Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Электроснабжение»

В.Б.Козловская

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭНЕРГЕТИКИ

Учебно-методическое пособие к практическим занятиям
и курсовому проектированию для студентов
специальности 1 – 43 01 03 «Электроснабжение»
специализации 1– 43 01 03 01
«Электроснабжение промышленных предприятий»

Минск 2005

УДК 628.97 (075.8)

ББК 31.294 я7
К 59

Рецензенты:
В.А.Булат, В.М.Цыганков

**Козловская В.Б.**

К 59 Математические задачи энергетики: Учебно-метод. пособие к практическим занятиям и курсовому проектированию / В.Б.Козловская– Мн.: БНТУ, 2005. - с.

В пособии изложены основные положения теории вероятностей, математической статистики, необходимые для решения наиболее распространенных практических задач в области электроснабжения промышленных предприятий.

Предлагаемый материал иллюстрируется примерами. В приложении приводятся справочные материалы, необходимые для решения предлагаемых задач..

Издание предназначено для студентов специальности 43 01 03 «Электроснабжение» специализации 43 01 03 01 «Электроснабжение промышленных предприятий», а также может быть полезно студентам других специальностей , изучающих данную дисциплину.

УДК 628.97 (075.8)
ББК 31.294 я7

ISBN

## СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

В практической деятельности при проектировании, строительстве и эксплуатации предприятий для выполнения поставленной задачи инженеру постоянно приходится принимать решения. При проектировании это может быть выбор схемы или какого-то параметра системы электроснабжения (сечение проводов, мощность трансформатора и т.п.); при строительстве и монтаже – план и технология проведения отдельных работ и всего их комплекса; в эксплуатации это могут быть задачи выбора уставок защит, определение точности приборов, параметров системы регулирования напряжения и т.д. При этом принятое решение будет тем более оптимальным, чем точнее и полнее учтен характер рассматриваемых процессов и чем большая информация будет получена о них.

Явления и процессы, происходящие в электроэнергетических системах обычно не являются детерминированными, т.е. с точным результатом, а как правило, носят случайный характер, т.к. они формируются под воздействием большого количества разнообразных факторов. Однако при неоднократном повторении одного и того же опыта проявляются закономерности, которые можно изучить и использовать при исследовании.

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных – результатов наблюдений (измерений). Этими вопросами занимается математическая статистика, основная задача которой состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для анализа происходящих процессов и получения научных и практических выводов.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Проведение исследований в какой-либо области знаний, как правило, начинается со сбора исходной информации о предмете исследования – статистических данных, которые в дальнейшем подлежат обработке с использованием методов теории вероятностей и математической статистики для углубленного анализа и получения обоснованных выводов о предмете исследования. Математическая статистика решает две основных задачи: во-первых, необходимо указать способ сбора и группировки статистических данных, полученных в результате наблюдений, и, во-вторых, разработать метод их анализа в зависимости от целей исследования. При решении последней задачи осуществляется проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения и величине параметров распределения, вид которого известен.

Для описания и анализа полученных статистических данных, как правило, применяется выборочный метод, сущность которого заключается в следующем. Пусть требуется изучить совокупность объектов относительно некоторого качественного или количественного признака. Например, если имеется партия ламп накаливания, то качественным признаком может служить стандартность лампы, а количественным — её срок службы. Можно произвести сплошное обследование каждой лампы, но, во-первых, это сопряжено со значительными затратами, а во-вторых, проверка срока службы всех ламп накаливания свела бы к нулю полезный выпуск этой продукции. Поэтому обычно из всей совокупности объектов случайно отбирают некоторое их количество и подвергают изучению.

***Выборочной совокупностью (выборкой)*** называют совокупность случайно отобранных объектов (результатов измерений). Объём выборки обозначается $n$.

***Генеральной совокупностью*** называют совокупность объектов, из которых производиться выборка. Объём генеральной совокупности обозначается $N$.

Рассмотрим основные понятия математической статистики.

***Случайной величиной (СВ)*** считается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение. Случайными величинами являются результаты измерений напряжения, активной и реактивной мощности, частоты, коэффициента мощности, количества повреждённого оборудования, погрешностей измерений и т.п. Случайные величины бывают дискретными и недискретными (непрерывными).

***Дискретной*** называется СВ, множество возможных значений которой конечно или счётно.

***Непрерывной*** называется СВ, множество значений которой нечётно и возможные значения СВ заполняют целиком некоторый интервал.

Для визуальной оценки распределения исследуемой СВ X производят группировку исходных данных [2]. Если изучается дискретная СВ, то наблюдаемые значения располагаются в порядке возрастания и подсчитываются частоты $m_i$ или относительные частоты $\frac{m_i}{n}$ появления одинаковых значений СВ X. В результате получается статистический ряд распределения СВ:

Таблица 1

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ – исход эксперимента | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_r$ |
| $m_i$ | $m_1$ | $m_2$ | … | $m_r$ |
| $\frac{m_i}{n}$ | $\frac{m_1}{n}$ | $\frac{m_2}{n}$ | … | $\frac{m_r}{n}$ |

При этом должны выполняться соотношения:

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = n; \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{n} = 1. \tag{1}$$

Если изучается непрерывная СВ X, то группировка заключается в разбиении интервала наблюдаемых значений СВ на $r$ разрядов обычно равной длины

$h:[x_1; x_2[$ ; $[x_2; x_3[$ ; … $[x_{r-1}; x_r[$ и подсчёте частоты или относительной частоты попадания наблюдаемых значений СВ в соответствующие разряды.

Количество разрядов выбирается произвольно, но обычно не менее 5 и не более 15. При этом необходимо, чтобы в каждый разряд (кроме крайних) попало не менее 5 значений СВ. В результате получают статистический ряд распределения СВ X вида :

Таблица 2

| Разряды, X | $[x_1; x_2[$ | $[x_2; x_3[$ | … | $[x_{r-1}; x_r[$ |
|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | $m_1$ | $m_2$ | … | $m_r$ |
| $\frac{m_i}{n}$ | $\frac{m_1}{n}$ | $\frac{m_2}{n}$ | … | $\frac{m_r}{n}$ |

В этом случае также должны выполняться равенства (1).

Относительная частота

$$\frac{m_i}{n} = P_i^* \tag{1}$$

является приближённым значением вероятности $P_i$ и при увеличении числа наблюдений (объёма выборки *n*) стремится к его значению.

Теория вероятности оперирует понятием ***функции распределения*** – это функция F(*x*), определяющая вероятность того, что СВ X в результате эксперимента примет значение, меньше некоторого фиксированного *x*:

$$F(x) = F(X < x) = P(X \in ]-\infty; x[). \tag{3}$$

Свойства $F(x)$:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(\infty) = 0$;
2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$;
3. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$ – т.е. непрерывна слева.

С помощью функции распределения можно определить вероятность попадания СВ X в некоторый интервал [4]:

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b) = F(a) - F(b) \ . \qquad (4)$$

Функция распределения строится как для дискретной, так и для непрерывной случайной величины. Это универсальный вид закона распределения.

Аналогом (приближённым значением) функции распределения в математической статистике является ***эмпирическая (статистическая) функция распределения*** – это функция $F^*(x)$, определяющая относительную частоту события, когда СВ X не превышает заданного $x$:

$$F^*(x) = P^*(X < x), \qquad (5)$$

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \qquad (6)$$

где $n_x$ – число значений СВ X, меньших $x$; $n$ – объём выборки.

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ используется в качестве оценки функции распределения $F\ (x)$ и при достаточно большом объёме выборки мало отличается от неё. Функция $F^*(x)$ обладает теми же свойствами, что и $F\ (x)$.

Графически эмпирическая функция распределения представляет собой ступенчатую разрывную функцию (рис.1), непрерывную слева; $F(x) = 0$ левее наименьшего значения $x_1$ и $F(x) = 1$ правее наибольшего значения $x_n$.

***Пример 1.*** Построить эмпирическую функцию распределения по статистическому распределению СВ отклонения напряжения $U$, В, при оценке погрешности вольтметра:

Таблица 3

| Наблюдаемое значение СВ $U$, В | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P_i^*$ | 0,75 | 0,2 | 0,05 |

***Решение**.* Относительная частота события $(U < u)$ равна $F^*(u)$, следовательно:

$$F^*(u) = \begin{cases} 0, \; при \; u \le 2; \\ 0{,}75, \; при \; 2 < u \le 3; \\ 0{,}95, \; при \; 3 < u \le 5; \\ 1, \; при \; u > 5. \end{cases}$$

График этой эмпирической функции распределения:

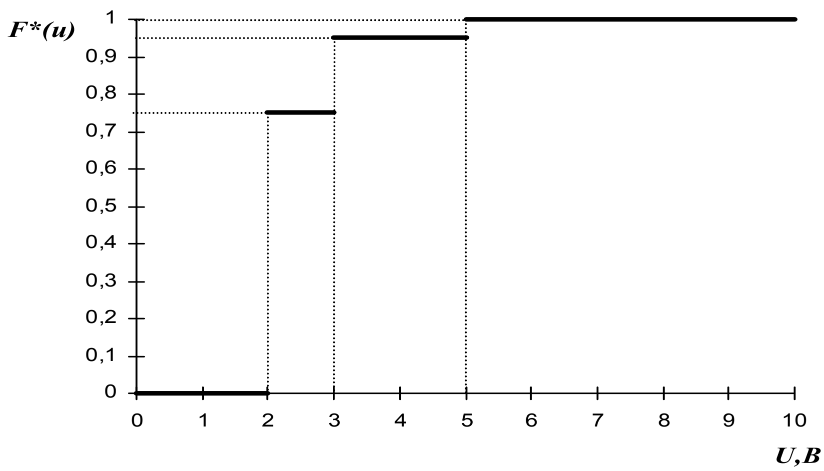


Рис. 1

При решении многих практических задач нет необходимости всегда строить математическую модель вероятностного эксперимента. Иногда достаточно иметь о случайной величине общее представление, знать характерные черты математической модели. Существенные особенности математической модели можно в сжатой форме выразить с помощью числовых характеристик. Основными из них являются математическое ожидание $M(x)$, дисперсия $D(x)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(x)$. В математической статистике чаще используют не сами эти характеристики, а их приближённые значения – оценки.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

На практике нередко приходится иметь дело со статистическим материалом небольшого объема, и в этом случае приходится вместо истинных значений числовых характеристик СВ использовать их приближенные значения – оценки.

***Статистической оценкой*** неизвестного параметра $\Theta$ теоретического распределения называют функцию наблюдаемых случайных величин. Оценку обозначают $\hat{\Theta}$.

Оценки подразделяются на точечные и интервальные.

