



Министерство образования  
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра высшей математики № 1

## ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания  
и контрольные работы № 5 и № 6  
для студентов-заочников  
машиностроительных специальностей

Минск 2005

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра высшей математики №1

## ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания  
и контрольные работы № 5 и № 6  
для студентов-заочников  
машиностроительных специальностей

Минск 2005

УДК 51 (075:4)

~~ББК 22.1~~

В 93

Составители:

А. Н. Андриянчик, Н. А. Микулик, Р.Ф. Наумович,  
М. Н. Покатилова, В. И. Юринок, Т. С. Яцкевич

Рецензенты:

Н. И. Чепелев, В.А. Нифагин

Настоящие методические указания и контрольные задания предназначены для студентов II курса заочного факультета машиностроительных специальностей БНТУ.

Работа содержит программу по высшей математике, перечень рекомендуемой литературы, основные понятия по теории курса высшей математики, типовые примеры и контрольные задания.

Студент должен изучить теоретический материал по учебнику, разобрать приведенные образцы решения типовых примеров и задач, а затем выполнить контрольные задания по номеру варианта, который совпадает с двумя последними цифрами зачетной книжки (шифра) для первой задачи контрольной работы; номера последующих задач варианта получаются от прибавления к номеру предыдущей задачи числа 20. Например, если шифр содержит две последние цифры 03, номер первой задачи будет 3, номер второй задачи – 23, третьей – 43 и т. д., т. е. номерами этого варианта будут: 3, 23, 43, 63. Если номер шифра больше 20, следует выполнить вариант, номер которого равен двум последним цифрам шифра минус 20. Например, если шифр содержит две последние цифры 31, номерами этого варианта будут: 11, 31, 51, 71.

## ПРОГРАММА

### I. Ряды

Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Действия над рядами. Необходимое условие сходимости.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.

Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды.

Применение рядов к приближенным вычислениям.

Ряды Фурье по тригонометрическим системам. Разложение функций в ряды Фурье. Условия поточечной сходимости и сходимости в среднем. Применение рядов Фурье.

### II. Интегральное исчисление функций нескольких переменных

Определенный интеграл по фигуре, его механический смысл. Свойства интегралов по фигуре.

Вычисление кратных интегралов повторным интегрированием.

Замена переменных в кратных интегралах.

Вычисление криволинейных и поверхностных интегралов I и II рода, их приложения. Формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса.

### III. Элементы операционного исчисления

Преобразование Лапласа. Теорема существования и единственности. Класс оригиналов и класс изображений.

Основные теоремы операционного исчисления.

Определение оригинала по изображению с помощью таблиц и второй теоремы разложения.

Решение линейных дифференциальных уравнений и систем операционным методом.

# 1. РЯДЫ

## 1.1. Числовые ряды. Основные определения. Признаки сравнения

Выражение

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (1)$$

где  $(u_n)$  – последовательность чисел, называется *числовым рядом*, числа  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  – членами ряда,  $u_n$  – общим членом ряда.

Суммы

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \dots, S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \dots \quad (2)$$

называются *частичными суммами* ряда (1).

Если существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

то ряд (1) называется *сходящимся*, а число  $S$  – его суммой. Если же  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  не существует или  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , то ряд называется *расходящимся*.

Если в ряде отбросить первые  $k$  членов, то получится ряд

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \dots, \quad (3)$$

называемый *k-м остатком* ряда (1).

**Необходимый признак сходимости.** Если ряд (1) сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

**Следствие.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , то ряд (1) расходится.

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  называется *гармоническим рядом*. Для него

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , но ряд расходится.

**Признаки сравнения.** Рассмотрим числовые ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n; \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (5)$$

**Теорема 1.** Признак сравнения. Если, начиная с некоторого номера, выполняются неравенства  $0 \leq u_n \leq v_n$ , то из сходимости ряда (5) следует сходимость ряда (4), а из расходимости ряда (4) следует расходимость ряда (5).

**Теорема 2.** Предельный признак сравнения. Если  $u_n \geq 0, v_n > 0$  для всех  $n \geq n_0$  и существует конечный предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0$ , то ряды (4) и (5) сходятся или расходятся одновременно.

**Замечание.** При использовании признаков сравнения часто применяется ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , сходящийся при  $p > 1$  и расходящийся при  $p \leq 1$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ , сходящийся при  $|q| < 1$  и расходящийся при  $|q| \geq 1$ .

**Примеры.** Исследовать на сходимость ряды и в случае сходимости найти сумму ряда.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}.$$

**Решение.** Данный ряд - геометрическая прогрессия со знаменате-

лем  $q = \frac{1}{3}$ . Следовательно,  $S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$ ,  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2}$ , ряд

сходится.

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(n+1)}.$$

**Решение.** Так как дробь  $\frac{1}{4n(n+1)}$  представима в виде

$\frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ , то частичная сумма ряда имеет вид:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{4 \cdot 2} + \frac{1}{8 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{4n(n-1)} + \frac{1}{4n(n+1)} = \\
 &= \frac{1}{4} \left( \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right) = \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).
 \end{aligned}$$

Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{4}$ , ряд сходится и его сумма равна  $1/4$ .

3.  $2 + 5 + 8 + 11 + \dots$

**Решение.** Данный ряд - сумма членов арифметической прогрессии с разностью  $d = 3$ , поэтому

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{4 + 3(n-1)}{2} \cdot n = \frac{(1+3n)n}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{(1+3n)n}{2} = \infty, \text{ ряд расходится.}$$

Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда. В случае выполнения установить, сходится ли ряд с помощью признака сравнения.

4.  $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots$

**Решение.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$ , т.е. необходимый признак не выполняется, ряд расходится.

5.  $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$

**Решение.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$ , т.е. необходимый признак

выполняется. Исследуем сходимость данного ряда с помощью признака сравнения (теорема 1). Рассмотрим расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}. \text{ Так как } \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1} \text{ } (\ln n < n), \text{ то исходный ряд}$$

расходится.

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}.$$

**Решение.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} = 0$ . Рассмотрим сходящийся

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}}$  - сумму членов геометрической прогрессии со зна-

менателем  $q = \frac{1}{4} < 1$ . Так как  $\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} < \frac{1}{2^{2n-1}}$ , то по теореме 1

исходный ряд сходится.

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1}.$$

**Решение.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^4 + 1} = 0$ . Рассмотрим сходящийся ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  ( $p = 3 > 1$ ) и применим предельный признак сравнения

(теорема 2):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^4 + 1} : \frac{1}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n^4 + 1} = 1 \neq 0$ . Сле-

довательно, данный ряд сходится.

## 1.2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Для знакоположительных числовых рядов имеют место следующие достаточные признаки, по которым можно установить их сходимость или расходимость.

**1. Признак Даламбера.** Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ , то при  $l < 1$  ряд (6) сходится, при  $l > 1$  -

расходится. При  $l = 1$  вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

**Пример 1.** Исследовать на сходимость ряды с помощью признака Даламбера:

а)  $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} + \dots$ ;

б)  $\frac{1}{10} + \frac{1 \cdot 2}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^3} + \dots + \frac{n!}{10^n} + \dots$ .

**Решение.**

а)  $u_n = \frac{n}{3^n}$ ;  $u_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$ . Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^n}{3^{n+1} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1, \text{ то ряд сходится.}$$

б)  $u_n = \frac{n!}{10^n}$ ;  $u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$ ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!10^n}{n!10^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty. \text{ Так как } l = \infty, \text{ то данный}$$

ряд расходится.

**2. Радикальный признак Коши.** Если для знакоположительного ряда (6) существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q$ , то при  $q < 1$  ряд сходится, при  $q > 1$  - расходится. При  $q = 1$  вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

**Пример 2.** Исследовать сходимость рядов с помощью радикального признака Коши:

а)  $\frac{1}{5} + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{3}{13}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{4n+1}\right)^n + \dots$ ;

б)  $\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2^2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \frac{1}{2^3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^9 + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} + \dots$ .

**Решение.**

а) Так как  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{4n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4n+1}\right) = \frac{1}{4} < 1$ , то ряд сходится.

б) В этом случае

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right] = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1.$$

Следовательно, ряд расходится.

**3. Интегральный признак Коши.** Пусть  $f(x)$  - непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, определенная при  $x \geq 1$ . Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  сходятся или расходятся одновременно, где  $f(n) = u_n$ .

**Пример 3.** Исследовать сходимость рядов с помощью интегрального признака Коши:

а)  $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ ;

б)  $\frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{3 \ln^2 3} + \frac{1}{4 \ln^2 4} + \dots + \frac{1}{(n+1) \ln^2 (n+1)} + \dots$

**Решение.**

а) Исследуемый ряд -  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ . Здесь  $f(n) = \frac{1}{n^p}$ . Если  $p \neq 1$ , то

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} &= \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{-p+1} (b^{-p+1} - 1) = \\ &= \frac{1}{-p+1} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{если } p > 1, \\ \infty, & \text{если } p < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

т.е. интеграл сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p < 1$ . Соответственно и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  сходится, если  $p > 1$  и расходится, если

$$p < 1. \text{ При } p = 1 \text{ имеем } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty,$$

т.е. интеграл расходится. Следовательно, расходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

б) Исследуемый ряд -  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ . Здесь

$$f(n) = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}. \text{ Рассмотрим}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} &= \int_1^{+\infty} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{\ln(x+1)} \right]_1^b = \\ &= -\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{\ln(b+1)} - \frac{1}{\ln 2} \right] = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Следовательно, данный ряд сходится.

### 1.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакопеременяющиеся ряды. Признак Лейбница

$$\text{Ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (7)$$

называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

**Теорема 3.** Достаточный признак сходимости ряда (7).

$$\text{Если ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \quad (8)$$

составленный из модулей членов ряда (7), сходится, то ряд (7) также сходится.

Ряд (7) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд (8).

Сходящийся знакопеременный ряд (7) называется *условно сходящимся*, если ряд (8) расходится.

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots, \quad (9)$$

где  $u_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , называется *знакопеременяющимся*.

**Признак Лейбница.** Если члены знакопеременяющегося ряда (9) удовлетворяют условиям:

- 1)  $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > u_{n+1} > \dots$ ,
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ,

то ряд (9) сходится. Сумма его положительна и не превосходит первого члена  $u_1$ . Остаток  $r_k$  такого ряда имеет знак своего первого члена и не превосходит его по модулю:  $|r_k| \leq u_{k+1}$ .

