 0$

25. $y = 3^x,\ y = 2x - x^2, x = 2, x = 0$

26. $x + y = 1,\ y = \cos x,\ y = 0$

27. $y^3 = x,\ 4y = x$

28. $y = tgx,\ x = \pm\dfrac{\pi}{3}$

29. $y^2 = x + 5,\ y^2 = -x + 4$

30. $2x - 3y + 7 = 0,\ y = 3^x, x = -2$

Задача 4.6.

Переходя в полярную систему координат ρ, φ вычислить с помощью опре-деленного интеграла площадь, ограниченную кривыми:

$\rho = 1 + 2\cos\varphi$

первым витком спирали Архимеда $\rho = 4\varphi$ и отрезком полярной оси

$\rho = \cos 3\varphi - \frac{1}{2}$

одним лепестком линии $\rho = 2\sin 3\varphi$

$\rho = 3(\frac{1}{2} + \sin\varphi)$

кардиоидой $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$ и окружностью $\rho = 5$

$\rho = 2 + \cos\varphi$

$\rho = 4\sin^2\varphi - 2$

$\rho = 3\sqrt{\cos 2\varphi}$

$\rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi$ и $\rho = 2\sin\varphi$

$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\varphi$

12. одним лепестком линии $\rho = \cos 2\varphi$

13. четырёхлепестковой розой $\rho = \sin 2\varphi$

14. лемнискатой Бернулли $\rho^2 = \cos 2\varphi$

первым и вторым витками спирали Архимеда $\rho = \varphi$ и отрезком полярной оси

окружностью $x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}x$ и прямой $y = \sqrt{3}x$

17. $x^2 + y^2 = 2y$ и $y = -x$ (большая часть)

18. $x^2 + y^2 = 4x$ и $y = \sqrt{3}x$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$

$x^2 + y^2 = 2y$, $y = x$, $x = 0$

$x^2 + y^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, (большая часть)

$x^2 + y^2 = 4x$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$

22. $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = y$, $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ (меньшая часть)

23. $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$ и $\rho = 1$

$x^2 + y^2 = 10x$, $y = -x$, $y = x$

25. $\rho = 10\cos 3\varphi$ и $\rho = 5$

26. $x^2 + y^2 = 4x, \quad x = 1$ (меньшая часть)

27. $\rho = 16\cos 3\varphi, \quad \rho = 8$ (вне окружности)

28. $\rho = 3$ и первого лепестка линии $\rho = 6\cos 3\varphi$

29. $x^2 + y^2 = 4y$ между прямыми $y = x, \quad y = 0$

$\rho^2 = 2\sin 2\varphi$

Задача 4.7.

Вычислить несобственный интеграл или доказать его сходимость

1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$

2. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x}$

3. $\int\limits_9^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$

4. $\int\limits_5^{\infty} \frac{dx}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$

5. $\int\limits_4^{\infty} \frac{xdx}{x^2 + 1}$

6. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

7. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x}dx$

16. $\int\limits_2^{\infty} \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$

17. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}$

18. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$

19. $\int\limits_0^{\infty} 6^{-x}dx$

20. $\int\limits_3^{\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$

21. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

22. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+3)}$

8. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$

9. $\int_0^{\infty} 3^{-x}\,dx$

10. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

11. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2+1}$

12. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

13. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$

14. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

15. $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{x^2+1}$

23. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2}$

24. $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{x^4+1}$

25. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^3}$

26. $\int_0^{\infty} 4^{-x}\,dx$

27. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x}$

28. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

29. $\int_0^{\infty} e^{-3x}\,dx$

30. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+5x+6}$

Задача 4.8.

Вычислить массу неоднородной пластины D, ограниченной заданными линиями и имеющей поверхностную плотность $r(x,y)$

№ вар.	D	$r(x,y)$
1.	$x=0,\quad y=0,\quad x=2,\quad x=y^2$	$2x+3$

2.	$x=0,\ \ 2y=x,\ \ x+y=4$	x^2
3.	$y=x^2,\ \ y=0,\ \ x=1$	$2y$
4.	$y=1-x^2,\ \ x=0,\ \ y=0$	$x+y$
5.	$2y=x^2,\ \ y=8$	$2x^2$
6.	$x^2+y^2=9,\ \ y=0\ \ (y>0)$	$4y$
7.	$x=0,\ \ 2x+3-y=0,\ \ y=0$	x^2
8.	$2x^2=y,\ \ x=0,\ \ y=2$	$x+2y$
9.	$y=x^2(1-x),\ \ y=0$	$2x+1$
10.	$x+y=5,\ \ x=0,\ \ x-y=0$	$2x+3$
11.	$y=3(1-x^2),\ \ y=0$	x^2+6
12.	$y=\sqrt{x},\ \ x=0,\ \ y=2$	xy
13.	$y=3e^{-x},\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ x=1$	$4x$
14.	$y=2x,\ \ x=1,\ \ y=0$	e^{2x}
15.	$x+2y=7,\ \ x-y=0,\ \ x=0$	$x+y$
16.	$x=y^2,\ \ x=4$	$2x+y^2$
17.	$y=\sin 2x+1,\ x=0,\ x=\pi,\ y=0$	$x+2$
18.	$y=2\ln x,\ \ y=0,\ \ x=1,\ \ x=2$	$4x+1$
19.	$x=-2y^2,\ \ x=-8\ \ (y>0)$	$5y+3$
20.	$y=2x+3,\ \ y=5x^2,\ \ x=0$	$7x$
21.	$x=4-y^2,\ \ x=0,\ \ y=0\ \ (y>0)$	$2x+5$
22.	$2x-y+4=0,\ \ y=3x,\ \ y=0$	$2y$
23.	$y=x^3,\ \ y=0,\ x=8$	$x+2y$
24.	$x=4+y,\ \ x=0,\ \ y=3$	$2y^2+3$
25.	$x^2-y^2=5,\ \ x=3$	$6y$
26.	$y=\sqrt{x}+1,\ \ y=0,\ \ x=0,\ \ x=4$	$2x+5$
27.	$y=e^x-1,\ \ x=1,\ \ x=2,\ \ y=0$	x

28.	$2y = x, \quad y = 4 - 2x, \quad x = 0$	$x + 3y$
29.	$y = 9 - x^2, \quad y = 0$	xy
30.	$y = \ln(x+2), \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x =$	$2x$

Задача 4.9.

Вычислить с помощью тройного интеграла объем области V, ограниченной указанными поверхностями.

№ вар.	V
1.	$y - x^2 = 0, \quad x = 0, \quad y = 4, \quad z = 0, \quad z + 2x = 4$
2.	$z = x^2, \quad y = 0, \quad z = 3, \quad y = x$
3.	$y = 1 - x^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = x$
4.	$z = 4 - y^2, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad z = x$
5.	$2x + y + z = 4, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x = 1$
6.	$z = 1 - y^2, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad z = 2x$
7.	$y - 4x^2 = 0, \quad x = 0, \quad y = 4, \quad z = 0, \quad z + y = 4$
8.	$z = 3 - x^2, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad y = 4, \quad x = 1$
9.	$z = y^2, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad y = x, \quad y = 1$
10.	$z = x + 2y, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 4, \quad z = 0$
11.	$4y - x^2 = 0, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad z + y = 1$
12.	$y = 1 + x^2, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = 3 - x$
13.	$z = 2 - y^2, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad z = 2x$
14.	$x + 2y + x = 4, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad y = 1 \quad (y < 1)$
15.	$x + y + 2z = 4, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad x = 2$
16.	$z = 3x^2, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad y = 2x, \quad x = 1$

17.	$z=2+y^2,\quad z=0,\quad x=0,\quad y=x$
18.	$y=3+2x^2,\quad y=0,\quad x=0,\quad x=1,\quad z=0,\quad z=2y$
19.	$z=2x^2,\quad z=2,\quad y=0,\quad y=x+1$
20.	$y=4-x^2,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad z=2x$
21.	$z=4y^2,\quad x=0,\quad 2y=x,\quad y=1,\quad z=0$
22.	$x^2+y^2=4,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad z=x$
23.	$z=9-y^2,\quad z=0,\quad x=0,\quad y=x-3$
24.	$x+y+z=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad z=2(x+y)$
25.	$x=y^2,\quad x=4,\quad z=0,\ z=3x$
26.	$y=4x^2,\quad y=4,\quad z=0,\quad z=y$
27.	$x+3y+2z=6,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x=y\quad (x>y$
28.	$z=5-y^2,\quad z=0,\quad x=0,\quad y=0,\quad x=3$
29.	$y^2+z^2=4,\quad z=0,\quad x=0,\quad y=0,\quad x=5$
30.	$x^2+z^2=4,\quad y=0,\quad z=0,\quad y=x\quad (y<x)$

Задача 4.10.