***Точечная оценка*** параметра $\Theta$ определяется одним числом $\hat{\Theta} = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Однако, не каждую функцию $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно использовать в качестве оценочной функции неизвестного параметра $\Theta$, а только определенные классы функций, близкие к оцениваемому параметру $\Theta$. Имеется специальный раздел математической статистики – теория оценивания, которая занимается выработкой правил конструирования функций $\hat{\Theta} = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для нахождения точечных оценок неизвестных параметров.

Для того чтобы статистические оценки давали “хорошие” приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям. Во-первых, оценки должны быть несмещёнными, т.е. при использовании оценки $\hat{\Theta}$ вместо параметра $\Theta$ не делается систематической ошибки в сторону завышения или занижения:

$$M(\hat{\Theta}) = \Theta. \qquad (7)$$

Однако несмещенная оценка не всегда дает хорошее приближение оцениваемого параметра. Возможные значения $\hat{\Theta}$ могут быть сильно рассеяны вокруг своего среднего значения, т.е. дисперсия оценки может быть значительной. Поэтому к статистической оценке предъявляется требование эффективности, т.е. выбранная несмещенная оценка должна обладать минимальной дисперсией:

$$D(\tilde{\Theta}) = \min . \qquad (8)$$

При рассмотрении выборок большого объема к статистической оценке предъявляется также требование состоятельности, т.е. при увеличении объема выборки *n* оценка должна приближаться (сходится по вероятности) к искомому параметру:

$$\tilde{\Theta} \xrightarrow[p]{n \to \infty} \Theta . \qquad (9)$$

На практике не всегда удается удовлетворить всем этим требованиям, но при выборе оценки любого параметра желательно ее критическое рассмотрение со всех этих точек зрения.

Для определения точечных оценок, существуют различные методы, дающие возможность получить оценки, в разной степени удовлетворяющие перечисленным требованиям. Точечные оценки основных числовых характеристик СВ наиболее просто могут быть рассчитаны методом моментов [2]. Если для изучения генеральных совокупностей СВ X извлечена выборка объемом *n*, то на основании неё определяются выборочные оценки числовых характеристик СВX.

***Математическое ожидание*** является характеристикой положения СВ и описывает ее центр распределения:

$$\tilde{M}(x) = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} m_i \cdot x_i = a . \qquad (10)$$

***Дисперсия и среднеквадратическое отклонение*** характеризуют разброс СВ около её математического ожидания. Их выборочные оценки рассчитываются по формулам:

$$\tilde{D}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} m_i \cdot (x_i - \overline{x})^2 \; ; \qquad (11)$$

$$\tilde{\sigma}(x) = \sqrt{\tilde{D}(x)}\,. \qquad (12)$$

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение, полученные по формулам (11), (12) дают смещённые оценки, которые приводят к статистическим ошибкам, давая заниженные значения дисперсии генеральной совокупности. Для получения их несмещённых оценок дисперсию “исправляют”. Исправленную дисперсию обозначают через $S^2$:

$$S^2(x) = \frac{1}{n-1}\cdot\tilde{D}(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot (x_i - \overline{x})^2 \; ; \qquad (13)$$

тогда несмещенная оценка среднеквадратического отклонения:

$$S(x) = \sqrt{S^2(x)}\,. \qquad (14)$$

При небольшом объеме выборки (n ≤ 30 значений) расхождение между $\sigma(x)$ и $S(x)$ оказывается существенным [1], поэтому для расчета дисперсии и среднеквадратического отклонения в этом случае следует пользоваться формулами (13), (14). При большом объеме выборки (n > 30 значений) расхождение между $\sigma(x)$ и $S(x)$ незначительно и практически пропадает с увеличением числа статистических данных, поэтому дисперсию и среднеквадратическое отклонение можно определять по формулам (11), (12).

# 3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Исходные данные, полученные в результате измерений величины напряжения, активной и реактивной мощности, тока, погрешности приборов и т.п., могут содержать значения этих величин, попавшие в данную выборку случайно, в результате воздействия каких-либо не характерных для изучаемого процесса факторов. При проведении следующей серии подобных измерений эти случайные факторы не будут иметь место, но могут появиться другие. Например, при измерении активной мощности, потребляемой предприятием в часы максимальных нагрузок энергосистемы, оказалось, что в результате выхода из строя технологической линии был отключён один из цехов предприятия. Таким образом, в исследуемый период времени производилось не измерение активной мощности предприятия в нормальном режиме работы, а мощности, соответствующей работе предприятия без учёта одного из цехов. Такие исходные данные не являются характерными для производимого исследования, т.е. недостоверными, и для того, чтобы они не искажали полученных результатов, производится предварительная обработка этих исходных данных.

Предварительная обработка исходных данных преследует две основных цели:

– “очистка” исходных данных от недостоверных значений;

– предварительная оценка вида теоретического распределения, с которым согласуется данное эмпирическое.

“Очистка” исходных данных — это исключение из исходных данных тех выборочных значений, которые соответствуют грубым ошибкам и локальным выбросам.

Грубые ошибки в исходных данных могут быть вызваны неисправностью измерительных приборов, трансформаторов тока или напряжения, ошибкой при снятии показаний приборов и т.д.

Локальные выбросы не связаны с ошибкой значения исходных данных. Они столь сильно отличаются от большинства значений в выборке, что их можно считать исходными данными другой выборки и отбрасывать.

Для выявления грубых ошибок и локальных выбросов применяют два основных способа очистки:

- с использованием правила трёх сигм;
- с использованием гистограмм частот.

## “ОЧИСТКА” ИСХОДНЫХ ДАННЫХ ПО ПРАВИЛУ ТРЁХ СИГМ

Сущность правила трёх сигм состоит в следующем: если случайная величина X распределена по нормальному закону, то абсолютная величина её отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднеквадратического отклонения.

В [1] показано, что вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше утроенного среднеквадратического отклонения, равна 0,9973. Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит утроенное среднеквадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 1-0,9973=0,0027. В теории вероятности и математической статистике такие события, вероятность наступления которых не превышает 0,05, называют практически невозможными.

Используя это правило, можно отстроиться от недостоверных исходных данных. Для этого необходимо определить оценки числовых характеристик исследуемой СВ X по формулам (9),(12),(13) и построить указанные интервалы

$$a(x) = \pm 3S(x). \tag{14}$$

Те из значений исходных данных, которые не попали в указанный интервал, можно считать полученными в результате воздействия случайных факторов, т.е. недостоверными, и отбрасывать.

## “ОЧИСТКА” ИСХОДЫХ ДАННЫХ С ПРИМЕНЕНИЕМ ГИСТОГРАММ ЧАСТОТ

Для наглядности строят различные графики статического распределения [1]. Например, для дискретной случайной величины обычно строиться полигон частот (Рис. 2) — ломанную, отрезки которой соединяют точки $(x_1; m_1); (x_2; m_2); \ldots;$ $(x_r; m_r)$.

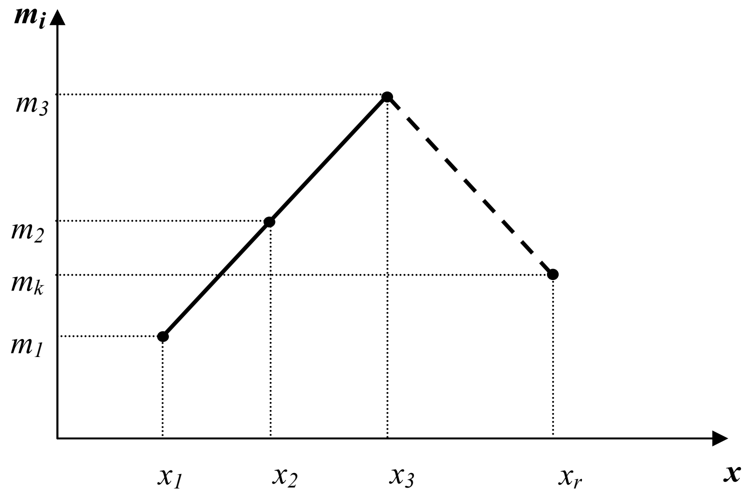


Рис. 2

В случае непрерывной случайной величины, целесообразно строить гистограмму частот (рис. 3) — ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основанием которых служат разряды $(x_{n-1}; x_n)$ длинной $h$, а высоты равны значениям частот $m_i$ соответствующих $i$-му разряду или значениям плотностей распределения частот в $i$-м разряде:

$$f^*(x) = \frac{P_i^*}{h}. \tag{15}$$

Площадь i-го прямоугольника равна $f^*(x_i) \cdot h = \frac{P_i^*}{h} \cdot h = P_i^*$,т.е. относительной частоте попадания СВ X в i-ый разряд. Площадь всей гистограммы равна сумме относительных частот всех разрядов:

$$\sum_{i=1}^{r} P_i^* = 1. \qquad (16)$$

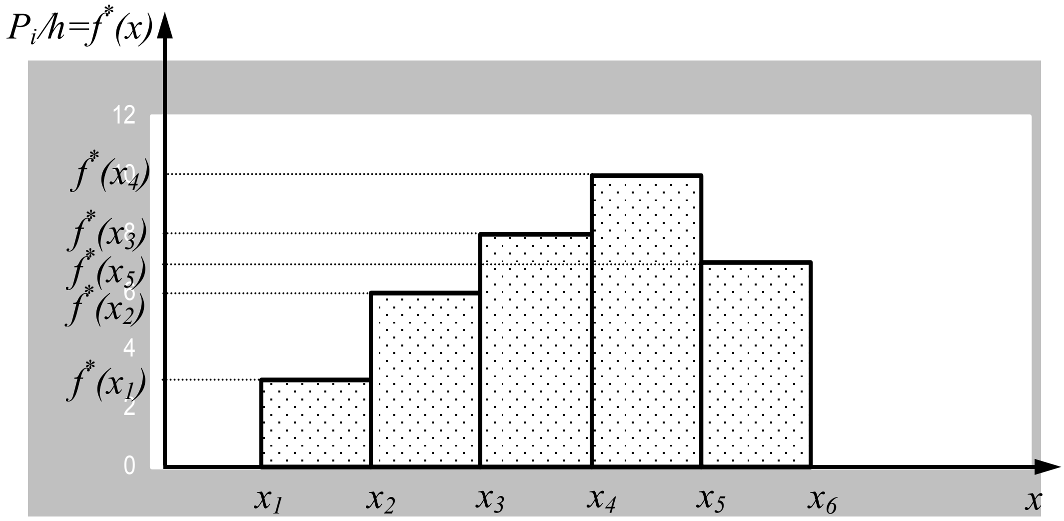


Рис. 3

Различают гистограммы мгновенные и итоговые.