**Примеры.** Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

$$\text{а) } \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{3^2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2} + \dots;$$

$$\text{б) } 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3};$$

$$\text{в) } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

**Решения.**

а) Ряд из модулей  $\frac{|\sin 1|}{1^2} + \frac{|\sin 2|}{2^2} + \frac{|\sin 3|}{3^2} + \dots + \frac{|\sin n|}{n^2} + \dots$  сходится по признаку сравнения, так как его члены не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

б) Условия признака Лейбница здесь выполнены: ряд - знакочередующийся,  $\frac{1}{(2n)^3} > \frac{1}{(2(n+1))^3}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n)^3} = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Следовательно, этот ряд сходится. Ряд из модулей  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  также сходится, то есть исходный ряд сходится абсолютно. Найдем сумму данного ряда с точностью 0,01. Для этого возьмем столько его членов, чтобы следующий член ряда был по модулю меньше 0,01. Тогда остаток ряда, начинающийся с этого члена, будет по модулю также меньше 0,01. Модуль четвертого члена  $\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} < 0,01$ , поэтому с точностью 0,01 име-

$$\text{ем: } S \approx 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{57}{64} \approx 0,89.$$

в) Данный знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, так как  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Этот ряд

сходится условно, так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , составленный из модулей членов данного ряда, расходится (гармонический ряд).

#### 1.4. Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда. Степенные ряды

Ряд вида  $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , членами которого являются функции  $u_n(x)$ , называется *функциональным*.

Множество всех действительных значений аргумента  $x$ , для которых функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad (10)$$

становится сходящимся числовым рядом, называется *областью сходимости* этого ряда. Функция  $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ , где  $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$ , а  $x$  принадлежит области сходимости, называется *суммой* ряда, функция  $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$  - *остатком* функционального ряда.

Для определения области сходимости ряда (10) можно использовать известные признаки сходимости числовых рядов, считая  $x$  фиксированным.

Функциональный ряд (10) называется *равномерно сходящимся* на промежутке  $p \subset R$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $n_0$ , не зависящий от  $x$ , что для всех  $n > n_0$  и для всех  $x \in p$  выполняется неравенство  $|R_n(x)| < \varepsilon$ , то есть  $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ , где  $R_n(x)$  - остаток ряда.

**Признак Вейерштрасса.** Если  $|u_n(x)| \leq C_n$ , ( $n=1, 2, \dots$ ) при  $x \in [a; b]$  и числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  сходится, то функциональный ряд (10) сходится на отрезке  $[a, b]$  абсолютно и равномерно.

**Теорема 4.** Если члены сходящегося ряда (10) имеют непрерывные производные при  $x \in [a; b]$  и ряд из производных  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  сходится равномерно на  $[a, b]$ , то ряд (10) можно дифференцировать почленно:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), x \in [a, b].$$

**Теорема 5.** Если члены ряда (10) непрерывны на  $[a, b]$  и этот ряд сходится равномерно на отрезке  $[a, b]$ , то ряд (10) можно интегрировать почленно:

$$\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

*Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n + \dots, (11)$$

где  $C_n$  и  $a$  - действительные числа. Область сходимости степенного ряда (11) имеет один из следующих видов:

$(a-R, a+R)$ ,  $[a-R, a+R)$ ,  $(a-R, a+R]$ ,  $[a-R, a+R]$ .

Число  $R$  называется *радиусом сходимости*, а интервал  $(a-R, a+R)$  - *интервалом сходимости* степенного ряда (11). Радиус сходимости можно находить по формулам:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}, \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|,$$

если эти пределы существуют. В частных случаях  $R$  может быть равен 0 или  $\infty$ .

Вопрос о сходимости степенного ряда (11) в концевых точках области сходимости, то есть при  $x = a - R$ ,  $x = a + R$ , исследуется особо (с применением известных признаков сходимости числовых рядов).

Ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда, имеют тот же радиус и интервал сходимости, и их сумма внутри интервала сходимости равна соответственно производной и интегралу от суммы первоначально-го ряда.

**Пример 1.** Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 2^{nx}$ .

**Решение.** При фиксированном  $x$  этот ряд - знакоположительный. Применим к нему признак Коши. Найдем предел

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot 2^x = 2^x; \quad l < 1 \text{ - при } 2^x < 1, \text{ т.е. при}$$

$x < 0$ . При  $l = 1$ , т.е. при  $x = 0$  данный функциональный ряд станет рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Общий член ряда  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  при  $n \rightarrow \infty$  стремится к числу  $e$ , и поэтому ряд расходится (не выполнен необходимый признак сходимости). Итак, область сходимости данного ряда  $(-\infty, 0)$ .

**Пример 2.** Можно ли почленно дифференцировать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$  в области его сходимости?

**Решение.** Областью сходимости данного ряда является вся числовая ось  $R = (-\infty, +\infty)$ , так как для любого  $x \in R$  верно неравенство  $\left| \frac{\sin nx}{n^4} \right| < \frac{1}{n^4}$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  сходится. Члены исходного ряда

имеют непрерывные производные  $\left( \frac{\sin nx}{n^4} \right)' = \frac{n \cos nx}{n^4} = \frac{\cos nx}{n^3}$ ,

ряд из производных  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$  сходится равномерно на  $R$  по признаку Вейерштрасса. Действительно, верны неравенства

$\left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $x \in R$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  сходится. По теореме 4 исходный ряд можно почленно дифференцировать в области  $R$  его сходимости, т.е.

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin nx}{n^4} \right)', \quad x \in R.$$

**Пример 3.** Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ .

**Решение.** Находим радиус сходимости ряда.

$$C_n = \frac{1}{n}, \quad C_{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1. \text{ Это означает, что}$$

исходный ряд сходится абсолютно при  $-1 < x < 1$ . Далее, иссле-

дуем сходимость ряда при  $x=\pm 1$ . Если  $x=1$ , то данный ряд становится гармоническим рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , который расходится.

Если  $x=-1$ , то получаем знакопередающийся ряд

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots, \text{ который сходится по признаку Лейб-}$$

ница. Следовательно, областью сходимости ряда является полуинтервал  $[-1, 1)$ . При  $-1 < x < 1$  ряд сходится абсолютно, при  $x = -1$  – условно.

**Пример 4.** Найти сумму ряда  $\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \dots$  ( $|x| < 1$ ).

**Решение.** Обозначим искомую сумму ряда через  $S(x)$ , т.е.

$$S(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \dots \quad (12)$$

Можно проверить, что исходный ряд при  $|x| < 1$  сходится абсолютно. Дифференцируем почленно равенство (12):

$$S'(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots = \frac{x^2}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

(применена формула суммы членов убывающей геометрической прогрессии). Отсюда, интегрируя и учитывая, что  $S(0)=0$ , находим

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{t^2}{1-t} dt = \int_0^x \left( -t - 1 - \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= -\frac{x^2}{2} - x - \ln|1-x|, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

**Пример 5.** Найти сумму ряда  $2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5x^5 + \dots$ ,  $|x| < 1$ .

**Решение.** Обозначим эту сумму ряда через  $S(x)$ , т.е.  $S(x) = 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5x^5 + \dots$ . Данное равенство перепишем так:  $S(x) = x \cdot Q(x)$ , где  $Q(x) = 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \dots$ . Почленное интегрирование последнего равенства приводит к сумме членов убывающей геометрической прогрессии:

$$\int_0^x Q(t) dt = \int_0^x 2t dt - \int_0^x 3t^2 dt + \int_0^x 4t^3 dt - \int_0^x 5t^4 dt + \dots =$$

$$= x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots = \frac{x^2}{1+x}, \quad |x| < 1.$$

Отсюда найдем  $Q(x)$ :  $Q(x) = \left( \frac{x^2}{1+x} \right)' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$ , поэтому ис-

комая сумма  $S(x)$  такова:  $S(x) = x \cdot Q(x) = x - \frac{x}{(x+1)^2}$ .

### 1.5. Разложение функции в ряд Тейлора

Если функция  $f(x)$  имеет производные всех порядков в окрестности точки  $x=a$ , то для нее можно написать ряд по степеням  $(x-a)$ :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Этот ряд называется *рядом Тейлора* функции  $f(x)$  в точке  $x=a$ .

**Теорема 6.** Если функция  $f(x)$  и все ее производные ограничены на интервале  $(a-R, a+R)$  одним и тем же числом, т.е. существует постоянная  $M > 0$  такая, что выполняется неравенство  $|f^{(n)}(x)| \leq M, x \in (a-R, a+R), n = 0, 1, 2, \dots$ , то функция  $f(x)$  представляется сходящимся к ней рядом Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad x \in (a-R, a+R). \quad (13)$$

Равенство (13) верно и в случае, когда остаточный член ряда Тейлора  $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Остаточный член  $R_n(x)$  можно вычислить по формуле:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)], \quad 0 < \theta < 1. \quad (14)$$

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \neq 0$ , то ряд не сходится к данной функции.

Если в ряде Тейлора положим  $a=0$ , получим частный случай ряда Тейлора, который называют *рядом Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Приведем разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots (x \in \mathbb{R});$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots (x \in \mathbb{R});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots (x \in \mathbb{R});$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots (|x| < 1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots (|x| < 1).$$

**Пример 1.** Разложить функцию  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x=0$ .

**Решение.** Имеем  $f(0) = \sin\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Вычисляем

$$f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \text{ т.е. } f'(0) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Далее по-}$$

следовательно получаем:

$$f''(0) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{x=0} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'''(0) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{x=0} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f^{IV}(0) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отметим, что  $f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Записываем ряд Тейлора:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \frac{x^n}{n!} + \dots \right).$$

**Пример 2.** Разложить функцию  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$  в ряд по степеням  $x$ , используя разложения основных элементарных функций. Воспользуемся приведенным выше биномиальным разложением

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (15)$$

Преобразуем исходную функцию:  $\sqrt{9-x^2} = 3 \left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

Подставим в формулу (15)  $m = \frac{1}{2}$ , а вместо  $x$  выражение  $\left(-\frac{x^2}{9}\right)$ .

Получим следующее разложение:

$$\sqrt{9-x^2} = 3 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{9} \right) + \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right)}{2!} \left( -\frac{x^2}{9} \right)^2 + \dots + \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left( \frac{1}{2} - n + 1 \right)}{n!} \left( -\frac{x^2}{9} \right)^n + \dots \right] = 3 \left( 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 9} - \frac{1}{2^2 2! 9^2} x^4 - \frac{1 \cdot 3}{2^3 3! 9^3} x^6 - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n n! 9^n} x^{2n} - \dots \right).$$

Разложение имеет место при  $\left| \frac{x^2}{9} \right| < 1$ , т.е. при  $|x| < 3$ .

## 1.6. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

### 1. Приближенное вычисление значений функций.

Пусть функция  $f(x)$  в окрестности точки  $a$  разлагается в ряд Тейлора. Тогда приближенное значение функции  $f(x)$  в любой точке этой окрестности может быть вычислено как частичная сумма этого ряда.