Вычислить:

(a) заряд проводника, располагающегося вдоль кривой L с плотностью $f_1(x,y)$ с помощью криволинейного интеграла первого рода $\int\limits_L f_1(x,y)\,ds$

(b) работу силы $\overline{F}\left(f_1(x,y), f_2(x,y)\right)$ вдоль траектории L от точки A до точки B с помощью криволинейного интеграла второго рода $\int\limits_L f_1dx + f_2dy$

1. $f_1 = x^2$, $f_2 = xy$; L - отрезок прямой между $A(0,-2)$, $B(3,0)$.

2. $f_1 = 2y$, $f_2 = -1$; L - дуга параболы $y = 3x^2$ между $A(1,3)$, $B(-1,3)$.

3. $f_1 = x + y$, $f_2 = x - y$; L - отрезок прямой между $A(1,2)$, $B(3,4)$.

4. $f_1 = x$, $f_2 = 5$; L - четверть окружности $x^2 + y^2 = 1$ между $A(1,0), B(0,1)$.

5. $f_1 = 4y$, $f_2 = x$; L - дуга параболы $y = 1 - x^2$ между $A(2,-3), B(0,1)$.

6. $f_1 = 2x - y$, $f_2 = 3$; L - дуга параболы $x = y^2$ между $A(0,0), B(4,2)$.

7. $f_1 = x + 2y$, $f_2 = x^2 + y^2$; L - отрезок прямой между $A(2,1), B(1,3)$.

8. $f_1 = y$, $f_2 = x$; L - четверть окружности $(x-1)^2 + y^2 = 1$ между $A(2,0)$, $B(1,1)$.

9. $f_1 = 2x + 3y$, $f_2 = -x$; L - дуга параболы $y = x^2/2$ между $A(2,2), B(4,8)$.

10. $f_1 = 2 - x$, $f_2 = 3y$; L - полуокружность $(x+2)^2 + y^2 = 1$ между $A(-1,0)$, $B(-3,0)$.

11. $f_1 = 2y + 5$, $f_2 = -3x$; L - дуга параболы $y = 2 - x^2$ между $A(1,1), B(0,2)$.

12. $f_1 = x^2 + y^2$, $f_2 = xy$; L - отрезок прямой между $A(-1,0)$, $B(0,2)$.

13. $f_1 = x - y$, $f_2 = 7$; L - полуокружность $x^2 + (y-1)^2 = 1$ между $A(0,0)$, $B(0,2)$.

14. $f_1 = -2y$, $f_2 = x$; L - дуга параболы $y = 2x^2 - 1$ между $A(0,-1)$, $B(1,1)$.

15. $f_1 = 3x, \quad f_2 = x^2 + y^2$; L - отрезок прямой между $A(2,0), \quad B(3,4)$.

16. $f_1 = x^2 + 5y, \ f_2 = y^2$; L - четверть окружности $(x+1)^2 + y^2 = 4$ между $A(-1,2), \quad B(1,0)$.

17. $f_1 = x - y, \ f_2 = 2x$; L - дуга параболы $y = 3x^2$ между $A(0,0), \quad B(1,3)$.

18. $f_1 = x^2 + 3xy, \quad f_2 = y$; L - отрезок прямой между $A(0,0), \ B(1,2)$.

19. $f_1 = y^2 - 4x^2, f_2 = x + y$; L - четверть окружности $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ между $A(1,3), \quad B(-1,1)$.

20. $f_1 = 4x + y, f_2 = x$; L - дуга параболы $y = 3 - 2x^2$ между $A(0,3), B(1,1)$.

21. $f_1 = -3x^2 + 2y^2, \ f_2 = x^2$; L - отрезок прямой между $A(0,1), B(2,0)$.

22. $f_1 = -x + 2y, f_2 = 2x + 3y$; L - полуокружность $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ между $A(0,0), \ B(2,2)$.

23. $f_1 = 7x + y, f_2 = y$; L - дуга параболы $x = 2y^2$ между $A(0,0), \ B(2,1)$.

24. $f_1 = 2x^2 - 3y^2, \ f_2 = y^2$; L - отрезок прямой между $A(0,-2), \ B(5,0)$.

25. $f_1 = 3y^2, f_2 = x^2 - 7y^2$; L - полуокружность $x^2 + y^2 = 2$ между $A(-\sqrt{2},0), \ B(\sqrt{2},0)$.

26. $f_1 = 5x, \quad f_2 = -x + 4y$; L - дуга параболы $y = 2x^2 + 3$ между $A(0,3), B(1,5)$.

27. $f_1 = 6x^2 + y^2, \quad f_2 = x^2 - 7y^2$; L - отрезок прямой между $A(2,3), \quad B(-1,4)$.

28. $f_1 = 3x - 2y, \quad f_2 = x + y;$ L - четверть окружности $(x-3)^2 + y^2 = 9$ между $A(3,3), \quad B(0,0).$

29. $f_1 = x + 5y, \quad f_2 = 3x;$ L - дуга параболы $x = 1 - y^2$ между $A(0,1),\ B(1,0).$

30. $f_1 = x^2 + 3xy, \quad f_2 = y^2 - 2x^2;$ L - отрезок прямой между $A(2,4),\ B(-1,6).$

Задача 4.11.

С помощью поверхностного интеграла первого рода

$$Q = \iint\limits_S \bar{v} \cdot \bar{n} dS = \iint\limits_S (v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3) dS$$

вычислить расход Q жидкости с полем скоростей $\bar{v}(v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z)),$ протекающей за единицу времени через часть S плоскости $ax + by + cz - d = 0,$ лежащую в первом октанте. Единичная нормаль $\bar{n}$ направлена вне начала координат.

№ вар.	v_1	v_2	v_3	a	b	c	d
1	$2x + z$	0	y	3	1	2	6
2	0	$2x + y$	$-z$	1	1	2	2
3	$x - z$	$3y + z$	0	2	3	1	8
4	$y + 5z$	z	$2x$	4	1	3	9
5	$x + 2z$	0	$y + x$	1	2	3	6
6	$7y$	$x + 3z$	0	2	3	1	4
7	$5x$	$y - z$	0	2	1	5	8
8	y	$x + z$	z	1	2	4	6
9	0	$2y + z$	$y - 2z$	3	4	2	9

10	z	$2x-y$	z	3	2	1	6
11	$x+2z$	$3y$	0	2	1	3	8
12	$2x+y$	z	0	1	3	2	6
13	$5z$	$x-y$	1	4	1	2	8
14	5	y	$2x+3$	2	4	1	8
15	$7y+2z$	0	$x-2y$	1	4	2	6
16	y	$2x+z$	5	5	3	1	10
17	$z+2x$	y	3	3	5	1	10
18	$3y$	$x+2z$	0	3	1	2	6
19	$y+3x$	$-z$	4	2	1	1	4
20	0	$5x-4y$	$2z-x$	1	2	4	6
21	$3y+z$	0	$x-z$	1	3	2	6
22	$2x-y$	$x+z$	4	2	3	1	6
23	$7y+2z$	4	$x-2$	2	3	4	9
24	$z-3y$	$3x+2$	0	4	2	1	8
25	$7y+3$	$z+x$	-8	3	1	5	10
26	$2y-x$	$x-2z$	$10z$	3	4	1	8
27	$8y+x$	$5y$	z	1	4	3	12
28	$2x$	z	$y+z$	3	4	2	8
29	$x-3y$	0	$8-z$	2	4	3	10
30	7	$8y+2z$	z	4	3	2	9

4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

4.1. Решение типового варианта контрольной работы №1

Задача 1.1. Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1; \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера-Капелли. С помощью элементарных преобразований расширенную матрицу $\widetilde{A}$ приведем к трапециевидной форме

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & 3 & -13 \\ 0 & -5 & 8 & -18 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & 3 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right].$$

Следовательно, $rangA = rang\widetilde{A} = 3$ (числу неизвестных системы). Значит, исходная система совместна и имеет единственное решение.

а). По формулам Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, где

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -25; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -25;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -50; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 25.$$

Находим $x_1 = \dfrac{-25}{-25} = 1$; $x_2 = \dfrac{-50}{-25} = 2$; $x_3 = \dfrac{25}{-25} = -1$.

б). С помощью обратной матрицы $X = A^{-1}H$, где A^{-1} - обратная матрица к A, H - столбец правых частей.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -6; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 8; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Решение системы

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{25}\begin{bmatrix} -6 & -11 & 3 \\ -7 & 8 & -3 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

т.е. $x_1 = 1;$ $\quad x_2 = 2;$ $\quad x_3 = -1.$

в). Наша система эквивалентна

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6; \\ \quad -5x_2 - 3x_3 = -13; \\ \qquad 5x_3 = -5. \end{cases}$$

(прямой ход Гаусса совершен при нахождении рангов матриц A и $\widetilde{A}$).

Тогда $x_3 = -1$, $x_2 = (-13 + 3x_3)/(-5) = 2$, $x_1 = 6 - 2x_2 + x_3 = 1$.