***Мгновенными*** называются гистограммы, соответствующие исходным данным за относительно короткий промежуток времени. Например, измеряют значения активной мощности, потребляемой предприятием в часы утреннего максимума энергетической системы с $8^{\underline{00}}$ до $10^{\underline{00}}$ с трёхминутным интервалом в первую декаду месяца (аналогично, во вторую и третью декаду). Соответствующая ***итоговая*** гистограмма строится по значениям мощности всех трёх декад.

Как правило, первоначально осуществляется построение мгновенных гистограмм, с помощью которых производиться “очистка” исходных данных путём выявления на ней “островков”. В этом случае можно использовать гистограмму, у которой по оси ординат отложены значения частот $m_i$. На Рис. 4 представлена гистограмма распределения частот СВ активной мощности, Р, МВт. На ней имеется “островок” значений (2÷2,1) МВт. Значения СВ Р, попавшие в этот разряд, можно считать недостоверными и отбросить.

По сумме очищенных мгновенных гистограмм строится итоговая гистограмма. Т.к. она является объектом более глубокого анализа, то рекомендуется при её построении использовать ординаты в значениях плотности распределения относительных частот $f^*(x)$, рассчитанных по формуле (15).

***Пример 1:*** Результаты $n = 48$ измерений активной мощности, Р, МВт, потребляемой предприятием, представлены в виде статистического ряда распределения:

Таблица 4

| Разряды Р, МВт | 2÷2,1 | 2,1÷2,2 | 2,2÷2,3 | 2,3÷2,4 | 2,4÷2,5 | 2,5÷2,6 | 2,6÷2,7 | 2,7÷2,8 | 2,8÷2,9 | 2,9÷3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота $m_i$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 7 | 10 | 12 | 7 | 5 |

Построить гистограмму данного статистического ряда. Очистить полученные исходные данные с использованием построенной гистограммы.

***Решение.*** Результатом решения данной задачи является гистограмма, представленная на рис. 4. Значения СВ Р в диапазоне (2 – 2,1)МВт можно отнести к локальному выбросу и отбросить. Для дальнейшего анализа остаются значения СВ Р в диапазоне (2,4 – 3,0)МВт.

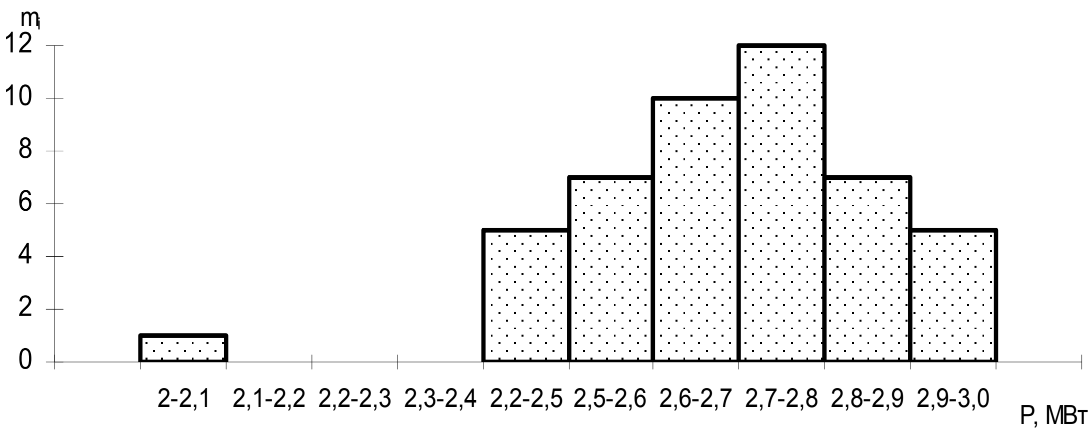


Рис. 4

Гистограмму и полигон статистического ряда удобно также использовать для предварительной оценки вида закона распределения, с которым согласуется данная выборкой. Достигается это визуальной оценкой формы гистограммы или полигона соответствующих очищенных исходных данных, насколько она соответствует известным законам распределения. Например, гистограмма, представленная на рис.4, напоминает кривую Гаусса, поэтому можно выдвинуть гипотезу о нормальном распределении СВ активной мощности, потребляемой предприятием.

## 4. ВЫРАВНИВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Во всяком статистическом распределении неизбежно присутствуют элементы случайности, связанные с тем, что число опытов ограничено, что произведены именно те, а не другие опыты, давшие именно те, а не другие результаты. Только при очень большом числе опытов эти случайности сглаживаются, и явление обнаруживает в полной мере присущие ему закономерности. На практике почти никогда не имеется такого большого числа опытов (измерений). Поэтому часто приходится решать вопрос о том, как подобрать для данного статистического распределения аналитическую формулу, выражающую лишь существенные черты статистического материала и не учитывающую случайности, связанные с недостаточным объёмом опытных данных [3]. Выравнивание статистического распределения – это замена гистограммы относительных частот случайной величины плавной кривой, имеющей достаточно простое аналитическое выражение. Принципиальный вид выравнивающей плавной кривой выбирается заранее, чаще на основании визуальной оценки формы гистограммы.

В качестве плавной кривой, заменяющей гистограмму, используется плотность распределения вероятностей СВ X - $f(x)$ – производная функции распределения этой случайной величины:

$$f(x) = F'(x), \tag{18}$$

а следовательно функция распределения СВ X определяется:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (19)$$

Понятие плотности распределения СВ X применимо только для непрерывной случайной величины. График кривой $f(x)$ называют кривой распределения.

Одним из наиболее распространённых распределений, с которым согласуются эмпирические распределения, является нормальное (распределение Гаусса). Объяснение этому дано русским математиком А.М. Ляпуновым [4]: если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то СВ X имеет распределение, близкое к нормальному.

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной СВ, которое описывается плотностью:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(x) \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X - M(x))^2}{2\sigma(x)^2}}, \qquad (20)$$

где $M(x)$ – математическое ожидание СВ X, $\sigma(x)$ – среднеквадратическое отклонение СВ X - являются параметрами нормального распределения.

График плотности нормального распределения (рис.5) называют нормальной кривой (кривой Гаусса).

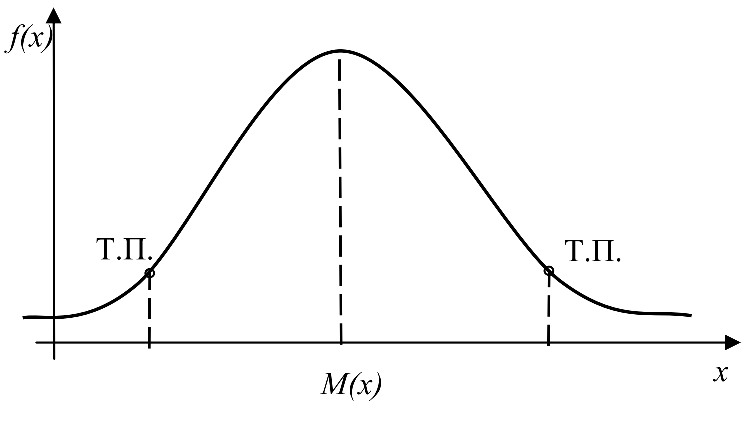


Рис.5

Свойства нормального распределения (рис.5):

1. Кривая лежит выше оси $Ox$, т.е. $f(x) > 0$;
2. Ветви кривой асимптотически приближаются к оси $Ox$, т.е. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;
3. Кривая имеет максимум в точке $\left(M(x); \dfrac{1}{\sigma(x)\cdot\sqrt{2\pi}}\right)$; кривая симметрична относительно этой точки;
4. Кривая имеет две точки перегиба (Т.П.) с координатами

$$\left(M(x)-\sigma(x); \frac{1}{\sigma(x)\cdot\sqrt{2\pi e}}\right) \text{ и } \left(M(x)+\sigma(x); \frac{1}{\sigma(x)\cdot\sqrt{2\pi e}}\right);$$

5. Площадь под кривой, ограниченная вертикальными прямыми в точках $x = M(x) \pm \sigma(x)$, равна 0,64; $x = M(x) \pm 2\cdot\sigma(x)$, равна 0,95; $x = M(x) \pm 3\cdot\sigma(x)$, равна 0,9973. Площадь под кривой в пределах $]-\infty; +\infty[$ равна единице.

На форму и распределение нормальной кривой оказывает влияние значения её параметров – $M(x)$ и $\sigma(x)$:

- изменения величины математического ожидания $M(x)$ не изменяет формы нормальной кривой, а лишь перемещает её вдоль оси Ox вправо при увеличении $M(x)$, или влево, если $M(x)$ уменьшается;
- с возрастанием $\sigma(x)$ максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой; при убывании $\sigma(x)$ кривая становится более островершинной (рис. 6).

При $M(x) = 0$ и $\sigma(x) = 1$ нормальную кривую называют нормированной.

“Нормирование” – это переход от именованной СВ X с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$ и плотностью распределения $f(x; M(x); \sigma(x))$ к нормированной СВ Z с параметрами $M(z) = 0$ и $\sigma(z) = 1$ и плотностью распределения $f(z; 0; 1)$. В этом случае осуществляется перенос начала координат в точку $x = M(x)$, а в качестве единицы масштаба выбирается $\sigma(x)$. Переход к нормированной пере-

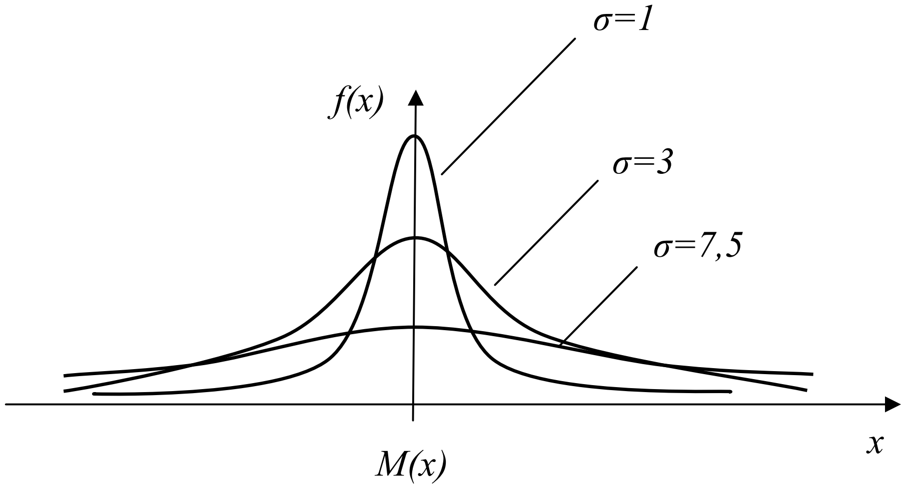


Рис.6

менной $z$ осуществляется по формуле:

$$z = \frac{x - M(x)}{\sigma(x)} \qquad (21)$$

Плотность нормированного нормального распределения $f(z)$ определяется по таблице приложения 1.