**Пример 1.** Вычислить  $\sqrt[3]{130}$  с точностью до 0,001.

**Решение.**  $\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = \sqrt[3]{125 \left( 1 + \frac{1}{25} \right)} = 5 \left( 1 + \frac{1}{25} \right)^{\frac{1}{3}}$ . Вос-

пользуемся биномиальным рядом (15) при  $m = \frac{1}{3}$ ,  $x = \frac{1}{25} \in (-1, 1)$ .

Получаем:

$$\sqrt[3]{130} = 5 \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{25} + \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - 1 \right)}{2!} \left( \frac{1}{25} \right)^2 + \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \left( \frac{1}{3} - 2 \right)}{3!} \left( \frac{1}{25} \right)^3 + \dots \right) =$$

$$= 5 \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{25} + \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{2}{3} \right) \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{25^2} + \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{2}{3} \right) \cdot \left( -\frac{5}{3} \right) \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{25^3} + \dots \right) =$$

$$= 5,0000 + 0,0667 - 0,0009 + \dots$$

Полученный ряд является знакочередующимся рядом. Третий член по модулю меньше 0,001, поэтому его и следующие за ним члены можно отбросить. С указанной точностью получим  $\sqrt[3]{130} \approx 5,0000 + 0,0667 = 5,067$ .

**Пример 2.** Вычислить  $e^{0,1}$  с точностью до 0,001.

**Решение.** Воспользуемся разложением

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

где  $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$ ,  $0 < \theta < 1$ ,  $\forall x \in R$ . При  $x=0,1$  получаем:

$$e^{0,1} = 1 + 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2!} + \frac{(0,1)^3}{3!} + \dots + \frac{(0,1)^n}{n!} + \dots. \text{ Определим, сколько}$$

надо слагаемых для достижения требуемой точности. Так как  $0,1 \in [0, 0,5]$ , то  $0 < \theta x < 0,5$ . Тогда  $e^{\theta x} < e^{0,5} < 2$ ;

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} < \frac{2x^{n+1}}{(n+1)!}. \text{ При } x=0,1 \text{ имеем неравенство:}$$

$$\frac{2 \cdot (0,1)^{n+1}}{(n+1)!} < 0,001. \text{ Полагая } n=2, \text{ получим } \frac{2 \cdot 0,001}{6} = 0,0003 < 0,001.$$

Значит, достаточно взять три слагаемых:

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2!} = 1,105.$$

**Пример 3.** Вычислить  $\ln 2$  с точностью до  $10^{-5}$ .

**Решение.** Применим разложение

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right). \text{ Этот ряд сходится при}$$

$x \in (-1, 1)$ . Если  $\frac{1+x}{1-x} = 2$ , то  $x = 1/3$ . Возьмем  $n$ -ю частичную сумму

$$\ln 2 \approx 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} \right).$$

Погрешность этого равенства выражается остатком ряда

$$R_n = 2 \left( \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{3^{2n+3}} + \frac{1}{2n+5} \cdot \frac{1}{3^{2n+5}} + \dots \right).$$

Для его оценки все множители в знаменателях, стоящие перед степенью 3, заменим на  $2n+3$ . Получим

$$R_n < \frac{2}{(2n+3)3^{2n+3}} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) = \frac{2}{(2n+3)3^{2n+3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4(2n+3)3^{2n+1}}.$$

Решая неравенство  $\frac{1}{4(2n+3)3^{2n+1}} < 10^{-5}$ , находим, что  $n=4$ :

$$\frac{1}{4 \cdot 11 \cdot 3^9} = \frac{1}{866052} = 0,000001 < 10^{-5}.$$

$$\ln 2 \approx 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^9} \right) =$$

$$= 0,666667 + 0,024691 + 0,001646 + 0,000131 + 0,000011 = 0,69315.$$

## 2. Приближенное вычисление определенных интегралов.

Если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат области сходимости этого ряда, то соответствующий определенный интеграл можно вычислить с заданной точностью.

**Пример 4.** Вычислить интеграл  $\int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx$  с точностью до 0,00001.

**Решение.** Разделив почленно ряд для  $\sin x$  на  $x$ , получим

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$
 Этот ряд сходится при  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Интегрируем его почленно.

$$\begin{aligned} \int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{1/4} \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx = \\ &= \left( x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right) \Big|_0^{1/4} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 3!} \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \cdot \frac{1}{4^5} - \frac{1}{7 \cdot 7!} \cdot \frac{1}{4^7} + \dots = \\ &= 0,25000 - 0,00087 + 0,0000016 - \dots \end{aligned}$$

Получили знакочередующийся ряд. Третий член по модулю меньше заданной точности. Значит, достаточно взять два слагаемых:

$$\int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx \approx 0,25000 - 0,00087 = 0,24913.$$

### 3. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.

Многие дифференциальные уравнения не приводятся к квадратурам, а их решения не выражаются в элементарных функциях. Решения некоторых из этих уравнений могут быть представлены в виде степенных рядов, сходящихся в определенных интервалах. В таких случаях ряд, являющийся решением дифференциального уравнения, можно найти или способом неопределенных коэффициентов, или способом, основанным на применении ряда Тейлора.

**Пример 5.** Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения  $y'' - xy = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(0)=1$ ,  $y'(0) = 0$ .

**Решение.** Первый способ. Применим метод неопределенных коэффициентов. Записываем искомое решение в виде ряда  $y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + \dots$ . Находим производные:

$$y' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + \dots,$$

$$y'' = 2C_2 + 2 \cdot 3C_3x + 3 \cdot 4C_4x^2 + 4 \cdot 5C_5x^3 + 5 \cdot 6C_6x^4 + \dots$$

Подставляя  $y$  и  $y''$  в данное уравнение, получаем:

$$2C_2 + 2 \cdot 3C_3x + 3 \cdot 4C_4x^2 + 4 \cdot 5C_5x^3 + 5 \cdot 6C_6x^4 + \dots = \dots$$

$$= C_0x + C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^4 + C_4x^5 + C_5x^6 + C_6x^7 + \dots$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в обеих частях последнего уравнения, получим систему:

$$\left. \begin{aligned} 2C_2 &= 0, \\ 2 \cdot 3C_3 &= C_0, \\ 3 \cdot 4C_4 &= C_1, \\ 4 \cdot 5C_5 &= C_2, \\ 5 \cdot 6C_6 &= C_3, \\ 6 \cdot 7C_7 &= C_4, \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\}$$

Используя начальные условия, из выражений для  $y$  и  $y'$  находим:

$$y(0) = 1 = C_0, \quad C_0 = 1, \quad y'(0) = 0 = C_1, \quad C_1 = 0.$$

Решая систему, получаем  $C_2 = 0, C_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}, C_4 = 0, C_5 = 0, C_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}, C_7 = 0, \dots$

Таким образом, искомое решение представляется следующим рядом:  $y = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \dots$ . Этот ряд сходится при всех значениях  $x$ .

Второй способ. Применим для исходного уравнения метод последовательных дифференцирований. Решение  $y(x)$  ищем в

$$\text{виде } y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

В соответствии с начальными условиями  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .

Подставляя в уравнение  $x = 0, y = 1$ , получим  $y''(0) - 0 \cdot 1 = 0$ ;

$y''(0) = 0$ . Для получения значений остальных производных будем

последовательно дифференцировать исходное уравнение:

$$y''' = y + xy', \quad y^{(4)} = y' + y' + xy'' = 2y' + xy'', \quad y^{(5)} = \\ = 3y'' + xy''', \dots, \quad y^{(n)} = (n-2)y^{(n-3)} + xy^{(n-2)}, \dots$$

Отсюда получим  $y^{(n)}(0) = (n-2)y^{(n-3)}(0)$ . Тогда при  $n = 3, 4, 5, \dots$  имеем:

$$y'''(0) = 1, \quad y^{(4)}(0) = 0, \quad y^{(5)}(0) = 0, \quad y^{(6)}(0) = 4, \quad y^{(7)}(0) = 0, \\ y^{(8)}(0) = 0, \quad y^{(9)}(0) = 4 \cdot 7.$$

Подставляя найденные значения в степенной ряд для  $y(x)$ , получим

$$y = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4}{6!}x^6 + \frac{4 \cdot 7}{9!}x^9 + \dots = \\ = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots$$

### 1.7. Ряд Фурье функции, заданной на отрезке длиной $2\pi$

1. Пусть функция  $f(x)$  определена и интегрируема на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Рядом Фурье функции  $f(x)$  называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Числа  $a_0, a_n, b_n$  называются коэффициентами Фурье функции  $f(x)$ .

**Теорема 7.** Если функция  $f(x)$  кусочно-гладкая на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , т.е.  $f(x)$  и ее производная  $f'(x)$  - непрерывны на отрезке  $[-\pi, \pi]$  или имеют на нем конечное число точек разрыва первого рода, то ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится в каждой точке отрезка  $[-\pi, \pi]$ . При этом сумма  $S(x)$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ , ряда Фурье (16) равна

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x - \text{точка непрерывности;} \\ \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)), & \text{если } x = x_0 - \text{точка разрыва } f(x); \\ \frac{1}{2}(f(x - 0) + f(x + 0)), & \text{если } x = -\pi \text{ или } x = \pi. \end{cases}$$

Здесь  $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ ,  $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ .

Сумма  $S(x)$  ряда Фурье (16) определена для  $x \in (-\infty, +\infty)$  и является  $2\pi$ -периодической функцией.

**Пример 1.** Разложить функцию  $f(x) = e^x$  в ряд Фурье в интервале  $(-\pi, \pi)$ . Построить график суммы ряда.

**Решение.** Вычислим коэффициенты Фурье функции по формулам (17), учитывая, что

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} + C,$$

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} + C.$$

Имеем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \pi;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos nx + n \sin nx}{n^2 + 1} e^x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 + 1} \cdot (e^{\pi} \cos \pi n - e^{-\pi} \cos \pi n) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = \\ &= \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin nx - n \cos nx}{n^2 + 1} e^x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-n)}{n^2 + 1} \cdot (e^{\pi} \cos \pi n - e^{-\pi} \cos \pi n) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 1} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 1}.$$

Поскольку функция  $e^x$  и ее производная непрерывны на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , то по теореме 7 ряд Фурье этой функции сходится к самой функции  $e^x$  на интервале  $(-\pi, \pi)$ :

$$e^x = \frac{1}{\pi} \operatorname{sh} \pi + \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (\cos nx - n \sin x), \quad -\pi < x < \pi,$$

а в точках  $x = \pm\pi$  сумма ряда равна  $\frac{1}{2}(e^{-\pi} + e^{\pi}) = \operatorname{ch} \pi$ . График суммы ряда изображен на рис. 1 (пунктиром - график самой функции  $e^x$  вне отрезка  $[-\pi, \pi]$ ).