Задача 1.2. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

С помощью элементарных преобразований матрицу A приведем к трапециевидной форме

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $rangA = 2<3$ и система имеет бесконечное множество решений, зависящих от 3-2=1 произвольной постоянной. Исходная система эквивалентна

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0; \\ 13x_2 - 16x_3 = 0. \end{cases}$$

Откуда $x_2 = \dfrac{16x_3}{13}$, $x_1 = -\dfrac{17x_3}{13}$.

Полагая $x_3 = C$ (произвольной постоянной), имеем

$$x_1 = -\frac{17C}{13}, \qquad x_2 = \frac{16C}{13}, \qquad x_3 = C.$$

Задача 1.3. По координатам точек $A(-5;+1;6)$, $B(1;4;3)$, $C(6;3;9)$ найти:

а). Модуль вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.

$\vec{AB} = (6; 3; -3);$ $\qquad \vec{BC} = (5; -1; 6);$ $\qquad \vec{a} = \vec{AB} - \vec{BC} = (1; 4; -9)$;

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-9)^2} = \sqrt{1 + 16 + 81} = \sqrt{98}$.

б). Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b} = \vec{BC}$.

$(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) + (-9) \cdot 6 = -53$.

в). Проекцию вектора $\vec{c} = \vec{BC}$ на вектор $\vec{d} = \vec{AB}$.

$$np_{\vec{d}}\, \vec{c} = \frac{(\vec{c} \cdot \vec{d})}{|\vec{d}|} = \frac{6 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + (-3) \cdot 6}{\sqrt{36 + 9 + 9}} = \frac{9}{\sqrt{54}} .$$

г). Координаты точки $M(X_M, Y_M, Z_M)$, делящей отрезок $\ell = AB$ в отношении 1:3; $\quad \lambda = \frac{1}{3}$. Следовательно:

$$X_M = \frac{-5 + \frac{1}{3} \cdot 1}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{7}{2}; \qquad Y_M = \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot 4}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{7}{4}; \qquad Z_M = \frac{6 + \frac{1}{3} \cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{21}{4}.$$

Задача 1.4. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Необходимо:

а). Найти модуль векторного произведения $\left[\vec{c}, \vec{b}\right]$.

$$\left[\vec{c}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 14\,\vec{k} ;$$

$$\left|\left[\vec{c},\vec{b}\right]\right| = \sqrt{10^2 + (-6)^2 + 14^2} = \sqrt{336}.$$

б). Проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Условие коллинеарности двух векторов $\dfrac{x_a}{x_b} = \dfrac{y_a}{y_b} = \dfrac{z_a}{z_b}$.

Т.к. $\dfrac{4}{-1} \neq \dfrac{0}{3} \neq \dfrac{4}{2}$, то вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны.

Условие ортогональности двух векторов $(\vec{a},\vec{b}) = 0$.

Т.к. $4\cdot(-1) + 0\cdot 3 + 4\cdot 2 = 4 \neq 0$, то вектора неортогональны.

в). Вычислить смешанное произведение трех векторов

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{k}; \qquad \vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}; \qquad \vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j}.$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -96.$$

г). Проверить, будут ли компланарны три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, если $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$.

Из пункта в) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -96 \neq 0$, следовательно, эти векторы некомпланарны.

Задача 1.5. Даны четыре точки $A_1(4,7,8)$, $A_2(-1,13,0)$, $A_3(2,4,9)$, $A_4(1,8,9)$.
Составить уравнения:
а). Плоскости $A_1A_2A_3$.
Уравнение плоскости по трем точкам имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -1-4 & 13-7 & 0-8 \\ 2-4 & 4-4 & 9-8 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{откуда} \quad 6x - 7y - 9z + 97 = 0.$$

б). Прямой A_1A_2.

Уравнение прямой по двум точкам

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{x-4}{-5}=\frac{y-7}{6}=\frac{z-8}{-8}.$$

в). Прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$.

Из уравнения плоскости $A_1A_2A_3$ следует, что вектор $\vec{a}(6;-7;-9)\parallel A_4M$, откуда уравнение A_4M имеет вид $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-8}{-7}=\dfrac{z-9}{-9}$.

г). Прямой A_4N, параллельной A_1A_2. Значит, вектор $\vec{b}(-5;6;-8)\parallel A_4N$ и уравнение этой прямой имеет вид $\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y-8}{6}=\dfrac{z-9}{-8}$.

д). Плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.

Вектор $\vec{b}(-5;6;-8)$ перпендикулярен искомой плоскости.

Значит, $-5(x-1)+6(y-8)-8(z-9)=0$ - ее уравнение, которое приводится к виду $5x-6y+8z-29=0$.

е). Вычислить $\sin\alpha$ - угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

$$\sin\alpha=|\cos(\widehat{\overrightarrow{A_1A_4},\vec{a}})|; \qquad \overrightarrow{A_1A_4}=(-3;1;1);$$

$$\sin\alpha=\frac{|-3\cdot 6+1\cdot(-7)+1\cdot(-9)|}{\sqrt{9+1+1}\cdot\sqrt{36+49+81}}=\frac{34}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{166}}.$$

ж). Косинус угла между координатной плоскостью O_{xy} и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Вектор $\vec{k} \perp O_{xy}$, а вектор $\vec{a} \perp A_1A_2A_3$. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{|0\cdot 6 + 0\cdot(-7) + 1\cdot(-9)|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}} = \frac{9}{\sqrt{166}}.$$

Задача 1.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(4,3,1)$ и $N(-2,0,-1)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(1,1,-1)$ и $B(-3,1,0)$.

Найти вектор $\vec{n}$, перпендикулярный искомой плоскости. Вектор $\vec{n} \perp \vec{MN}$ и $\vec{n} \perp \vec{AB}$, следовательно, в качестве вектора $\vec{n}$ можно взять $[\vec{MN}, \vec{AB}]$.

$\vec{MN} = (-6,-3,-2)$; $\vec{AB} = (-4,0,1)$;

$$[\vec{MN}, \vec{AB}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & -3 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 14\vec{j} - 12\vec{k}.$$

Тогда уравнение искомой плоскости $-3(x-4)+14(y-3)-12(z-1)=0$, которое приводится к виду $3x-14y+12z+18=0$.

Задача 1.7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x+2y-3=0$ и $x+3y-4=0$ перпендикулярно первой прямой. Найдем точку M_0:

$$\begin{cases} x+2y-3=0; \\ x+3y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=1; \\ y_0=1. \end{cases}$$

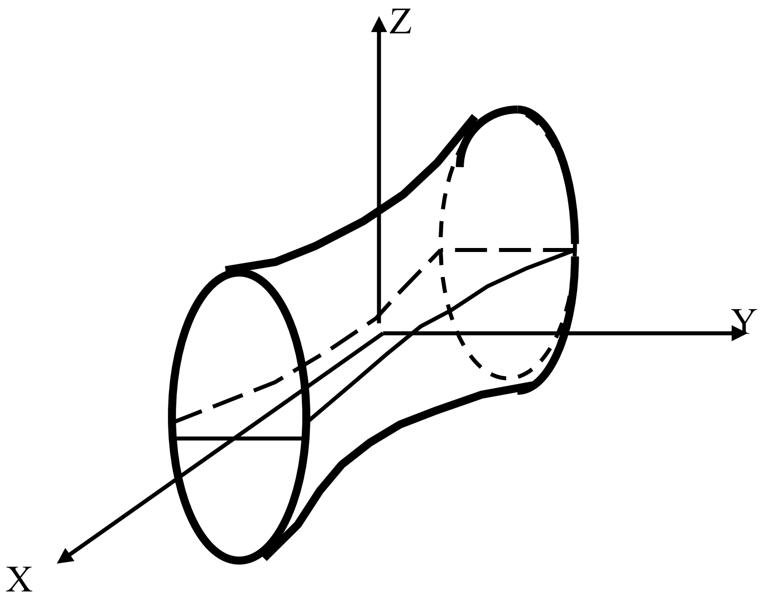
Вектор $\vec{a}(1,2)$ параллелен искомой прямой. Поэтому ее уравнение запишем как $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}$; оно приводится к виду $2x-y-1=0$.

Задача 1.8. Определить вид поверхности и построить ее.