***Пример 3.*** Произведено $n$ = 50 измерений отклонения от заданного значения реактивной мощности (Q, вар), выдаваемой предприятием в сеть энергосистемы. Результаты обработки исходных данных сведены в таблицу 5. Выровнять статистическое распределение СВ Q нормированным нормальным законом.

Таблица 5

| Разряды, Q, вар | 60 ÷ 70 | 70 ÷ 80 | 80 ÷ 90 | 90 ÷ 100 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 9 | 18 | 14 | 9 |

***Решение***. Определим значения параметров нормального распределения по (10), (12):

$$M(Q)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}m_i\cdot Q_i=78{,}8\ \text{вар};$$

$$\sigma(Q)=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4}(Q_i-M(Q)\right)^2\cdot m_i}=\sqrt{96{,}9}=9{,}9\ \text{вар}.$$

Пронормируем это распределение. Для этого ширину разрядов $h$ выразим в долях $\sigma(Q)$ и получим длину нормированных разрядов:

$$\Delta z=\frac{h}{\sigma(Q)}=\frac{10}{9{,}9}=1{,}01;$$

Определяем левую границу первого разряда (по 21):

$$z_1=\frac{60-78{,}8}{9{,}9}=-1{,}9,$$

далее рассчитываем остальные границы разрядов:

$$z_2=z_1+\Delta z=-1{,}9+\Delta z=-1{,}9+1{,}01=-0{,}89,$$

$z_3=z_2+\Delta z=-0{,}89+1{,}01=0{,}12$ и т.д.

Аналогично нормируем середины разрядов. Результаты расчётов сводим в таблицу 6:

Таблица 6

| Разряды, $Q$, вар | $60 \div 70$ | $70 \div 80$ | $80 \div 90$ | $90 \div 100$ |
|---|---|---|---|---|
| Середины разрядов, $Q$, вар | 65 | 75 | 85 | 95 |
| Частота $m_i$ | 9 | 18 | 14 | 9 |
| Относительные частоты $P^*=\frac{m_i}{n}$ | 0,18 | 0,36 | 0,28 | 0,18 |
| Разряды, $z$ | (-1,9) ÷ (-0,89) | (-0,89) ÷ 0,12 | 0,12 ÷ 1,13 | 1,13 ÷ 2,14 |
| Середины разрядов, $z$ | -1,39 | -0,38 | 0,63 | 1,64 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f^*(z)=\dfrac{P^*}{\Delta z}$ | 0,18 | 0,36 | 0,28 | 0,18 |
| $f(z)$ – по прилож. 1 | 0,1518 | 0,3711 | 0,3271 | 0,1040 |

По полученным данным строим гистограмму плотности распределения относительных частот $f^*(z)$ (рис.7.). Затем по таблице приложения 1 находим значения плотности распределения вероятностей нормированного нормального распределения $f(z)$ для соответствующих значений середин разрядов.

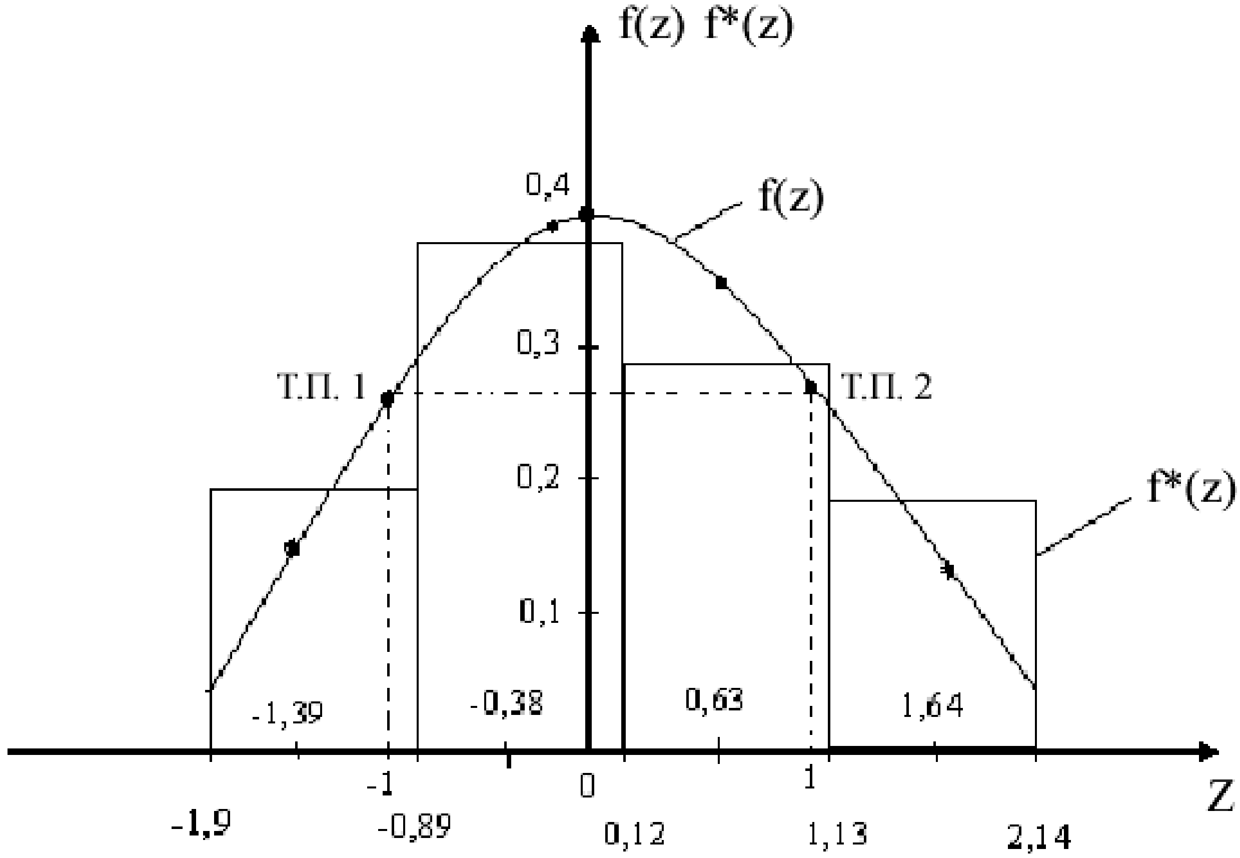


Рис.7

Для построения кривой нормированного нормального распределения следует определить ещё три дополнительных точки (рис. 7):

1) точка вершины имеет координату по оси абсцисс $M(x)$; для нормированной величины $M(z)=0$; по приложению 1 для $f(0)=0,3989$; получаем точку вершины с координатами (0; 0,3989);
2) точки перегиба имеют координаты по оси абсцисс $M(x)\pm\sigma(x)$; для нормированной величины $M(z)=0$, $\sigma(z)=1$; по приложению 1 определяем $f(1)=0,2420$; получаем точки перегиба с координатами (-1; 0,2420); (1; 0,2420).

## 5. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Во многих случаях для анализа результатов измерений исследуемой случайной величины необходимо знать закон распределения генеральной совокупности, оцениваемой с помощью полученной выборки. Если закон распределения неизвестен [1], но имеются основания предположить, что он имеет определённый вид (например, нормальный), выдвигают гипотезу: генеральная совокупность распределена по нормальному закону. Таким образом, в этой гипотезе речь идёт о виде предполагаемого распределения. Известно [5], что массовые, часто повторяющиеся события в большей или меньшей степени подчиняются нормальному закону распределения. Это касается срока службы оборудования, приборов, величин потребляемой активной и реактивной мощности, удельного электропотребления, колебания напряжения и т.д.

Возможен случай, когда закон распределения известен, а его параметры неизвестны. В этом случае выдвигаются гипотезы о предполагаемой величине параметра известного распределения.

***Статистической*** называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известного распределения [1].

***Нулевой*** (основной) называют выдвинутую гипотезу $H_0$. ***Конкурирующей*** (альтернативной) называют гипотезу $H_1$, которая противоречит нулевой.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость её проверки. Поскольку для проверки используют статистические методы, её называют статистической проверкой гипотезы.

При проверке статистических гипотез по выбранным данным могут быть допущены два вида ошибок:

– ошибка перового рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза;

– ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Последствия этих ошибок могут оказаться различными. Например, если отвергнуто правильное решение "продолжить строительство жилого дома", то эта ошибка первого рода повлечет материальный ущерб; если же принято неправильное решение "продолжить строительство", несмотря на опасность обвала стройки, то эта ошибка второго рода может повлечь гибель людей.

Вероятность совершить ошибку первого рода называется ***уровнем значимости*** и обозначается $\alpha$ .

В большинстве случаев на практике применяются ***статистические критерии значимости*** [2] — это критерии, на основании применения которых с заранее заданным уровнем значимости принимается только одно решение: "Отклонить проверяемую нулевую гипотезу". Если же для проверяемой нулевой гипотезы нет основания для её отклонения данным критерием, то утверждается, что результаты выборки не дают основания для отклонения выдвинутой нулевой гипотезы. При этом выбор уровня значимости $\alpha$ осуществляется до проверки гипотезы. При проведении технических исследований обычно принимается уровень значимости $\alpha = 0{,}05$ исходя из того, что в теории вероятностей и математической статистике события, вероятность наступления которых не превышает 5%(0,05), считают практически невозможными.

Проверка статистических гипотез осуществляется на основании данных выборки. Путем проверки соответствующих гипотез решаются такие часто возникающие задачи, как сравнение однотипных производств по удельному расходу, сравнение новой и старой технологий производства какого-либо изделия, проверки точности работы различных приборов, регуляторов и т.п. Для проверки нулевой гипотезы используют ***статистический критерий*** $K$ — специально подобранную случайную величину, точное или приближённое распределение которой известно. ***Наблюдаемым значением*** $K_{набл.}$ называют значение критерия, вычисленное по выборкам. В зависимости от вида рассматриваемого распределения критерии имеют разные обозначения: $Z$ – критерий нормального распределения; $F$ – критерий распределения Фишера; $t$ – критерий распределения Стьюдента и т.д.

## ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О РАВЕНСТВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ИМЕЮЩИХ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Требуется при заданном уровне значимости $\alpha$ проверить нулевую гипотезу $H_0$: $M(X) = M(Y)$ о равенстве математических ожиданий двух нормальных совокупностей с неизвестными, но одинаковыми дисперсиями (в случае независимых малых выборок) при альтернативной гипотезе $H_0: M(X) \neq M(Y)$.