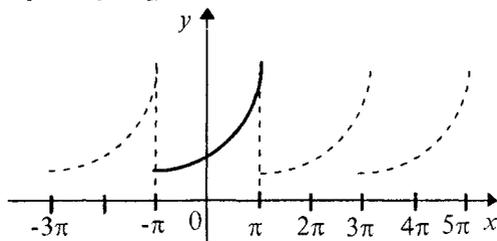


Рис. 1.1

Если  $f(x)$  - четная функция на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , то ее коэффициенты Фурье находятся по формулам

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

а ряд Фурье имеет вид:  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ . Если  $f(x)$  - нечетная функция на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , то

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

а ряд Фурье имеет вид:  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ .

**Пример 2.** Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = x^2$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Построить график суммы ряда.

**Решение.** Поскольку функция четная, то  $b_n = 0$ ;  $a_0, a_n$  находим по формулам (18), применяя интегрирование по частям:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left( \frac{x^2 \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left( -\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left( -\frac{\pi \cos n\pi}{n} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{4}{n^2} \cos n\pi = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Согласно теореме 7, ряд Фурье данной функции  $f(x) = x^2$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$  сходится к самой функции  $x^2$ :

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad (\text{в точках } x = \pm\pi \text{ сумма ряда}$$

да совпадает со значением функции  $f(x) = x^2$ , так как

$$\frac{1}{2} (f(-\pi) + f(\pi)) = \frac{1}{2} (\pi^2 + \pi^2) = \pi^2 = f(\pm\pi). \quad \text{На рис. 1.2 изображен}$$

график суммы данного ряда (пунктиром - график самой функции  $x^2$  вне отрезка  $[-\pi, \pi]$ ).

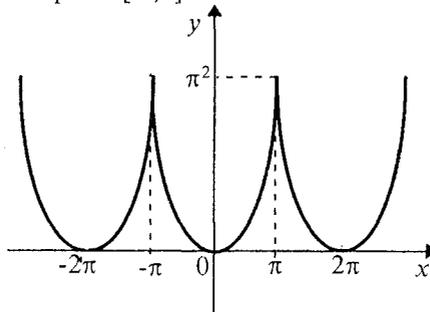


Рис. 1.2

3. Если функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[0, \pi]$  и удовлетворяет на нем условиям теоремы 7, то ее можно разложить в ряды Фурье

различным образом, например, как по косинусам, так и по синусам.

В первом случае продолжают  $f(x)$  с интервала  $(0, \pi)$  на интервал  $(-\pi, 0)$  четным образом:  $f(x) = f(-x)$ ,  $x \in (-\pi, 0)$  (рис.1.3), а коэффициенты Фурье вычисляют по формулам (18);

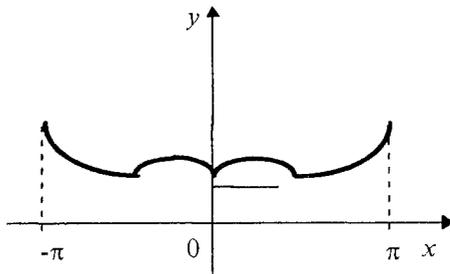


Рис. 1.3

во втором - продолжают  $f(x)$  с интервала  $(0, \pi)$  на  $(-\pi, 0)$  нечетным образом:  $f(x) = -f(x)$ ,  $x \in (-\pi, 0)$  (рис.1.4), а коэффициенты находят по формулам (19).

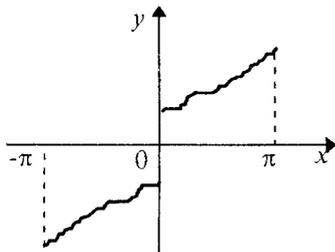


Рис. 1.4

**Пример3.** Разложить функцию  $f(x) = x^2$  на интервале  $(0, \pi)$  в ряд Фурье по синусам.

**Решение.** Продолжим функцию  $x^2$  с интервала  $(0, \pi)$  на интервал  $(-\pi, 0)$  нечетным образом и вычисляем коэффициенты по формулам (19):

$$a_0 = a_n = 0, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) \right) \sin nx = \\ &= 2\pi \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right) - \frac{8}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots \right), \end{aligned}$$

$$0 < x < \pi.$$

(Сравните разложение этой же функции  $x^2$  в ряд по косинусам, полученное в примере 2).

4. Если функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[a, a+2\pi]$ , то ее коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) dx, a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx dx, n = 1, 2, \dots$$

### 1.8. Ряд Фурье функции, заданной на отрезке длиной $2l$

Пусть функция  $f(x)$  определена и интегрируема на отрезке  $[-l, l]$ . Рядом Фурье функции  $f(x)$  называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx, n = 1, 2, \dots$$

Если  $f(x)$  - кусочно-гладкая функция на отрезке  $[-l, l]$ , то ее ряд Фурье сходится в каждой точке отрезка  $[-l, l]$ . При этом сумма  $S(x)$ ,  $x \in [-l, l]$ , ряда Фурье равна

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \text{ - точка непрерывности } f(x); \\ \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)), & \text{если } x = x_0 \text{ - точка разрыва } f(x); \\ \frac{1}{2}(f(-l + 0) + f(l - 0)), & \text{если } x = -l \text{ или } x = l. \end{cases}$$

**Пример 1.** Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

**Решение.** Продолжим  $f(x)$  на интервале  $(-2, 0)$  нечетным образом. Тогда  $a_0 = 0$ ,  $a_n = 0$ ; при  $l=2$  получаем:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \int_0^1 x \sin \frac{\pi n x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx = \\
 &= \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2}, & \text{если } n = 2k+1, \\ 0, & \text{если } n = 2k. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Следовательно, разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2}, \quad 0 < x < 2.$$

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №5

1-20. Исследовать на сходимость ряд, рассматривая последовательность его частичных сумм. В случае сходимости найти сумму ряда.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{10^{n-1}}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 2^n}{10^n}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n(n+1)}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{4^n}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

21-40. Пользуясь известными признаками сходимости, исследовать на сходимость ряды.

$$21. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n+1}{4n+5} \right)^n.$$

$$\text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n}.$$

$$22. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{4n+2}}.$$

$$23. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{5n+6}{3n+4} \right)^n.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( \frac{n+1}{n} \right).$$

$$24. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+5)^{10}}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^n}.$$

$$25. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+1}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)!}.$$

$$26. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n/2}}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{5} \right)^n \left( \frac{n+3}{n} \right)^{n^2}.$$

$$27. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n \frac{1}{n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+4}{7n+3}.$$

$$28. \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} \left( \frac{3n+1}{3n} \right)^{n^2}.$$

$$29. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n^3+2}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

$$30. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{(3n)!}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+n}{2+n} \right)^{n^2}.$$

$$31. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-1}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+6}{7n^2+8n+1}.$$

$$32. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{n+1} \right)^n.$$

$$33. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{6n-1}{3n} \right)^n.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+3}{n^2-4n+13}.$$

$$34. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4+3n}{7+8n} \right)^n.$$

$$35. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt[4]{n^3+3}}.$$

$$36. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^3(n+1)}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}.$$

$$37. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{2n+1}}.$$

$$38. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+3}{n+4} \right)^{n^2}.$$

$$39. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

$$40. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}.$$

41-60. Найти область сходимости степенного ряда.

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}.$$

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2n+5}.$$

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (x+2)^n}{\sqrt{n}}.$$

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n + 5^{2n}}.$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} + 2^n}.$$

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left( \frac{x-1}{2} \right)^n.$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1) \sqrt{\ln(n+1)}}.$$

$$54. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^n}{n(n+1)}.$$

$$45. \sum_{n=1}^{\infty} n5^n (x-3)^n.$$

$$55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n (x-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n!} (x+2)^n.$$

$$56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt[3]{n} 3^n}.$$

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(2^n+1)}.$$

$$57. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\ln(n+1)}.$$

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\sqrt{n+1}}.$$

$$58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{5^n \cdot n^2}.$$

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n + 2^{2n}}.$$

$$59. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-3)^n}{2n}.$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n + 4^n}.$$

$$60. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n (x+2)^n}{n!}.$$

61-70. С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить определенный интеграл с точностью до  $\varepsilon=0,001$ .

$$61. \int_0^{0,2} e^{-x^2} dx.$$

$$66. \int_0^{0,5} \cos \frac{x^4}{4} dx.$$

$$62. \int_0^{0,5} x^5 \sin x dx.$$

$$67. \int_0^1 \sin x^4 dx.$$

$$63. \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$68. \int_0^1 \sqrt{x} \cos x^2 dx.$$

$$64. \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx.$$

$$69. \int_0^{1/3} \sqrt{1+x^4} dx.$$

$$65. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

$$70. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^2}}.$$

71-80. Найти первые четыре (отличные от нуля) члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям.

$$71. \begin{cases} y' - 2xy = 0; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$76. \begin{cases} y' = xy + e^y; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$72. \begin{cases} y' - 2y = 0; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$77. \begin{cases} y' = e^{3x} + 2xy^2; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$73. \begin{cases} y' \cos x + y \sin x = 1; \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

$$78. \begin{cases} y' = e^{\sin x} + x; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$74. \begin{cases} y' + y = x + 1; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$79. \begin{cases} y' = 2x + y^2 + e^x; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$75. \begin{cases} y' = 1 - xy; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$80. \begin{cases} y' + 3xy = 0; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

**81-90. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом  $2\pi$  функцию  $f(x)$  на интервале  $(-\pi, \pi)$ .**

$$81. f(x) = 2 - |x|. \quad 86.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ \frac{x}{2} + 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$82. f(x) = |x|.$$

$$87. f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

$$83. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ x - 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$88. f(x) = x^2 + 1.$$

$$84. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ x + 2, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$89. f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0; \\ x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$85. f(x) = \begin{cases} -x + \frac{1}{2}, & -\pi < x \leq 0; \\ 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$90. f(x) = |1 - x|.$$

**91-100. Разложить функцию  $f(x)$ , заданную в интервале  $(0, \pi)$ , продолжив (доопределив) ее на интервал  $(-\pi, 0)$  четным или нечетным образом.**

$$91. f(x) = e^x.$$

$$96. f(x) = e^{-\frac{x}{4}}.$$

$$92. f(x) = 2^x.$$

$$97. f(x) = 5^{-x}.$$

$$93. f(x) = e^{-x}.$$

$$98. f(x) = 4^{\frac{x}{3}}.$$

$$94. f(x) = 3^{-\frac{x}{2}}.$$

$$99. f(x) = e^{3x}.$$

$$95. f(x) = e^{2x}.$$

$$100. f(x) = 10^{-x}.$$

## 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### 2.1. Определенный интеграл по фигуре. Основные понятия и свойства

Пусть функция  $f(x, y, z)$  задана в точках тела  $W$ , на поверхности тела  $T$  или кривой  $\Gamma$  в декартовой системе координат  $Oxyz$ . Разобьем указанные фигуры на  $n$  частей  $\Delta W_i, \Delta T_i, \Delta \Gamma_i$  соответственно и на каждой из частей выберем по одной точке  $(x_i, y_i, z_i)$ . Меры полученных частей разбиения обозначим через  $\Delta V_i$  (объем части),  $\Delta S_i$  (площадь части) и  $\Delta L_i$  (длина части) соответственно. Через  $\lambda_i$  обозначим наибольшее из расстояний между любыми двумя точками, взятыми на  $i$ -ой части разбиения,  $i = \overline{1, n}$ . Число  $\lambda = \max \lambda_i, 1 \leq i \leq n$ , показывает, насколько мелко разбиты фигуры, и называется *диаметром разбиения*.