а) $-\frac{x^2}{6}+4y^2+\frac{1}{2}z^2-2=0$. Приведем уравнение к каноническому виду

$$-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}+\frac{z^2}{4}=1.$$

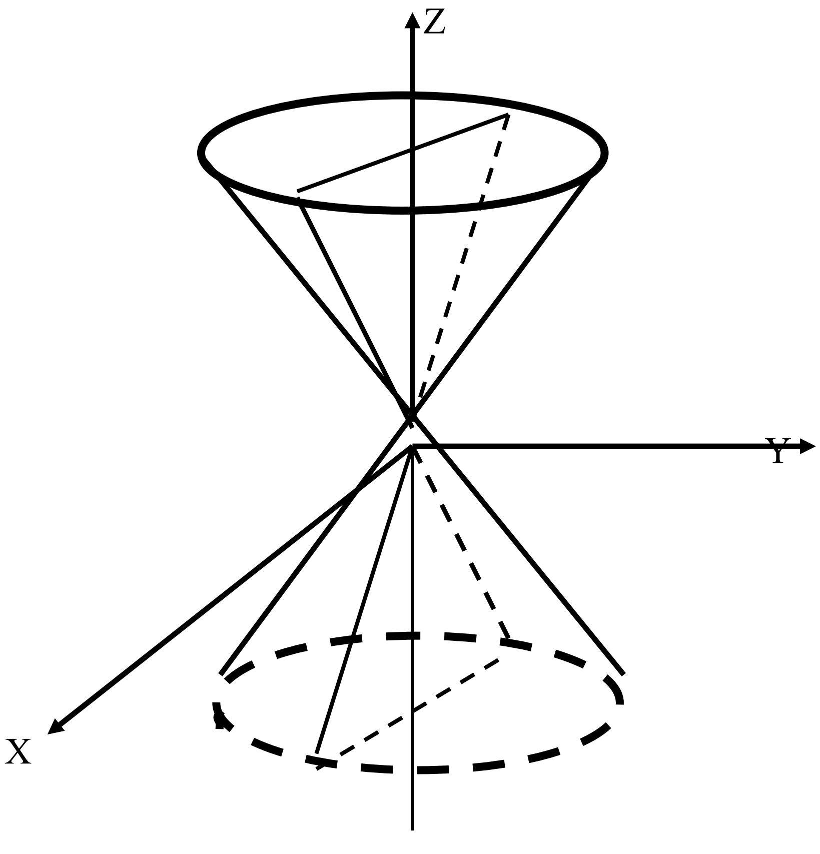
Получим уравнение однополостного гиперболоида, ось которого совпадает с OX; полуоси эллипса в плоскости Y0Z равны $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и 2. Построим поверхность.



б) $3x^2+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0.$

Приведем уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{12}=0$.

Это уравнение конуса второго порядка, ось которого совпадает с осью 0Z.



4.2. Решение типового варианта контрольной работы N 2

<u>Задача 2.1.</u> Найти dy/dx, если $y = tg\ln x^3 + \dfrac{x^4}{1+x^5}$, $y = 2^{\sin x^2} \cdot \sqrt[3]{x}$, $y = \dfrac{\arcsin(\sqrt{x^2 + 5x})}{x}$.

Решение. а). Для $y = tg\ln x^3 + \dfrac{x^4}{1+x^5}$ имеем

$$y' = \frac{dy}{dx} = (tg\ln x^3)' + \left(\frac{x^4}{1+x^5}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \ln x^3}(\ln x^3)' + \frac{(x^4)'(1+x^5) - x^4(1+x^5)'}{(1+x^5)^2} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \ln x^3} \cdot \frac{(x^3)'}{x^3} + \frac{4x^3\left(1+x^5\right) - x^4 \cdot 5x^4}{\left(1+x^5\right)^2} = \frac{3}{x\cos^2 \ln x^3} + \frac{x^3\left(4-x^5\right)}{\left(1+x^5\right)^2}.$$

б). Для $y = 2^{\sin x^2} \cdot \sqrt[3]{x}$.

$$y' = \left(2^{\sin x^2}\right)' \sqrt[3]{x} + 2^{\sin x^2} \cdot (x^{\frac{1}{3}})' = \left(e^{\sin x^2 \cdot \ln 2}\right)' \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3} \cdot 2^{\sin x^2} \cdot x^{-\frac{2}{3}} =$$

$$= e^{\sin x^2 \cdot \ln 2} \cdot \left(\sin x^2\right)' \ln 2 \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{2^{\sin x^2}}{3x^{2/3}} = 2^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 (x^2)' \ln 2 \cdot \sqrt[3]{x} +$$

$$+ \frac{2^{\sin x^2}}{3x^{2/3}} = 2^{1+\sin x^2} \cdot x^{\frac{4}{3}} \ln 2 \cos x^2 + \frac{2^{\sin x^2}}{3x^{2/3}}.$$

в). Для $y = \dfrac{\arcsin\left(\sqrt{x^2} + 5x\right)}{x}$.

$$y' = \frac{1}{x^2}\left(\left(\arcsin\sqrt{x^2+5x}\right)' x - x' \arcsin\sqrt{x^2+5x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{1-\left(\sqrt{x^2+5x}\right)^2}\left(\sqrt{x^2+5x}\right)' - \arcsin\sqrt{x^2+5x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{1-x^2-5x}\cdot\frac{\left(x^2+5x\right)'}{2\sqrt{x^2+5x}} - \arcsin\sqrt{x^2+5x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x(2x+5)}{2\left(1-x^2-5x\right)\sqrt{x^2+5x}} - \arcsin\sqrt{x^2+5x}\right).$$

<u>Задача 2.2.</u> Найти d^2y/dx^2, если

$$y = \sin 5x\left(1+e^{x^2}\right), \qquad y - \ln y = \sqrt{x}, \qquad \begin{cases} x = t\cos t; \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

Решение

а). $y' = (\sin 5x)'\left(1+e^{x^2}\right) + \sin 5x\left(1+e^{x^2}\right)' = 5\left(1+e^{x^2}\right)\cos 5x +$

$$+ e^{x^2}\cdot\left(x^2\right)' \sin 5x = 5\left(1+e^{x^2}\right)\cos 5x + 2xe^{x^2}\sin 5x;$$

$$y'' = 5\left(1+e^{x^2}\right)'\cos 5x + 5\left(1+e^{x^2}\right)(\cos 5x)' + 2x'e^{x^2}\sin 5x +$$

$$+2x\left(e^{x^2}\right)'\sin 5x+2xe^{x^2}\cdot(\sin 5x)'=5e^{x^2}\cdot 2x\cos 5x+$$

$$+5\left(1+e^{x^2}\right)(-5\sin 5x)2e^{x^2}\sin 5x+4x^2e^{x^2}\sin 5x+$$

$$+10xe^{x^2}\cos 5x=20xe^{x^2}\cos 5x-\left(25+23e^{x^2}\right)\sin 5x+4x^2e^{x^2}\sin 5x.$$

б). Дифференцируя уравнение для $y(x)$, имеем

$$y'-(\ln y)'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad y'-\frac{y'}{y}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

откуда

$$y'=\frac{y}{2(y-1)\sqrt{x}}\ .$$

Дифференцирование последнего соотношения дает

$$y''=\frac{1}{2\left((y-1)\sqrt{x}\right)^2}\left[y'(y-1)\sqrt{x}-y((y-1)\sqrt{x})'\right]=$$

$$=\frac{1}{2(y-1)^2x}\left[y'(y-1)\sqrt{x}-y\cdot\left(y'\sqrt{x}+(y-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2(y-1)^2x}\left(y'\sqrt{x}+\frac{y(y-1)}{2\sqrt{x}}\right)\ .$$

Внося выражение для y', находим

$$y''=-\frac{y}{4(y-1)^2x}\left(\frac{1}{y-1}+\frac{y-1}{\sqrt{x}}\right).$$

в). Первая производная заданной параметрически функции вычисляется по формуле

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Здесь

$x'_t = \cos t - t\sin t, \qquad y'_t = 2\cos t,$

откуда

$$y'_x = \frac{2\cos t}{\cos t - t\sin t}.$$

Вторую производную вычислим по формуле

$$y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x'_t}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\cos t - t\sin t}\frac{d}{dt}\left(\frac{2\cos t}{\cos t - t\sin t}\right) =$$

$$= \frac{2}{(\cos t - t\sin t)^3}\Big((\cos t)'(\cos t - t\sin t) - \cos t(\cos t - t\sin t)'\Big) =$$

$$= \frac{2}{(\cos t - t\sin t)^3}\big(-\sin t(\cos t - t\sin t) - \cos t(-\sin t - \sin t - t\cos t)\big) =$$

$$= \frac{2(t - 3\sin t\cos t)}{(\cos t - t\sin t)^3}.$$

<u>Задача 2.3. </u> Вычислить предел, пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+4x^7}-1}{\sin x^7}; \qquad \lim_{x\to 0}\left(ctgx - \frac{1}{x}\right); \qquad \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$$

<u>Решение.</u> а). Искомый предел является неопределённостью типа $\frac{0}{0}$.