Такая задача ставится потому, что, как правило, математическое ожидание выборок оказываются численно различными. Возникает вопрос: значимо или незначимо это различие. Если подтвердится, что нулевая гипотеза справедлива, то различие математических ожиданий незначимо (т.е. они равны) и объясняется случайными причинами. Если справедливой окажется альтернативная гипотеза, то различие математических ожиданий считается значимым.

Для проверки этой гипотезы надо вычислить наблюдаемое значение критерия [1]:

$$t_{набл.} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n_1 - 1) \cdot S(X)^2 + (n_2 - 1) \cdot S(Y)^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \ , \qquad (22)$$

где $\overline{x}, \overline{y}$ – средние значения выборок СВ $X$ и $Y$, определяемые по формуле (10); $n_1, n_2$ – объёмы выборок СВ $X$ и $Y$; $S^2(X), S^2(Y)$ - дисперсии соответствующих выборок, определяемые по формуле (13).

По таблице критических точек распределения Стьюдента (таблица приложения 3) по заданному уровню значимости $\alpha$ и числу степеней свободы

$$k = n + m - 2 \qquad (23)$$

определяется критическое значение $t_{крит.}(\alpha; k)$. Если $\left| t_{набл.} \right| < t_{крит.}(\alpha, k)$, отвергать нулевую гипотезу нет оснований; если $\left| t_{набл.} \right| > t_{крит.}(\alpha, k)$, нулевую гипотезу отвергают.

В случае, если нет оснований считать дисперсии сравниваемых выборок одинаковыми то, прежде чем сравнивать математические ожидания, следует [4] проверить гипотезу о равенстве дисперсий (п. 4.2.).

***Пример 4***. Произведены замеры отклонений напряжений на шинах ТП в дневное и ночное время суток (малые выборки): $n_Д = 5$, $n_Н = 6$. Оценки математических ожиданий этих выборок $\overline{U_Д} = 3{,}3\ В$; $\overline{U_Н} = 2{,}48\ В$ и несмещенные оценки дисперсий $S^2_{U_Д} = 0{,}25\ В2$ и $S^2_{U_Н} = 0{,}108\ В^2$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве средних значений напряжения в ночное и дневное время суток $H_0 : M(U_Д) = M(U_Н)$.

***Решение.*** Рассчитаем наблюдаемое значение критерия Стьюдента:

$$t_{набл.} = \frac{3{,}3 - 2{,}48}{\sqrt{(5-1) \cdot 0{,}25 + (6-1) \cdot 0{,}108}} \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 6(5 + 6 - 2)}{5 + 6}} = 3{,}27 .$$

По таблице приложения 3 определим критическое значение критерия при числе степеней свободы $k = 5 + 6 - 2 = 9$: $t_{крит.}(0{,}05; 9) = 2{,}26$.

Так как $\left| t_{набл.} \right| > t_{крит.}$ , гипотезу о равенстве двух центров распределений отвергаем, т.е. средние значения напряжения в дневное и в ночное время суток различны.

## 5.2 ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О РАВЕНСТВЕ ДИСПЕРСИЙ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ИМЕЮЩИХ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

На практике задача сравнения дисперсий возникает, если требуется сравнить точность приборов, инструментов, самих методов измерений и т.д. Очевидно, предпочтительнее тот прибор, инструмент и метод, который обеспечивает наименьшее рассеяние результатов измерений, т.е. наименьшую дисперсию.

Пусть генеральные совокупности $X$ и $Y$ распределены нормально. Из них извлечены выборки объемами соответственно $n$ и $m$, по которым рассчитаны несмещенные оценки дисперсий $S^2(X)$ и $S^2(Y)$. Требуется при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что дисперсии генеральных совокупностей равны между собой: $H_0 : D(X) = D(Y)$ при $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

Такая задача встает потому, что чаще всего несмещенные оценки дисперсии различны, и возникает вопрос, значимо или нет это различие. Если окажется, что нулевая гипотеза справедлива, т.е. дисперсии генеральных совокупностей равны, то различие несмещенных оценок дисперсий незначимо и объясняется случайными факторами. В противном случае численное различие между дисперсиями признается значимым, а дисперсии неравными.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей используется критерий Фишера, наблюдаемое значение которого определяется по формуле:

$$F_{набл.} = \frac{S_{б}^{2} - \text{большая из двух дисперсий}}{S_{m}^{2} - \text{меньшая из двух дисперсий}} \tag{24}$$

Далее по таблице приложения 5 находят критическое значение этого критерия $F_{крит.}(k_1;k_2)$ при числе степеней свободы, определяемом как

$$k = n - 1. \qquad (25)$$

Если $F_{набл} < F_{крит}$, нет оснований отвергать нулевую гипотезу; если $F_{набл} > F_{крит}$ – нулевая гипотеза о равенстве двух дисперсий отвергается.

***Пример 5.*** По результатам измерений двумя амперметрами значений силы тока во вторичной обмотке трансформатора тока сформировано две независимые выборки объемами $n_1$=10, $n_2$=18, по которым определены соответствующие несмещенные оценки дисперсий $S_1^2 = 1,23\ A^2$, $S_2^2 = 0,41\ A^2$. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве дисперсий генеральных совокупностей, т.е. что приборы имеют одинаковую точность.

***Решение.*** Определяем наблюдаемое значение критерия Фишера:

$$F_{набл.} = \frac{1,23}{0,41} = 3 \ .$$

По таблице приложения 5 находим критическое значение этого критерия при $k_1 = 10 - 1 = 9$, $k_2 = 18 - 1 = 17$:

$$F_{крит.}(k_1; k_2) = F(9;17) = 2,5 .$$

Поскольку $F_{набл.} > F_{кр.}$, следовательно, нулевая гипотеза о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей отвергается, т.е. приборы имеют разную точность.

При этом для осуществлений измерений следует предпочесть тот прибор, который обеспечивает большую точность, т.е. обладает меньшей дисперсией - $S_2^2 = 0,41A$.

## 5.3ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ

При обработке результатов эксперимента по виду гистограммы, полигона или из каких-либо других соображений выдвигается гипотеза о законе распределения СВ, производится оценка параметров этого распределения (п.2,3,4). Дальнейшая задача состоит в проверке выдвинутой гипотезы о законе распределения, насколько хорошо подобрана вероятностная модель ряда наблюдений.

Проверка гипотезы о виде предполагаемого распределения производится с помощью непараметрических критериев согласия. Наиболее распространенным среди них является критерий $\chi^2$ (Пирсона).

При использовании критерия $\chi^2$ (Пирсона) для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности следует иметь в виду, что объём выборки из этой совокупности должен составлять не менее 50 значений случайной величины.

Порядок проверки нулевой гипотезы о виде закона распределения с использованием критерия $\chi^2$ (Пирсона):

1. Определяются вероятности попадания СВ Х в соответствующие разряды $x_{\text{i-1}}; x_{\text{i}}$:

$$P(x_{i-1} < x < x_i) = \Phi_0\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S(x)}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}}{S(x)}\right), \tag{26}$$

где $\Phi_0$ – функция Лапласа, значение которой определяется в соответствии с таблицей приложения 2.

2. Вычисляют наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл}$:

$$\chi^2_{набл.} = n\sum_{i=1}^{r}\frac{(P_i - P_i^*)^2}{P_i} = \sum_{i=1}^{r}\frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i}, \tag{27}$$

где $r$ – число разрядов; $P_i^*$ – относительная частота попадания СВ Х в i-ый разряд; $P_i$ – вероятность попадания СВ Х в i-ый разряд; $m_i$ – частота попадания СВ Х в i-ый разряд; $n$ – объём выборки.

3. Находят критическое значение критерия $\chi^2_{крит.}(\alpha; k)$ (по таблице приложения 4) в зависимости от $\alpha$ – уровня значимости и $k$ – числа степеней свободы:

$$k = r - 1 - S, \tag{28}$$

где $r$ – число разрядов; $S$ - число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

3. Если $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{крит.}$, гипотеза о предполагаемом виде закона распределения верна; если $\chi^2_{набл.} > \chi^2_{крит.}$, гипотеза о предполагаемом виде закона распределения отвергается.

Для определения вероятности попадания СВ Х в соответствующий разряд применяется функция Лапласа:

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{29}$$

где $z$ – нормированная СВ Х, рассчитываемая по формуле (21).

Функция Лапласа равна вероятности попадания СВ $z$ в интервал от $z = 0$ до $z = z_1$ и геометрически она представляет собой площадь под нормированной кривой, ограниченную вертикальными прямыми $z = 0$ и $z = z_1$ (рис. 5).

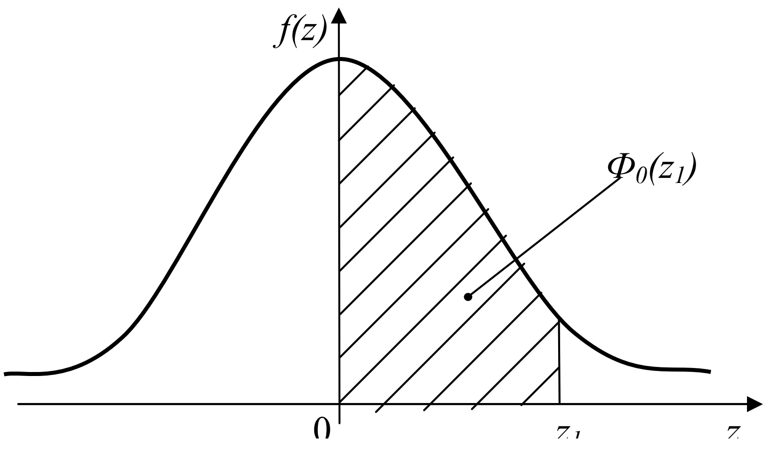


Рис. 5

С использованием формулы Лапласа можно определить вероятность попадания СВ в некоторый интервал по (26), а также вероятность непревышения некоторой заданной величины:

$$P(X < x_1) = 0,5 + \Phi_0\left(\frac{x_1 - \overline{x}}{S(x)}\right). \tag{30}$$

Свойства функции Лапласа:

1. $\Phi_0(0) = 0$;
2. $\Phi_0(-\infty) = -0,5$;
3. $\Phi_0(\infty) = 0,5$;
4. $\Phi_0(-z) = -\Phi_0(z)$.

Значения $\Phi_0(z)$ табулированы и определяются по таблице приложения 2.

***Пример 6.*** На основании исходных данных и произведенных расчётов примера 3 (п.4), результаты расчетов которого приведены в таблице 7, проверить с помощью критерия $\chi^2$ (Пирсона) гипотезу о выравнивании статистического распределения СВ реактивной мощности $Q$ нормированным нормальным законом.