Составим теперь интегральные суммы:

$$\sigma_n^W = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i ;$$

$$\sigma_n^T = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i ;$$

$$\sigma_n^\Gamma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta L_i .$$

Если существуют конечные пределы этих интегральных сумм при  $\lambda \rightarrow 0$ , причем эти пределы не зависят от способа разбиения фигур и от выбора точек на частях разбиения, то они называются *определенными интегралами функции  $f(x, y, z)$  по названному фигурам*:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n^W = \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz - \text{тройной интеграл};$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n^S = \iint_S f(x, y, z) ds - \text{поверхностный интеграл I рода};$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n^\Gamma = \int_\Gamma f(x, y, z) dl - \text{криволинейный интеграл I рода}.$$

### Физический смысл интеграла по фигуре.

Если  $f(x,y,z)$  - плотность распределения вещества по фигуре, то интеграл по этой фигуре выражает ее массу в соответствующих единицах измерения.

**Замечание.** Аналогично названным вводятся интегралы:

$\iint_D f(x, y, z) dx dy$  - двойной интеграл по области  $D \in Oxy$ ;

$\int_\Gamma f(x, y) dl$  - криволинейный интеграл I рода по кривой  $\Gamma$

$\Gamma \in Oxy$ .

### Свойства интегралов по фигуре

(на примере тройного интеграла  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ ).

1. Свойство линейности.

$$\begin{aligned} & \iiint_W (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) dx dy dz = \\ & = \alpha \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz + \beta \iiint_W g(x, y, z) dx dy dz; \alpha \text{ и } \beta \text{ - числа.} \end{aligned}$$

2. Если область  $W$  есть объединение двух областей  $W_1$  и  $W_2$ , не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{W_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{W_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

3. Если в области  $W$ :  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ , то

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_W g(x, y, z) dx dy dz.$$

4. Теорема о среднем. Если  $f(x,y,z)$  непрерывна в замкнутой связной области  $W$ , то найдется точка  $(x^*, y^*, z^*) \in W$  такая, что

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = f(x^*, y^*, z^*) \cdot V, \text{ где } V \text{ - объем тела } W.$$

5. Если  $f(x,y,z) \equiv 1$ , то  $\iiint_W 1 dx dy dz = V$ .

Предполагается, что все указанные интегралы существуют.

## 2.2. Вычисление двойных и тройных интегралов в декартовых координатах

**а) Двойной интеграл.** Пусть область  $D$  плоскости  $Ox_1x_2$  ограничена линиями  $y=\varphi(x)$ ,  $y=\psi(x)$ ,  $x=a$ ,  $x=b$ , где  $a < b$ ,  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  и функции  $\varphi$ ,  $\psi$  непрерывны на отрезке  $[a; b]$  (рис.2.1). Двойной интеграл от непрерывной функции  $f(x,y)$  вычисляется путем сведения к двукратному интегралу по формуле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (2.1)$$

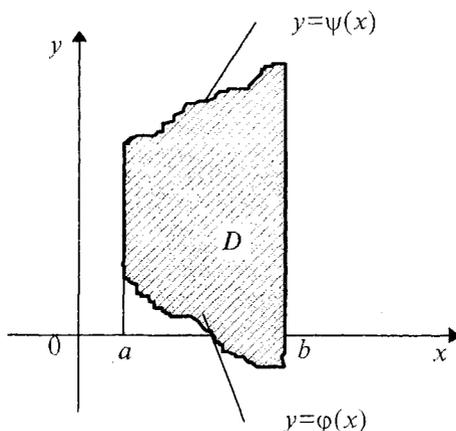


Рис. 2.1

В выражении (2.1) сначала вычисляется  $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$  при постоянном  $x$ . Полученный результат интегрируется по  $x$ .

Аналогично, если область  $D$  ограничена линиями  $x=\alpha(y)$ ,  $x=\beta(y)$ ,  $y=c$ ,  $y=d$ , где  $c < d$ ,  $\alpha(y) \leq \beta(y)$  и функции  $\alpha$  и  $\beta$  непрерывны на отрезке  $[c; d]$  (рис.2.2), то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \quad (2.2)$$

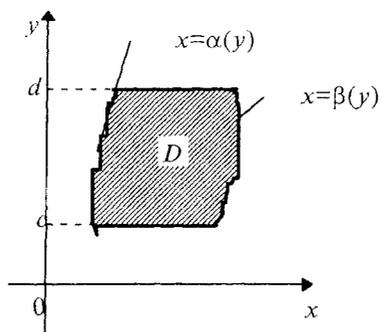


Рис. 2.2

**Замечание.** В более общем случае область интегрирования разбивают на части, каждая из которых имеет один из рассмотренных видов.

**Пример 1.** Вычислить  $\iint_D (x+2y) dx dy$ , где область ограничена линиями  $y = -x^2$ ,  $y = -\sqrt{x}$ .

**Решение.** Указанные линии пересекаются в точках  $O(0,0)$  и  $A(1,-1)$  (рис. 2.3).

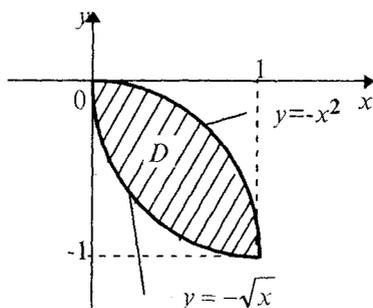


Рис. 2.3

Применяя формулу (2.1) при  $\varphi(x) = -\sqrt{x}$ ,  $\psi(x) = -x^2$ ,  $a=0$ ,  $b=1$ , получим:

$$\iint_D (x+2y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{-x^2} (x+2y) dy = \int_0^1 (xy + y^2) \Big|_{-\sqrt{x}}^{-x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 ((-x^3 + x^4) - (-x\sqrt{x} + x)) dx = -\frac{3}{20}.$$

**Пример 2.** Изменить порядок интегрирования в двукратном интеграле  $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy$ .

**Решение.** Область интегрирования, ограниченную линиями  $y = \sqrt{2x - x^2}$ ,  $y = \sqrt{2x}$ ,  $x=2$  (рис. 2.4), разобьем с помощью прямой  $y=1$  на три области. Получим сумму интегралов:

$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x, y) dx +$$

$$+ \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^2 f(x, y) dx.$$

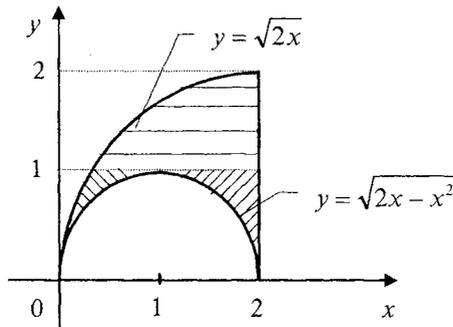


Рис. 2.4

Здесь для определения пределов изменения переменной  $x$  уравнения  $y = \sqrt{2x - x^2}$ ,  $y = \sqrt{2x}$  разрешены относительно  $x$ :  $x = 1 \pm \sqrt{1 - y^2}$ ,  $x = y^2 / 2$ .

Из свойств интеграла по фигуре следует, что площадь  $S$  плоской области  $D$  в декартовых прямоугольных координатах равна

$$S = \iint_D dx dy. \quad (2.3)$$

**Пример 3.** Вычислить площадь области, ограниченной линиями  $y = 2 - x^2$ ,  $y^3 = x^2$ .

**Решение.** Имеем (рис. 2.5)

$$S = \iint_D dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^{2/3}}^{2-x^2} dy = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - x^{2/3}) dx = \frac{32}{15}.$$

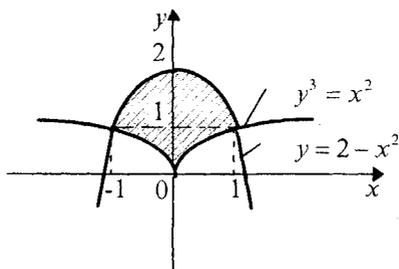


Рис. 2.5

Геометрический смысл двойного интеграла: объем  $V$  цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью  $z=f(x,y)$ , ( $f>0$ ), снизу плоскостью  $z=0$  и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости  $Oxy$  область  $D$ , вычисляется по формуле

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (2.4)$$

Площадь  $S$  гладкой поверхности  $z=z(x,y)$ , проектирующейся в область  $D$  плоскости  $Oxy$ , выражается формулой

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (2.5)$$

**б) Тройной интеграл.** Пусть пространственная область  $V$  в декартовой системе координат  $Oxyz$  ограничена снизу и сверху поверхностями  $z=F(x,y)$ ,  $z=\Phi(x,y)$  ( $F(x,y)\leq\Phi(x,y)$ ), с боков прямой цилиндрической поверхностью и проектируется на плоскость  $Oxy$  в область  $D$ , ограниченную линиями  $y=\varphi(x)$ ,  $y=\psi(x)$ ,  $x=a$ ,  $x=b$ , ( $a<b$ ,  $\varphi(x)\leq\psi(x)$ ), а функции  $F$ ,  $\Phi$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  - непрерывны (рис.2.6).

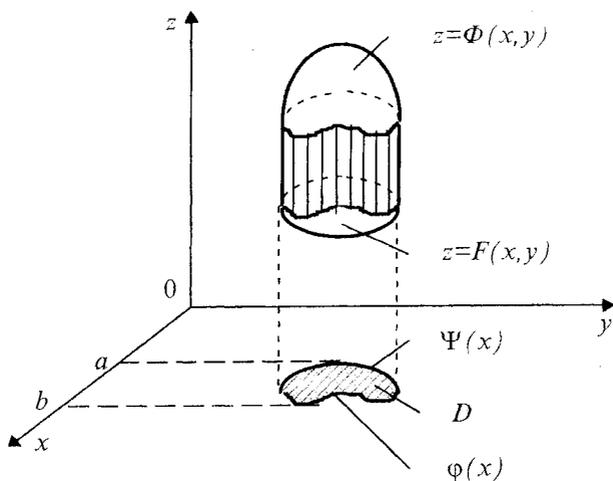


Рис. 2.6

Тройной интеграл от непрерывной функции  $f(x,y,z)$  вычисляется по формулам:

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{F(x,y)}^{\Phi(x,y)} f(x, y, z) dz = \\ &= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{F(x,y)}^{\Phi(x,y)} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

**Замечание.** Порядок интегрирования в последней формуле может быть изменен.

**Пример 4.** Вычислить тройной интеграл

$\iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x+y+z=1$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ .

**Решение.** Область  $V$  есть пирамида, ограниченная снизу плоскостью  $z=0$ , сверху плоскостью  $x+y+z=1$  и с боков плоскостями  $x=0$ ,  $y=0$  (рис.2.7). Проекцией пирамиды на плоскость  $Oxy$  является треугольник, ограниченный прямыми  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x+y=1$ .

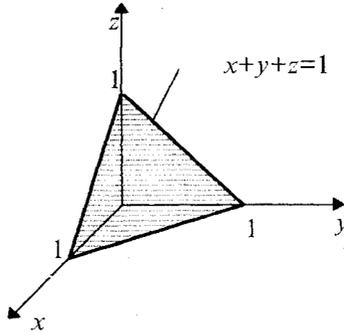


Рис. 2.7

Для переменной  $z$  нижним пределом будет  $z=0$  (плоскость  $Oxy$ ), а верхним - значение  $z$ , полученное из уравнения плоскости  $x+y+z=1$ , то есть  $z=1-x-y$ . Поэтому получим:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[ \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{y}{4} + \frac{1}{1+x+y} \right) \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) dx = -\frac{1}{2} \left( \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{8} - \ln|1+x| \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left( \ln 2 - \frac{5}{8} \right). \end{aligned}$$

Из свойств интеграла по фигуре следует, что объем  $V$  пространственной области  $V$  равен

$$V = \iiint_V dx dy dz. \quad (2.6)$$

**Пример 5.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2x^2 + 2y^2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = x$ .

**Решение.** Тело  $V$  ограничено снизу и сверху параболоидами вращения  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2x^2 + 2y^2$ , с боков - цилиндрической поверхностью  $y = x^2$ , и плоскостью  $y = x$  (рис.2.8). Проекция

этого тела на плоскость  $Oxy$  есть область, ограниченная линиями  $y = x^2$ ,  $y = x$ ,  $(0 \leq x \leq 1)$ .

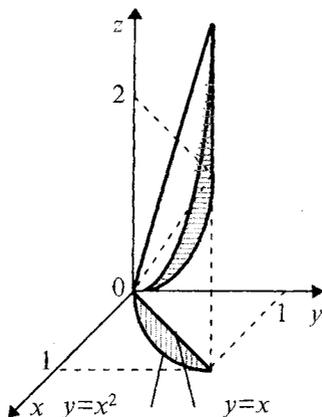


Рис.2.8

Имеем

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \\
 &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy = \\
 &= \int_0^1 \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=x} dx = \\
 &= \int_0^1 \left( x^3 + \frac{x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{3}{35}.
 \end{aligned}$$

### 2.3. Замена переменных в кратном интеграле

*а) Замена переменных в двойном интеграле.* Если в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  осуществляется замена переменных с помощью функций

$$x=x(u, v), y=y(u, v), \quad (2.7)$$

которые отображают взаимно-однозначно область  $G$  плоскости  $Ouv$  на область  $D$  плоскости  $Oxy$ , то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(x(u, v); y(u, v)) |J(u, v)| du dv, \quad (2.8)$$

где  $J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$  — якобиан. (2.9)

При этом предполагается, что функции (2.7) имеют непрерывные частные производные по аргументам  $u, v$  и якобиан (2.9) отличен от нуля. В частности, при переходе к полярным координатам  $\rho, \varphi$ , где  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ , якобиан  $|J(\rho, \varphi)| = \rho$  и формула (2.8) имеет вид:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (2.10)$$

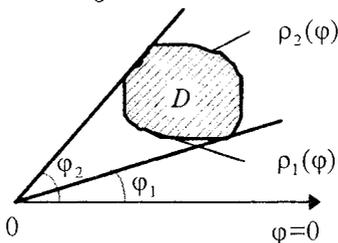


Рис. 2.9

Если область  $D$  ограничена лучами, образующими с полярной осью углы  $\varphi_1, \varphi_2$ , и кривыми  $\rho = \rho_1(\varphi)$  и  $\rho = \rho_2(\varphi)$ , где  $\varphi_1 < \varphi_2, \rho_1 < \rho_2$  (рис.2.9), то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

Если область  $D$  ограничена линией  $\rho = \rho(\varphi)$  и начало координат лежит внутри области (рис.2.10), то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

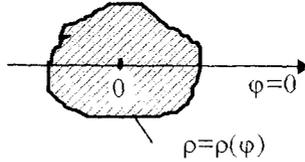


Рис. 2.10

Если область интегрирования не удовлетворяет указанным условиям, то для вычисления двойного интеграла надо предварительно разбить область на части, обладающие отмеченными выше свойствами.

**Пример 1.** Вычислить  $\iint_D dx dy$ , если область  $D$  ограничена кривыми  $y=0$ ,  $x^2+y^2=2ax$ ,  $y=x$ ,  $x^2+y^2=2bx$  ( $a < b$ ).

**Решение.** Область  $D$  изображена на рис. 2.11. Уравнения прямых  $y=0$  и  $y=x$  в полярной системе координат имеют вид  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi/4$ . Уравнения окружностей соответственно  $\rho=2a\cos\varphi$  и  $\rho=2b\cos\varphi$ . Итак, область  $D$  заключена между лучами  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi/4$  и кривыми  $\rho=2a\cos\varphi$  и  $\rho=2b\cos\varphi$ . Тогда

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy &= \iint_{D_1} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{2a\cos\varphi}^{2b\cos\varphi} \rho d\rho = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \rho^2 \Big|_{2a\cos\varphi}^{2b\cos\varphi} = \\ &= 2(b^2 - a^2) \cdot \int_0^{\pi/4} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= (b^2 - a^2) \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = (b^2 - a^2) \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

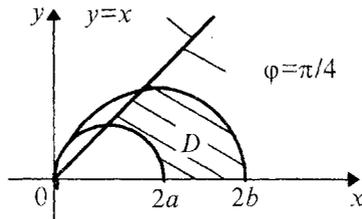


Рис. 2.11

**Пример 2.** Вычислить площадь плоской области  $D$ , ограниченной окружностью  $x^2+y^2=2x$  и прямыми  $y=0$  и  $y=x\sqrt{3}$ .

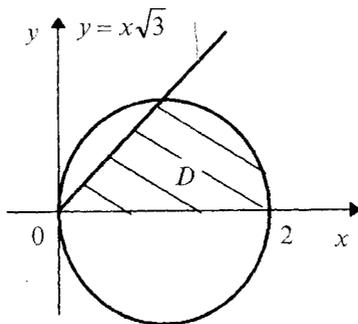


Рис. 2.12

**Решение.** Площадь плоской области  $D$  в полярной системе координат вычисляется по следующей формуле:

$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi$$

Уравнение окружности в полярной системе координат запишется в виде  $\rho=2\cos\varphi$  ( $0\leq\varphi\leq\pi/3$ ). Тогда:

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho = \int_0^{\pi/3} d\varphi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/3} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/3} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \left[ \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

**б) Замена переменных в тройном интеграле.**

Если

$$x=x(u, v, w), \quad y=y(u, v, w), \quad z=z(u, v, w), \quad (2.11)$$

то

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{\Omega} f(x(u, v, w); y(u, v, w); z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw, \end{aligned}$$

где  $J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$  — якобиан. (2.12)

При этом предполагается, что функции (2.11) имеют непрерывные частные производные по своим аргументам и якобиан  $J(u, v, w)$  отличен от нуля.

Формула преобразования тройного интеграла от декартовых координат  $x, y, z$  к цилиндрическим координатам  $\rho, \varphi, z$  (рис.2.13), связанных с декартовыми соотношениями:

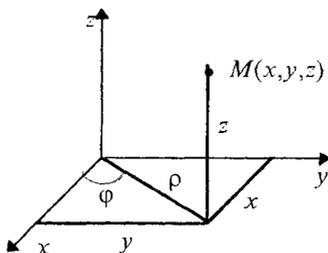


Рис. 2.13

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, & 0 \leq \rho < +\infty \\ y = \rho \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty \end{cases}, \text{ имеет вид:}$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz. \quad (2.13)$$

**Пример 3.** Вычислить массу тела, если его плотность в каждой точке вычисляется по формуле  $\gamma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$  и тело  $V$  ограничено параболоидом  $z = x^2 + y^2$  и плоскостью  $z=4$  (рис. 2.14).

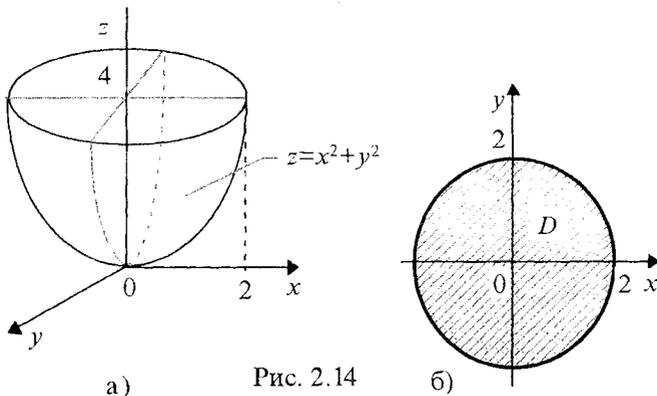


Рис. 2.14

**Решение.** Данная пространственная область  $V$  проектируется в область  $D$  плоскости  $Oxy$ , ограниченной окружностью  $x^2 + y^2 = 4$ . Вычислим тройной интеграл в цилиндрических координатах. Уравнение параболоида будет  $z = \rho^2$ . Координаты  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  изменяются так:  $0 \leq \rho \leq 2$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $\rho^2 \leq z \leq 4$ ; плотность  $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2} = \rho$ . Тогда масса  $M$  равна:

$$\begin{aligned}
 M &= \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \\
 &= \iiint_{\Omega} \rho \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_{\rho^2}^4 dz = 2\pi \int_0^2 (4\rho^2 - \rho^4) d\rho = \\
 &= 2\pi \left( \frac{4}{3} \rho^3 - \frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_0^2 = 2\pi \left( \frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = \frac{128}{15} \pi.
 \end{aligned}$$

Формула преобразования тройного интеграла от декартовых координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  к сферическим  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  (рис.2.15), связанным с декартовыми соотношениями

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, & 0 \leq r < +\infty; \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z = r \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (2.14)$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{\Omega} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

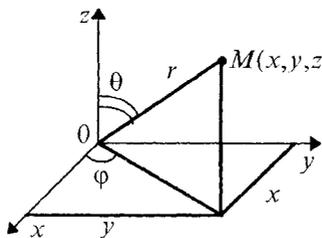


Рис. 2.15

**Пример 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V z dx dy dz$ , где  $V$

ограничена сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  и конусом  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  и является внутренней по отношению к конусу (рис.2.16).