По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+4x^7}-1}{\sin x^7}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+4x^7}-1\right)'}{\left(\sin x^7\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+4x^7\right)'}{3\left(1+4x^7\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\cos x^7\left(x^7\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{28x^6}{21\left(1+4x^7\right)^{\frac{2}{3}}\cos x^7\cdot x^6}=\frac{28}{21}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(1+4x^7\right)^{\frac{2}{3}}\cos x^7}=\frac{28}{21}=\frac{4}{3}.$$

б). Предел является неопределённостью вида $\infty-\infty$, поэтому вначале его надо преобразовать к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

$$a=\lim_{x\to 0}\left(ctg-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}.$$

К последнему (типа $0/0$) можно применять правило Лопиталя:

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x\cos x-\sin x\right)'}{\left(x\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-x\sin x\right)}{\sin x+x\cos x}.$$

Полученный предел вновь является неопределенностью $0/0$, поэтому повторное применение правила дает

$$a=-\lim_{x\to 0}\frac{\left(x\sin x\right)'}{\left(\sin x+x\cos x\right)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

в). Предел является неопределенностью вида 0^0, к которой удобно применять следующий прием. Обозначим

$$y=x^{\frac{2}{\ln\left(e^x-x\right)}},\qquad \ln y=\frac{2\ln x}{\ln\left(e^x-1\right)}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y}. \qquad (1)$$

Вычислим вспомогательный предел

$$\lim_{x\to 0}\ln y = 2\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\left(e^x-1\right)} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left[\ln\left(e^x-1\right)\right]'} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x\cdot e^x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(xe^x\right)'} = 2\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+xe^x} = 2.$$

Искомый предел согласно (1) равен

$$\lim_{x\to 0} y = e^2.$$

Задача 2.4. Исследовать функцию $y = 1 + e^{-x^2}$ и построить ее график.

Решение. Областью определения является вся действительная ось $\left(|x| < \infty\right)$. Для отыскания участков монотонности находим

$$y' = \left(e^{-x^2}+1\right) = -2xe^{-x^2}.$$

Тогда $y' > 0$ при $x < 0$ (интервал возрастания), $y' < 0$ при $x > 0$ (интервал убывания). Точка $x = 0$ является стационарной, поскольку $y'(0) = 0$. При переходе через $x = 0$ производная меняет знак с плюса на минус, поэтому при $x = 0$ функция имеет локальный максимум.

Для отыскания участков выпуклости используется вторая производная

$$y'' = -2\left(xe^{-x^2}\right)' = 2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}.$$

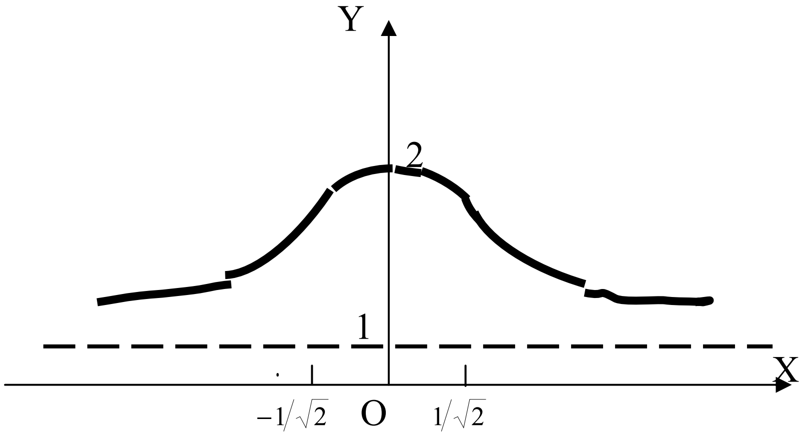
При $2x^2 - 1 > 0$ или $|x| > 1/\sqrt{2}$ будет $y'' > 0$ и функция вогнута; при $|x| < 1/\sqrt{2}$ $y'' < 0$ и функция выпукла.

Вертикальных асимптот функция не имеет. Для отыскания наклонных асимптот $y = ax + b$ вычислим

$$a = \lim_{x \to 0} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + e^{-x^2}}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \to 0} (y - ax) = \lim_{x \to 0} \left(1 + e^{-x^2}\right) = 1.$$

Поэтому при $x \to \pm\infty$ функция имеет асимптоту $y = 1$.

Результаты исследования с учетом четности функции $(y(-x) = y(x))$ показаны на графике



4.3. Решение типового варианта контрольной работы N 3

<u>Задача 3.1.</u> Найти градиент и уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$$S: x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 5x - 7z + 18 = 0, \quad M_0(1,-1,2).$$

<u>Решение.</u> Обозначим $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 5x - 7z + 18$.

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x + 5, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 4y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -6z - 7,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,2) = 7, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1,2) = -4, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,2) = -19.$$

$$grad f(x,y,z) = (2x+5, 4y, -6z-7) = (2x+5)i + 4yj - (6z+7)k;$$

$$grad f(M_0) = 7i - 4j - 19k.$$

Величина градиента

$$grad f(M_0) = \sqrt{49+16+361} = \sqrt{426}.$$

Уравнение касательной плоскости, имеющей нормальный вектор (7,-4,-19) и проходящей через M_0, запишется

$$7(x-1) - 4(y+1) - 19(z-2) = 0,$$

или

$$7x - 4y - 19z + 27 = 0.$$

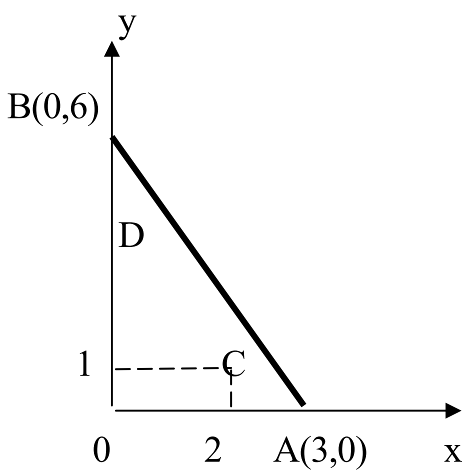
Нормальная прямая имеет направляющий вектор (7,-4,-19) и проходит через $M_0(1,-1,2)$, поэтому ее уравнения

$$\frac{x-1}{7} = -\frac{y+1}{4} = -\frac{7-2}{19}.$$

Задача 3.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,y)$ в области D, ограниченной заданными линиями:

$$z = x^2 + y^2 - xy - 3x; \quad D: y + 2x = 6, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

Решение. Область D показана на рисунке (треугольник OAB).



Стационарные точки являются решениями системы уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 3 = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x = 0,$$

откуда находим точку $C(2,1)$, принадлежащую, как видно из рисунка, области D. В этой точке $z = -3$. (2)

Исследуем функцию на границе области D.

<u>Отрезок ОА.</u> Здесь $y = 0,\ 0 \le x \le 3$ и $z = x^2 - 3x$. Стационарные точки определяются из уравнения $z' = 2x - 3 = 0,$ откуда $x = 3/2.$ В этой точке

$$z = -\frac{9}{4}\ . \tag{3}$$

На концах отрезка

$$z = 0 \quad (x = 0), \quad z = 0 \quad (x = 3). \tag{4}$$

<u>Отрезок АВ.</u> Здесь $y = 6 - 2x$ и $z = 7x^2 - 33x + 36 \ (0 \le x \le 3)$. Из уравнения $z' = 14x - 33 = 0$ находим $x = 33/14$ и

$$z = -\frac{81}{28}. \tag{5}$$

При $x = 0$ имеем

$$z = 36. \tag{6}$$

<u>Отрезок ОВ.</u> Здесь $x = 0, z = y^2 (0 \le y \le 6)$. Поскольку $z' = 2y \ne 0$ при $0 < y < 6,$ функция не имеет стационарных точек. Значения ее при $y = 0,\ y = 6$ были вычислены в (4), (6).

Из результатов (2)-(6) заключаем, что

$$\max_D z(x, y) = 36, \quad \min_D z(x, y) = -3,$$

причем наибольшее значение достигается в точке А(3,0), наименьшее - в точке C(2,1).

Задача 3.3. Найти полный дифференциал функции $z = xy \cdot e^{5x^2}$.

Решение. Частные производные равны

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{5x^2} + xy \cdot e^{5x^2} \cdot 10x = ye^{5x^2}\left(1 + 10x^2\right), \; \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{5x^2}.$$

Поэтому

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = y\left(1 + 10x^2\right) e^{5x^2} dx + xe^{5x^2} dy.$$

Задача 3.4. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^y$.
Решение. Сначала находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Затем, дифференцируя найденные частные производные, получим частные производные второго порядка данной функции:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = y(y-1)x^{y-2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x^y \cdot \ln x \cdot \ln x = x^y (\ln x)^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = x^{y-1}(1 + y\ln x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = yx^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= yx^{y-1} \cdot \ln x + x^{y-1} = x^{y-1}(y\ln x + 1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Задача 3.5. Вычислить значение производной сложной функции

$$u = u(x, y) = \arccos\frac{x^2}{y},$$

где

$$x = x(t) = 1 + \ln t, \quad y = y(t) = -2e^{-t^2+1},$$

при $t = t_0 = 1$ с точностью до двух знаков после запятой.