Таблица 7

| Разряды, $z$ | (-1,9) $\div$ (-0,89) | (-0,89) $\div$ 0,12 | 0,12 $\div$ 1,13 | 1,13 $\div$ 2,14 |
|---|---|---|---|---|
| Частоты, $P^*$ | 0,18 | 0,36 | 0,28 | 0,18 |
| Вероятности, $P$ | 0,158 | 0,3611 | 0,323 | 0,121 |

Вероятность попадания СВ $z$ в соответствующий разряд определяется с использованием функции Лапласа по формуле (4). Вероятность попадания в первый разряд:

$$P(-1,9 < z < -0,89) = \Phi_0(-0,89) - \Phi_0(-1,9) = \Phi_0(0,89) + \Phi_0(1,9) =$$
$$= -0,3133 + 0,4713 = 0,158.$$

Аналогично находим вероятности попадания СВ $z$ в остальные разряды.

Наблюдаемое значение критерия (по 27):

$$\chi^2_{набл.} = n \cdot \sum_{i=1}^{r} \frac{(P_i^* - P_i)^2}{P_i} = 50 \cdot \sum_{i=1}^{4} \frac{(P_i^* - P_i)^2}{P_i} = 1,88$$

По таблице приложения 4 находим для $\alpha = 0,05$ и $k = 4 - 1 - 2 = 1$

$\chi^2_{крит.}(0,05;1) = 3,8$. Т.к. $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{кр.}$, нет оснований отвергать нулевую гипотезу о нормальном распределении случайной величины реактивной мощности $Q$.

## 6 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОЦЕНОК МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Точечная оценка неизвестного параметра $\Theta$, найденного по выборке объёмом $n$ из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$, не позволяет непосредственно ответить на вопрос, какую ошибку мы совершаем, принимая вместо точного значения неизвестного параметра некоторое его приближенное значение (оценку) $\hat{\Theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$. При выборке малого объёма точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т. е. приводить к грубым ошибкам.

В связи с этим, при выборках малого объёма нужно пользоваться интервальной оценкой, основанной на определении некоторого интервала, внутри которого с определённой вероятностью находятся неизвестные значения параметра $\Theta$.

Пусть найденная по результатам выборки объёмом $n$ статическая характеристика $\hat{\Theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ является точечной оценкой неизвестного параметра $\Theta$. Чем меньше разность $\left|\Theta - \hat{\Theta}\right|$, тем лучше качество оценки, тем точнее оценка. Таким образом, положительное число $\varepsilon$, называемое ***предельной погрешностью***, характеризует точность оценки

$$\left|\Theta - \hat{\Theta}\right| < \varepsilon \qquad (31)$$

Однако статистические методы не позволяют утверждать, что оценка $\hat{\Theta}$ обязательно удовлетворяет неравенству (31), можно лишь говорить о вероятности $\gamma$, с которой это неравенство осуществляется.

***Доверительной вероятностью (надёжностью)*** называют вероятность $P = (1-\alpha) = \gamma$ выполнения неравенства (31), где $\alpha$ – уровень значимости. Обычно доверительной вероятностью оценки задаются заранее. В технических расчётах обычно полагают $\gamma = 1-\alpha = 1-0{,}05 = 0{,}95$. Доверительная вероятность точечной оценки показывает, что при извлечении выборок объёмом $n$ из одной и той же генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$ в $(1-\alpha)\cdot 100\%$ случаях параметр $\Theta$ будет накрываться интервалом:

$$P\left(\left|\Theta - \hat{\Theta}\right| < \varepsilon\right) = \gamma, \qquad (32)$$

$$P\left(\hat{\Theta} - \varepsilon < \Theta < \hat{\Theta} + \varepsilon\right) = \gamma. \qquad (33)$$

Т.е. неизвестный параметр $\Theta$ заключён внутри интервала ($\hat{\Theta} - \varepsilon$; $\hat{\Theta} + \varepsilon$), который называется ***доверительным интервалом (точностью)***, накрывающим неизвестный параметр $\Theta$ с заданной доверительной вероятностью. Длина доверительного интервала равна $2\varepsilon$.

В практических задачах важную роль играет длина доверительного интервала, причем, чем меньше его длина, тем точнее оценка. Если же длина доверительного интервала велика, то оценка малопригодна для практики.

Рассмотренные величины $\varepsilon$ и $\gamma$ связаны между собой и, кроме того, зависят от объёма выборки $n$. Поэтому при интервальном оценивании неизвестного параметра может решаться одна из трех возможных задач:

1) найти доверительный интервал, определяемый предельной погрешностью $\varepsilon$, покрывающий с заданной доверительной вероятностью $\gamma$ неизвестный параметр, оценка которого определяется на основании выборки объёмом $n$;

2) определить, с какой доверительной вероятностью $\gamma$ покрывает доверительный интервал длинной $2\varepsilon$ искомый параметр, оцениваемый по выборке объёмом $n$;
3) найти минимальный объём выборки $n$, на основании которого можно было бы оценить искомый параметр с предельной погрешностью, не превышающей $\varepsilon$ и доверительной вероятностью $\gamma$.

В случае, когда СВ X распределена по нормальному закону, а среднеквадратическое отклонение неизвестно, точечные оценки параметров нормального распределения – математического ожидания и среднеквадратического отклонения – определяются по выборке объёмом $n$ по формулам (10 - 14).

Значение предельной погрешности $\varepsilon$, определяющей длину доверительного интервала, рассчитываются по формуле:

$$\varepsilon = t_{\alpha,k} \cdot \frac{S(x)}{\sqrt{n}}, \tag{34}$$

где $t_{\alpha,k}$ – квантиль распределения Стьюдента, определяемый по таблице приложения 3 в зависимости от $\alpha$-уровня значимости и числа степеней свободы $k = n - 1$.

Доверительная вероятность того, что доверительный интервал покроет неизвестный параметр, определяется решением задачи, обратной выше. Сначала находится значение квантиля распределения Стьюдента:

$$t_{\alpha,k} = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{S(x)}, \tag{35}$$

а затем по таблице приложения 3 определяется уровень значимости $\alpha$, которому соответствует данное значение квантиля. Искомая вероятность $\gamma = 1 - \alpha$.

Минимальный объём выборки, обеспечивающий непревышение заданной предельной погрешности при заданной доверительной вероятности можно рассчитать по формуле:

$$n_{\min} = t^2_{\alpha,k} \cdot \frac{S^2(x)}{\varepsilon^2} \tag{36}$$

Анализируя формулы (34,35,36), можно сделать следующие выводы:

- при увеличении объёма выборки $n$ уменьшается предельная погрешность $\varepsilon$, т.е. возрастает точность оценки;
- увеличение доверительной вероятности $\gamma$ приводит к увеличению значения квантиля $t_{\alpha,k}$ (см. приложение 3), а, следовательно, к увеличению длины доверительного интервала (32), т.е. к снижению точности оценки.

***Пример 7.*** По результатам 10 измерений потребляемой активной мощности $P$,кВт, рассчитаны $M(P) = 21\,кВт$, $S(P) = 3{,}8\,кВт$. Построить доверительный интервал для математического ожидания СВ Р. Доверительную вероятность принять $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}95$.

***Решение:*** Найдём предельную погрешность оценки по (34):

$$\varepsilon = t_{\alpha,k} \frac{S(P)}{\sqrt{n}}.$$

Значение квантиля $t_{\alpha,k}$ для $\alpha = 0{,}05$ и $k = n - 1 = 10 - 1 = 9$ определим по таблице приложения 3 распределения Стьюдента: $t_{0,05;\,9} = 2{,}26$.

$$\varepsilon = 2{,}26 \cdot \frac{3{,}8}{\sqrt{10}} = 2{,}72\,кВт.$$

Рассчитаем границы доверительного интервала:

$\overline{a} - \varepsilon = 21 - 2{,}72 = 18{,}28\,кВт$;

$\overline{a} + \varepsilon = 21 + 2{,}72 = 23{,}72\,кВт$.

Таким образом с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}95$ истинное значение математического ожидания СВ Р лежит в диапазоне $(18{,}28\ кВт;\ 23{,}72\ кВт)$.

***Пример 8.*** По выборке объёмом $n = 16$ результатов измерения погрешностей измерения амперметра $I, A$ определены средние значения погрешности измерения $M(I) = a = 20{,}2\ A$ и оценка среднеквадратического отклонения $S(I) = 0{,}8\ A$. Определить вероятность непревышения предельной погрешности $\varepsilon = 0{,}43\ A$.

***Решение:*** Определим по (35) значение квантиля распределения Стьюдента:

$$t_{\alpha,k} = \varepsilon \frac{\sqrt{n}}{S(I)} = 0{,}43 \cdot \frac{\sqrt{16}}{0{,}8} = 2{,}13$$

По таблице приложения 3 найдём значение уровня значимости $\alpha$, которому соответствует данное значение квантиля, при $k = n - 1 = 15$:

$$\alpha = 0{,}05.$$

Тогда искомая вероятность: $\gamma = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

***Пример 9.*** Произведено $n$ = 18 измерений значения СВ коэффициента мощности, $\cos\varphi$. По результатам замеров рассчитаны значения $M(\cos\varphi) = a = 0{,}984$ и $S(\cos\varphi) = 0{,}092$. Найти минимальное число измерений, которое необходимо выполнить, что бы с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}95$ можно было утверждать, что предельная погрешность точечной оценки значения коэффициента мощности не превысила 0,003.