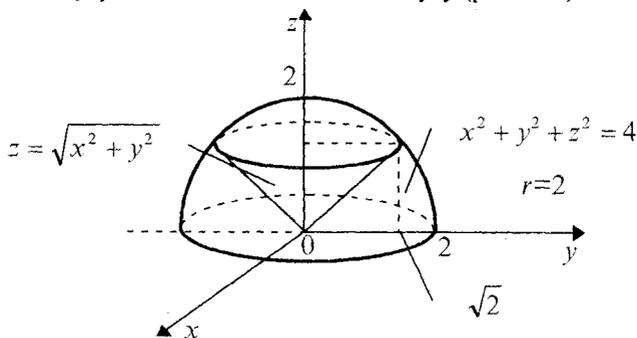


Рис. 2.16

**Решение.** Перейдем в данном интеграле к сферическим координатам. Уравнение сферы запишется в виде  $r=2$ , а уравнение конуса  $\theta=\pi/4$ . В области  $\Omega$  координаты  $r, \varphi, \theta$  изменяются следующим образом:  $0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi/4$ . Тогда

$$\begin{aligned} \iiint_V z dx dy dz &= \iiint_{\Omega} \cos \theta r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin \theta \cos \theta d\theta \cdot \int_0^2 r^3 dr = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^2 = 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} (-\cos 2\theta) \Big|_0^{\pi/4} = 2\pi. \end{aligned}$$

## 2.4. Криволинейные интегралы I и II рода

**а) Криволинейный интеграл по длине дуги (криволинейный интеграл I рода).** Пусть функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в точках дуги  $AB$  гладкой кривой  $\Gamma$ .

Разобьем дугу  $AB$  произвольным образом на  $n$  элементарных дуг точками  $A=A_0, A_1, A_2, \dots, A_n=B$ ; пусть  $\Delta s_k$  - длина дуги  $A_{k-1}A_k$ . На каждой элементарной дуге выберем произвольную точку  $M_k(\xi_k; \eta_k)$  и умножим значение функции  $f(\xi_k; \eta_k)$  в этой точке на длину  $\Delta s_k$  соответствующей дуги.

*Интегральной суммой* для функции  $f(x, y)$  по длине дуги  $AB$  называется сумма вида  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$ .

*Криволинейным интегралом по длине дуги  $AB$*  от функции  $f(x, y)$  (или *криволинейным интегралом I рода*) называется предел интегральной суммы при условии, что  $\max \Delta s_k \rightarrow 0$ :

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$$

( $ds$  - дифференциал дуги).

Криволинейный интеграл I рода в случае, когда кривая задана уравнением  $y=\varphi(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ), вычисляется по формуле

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_a^b f[x, \varphi(x)] \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2} dx.$$

Если  $f(x, y) > 0$ , то криволинейный интеграл I рода  $\int_{\Gamma} f(x, y) ds$  представляет собой *массу кривой  $\Gamma$* , имеющей переменную линейную плотность  $\mu = f(x, y)$  (физическое истолкование).

Если  $f(x,y) \geq 0$ , то криволинейный интеграл I рода  $\int_{\Gamma} f(x,y) ds$  численно равен площади части цилиндрической поверхности, у которой направляющая  $\Gamma$  лежит в плоскости  $xOy$ , а образующие перпендикулярны ей; эта цилиндрическая поверхность ограничена сверху поверхностью  $z = f(x,y)$ , а снизу плоскостью  $xOy$  (геометрическое истолкование).

**б) Криволинейный интеграл по координатам (криволинейный интеграл II рода).** Пусть в декартовой системе координат  $Oxyz$  задана линия  $\Gamma$ , в точках которой определена векторная функция  $\vec{F}(x,y,z)$  с координатами  $P(x,y,z)$ ,  $Q(x,y,z)$ ,  $R(x,y,z)$ .

Разобьем кривую  $\Gamma$  на  $n$  частей  $\Delta\Gamma_i$  точками  $M_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ . На каждой части разбиения  $\Delta\Gamma_i$  выберем по одной точке  $K_i(x_i, y_i, z_i)$ .

Составим так называемую интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \left( \vec{F}(x_i, y_i, z_i), \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \right) = \sum_{i=1}^n P(k_i) \Delta x_i + Q(k_i) \Delta y_i + R(k_i) \Delta z_i,$$

где  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ ,  $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ , слагаемыми которой являются скалярные произведения; вектор  $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$  соединяет начало и конец части разбиения  $\Delta\Gamma_i$ .

Криволинейным интегралом II рода от вектор-функции  $\vec{F}(x,y,z)$  по кривой  $\Gamma$  называется предел интегральной суммы  $\sigma_n$  при условии, что диаметр разбиения  $\lambda \rightarrow 0$  (если этот предел конечен, не зависит от способа разбиения и от выбора точек  $K_i$ ). Обозначение криволинейного интеграла II рода:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n = \int_{\Gamma} (\vec{F}(x,y,z), d\vec{l}) = \int_{\Gamma} P(x,y,z) dx + Q(x,y,z) dy + R(x,y,z) dz.$$

**Физический смысл:** криволинейный интеграл  $\int_{\Gamma} (\vec{F}, d\vec{l})$  вы-

ражает работу силы  $\vec{F}(x,y,z)$  при перемещении точки ее приложения вдоль кривой  $\Gamma$ .

Если направление обхода кривой  $\Gamma$  изменить на противоположное, то указанный интеграл изменит свой знак.

## 2.5. Поверхностные интегралы I и II рода

**а) Поверхностный интеграл I рода.** Пусть  $F(x,y,z)$  - непрерывная функция и  $z=f(x,y)$  - гладкая поверхность  $S$ , где  $f(x,y)$  задана в некоторой области  $D$  плоскости  $xOy$ . Поверхностным интегралом I рода называется предел интегральной суммы при условии, что  $\max d_k \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\max d_k \rightarrow 0} \sum F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k = \iint_S F(x, y, z) dS,$$

где  $\Delta S_k$  - площадь  $k$ -го элемента поверхности  $S$ , точка  $(\xi_k; \eta_k; \zeta_k)$  принадлежит этому элементу,  $d_k$  - диаметр этого элемента,  $F(x,y,z)$  определена в каждой точке поверхности  $S$ .

Значение этого интеграла не зависит от выбора стороны поверхности  $S$ , по которой производится интегрирование.

Если проекция  $D$  поверхности  $S$  на плоскость  $xOy$  однозначна, то соответствующий поверхностный интеграл I рода вычисляется по формуле

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iint_D F[x, y, f(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

**б) Поверхностный интеграл II рода.** Пусть в декартовой системе координат  $Oxyz$  задана двусторонняя поверхность  $S$ . Выберем определенную сторону поверхности  $S$ , задав определенное направление единичного вектора нормали  $\vec{n}(x, y, z)$ , точка  $(x,y,z) \in S$ . И пусть в точках поверхности  $S$  определена вектор-функция  $\vec{F}(x, y, z)$  с координатами  $P(x,y,z)$ ,  $Q(x,y,z)$ ,  $R(x,y,z)$ . Сделав разбиение  $S$  на  $n$  частей  $T_i$  с площадями  $S_i$ , составим интегральную сумму вида

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n (\vec{F}(x_i, y_i, z_i), \vec{n}(x_i, y_i, z_i)) \Delta S_i,$$

где  $(x_i, y_i, z_i) \in T_i$ ;  $(\vec{F}, \vec{n})$  означает скалярное произведение векторов  $\vec{F}$  и  $\vec{n}$ .

Поверхностным интегралом II рода от вектор-функции  $\vec{F}(x, y, z)$  по выбранной стороне поверхности  $S$  называется предел интегральной суммы  $\sigma_n$  при  $\lambda \rightarrow 0$  ( $\lambda$  - диаметр разбиения), если этот предел существует, конечен, не зависит от способа разбиения

ния и от выбора точек  $(x_i, y_i, z_i)$ . Обозначение:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n &= \iint_S (\vec{F}(x, y, z), \vec{n}(x, y, z)) dS = \\ &= \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy. \end{aligned}$$

*Физический смысл.* Указанный интеграл выражает массу жидкости единичной плотности, протекающей через поверхность  $S$  в направлении вектора нормали  $\vec{n}$  со скоростью  $\vec{F}$  за единицу времени, то есть так называемый *поток* вектор-функции (или векторного поля)  $\vec{F}$  через  $S$  в направлении  $\vec{n}$ .

## 2.6. Вычисление криволинейных интегралов первого и второго рода

Пусть функция  $f(x, y, z)$  определена и непрерывна в точках дуги  $AB$  кусочно-гладкой пространственной кривой. Если уравнение дуги  $AB$  задано параметрическими уравнениями

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t), (t_0 \leq t \leq t_1),$$

то

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y, z) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \quad (2.15)$$

В случае плоской кривой  $AB$

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (2.16)$$

Механический смысл криволинейного интеграла I рода: если  $f(x, y, z) > 0$ , то  $\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y, z) dl$  представляет собой массу кривой,

имеющей переменную линейную плотность  $\mu(\rho) = f(x, y, z)$ .

**Пример 1.** Вычислить массу отрезка прямой, заключенного между точками  $A(0; -2)$ ,  $B(4; 0)$ , если  $\mu(\rho) = \frac{1}{x-y}$ .

**Решение.** Найдем уравнение прямой  $AB$ :  $y=0,5x-2$ ; тогда  $dl = \frac{\sqrt{5}}{2} dx$ .

$$\text{Отсюда } M = \int_0^4 \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{dx}{x-y} = \sqrt{5} \int_0^4 \frac{dx}{x+4} = \sqrt{5} \ln 2.$$

Пусть функции  $P(x,y,z)$ ,  $Q(x,y,z)$ ,  $R(x,y,z)$  непрерывны в точках дуги  $AB$  кусочно-гладкой пространственной кривой. Если уравнение дуги  $AB$  задано параметрически  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $z=z(t)$ , ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ), то

$$\begin{aligned} & \int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \\ & + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

В случае плоской кривой  $AB$

$$\begin{aligned} & \int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt. \end{aligned} \quad (2.18)$$

**Пример 2.** Найти работу силы  $\vec{F} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + xy\vec{k}$  вдоль части кривой  $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$  (линия пересечения поверхностей

$4x^2 - y^2 = 1$  и  $z = 0$ ) от точки  $A\left(\frac{1}{2}, 0, 4\right)$  до точки  $B(1, \sqrt{3}, 4)$ .