Решение. Так как сложная функция u зависит от одной переменной t через промежуточные переменные x и y, которые в свою очередь зависят от одной переменной t, то вычисляем полную производную этой функции по формуле

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{du}{dt}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{y^2}}}\cdot\frac{2x}{y}\cdot\frac{1}{t}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{y^2}}}\cdot\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot\left(-2e^{-t^2+1}\right)\cdot(-2t)=$$

$$=-\frac{|y|}{\sqrt{y^2-x^4}}\frac{2x}{y}\left(\frac{1}{t}-\frac{2x}{y}e^{-t^2+1}\cdot t\right).$$

Вычислим x и y при $t_0=1$:

$$x(1)=1+\ln 1=1,$$

$$y(1)=-2e^{-1+1}=-2e^0=-2.$$

Подставим значения $x=1, y=-2, t=1$ в выражение производной. Получим

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1}=-\frac{|-2|}{\sqrt{4-1}}\cdot\frac{2\cdot 1}{(-2)}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{2\cdot 1}{(-2)}e^{-1+1}\cdot 1\right)=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\approx 2{,}31.$$

4.4. Решение типового варианта контрольной работы № 4

Задача 4.1. С помощью интегрирования по частям вычислить неопределенный интеграл от функции вида $(7x+3)\cos 2x$.

Решение. Поскольку

$$\int\cos 2x dx=\frac{1}{2}\cos 2x d(2x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C, \qquad d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)=\cos 2x dx,$$

искомый интеграл равен

$$\int(7x+3)\cos 2x dx=\int(7x+3)d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)=\frac{1}{2}(7x+3)\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x d(7x+3)=$$
$$=\frac{1}{2}(7x+3)\sin 2x-\frac{7}{2}\int\sin 2x dx=\frac{1}{2}(7x+3)\sin 2x+\frac{7}{4}\cos 2x+C.$$

Задача 4.2. Вычислить неопределенный интеграл с помощью разложения на простейшие дроби подынтегральной функции $\dfrac{x^2+2}{x(x^2-4x+3)}$.

Решение. Поскольку степень многочлена в числителе не меньше степени знаменателя, следует выполнить деление:

$$\frac{x^4+2}{x^3-4x^2+3x}=x+4+\frac{13x^2-12x+2}{x^3-4x^2+3x}=x+4+\frac{13x^2-12x+2}{x(x-1)(x-3)}.$$

Правильную дробь разложим на простейшие дроби

$$\frac{13x^2-12x+2}{x(x-1)(x-3)}=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x-1}+\frac{C_3}{x-3}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим

$$C_1(x-1)(x-3)+C_2x(x-3)+C_3x(x-1)=13x^2-12x+2,$$

откуда

$$C_1+C_2+C_3=13,\qquad 4C_1+3C_2+C_3=12,\qquad 3C_1-3C_2=2.$$

Решая эту систему уравнений, имеем

$$C_1=\frac{1}{15},\qquad C_2=-\frac{9}{15},\qquad C_3=\frac{203}{15}.$$

Искомый интеграл равен

$$\int \frac{(x^4+2)dx}{x(x-1)(x-3)} = \int (x+4)dx + \frac{1}{15}\int\frac{dx}{x} - \frac{3}{5}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{203}{15}\int\frac{dx}{x-3} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + \frac{1}{15}\ln|x| - \frac{3}{5}\int\frac{d(x-1)}{x-1} + \frac{203}{15}\int\frac{d(x-3)}{x-3} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + \frac{1}{15}\ln|x| - \frac{3}{5}\ln|x-1| + \frac{203}{15}\ln|x-3| + C.$$

Задача 4.3. Вычислить с помощью подстановки неопределенный интеграл от функции $\sqrt{\dfrac{3+x}{x}}$.

Решение. Выполним подстановку $\sqrt{\dfrac{3+x}{x}} = t$. Разрешая уравнение относительно x, находим: $x = \dfrac{3}{t^2-1}$, $dx = -\dfrac{6tdt}{(t^2-1)^2}$.

Тогда искомый интеграл запишется: $I = \int\sqrt{\dfrac{3+x}{x}}dx = -6\int\dfrac{t^2dt}{(t^2-1)^2}$.

Разлагая подынтегральное выражение на простейшие дроби

$$\frac{t^2}{(t-1)^2(t+1)} = \frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{(t-1)^2} + \frac{A_3}{(t+1)} + \frac{A_4}{(t+1)^2}$$

и раскрывая скобки в равенстве

$$A_1(t-1)(t+1)^2 + A_2(t+1)^2 + A_3(t+1)(t-1)^2 + A_4(t-1)^2 = t^2,$$

приходим к соотношению

$$t^3(A_1+A_3) + t^2(A_1+A_2-A_3+A_4) + t(-A_1+2A_2-A_3-2A_4) +$$
$$+(-A_1+A_2+A_3+A_4) = t^2.$$

Система уравнений относительно A_1, A_2, A_3, A_4 запишется

$$\begin{cases} A_1 + A_3 = 0; \\ A_1 + A_2 - A_3 + A_4 = 1; \\ -A_1 + 2A_2 - A_3 - 2A_4 = 0; \\ -A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0. \end{cases}$$

Решая ее методом Гаусса, находим $A_1 = \frac{1}{4}, \quad A_2 = \frac{1}{4}, \quad A_3 = -\frac{1}{4}, \quad A_4 = \frac{1}{4}.$

Искомый интеграл равен:

$$I = -6\left(\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1} + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t-1)^2} - \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1} + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t+1)^2}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} - \ln|t+1| - \frac{1}{t+1}\right) + C =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\ln\left|\sqrt{\frac{3+x}{x}} - 1\right| - \frac{1}{\sqrt{\frac{3+x}{x}} - 1} - \ln\left|\sqrt{\frac{3+x}{x}} + 1\right| - \frac{1}{\sqrt{\frac{3+x}{x}} + 1}\right) + C.$$

Задача 4.4. Вычислить с помощью подстановки неопределенный интеграл от функции $\frac{1}{2 + 7\sin^2 x}$.

Решение. Универсальной является подстановка $t = tg\,\frac{x}{2}$, для которой нетрудно проверить равенства

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Поэтому искомый интеграл сводится к случаю интегрирования рациональной дроби

$$I=\int\frac{dx}{2+7\sin^2 x}=2\int\frac{(1+t^2)dt}{2(1+t^2)^2+28t^2}. \qquad (7)$$

Однако в ряде случаев более удобны подстановки:

(1) $t=\sin x.$ Тогда $\cos x=\sqrt{1-t^2},\quad dx=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$

(2) $t=\cos x.$ Тогда $\sin x=\sqrt{1-t^2},\quad dx=-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$

(3) $t=tgx.$ Тогда $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad \sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad dx=\dfrac{dt}{1+t^2}.$

Подстановки 1,2 приводят к подынтегральным выражениям, содержащим радикал, и поэтому нецелесообразны. Для подстановки 3 приходим к интегралу, более простому, чем (7), и легко приводящемуся к табличному:

$$I=\int\frac{dt}{9t^2+2}=\frac{1}{9}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{3t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{3\sqrt{2}}arctg\left(\frac{3tgx}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

<u>Задача 4.5.</u> Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^2+3,\quad y=\ln(2x+1),\quad x=0,\quad x=2;$

б) $y=\sqrt{x},\quad y=4x-\dfrac{1}{2},\quad x=0,\quad x=1.$

<u>Решение</u>. а). Рассмотрим вспомогательную функцию $z(x)=x^2+3-\ln(2x+1)$ на отрезке $0\le x\le 2$. Площадь вычисляется по формуле $S=\int\limits_0^2|z(x)|\,dx.$

Исследуем $z(x)$. Очевидно, что $z(0)=3>0$. Поскольку

$$z'(x) = 2x - \frac{2}{2x+1} = \frac{4(x+1)(x-1/2)}{2x+1},$$

нетрудно проверить, что $z(x)$ достигает в точке $x = 1/2$ локального минимума, причем $z(1/2) = 3{,}25 - \ln 2 > 0$. Кроме того, $z(2) = 7 - \ln 5 > 0$. Поэтому наименьшее значение $z(x)$ на $[0,2]$, равное $z(1/2)$, положительно, и, значит, $z(x) > 0$. Имеем

$$S = \int_0^2 z(x)dx = \int_0^2 (x^2 + 3 - \ln(2x+1))dx = \left(\frac{x^3}{3} + 3x\right)\Bigg|_0^2 - \int_0^2 \ln(2x+1)dx =$$

$$= \frac{26}{3} - \int_0^2 \ln(2x+1)dx.$$

Вычисляя интеграл по частям, находим

$$\int_0^2 \ln(2x+1)dx = (x\ln(2x+1))\Big|_0^2 - \int_0^2 xd\ln(2x+1) = 2\ln 5 - \int_0^2 \frac{2xdx}{2x+1} =$$

$$= 2\ln 5 - \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right)dx = 2\ln 5 - x\Big|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{d(2x+1)}{2x+1} = 2\ln 5 - 2 + \frac{1}{2}\ln|2x+1|\,\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{5}{2}\ln 2 - 2.$$

Поэтому $S = 32/2 - 5\ln 5/2$.