***Решение:*** Искомую величину определим по (36):

$$n_{\min} = t^2_{\alpha,k} \frac{S^2(\cos\varphi)}{\varepsilon^2}.$$

Значение $t^2_{\alpha,k}$ находим по таблице приложения 3 для $\alpha = 0{,}05$ и $k = n - 1 = 17$:

$$t_{0,05;\,17} = 2{,}11.$$

$$n_{\min} = 2{,}11^2 \cdot \frac{0{,}0092^2}{0{,}003^2} = 41{,}87 \approx 42 \text{ измерения.}$$

Таким образом, для того, чтобы предельная погрешность истинного значения $\cos\varphi$ не превышала $\varepsilon = 0,003$ с доверительной вероятностью 0,95, необходимо помимо 18 проделанных измерений произвести ещё $42 - 18 = 24$ измерения.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

**Таблица значений функции** $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3652 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |

Приложение 2

**Таблица значений функции Лапласа** $\Phi_o(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-t^2/2}\,dt$

| $z$ | $\Phi_o(z)$ | $z$ | $\Phi_o(z)$ | $z$ | $\Phi_o(z)$ | $z$ | $\Phi_o(z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 0,24 | 0,0948 | 0,48 | 0,1844 | 0,72 | 0,2642 |
| 0,01 | 0,0040 | 0,25 | 0,0987 | 0,49 | 0,1879 | 0,73 | 0,2673 |
| 0,02 | 0,0080 | 0,26 | 0,1026 | 0,50 | 0,1915 | 0,74 | 0,2703 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,27 | 0,1064 | 0,51 | 0,1950 | 0,75 | 0,2734 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,28 | 0,1103 | 0,52 | 0,1985 | 0,76 | 0,2764 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,29 | 0,1141 | 0,53 | 0,2019 | 0,77 | 0,2794 |
| 0,06 | 0,0239 | 0,30 | 0,1179 | 0,54 | 0,2054 | 0,78 | 0,2823 |
| 0,07 | 0,0279 | 0,31 | 0,1217 | 0,55 | 0,2088 | 0,79 | 0,2852 |
| 0,08 | 0,0319 | 0,32 | 0,1255 | 0,56 | 0,2123 | 0,80 | 0,2881 |
| 0,09 | 0,0359 | 0,33 | 0,1293 | 0,57 | 0,2157 | 0,81 | 0,2910 |
| 0,10 | 0,0398 | 0,34 | 0,1331 | 0,58 | 0,2190 | 0,82 | 0,2939 |
| 0,11 | 0,0438 | 0,35 | 0,1368 | 0,59 | 0,2224 | 0,83 | 0,2967 |
| 0,12 | 0,0478 | 0,36 | 0,1406 | 0,60 | 0,2257 | 0,84 | 0,2995 |
| 0,13 | 0,0517 | 0,37 | 0,1443 | 0,61 | 0,2291 | 0,85 | 0,3023 |
| 0,14 | 0,0557 | 0,38 | 0,1480 | 0,62 | 0,2324 | 0,86 | 0,3051 |
| 0,15 | 0,0596 | 0,39 | 0,1517 | 0,63 | 0,2357 | 0,87 | 0,3078 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,40 | 0,1554 | 0,64 | 0,2389 | 0,88 | 0,3106 |
| 0,17 | 0,0675 | 0,41 | 0,1591 | 0,65 | 0,2422 | 0,89 | 0,3133 |
| 0,18 | 0,0714 | 0,42 | 0,1628 | 0,66 | 0,2454 | 0,90 | 0,3159 |
| 0,19 | 0,0753 | 0,43 | 0,1664 | 0,67 | 0,2486 | 0,91 | 0,3186 |
| 0,20 | 0,0793 | 0,44 | 0,1700 | 0,68 | 0,2517 | 0,92 | 0,3212 |
| 0,21 | 0,0832 | 0,45 | 0,1736 | 0,69 | 0,2549 | 0,93 | 0,3238 |
| 0,22 | 0,0871 | 0,46 | 0,1772 | 0,70 | 0,2580 | 0,94 | 0,3264 |
| 0,23 | 0,0910 | 0,47 | 0,1808 | 0,71 | 0,2611 | 0,95 | 0,3289 |

*Продолжение прилож. 2*

| $z$ | $\Phi_o(z)$ | $z$ | $\Phi_o(z)$ | $z$ | $\Phi_o(z)$ | $z$ | $\Phi_o(z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,96 | 0,3315 | 1,37 | 0,4147 | 1,78 | 0,4625 | 2,30 | 0,4909 |
| 0,97 | 0,3340 | 1,38 | 0,4162 | 1,79 | 0,4633 | 2,38 | 0,4913 |
| 0,98 | 0,3365 | 1,39 | 0,4177 | 1,80 | 0,4641 | 2,40 | 0,4918 |
| 0,99 | 0,3389 | 1,40 | 0,4192 | 1,81 | 0,4649 | 2,42 | 0,4922 |
| 1,00 | 0,3413 | 1,41 | 0,4207 | 1,82 | 0,4056 | 2,44 | 0,4927 |
| 1,01 | 0,3438 | 1,42 | 0,4222 | 1,83 | 0,4664 | 2,46 | 0,4931 |
| 1,02 | 0,3461 | 1,43 | 0,4235 | 1,84 | 0,4671 | 2,48 | 0,4934 |
| 1,03 | 0,3485 | 1,44 | 0,4251 | 1,85 | 0,4678 | 2,50 | 0,4938 |
| 1,04 | 0,3508 | 1,45 | 0,4265 | 1,86 | 0,4686 | 2,52 | 0,4941 |
| 1,05 | 0,3531 | 1,46 | 0,4279 | 1,87 | 0,4693 | 2,54 | 0,4945 |
| 1,06 | 0,3554 | 1,47 | 0,4292 | 1,83 | 0,4699 | 2,50 | 0,4948 |
| 1,07 | 0,3577 | 1,48 | 0,4306 | 1,89 | 0,4706 | 2,58 | 0,4951 |
| 1,08 | 0,3599 | 1,49 | 0,4319 | 1,90 | 0,4713 | 2,60 | 0,4953 |
| 1,09 | 0,3621 | 1,50 | 0,4332 | 1,91 | 0,4719 | 2,62 | 0,4956 |
| 1,10 | 0,3643 | 1,51 | 0,4345 | 1,92 | 0,4726 | 2,64 | 0,4959 |
| 1,11 | 0,3665 | 1,52 | 0,4357 | 1,93 | 0,4732 | 2,66 | 0,4961 |
| 1,12 | 0,3686 | 1,53 | 0,4370 | 1,94 | 0,4738 | 2,68 | 0,4963 |
| 1,13 | 0,3708 | 1,54 | 0,4382 | 1,95 | 0,4744 | 2,70 | 0,4965 |
| 1,14 | 0,3729 | 1,55 | 0,4394 | 1,96 | 0,4750 | 2,72 | 0,4967 |
| 1,15 | 0,3749 | 1,56 | 0,4406 | 1,97 | 0,4756 | 2,74 | 0,4969 |
| 1,16 | 0,3770 | 1,57 | 0,4418 | 1,98 | 0,4761 | 2,76 | 0,4971 |
| 1,17 | 0,3790 | 1,58 | 0,4429 | 1,99 | 0,4767 | 2,78 | 0,4973 |
| 1,18 | 0,3810 | 1,59 | 0,4441 | 2,00 | 0,4772 | 2,80 | 0,4974 |
| 1,19 | 0,3830 | 1,60 | 0,4452 | 2,02 | 0,4783 | 2,82 | 0,4976 |
| 1,20 | 0,3849 | 1,61 | 0,4463 | 2,04 | 0,4793 | 2,84 | 0,4977 |
| 1,21 | 0,3869 | 1,62 | 0,4474 | 2,06 | 0,4803 | 2,86 | 0,4979 |
| 1,22 | 0,3883 | 1,63 | 0,4484 | 2,08 | 0,4812 | 2,88 | 0,4980 |
| 1,23 | 0,3907 | 1,64 | 0,4495 | 2,10 | 0,4821 | 2,90 | 0,4981 |
| 1,24 | 0,3925 | 1,65 | 0,4505 | 2,12 | 0,4830 | 2,92 | 0,4982 |
| 1,25 | 0,3944 | 1,60 | 0,4515 | 2,14 | 0,4838 | 2,94 | 0,4984 |
| 1,26 | 0,3962 | 1,67 | 0,4525 | 2,16 | 0,4846 | 2,96 | 0,4985 |
| 1,27 | 0,3980 | 1,68 | 0,4535 | 2,18 | 0,4854 | 2,98 | 0,4986 |
| 1,28 | 0,3997 | 1,69 | 0,4545 | 2,20 | 0,4861 | 3,00 | 0,49865 |
| 1,29 | 0,4015 | 1,70 | 0,4554 | 2,22 | 0,4868 | 3,20 | 0,49931 |
| 1,30 | 0,4032 | 1,71 | 0,4564 | 2,24 | 0,4875 | 3,40 | 0,49966 |
| 1,31 | 0,4049 | 1,72 | 0,4573 | 2,26 | 0,4881 | 3,60 | 0,499841 |
| 1,32 | 0,4066 | 1,73 | 0,4582 | 2,28 | 0,4887 | 3,80 | 0,499928 |
| 1,33 | 0,4082 | 1,74 | 0,4591 | 2,30 | 0,4893 | 4,00 | 0,499968 |
| 1,34 | 0,4099 | 1,75 | 0,4599 | 2,32 | 0,4898 | 4,50 | 0,499997 |
| 1,35 | 0,4115 | 1,76 | 0,4608 | 2,34 | 0,4904 | 5,00 | 0,499997 |
| 1,36 | 0,4131 | 1,77 | 0,4616 | | | | |

П р и л о ж е н и е 3

**Критические точки распределений Стьюдента**

| Число степеней свободы k | Уровень значимости $\alpha$ (двусторонняя критическая область) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,002 | 0,001 |
| 1 | 6,31 | 12,7 | 31,82 | 63,7 | 318,3 | 637,0 |
| 2 | 2,92 | 4,30 | 6,97 | 9,92 | 22,33 | 31,6 |
| 3 | 2,35 | 3,18 | 4,54 | 5,84 | 10,22 | 12,9 |
| 4 | 2,13 | 2,78 | 3,75 | 4,60 | 7,17 | 8,61 |
| 5 | 2,01 | 2,57 | 3,37 | 4,03 | 5,89 | 6,86 |
| 6 | 1,94 | 2,45 | 3,14 | 3,71 | 5,21 | 5,96 |
| 7 | 1,89 | 2,36 | 3,00 | 3,50 | 4,79 | 5,40 |
| 8 | 1,86 | 2,31 | 2,90 | 3,36 | 4,50 | 5,04 |
| 9 | 1,83 | 2,26 | 2,82 | 3,25 | 4,30 | 4,78 |
| 10 | 1,81 | 2,23 | 2,76 | 3,17 | 4,14 | 4,59 |
| 11 | 1,80 | 2,20 | 2,72 | 3,11 | 4,03 | 4,44 |
| 12 | 1,78 | 2,18 | 2,68 | 3,05 | 3,93 | 4,32 |
| 13 | 1,77 | 2,16 | 2,65 | 3,01 | 3,85 | 4,22 |
| 14 | 1,76 | 2,14 | 2,62 | 2,98 | 3,79 | 4,14 |
| 15 | 1,75 | 2,13 | 2,60 | 2,95 | 3,73 | 4,07 |
| 16 | 1,75 | 2,12 | 2,58 | 2,92 | 3,69 | 4,01 |
| 17 | 1,74 | 2,11 | 2,57 | 2,90 | 3,65 | 3,96 |
| 18 | 1,73 | 2,10 | 2,55 | 2,88 | 3,61 | 3,92 |
| 19 | 1,73 | 2,09 | 2,54 | 2,86 | 3,58 | 3,88 |
| 20 | 1,73 | 2,09 | 2,53 | 2,85 | 3,55 | 3,85 |
| 21 | 1,72 | 2,08 | 2,52 | 2,83 | 3,53 | 3,82 |
| 22 | 1,72 | 2,07 | 2,51 | 2,82 | 3,51 | 3,79 |
| 23 | 1,71 | 2,07 | 2,50 | 2,81 | 3,49 | 3,77 |
| 24 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,80 | 3,47 | 3,74 |
| 25 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,79 | 3,45 | 3,72 |
| 26 | 1,71 | 2,06 | 2,48 | 2,78 | 3,44 | 3,71 |
| 27 | 1,71 | 2,05 | 2,47 | 2,77 | 3,42 | 3,69 |
| 28 | 1,70 | 2,05 | 2,46 | 2,76 | 3,40 | 3,66 |
| 29 | 1,70 | 2,05 | 2,46 | 2,76 | 3,40 | 3,66 |
| 30 | 1,70 | 2,04 | 2,46 | 2,75 | 3,39 | 3,65 |
| 40 | 1,68 | 2,02 | 2,42 | 2,70 | 3,31 | 3,55 |
| 60 | 1,67 | 2,00 | 2,39 | 2,66 | 3,23 | 3,46 |
| 120 | 1,66 | 1,98 | 2,36 | 2,62 | 3,17 | 3,37 |
| $\infty$ | 1,64 | 1,96 | 2,33 | 2,58 | 3,09 | 3,29 |

Приложение 4

## Критические точки распределения $\chi^2$

| Число степеней свободы k | Уровень значимости α | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0,01 | 0,025 | 0,05 | 0,10 | 0,20 |
| 1 | 6,6 | 5,0 | 3,8 | 2,706 | 1,642 |
| 2 | 9,2 | 7,4 | 6,0 | 4,605 | 3,219 |
| 3 | 11,3 | 9,4 | 7,8 | 6,251 | 4,642 |
| 4 | 13,3 | 11,1 | 9,5 | 7,779 | 5,989 |
| 5 | 15,1 | 12,8 | 11,1 | 9,236 | 7,289 |
| 6 | 16,8 | 14,4 | 12,6 | 10,645 | 8,558 |
| 7 | 18,5 | 16,0 | 14,1 | 12,017 | 9,803 |
| 8 | 20,1 | 17,5 | 15,5 | 13,362 | 11,030 |
| 9 | 21,7 | 19,0 | 16,9 | 14,684 | 12,242 |
| 10 | 23,2 | 20,5 | 18,3 | 15,987 | 13,442 |
| 11 | 24,7 | 21,9 | 19,7 | 17,275 | 14,631 |
| 12 | 26,2 | 23,3 | 21,0 | 18,549 | 15,812 |
| 13 | 27,7 | 24,7 | 22,4 | 19,812 | 16,985 |
| 14 | 29,1 | 26,1 | 23,7 | 21,064 | 18,151 |
| 15 | 30,6 | 27,5 | 25,0 | 22,307 | 19,311 |
| 16 | 32,0 | 28,8 | 26,3 | 23,542 | 20,465 |
| 17 | 33,4 | 30,2 | 27,6 | 24,769 | 21,615 |
| 18 | 34,8 | 31,5 | 28,9 | 25,989 | 22,760 |
| 19 | 36,2 | 32,9 | 30,1 | 27,204 | 23,900 |
| 20 | 37,6 | 34,2 | 31,4 | 28,412 | 25,038 |
| 21 | 38,9 | 35,5 | 32,7 | 29,615 | 26,171 |
| 22 | 40,3 | 36,8 | 33,9 | 30,813 | 27,301 |
| 23 | 41,6 | 38,1 | 35,2 | 32,007 | 28,429 |
| 24 | 43,0 | 39,4 | 36,4 | 33,196 | 29,553 |
| 25 | 44,3 | 40,6 | 37,7 | 34,382 | 30,675 |
| 26 | 45,6 | 41,9 | 38,9 | 35,563 | 31,795 |
| 27 | 47,0 | 43,2 | 40,1 | 36,741 | 32,912 |
| 28 | 48,3 | 44,5 | 41,3 | 37,916 | 34,027 |
| 29 | 49,6 | 45,7 | 42,6 | 39,087 | 35,139 |
| 30 | 50,9 | 47,0 | 43,8 | 40,256 | 36,250 |

Приложение 5

## Распределения Фишера

Критические точки:

$k_1$ – число степеней свободы большей дисперсии;

$k_2$ – число степеней свободы меньшей дисперсии.

| $k_2$ \ $k_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161,45 | 99,50 | 215,72 | 224,57 | 230,17 | 233,97 | 238,89 | 243,91 | 249,04 | 254,32 |
| 2 | 18,512 | 18,999 | 19,163 | 19,248 | 19,298 | 19,329 | 19,371 | 19,414 | 19,453 | 19,496 |
| 3 | 10,129 | 9,552 | 9,276 | 9,118 | 9,014 | 8,941 | 8,844 | 8,744 | 8,638 | 8,527 |
| 4 | 7,710 | 6,945 | 6,591 | 6,388 | 6,257 | 6,164 | 6,041 | 5,912 | 5,774 | 5,628 |
| 5 | 6,607 | 5,786 | 5,410 | 5,192 | 5,050 | 4,950 | 4,818 | 4,678 | 4,527 | 4,365 |
| 6 | 5,9871 | 5,143 | 4,756 | 4,534, | 4,388 | 4,284 | 4,147 | 4,000 | 3,841 | 3,669 |
| 7 | 5,591 | 4,737 | 4,347 | 4,121 | 3,972 | 3,866 | 3,725 | 3,574 | 3,410 | 3,230 |
| 8 | 5,317 | 4,459 | 4,067 | 3,838 | 3.688 | 3,580 | 3,438 | 3,284 | 3,116 | 2,928 |
| 9 | 5,117 | 4,256 | 3,863 | 3,633 | 3,482 | 3,374 | 3,230 | 3,073 | 2,900 | 2,707 |
| 10 | 4,965 | 4,103 | 3,708 | 3,478 | 3,326 | 3,217 | 3,072 | 2,913 | 2,737 | 2,538 |
| 11 | 4,844 | 3,982 | 3,587 | 3,3571 | 3,204 | 3,094 | 2,948 | 2,788 | 2,609 | 2,405 |
| 12 | 4,747 | 3,885 | 3,490 | 3,259 | 3.Г06 | 2,999 | 2,848 | 2,686 | 2,505 | 2,296 |
| 13 | 4,66 | 3,805 | 3,410 | 3,179 | 3,025 | 2,915 | 2,767 | 2,604 | 2,420 | 2,207 |
| 14 | 4,600 | 3,739 | 3,344 | 3,112 | 2,958 | 2,848 | 2,699 | 2,534 | 2,349 | 2,131 |
| 15 | 4,543 | 3,683 | 3,287 | 3,056 | 2,901 | 2,790 | 2,641 | 2,475 | 2,288 | 2,066 |
| 16 | 4,494 | 3,634 | 3,239 | 3,0071 | 2,853 | 2,7411 | 2,591 | 2,424 | 2,2351 | 2,010 |
| 17 | 4,45 | 3,592 | 3,197 | 2,965 | 2,810 | 2,699 | 2,548 | 2,381 | 2,190 | 1,961 |
| 18 | 4,414 | 3,555 | 3,160 | 2,928 | 2,773 | 2,661 | 2,510 | 2,342 | 2,150 | 1,917 |
| 19 | 4,381 | 3,522 | 3,127 | 2,895 | 2,740 | 2,629 | 2,477 | 2,308 | 2,114 | 1,878 |
| 20 | 4,351 | 3,493 | 3,098 | 2,866 | 2,711 | 2,599 | 2,447 | 2,278 | 2,083 | 1,843 |
| 21 | 4,325 | 3,467 | 3,072 | 2,840 | 2,6851 | 2,573 | 2,421 | 2,2501 | 2,054 | 1,812 |
| 22 | 4,301 | 3,443 | 3,049 | 2,817 | 2,661 | 2,549 | 2,397 | 2,226 | 2,028 | 1,783 |
| 23 | 4,279 | 3,422 | 3,028 | 2,795 | 2,640 | 2,528 | 2,375 | 2,203 | 2,005 | 1,757 |
| 24 | 4,260 | 3,403 | 3,009 | 2,777 | 2,621 | 2,508 | 2,355 | 2,183 | 1,984 | 1,733 |
| 25 | 4,242 | 3,385 | 2,991 | 2,759 | 2,603 | 2,490 | 2,337 | 2,165 | 1,965 | 1,711 |
| 26 | 4,225 | 3,369 | 2,975 | 2,743 | 2,5871 | 2,474 | 2,321 | 2,148 | 1,947 | 1,691 |
| 27 | 4,210 | 3,354 | 2,961 | 2,728 | 2,572 | 2,459 | 2,305 | 2,132 | 1,930 | 1,672 |
| 28 | 4,196 | 3,340 | 2,947 | 2,714 | 2,558 | 2,445 | 2,292 | 2,118 | 1,915 | 1,654 |
| 29 | 4,183 | 3,328 | 2,934 | 2,702 | 2,545 | 2,432 | 2,278 | 2,104 | 1,901 | 1,638 |
| 30 | 4,171 | 3,316 | 2,922 | 2,690 | 2,534 | 2,421 | 2,266 | 2,092 | 1,887 | 1,622 |
| 40 | 4,085 | 3,232 | 2,839 | 2,608 | 2,449 | 2,336 | 2,180 | 2,004 | 1,793 | 1,509 |
| 60 | 4,001 | 3,151 | 2,758 | 2,523 | 2,368 | 2,254 | 2,097 | 1,918 | 1,700 | 1,389 |
| 120 | 3,920 | 3,072 | 2,680 | 2,447 | 2,290 | 2,175 | 2,106 | 1,834 | 1,608 | 1,254 |
| ∞ | 3,841 | 2,996 | 2,605 | 2,372 | 2,214 | 2,098 | 1,938 | 1,752 | 1,517 | 1,000 |

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2001. — 479 с.
2. Герасимович А.И. Математическая статистика: [ Учебное пособие для инженерно-технических и экономических специальностей ВТУЗов]. — Мн.: Выш. школа, 1983. — 279 с.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. — М.: Наука, 1988. — 480 с.
4. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. — М.: Наука, 1965. — 512 с.
5. Математические задачи сельской электрификации. Синьков В.М., Пересыпкина С.И., Филиппов Н.М. – Киев: Вища школа, 1978. – 288с.

Учебное издание

КОЗЛОВСКАЯ Влада Борисовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭНЕРГЕТИКИ

Учебно- методическое пособие
к практическим занятиям и
курсовому проектированию

Редактор Корректор
Компьютерная верстка

Подписано в печать
Формат 60х84 1/16. Бумага типографическая №2.
Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл.печ. Уч.-изд.л. Тираж Заказ

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет
Лицензия ЛВ №155 от 30.01.2003. 220013, Минск, проспект Ф.Скорины, 65.