б). Здесь $z(x) = \sqrt{x} - 4x + \frac{1}{2}$ на $0 \le x \le 1$. Имеем $z(0) = 3/4$, $z(1) = -9/4$, и, следовательно, $z(x)$ меняет знак. Найдем интервалы, где она положительна или отрицательна. Отыскивая корни уравнения $z(x) = 0$ находим значение $x_1 = \frac{1}{4}$, поэтому $z(x) \ge 0$ при $0 \le x \le 1/4$ и $z(x) < 0$ при $1/4 < x \le 1$. Искомая площадь равна:

$$S = \int_0^{1/4} z(x)dx + \int_{1/4}^{1} (-z(x))dx = \int_0^{1/4} z(x)dx - \int_{1/4}^{1} z(x)dx.$$

Вычисляем неопределенный интеграл

$$F(x) = \int z(x)dx = \int(\sqrt{x} - 4x + \frac{1}{2})dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^2 + \frac{x}{2} + C.$$

Тогда

$$S = F(x)\Big|_0^{1/4} - F(x)\Big|_{1/4}^{1} = F\left(\frac{1}{4}\right) - F(0) - F(1) + F\left(\frac{1}{4}\right) = 2F\left(\frac{1}{4}\right) - F(0) - F(1) =$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2\cdot 4} + C\right) - C - \left(\frac{2}{3} - 2 + \frac{1}{2} + C\right) = 1.$$

Задача 4.6. Вычислить площадь, ограниченную кривой $\rho(\varphi) = 3(1/2 - \cos 3\varphi)$ в полярной системе координат.

Решение. Кривая определена для тех значений φ из интервала $0 \le \varphi \le 2\pi$ (или $-\pi \le \varphi \le \pi$), при которых выполняется условие $\rho(\varphi) \ge 0$. Неравенство $\cos 3\varphi \le 1/2$ имеет решения $\pi/3 + 2\pi\, n \le 3\varphi \le 5\pi/3 + 2\pi\, n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ или

$$\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi\, n}{3} \le \varphi \le \frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi\, n}{3}\,. \qquad (8)$$

Области (8) принадлежат интервалу $0 \le \varphi \le 2\pi$ при значениях $n = 0,1,2,$ т.е.

$$\frac{\pi}{9} \le \varphi \le \frac{5\pi}{9}, \qquad \frac{7\pi}{9} \le \varphi \le \frac{11\pi}{9}, \qquad \frac{13\pi}{9} \le \varphi \le \frac{17\pi}{9}.$$

Площадь вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/9}^{5\pi/9}9\left(\frac{1}{2}-\cos 3\varphi\right)^2 d\varphi+\frac{1}{2}\int\limits_{7\pi/9}^{11\pi/9}9\left(\frac{1}{2}-\cos 3\varphi\right)^2 d\varphi+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{13\pi/9}^{17\pi/9}9\left(\frac{1}{2}-\cos 3\varphi\right)^2 d\varphi.$$

Вычисляя неопределенный интеграл

$$F(\varphi)=\int\left(\frac{1}{2}-\cos 3\varphi\right)^2 d\varphi=\int\left(\frac{1}{4}-\cos 3\varphi+\cos^3 3\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\varphi-\frac{\sin 3\varphi}{3}+\frac{1}{2}\int(1+\cos 6\varphi)d\varphi=\frac{3\varphi}{4}-\frac{\sin 3\varphi}{3}+\frac{\sin 6\varphi}{12}+C,$$

находим

$$S=\frac{9}{2}\left(F(\varphi)\Big|_{\pi/9}^{5\pi/9}+F(\varphi)\Big|_{7\pi/9}^{11\pi/9}+F(\varphi)\Big|_{13\pi/9}^{17\pi/9}\right)=\frac{3\pi}{2}.$$

Задача 4.7. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^2+7x+12}$ или доказать его расходимость.

Решение. Согласно определению несобственного интеграла с бесконечным пределом имеем

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^2+7x+12}=\lim_{a\to\infty}\int\limits_2^{a}\frac{dx}{x^2+7x+12}.$$

Поскольку корнями трехчлена в знаменателе будут $x_1=-3,\ x_2=-4,$ то

$$\frac{1}{x^2+7x+12}=\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{C_1}{x+3}+\frac{C_2}{x+4}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим $C_1 + C_2 = 0$, $4C_1 + 3C_2 = 1$, откуда $C_1 = 1, \quad C_2 = -1$. Поэтому

$$\int_2^a \frac{dx}{x^2 + 7x + 12} = \int_2^a \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) dx = (\ln|x+3| - \ln|x+4|)\Big|_2^a =$$

$$= \ln(a+3) - \ln(a+4) - \ln 5 + \ln 6 = \ln\frac{6}{5} - \ln\frac{a+4}{a+3}.$$

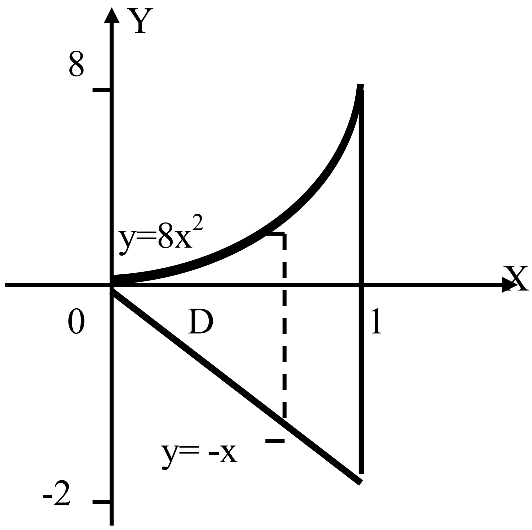
Значение несобственного интеграла равно

$$\lim_{a\to\infty}\left(\ln\frac{6}{5} - \ln\frac{a+4}{a+3} \right) = \ln\frac{6}{5} - \ln\left(\lim_{a\to\infty} \frac{a+4}{a+3} \right) = \ln\frac{6}{5}.$$

Задача 4.8. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной заданными линиями и имеющей поверхностную плотность $r(x, y)$.

$$\text{D:} \quad y = 8x^2, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = -2x; \quad r(x, y) = 7x + y.$$

Решение. Вид области показан на рисунке.



Масса пластины m запишется с помощью двойного интеграла

$$m = \iint_D r(x, y)dxdy = \iint_D (7x + y)dxdy.$$

Сведем двойной интеграл к повторному интегралу

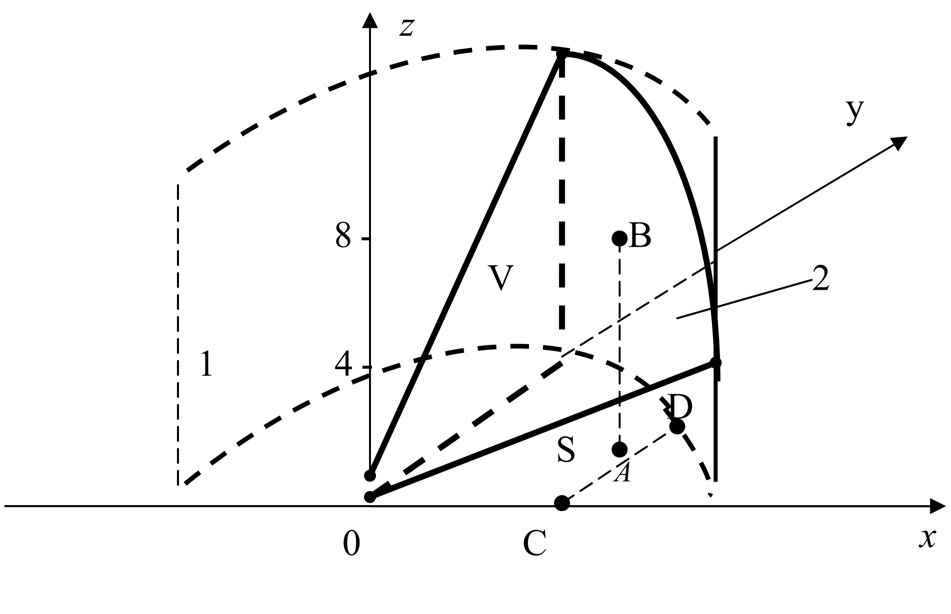
$$m=\int_0^1 dx\int_{-x}^{8x^2}(7x+y)dy=\int_0^1 dx\left(7xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-x}^{8x^2}=$$

$$=\int_0^1\left(7x\cdot 8x^2+\frac{(8x^2)^2}{2}-7x(-x)-\frac{(-x)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(32x^4+56x^3+\frac{13}{2}x^2\right)dx=\left(32\frac{x^5}{5}+\frac{56}{4}x^4+\frac{13}{2\cdot 3}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{677}{30}.$$

Задача 4.9. Вычислить с помощью тройного интеграла объем области V, ограниченной указанными поверхностями: V: $y=8-2x^2$, $z=0$, $y=0$, $x=0$, $z=2x+y$.

Решение. Область V изображена на рисунке, где цифрами 1, 2 обозначены параболический цилиндр $y=8-2x^2$ и плоскость $z=2x+y$ соответственно; остальные уравнения отвечают координатным плоскостям.



Объем ϑ области посредством тройного интеграла запишется

$$\vartheta = \iiint\limits_V dxdydz.$$

Приведем интеграл к повторному

$$\vartheta = \iint\limits_S dS \int\limits_{z_A}^{z_B} dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{y_C}^{y_D} dy \int\limits_{z_A}^{z_B} dz .$$

Через z_A, z_B обозначены аппликаты точек A, B (см. рис.), вычисленные из уравнений плоскости $z = 0$ и плоскости $z = 2x + y$, т.е. $z_A = 0$, $z_B = 2x + y$. Через S обозначена область плоскости x, y, на которую проецируется область V. Поэтому при сведении двойного интеграла по области S к повторному ординаты y_C, y_D точек C, D вычисляются из уравнения $y_C = 0$ и уравнения линии, являющейся пересечением цилиндрической поверхности $y = 8 - 2x^2$ и плоскости $z = 0$, т.е. уравнения $y_D = 8 - 2x^2$. Искомый объем равен

$$\vartheta = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{8-2x^2} dy \int\limits_0^{2x+y} dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{8-2x^2} dz \cdot z\Big|_0^{2x+y} =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{8-2x^2} (2x + y)dy = \int\limits_0^2 dx \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{8-2x^2} =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(2x\left(8 - 2x^2\right) + \frac{1}{2}\left(8 - 2x^2\right)^2 \right) dx = \int\limits_0^2 \left(16x - 4x^3 + 32 - 16x^2 + 2x^4 \right) dx = \frac{692}{15}.$$

Задача 4.10. Вычислить: а) заряд проводника, располагающегося вдоль кривой L, с плотностью $f_1(x, y)$ с помощью криволинейного интеграла первого рода; **b**) работу силы $\overline{F}(f_1(x, y), f_2(x, y))$ вдоль траектории **L** от т. **A** до т. **B** с помощью криволинейного интеграла второго рода.

$f_1 = 2x;$ $f_2 = x - y;$ (1) L - четверть окружности $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ между A(3,-3), B(5,-1). (2) L - дуга параболы $y = 1 - 2x^2$ от **A**(0,1) до **B**(1,-1).

Решение. **а**). Заряд **q** проводника, имеющего плотность заряда $f_1(x,y)$ вычисляется по формуле

$$q = \int_L f_1(x,y)dS = \int_S 2xdS .$$

(1). Окружность удобно задать в параметрическом виде:

$$x = 3 + 2\cos t, \quad y = -1 + 2\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

Участку **L** соответствуют значения параметра $t_A \le t \le t_B$, где

$$\begin{cases} 3 + 2\cos t_A = 3; \\ -1 + 2\sin t_A = -3; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 + 2\cos t_B = 5; \\ -1 + 2\sin t_B = -1, \end{cases}$$

откуда $t_A = 3\pi/2, \quad t_B = 2\pi.$ Криволинейный интеграл выражается через определенный

$$q = \pm \int_{t_A}^{t_B} f_1(x(t), y(t))\left(x'^2(t) + y'^2(t)\right)^{1/2} dt,$$

причем верхний знак выбирается при $t_B \ge t_A$ и нижний - при $t_B < t_A$.

В данной задаче

$$q = 2\int_{3\pi/2}^{2\pi} x(t)\left(x'^2(t) + y'^2(t)\right)^{1/2} dt = 4\int_{3\pi/2}^{2\pi} (3 + 2\cos t)dt = 2(3\pi + 4).$$

(2). Для дуги параболы L удобнее использовать частный случай формулы при $t = x$:

$$q = \pm \int_{x_A}^{x_B} f_1\left(x, y(x)\left(1 + y'^2(x)\right)\right)^{1/2} dx.$$

Для $y = 1 - 2x^2, \quad 0 \le x \le 1$ имеем

$$q = 2\int_0^1 x\sqrt{1+16x^2}\,dx.$$

Используем подстановку

$$x = \frac{1}{4}tgu, \quad dx = \frac{du}{4\cos^2 u}, \quad tgu_1 = 4 \quad \left(0 < u_1 < \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда

$$q = \frac{1}{8}\int_0^{u_1} tgu\frac{du}{\cos^3 u} = -\frac{1}{8}\int_0^{u_1}\frac{d\cos u}{\cos^4 u} = \frac{1}{24\cos^3 u}\Bigg|_0^{u_1} = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{\cos^3 u_1} - 1\right) = \frac{1}{24}\left(17\sqrt{17} - 1\right).$$

б). Работа силового поля с компонентами $f_1(x,y), f_2(x,y)$ вдоль траектории AB запишется

$$W = \int_L f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy.$$

(1). Для четверти окружности приведем интеграл к определенному по формуле

$$W = \int_{t_A}^{t_B} f_1(x(t), y(t)x'(t) + f_2(x(t), y(t)y'(t)))dt =$$

$$= \int_{3\pi/2}^{2\pi}\left(2(3+2\cos t)\cdot(-2\sin t) + (4+2\cos t - 2\sin t)\cdot 2\cos t\right)dt =$$

$$= 2\int_{3\pi/2}^{2\pi}\left(4\cos t - 6\sin t - 3\sin 2t\right)dt = 26.$$

(2). Для дуги параболы

$$W=\int_{x_A}^{x_B}\left(f_1(x,y(x))+f_2(x,y(x))y'(x)\right)dx=\int_0^1\left(2x+\left(x-1+2x^2\right)(-4x)\right)dx=-\frac{7}{3}.$$

Задача 4.11. Вычислить расход жидкости с полем скоростей $\overline{\vartheta}\left(\vartheta_1(x,y,z),\vartheta_2(x,y,z),\vartheta_3(x,y,z)\right)$, протекающей за единицу времени через часть S плоскости $ax+by+cz-d=0$, лежащей в первом октанте. Единичная нормаль $\overline{n}$ направлена вне начала координат.

$$\vartheta_1(x,y,z)=z-2x,\quad \vartheta_2=(x,y,z)=1,\quad \vartheta_3=(x,y,z)=3y+x;$$

$$a=5,\quad b=4,\quad c=3,\quad d=10.$$

Решение. Искомый расход дан формулой

$$Q=\iint_S\left(\vartheta_1 n_1+\vartheta_2 n_2+\vartheta_3 n_3\right)dS\,.$$

Единичная нормаль к плоскости имеет компоненты

$$n_1=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{5}{\sqrt{50}},\ n_2=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{4}{\sqrt{50}},\ n_3=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{3}{\sqrt{50}}\,.$$

Поверхностный интеграл можно выразить через двойной интеграл

$$Q=\iint_D\frac{1}{\sqrt{50}}(5\vartheta_1(x,y,z(x,y)+4\vartheta_2(x,y,z(x,y))+3\vartheta_3(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+(Z_x^1)^2+(Z_y^1)^2}\,dxdy,$$

где уравнение поверхности S записано в явном виде:

$$Z(x,y)=\frac{10}{3}-\frac{5x}{3}-\frac{4y}{3}.$$

Область D является проекцией S на плоскость x,y и ограничена линиями

$$x=0,\ y=0,\quad 5x+4y-10=0\,.$$

Внося в двойной интеграл заданные функции, находим

$$Q = \frac{1}{9}\iint\limits_{D}(62 - 28x - 11y)dxdy.$$

Последний запишется через повторный интеграл

$$Q = \frac{1}{9}\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{(10-5x)/4} (62 - 28x - 11y)dxdy = \frac{1}{9}\int\limits_{0}^{2} dx(62y - 28xy - \frac{11}{2}y^2\Big|_{0}^{(10-5x)/4} =$$

$$= \frac{1}{9}\int\limits_{0}^{2} (\frac{(62-28x)(10-5x)}{4} - \frac{11}{32}(10-5x)^2)\,dx = \frac{125}{36}.$$

Учебное издание

Высшая математика

Программа, методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников инженерных и
инженерно-экономических специальностей
приборостроительного факультета

В 2-х частях

Ч а с т ь I

Составители: ИБРАГИМОВ Владислав Ахмедович
СТРЕЛЬЦОВ Сергей Викторович
МЕЛЕШКО Алексей Николаевич
ВИШНЕВСКАЯ Ольга Геннадьевна

Редактор Т.Н.Микулик

Подписано в печать 21.01.2000.
Формат 60х84 1/16. Бумага тип. № 2. Офсет. печать.
Усл.печ.л. 5,9. Уч.-изд.л. 4,5. Тираж 200. Заказ 544.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусская государственная политехническая академия.
Лицензия ЛВ № 155 от 30.01.98. 220027, Минск, пр. Ф.Скорины, 65.