**Решение.**  $x = \frac{1}{2} \text{ch } t$ ,  $y = \text{sh } t$ ,  $z = 4$ . ( $0 \leq t \leq \text{arcch } 2$ ) – пара-

метрическое задание пути  $\overset{\cup}{AB}$ . По формуле (2.17)

$$\begin{aligned} A &= \int_{\overset{\cup}{AB}} (\vec{F}, d\vec{l}) = \int_{\overset{\cup}{AB}} 2x dx + y dy + z y x dz = \\ &= \int_0^{\text{arcch } 2} \left( 2 \text{ch } t \cdot \frac{1}{2} \text{sh } t + \text{sh } t \text{ch } t + 2 \cdot \frac{1}{2} \text{ch } t \text{sh } t \cdot 4 \cdot 0 \right) dt = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\operatorname{arccosh} 2} 2t dt = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(2 \operatorname{arccosh} 2) - 1) = \frac{1}{2} (2 \operatorname{ch}^2 \operatorname{arccosh} 2 - 2) = \frac{1}{2} (29 - 2) = 3.$$

**Пример 3.** Вычислить работу силы  $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$  вдоль части кривой  $\rho = 2$ ,  $A\left(\frac{\pi}{4}, 2\right), B(0, 2)$ . Движение от точки  $A$  к точке  $B$  – по ходу часовой стрелки.

**Решение.**  $x = \rho \cos \varphi = 2 \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi = 2 \sin \varphi$  – параметрическое задание части кривой ( $\varphi$  в роли параметра  $t$ ). По формуле (2.18)

$$\begin{aligned} A &= \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} y dx + x dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 (2 \sin \varphi (-2 \sin \varphi) + 2 \cos \varphi 2 \cos \varphi) d\varphi = \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \cos 2\varphi d\varphi = -2 \sin 2\varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^0 = 2. \end{aligned}$$

## 2.7. Вычисление поверхностных интегралов I и II рода. Связь между ними

**а) Поверхностный интеграл I рода (ПОВИ-1).** Если поверхность  $T$  задана уравнением  $z=z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D \subset Oxy$ , причем  $z(x, y)$  имеет непрерывные частные производные, а проекция  $D$  поверхности  $T$  на плоскость  $Oxy$  имеет кусочно-гладкую границу, и если в точках поверхности  $T$  задана непрерывная функция  $f(x, y, z)$ , то интеграл от  $f(x, y, z)$  по площади поверхности  $T$  (I рода) существует и вычисляется по формуле:

$$\iint_T f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (2.19)$$

(Справа в этой формуле стоит двойной интеграл).

Аналогичные формулы можно получить, проектируя поверхность  $T$  на другие координатные плоскости.

**б) Поверхностный интеграл II рода (ПОВИ-2).** Если поверхность  $T$  задана так же, как в предыдущем пункте а), то по-

верхностный интеграл II рода  $\iint_T f(x, y, z) dx dy$  существует и сводится к двойному интегралу по проекции  $D$  поверхности  $T$  на плоскость  $Oxy$  следующим образом:

$$\iint_T f(x, y, z) dx dy = \pm \iint_D f(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (2.20)$$

Знак “+” в формуле (2.20) берется, если нормаль к выбранной стороне поверхности  $T$  образует острый угол с осью  $Oz$ ; знак “-” - в случае тупого угла.

Формулы, аналогичные (2.20), имеют место и для поверхностных интегралов II рода таких, как:

$$\iint_T f(x, y, z) dy dz, \quad \iint_T f(x, y, z) dz dx. \quad \text{При этом нужно спроектировать}$$

поверхность  $T$  на плоскости  $Oyz$  и  $Ozx$  соответственно.

**в) Связь между ПОВИ-1 и ПОВИ-2).** Имеет место формула

$$\begin{aligned} & \iint_T P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iint_T (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) dS, \end{aligned} \quad (2.21)$$

связывающая поверхностные интегралы II рода (слева) и I рода (справа). Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  есть углы, образованные с осями  $Ox, Oy, Oz$  нормалью  $\vec{n}(x, y, z)$  к выбранной стороне поверхности  $T$  в точке  $(x, y, z)$ .

**Пример 1.** Вычислить массу плоской пластины

$T: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ , расположенной в I октанте (рис. 2.17) и имеющей

поверхностную плотность  $\mu(x, y, z) = 2x + \frac{4}{3}y + z$ .

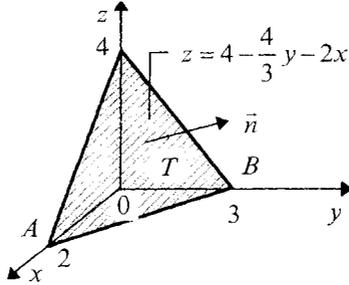


Рис. 2.17

**Решение.** Уравнение поверхности  $T$ :  $z(x, y) = 4\left(1 - \frac{y}{3} - \frac{x}{2}\right)$

$(x, y) \in D$  есть проекция  $T$  на плоскость  $Oxy$ . По формуле (2.19):

$$\begin{aligned} m_T &= \iint_T f(x, y, z) dS = \iint_D \mu(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \\ &= \iint_D \left(2x + \frac{4}{3}y + 4\left(1 - \frac{y}{3} - \frac{x}{2}\right)\right) \sqrt{1 + (2)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} dx dy = \\ &= \frac{\sqrt{61}}{3} \cdot 4 \cdot \iint_D dx dy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot S_D, \end{aligned}$$

где  $S_D$  - площадь фигуры  $D$ . А так как  $D$  - это  $\triangle OAB$ , то

$$S_D = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3. \text{ Итак, } m_T = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot 3 = 4\sqrt{61} \text{ (кг).}$$

**Пример 2.** Вычислить поток  $\Pi$  векторного поля  $\vec{F} = z \cdot \vec{k}$  ( $\vec{k}$  - единичный направляющий вектор оси  $Oz$ ) через верхнюю сторону нижней половины сферы  $T$ :  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

**Решение.** Уравнение нижней полусферы:

$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ . Нормаль  $\vec{n}$  к выбранной стороне образует острый угол с  $Oz$ , поэтому по формуле (2.20) имеем:

$$\Pi = \iint_T (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_T z dx dy = + \iint_D \left(-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right) dx dy.$$

Здесь  $D$  - проекция  $T$  на плоскость  $Oxy$  есть круг  $x^2 + y^2 \leq R^2$ .

Перейдем в последнем двойном интеграле к полярным координатам  $x=r\cos\varphi$ ,  $y=r\sin\varphi$ ,  $0\leq\varphi\leq 2\pi$ ,  $0\leq r\leq R$ . В итоге:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(-\sqrt{R^2 - r^2}\right) r dr = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(R^2 - r^2\right)^{1/2} d\left(R^2 - r^2\right) = -\frac{2\pi}{3} R^3.$$

## 2.8. Формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса

Эти формулы связывают интеграл по фигуре с некоторым интегралом по границе данной фигуры.

Пусть функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны в области  $D\subset Oxy$  и на ее границе  $\Gamma$ ; область  $D$  - связная;  $\Gamma$  - кусочно-гладкая кривая. Тогда верна *формула Грина*:

$$\int_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right) dx dy; \quad (2.22)$$

здесь слева стоит криволинейный интеграл I рода, справа - двойной интеграл; контур  $\Gamma$  обходится против часовой стрелки.

Пусть  $T$  - кусочно-гладкая ограниченная двусторонняя поверхность с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ . Если функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  и их частные производные I порядка непрерывны в точках поверхности  $T$  и границы  $\Gamma$ , то имеет место *формула Стокса*:

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \iint_T \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz dx; \quad (2.23)$$

слева стоит криволинейный интеграл II рода; справа - поверхностный интеграл II рода, взятый по той стороне поверхности  $T$ , которая остается слева при обходе кривой  $\Gamma$ .

Если связная область  $W\subset Oxyz$  ограничена кусочно-гладкой, замкнутой поверхностью  $T$ , а функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  и их частные производные первого порядка непрерывны в точках из  $W$  и  $T$ , то имеет место *формула Остроградского-Гаусса*:

$$\iint_T P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy =$$

$$= \iiint_W \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz ; \quad (2.24)$$

слева - поверхностный интеграл II рода по внешней стороне поверхности  $T$ ; справа - тройной интеграл по области  $W$ .

**Пример 1.** Вычислить работу силы  $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j}$  при обходе точки ее приложения окружности  $\Gamma: x^2 + y^2 = R^2$ , начиная от оси  $Ox$ , по часовой стрелке (рис.2.18).

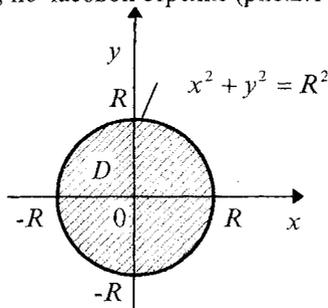


Рис. 2.18

**Решение.** Работа равна  $A = \int_{\Gamma} (x - y)dx + (x + y)dy$ . Применим формулу Грина (2.22), ставя знак “-” справа перед интегралом (так как обход контура - по часовой стрелке) и учитывая, что  $P(x,y)=x-y$ ,  $Q(x,y)=x+y$ . Имеем:

$$A = \iint_D \left( \frac{\partial(x + y)}{\partial x} - \frac{\partial(x - y)}{\partial y} \right) dxdy = -\iint_D 2dxdy = -2S_D,$$

где  $S_D$  - площадь круга  $D: x^2 + y^2 \leq R^2$ , равная  $\pi R^2$ . В итоге:  $A = -2\pi R^2$  - искомая работа силы.

**Пример 2.** Вычислить интеграл  $J = \int_{\Gamma} x^2 y^3 dx + dy + z dz$ , если  $\Gamma$  есть окружность  $x^2 + y^2 = 1$  в плоскости  $z=2$ , обходимая против часовой стрелки.

**Решение.** По формуле Стокса (2.23) исходный интеграл сведем к поверхностному интегралу по кругу  $T$ :

$$T: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1; \\ z = 2. \end{cases}$$

Итак, учитывая, что  $P(x, y, z) = x^2 y^3$ ,  $Q(x, y, z) = 1$ ,  $R(x, y, z) = 2$ , имеем:

$$J = \iint_T \left( \frac{\partial(1)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial(2)}{\partial y} - \frac{\partial(1)}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial z} - \frac{\partial(2)}{\partial x} \right) dz dx = -3 \iint_D x^2 y^2 dx dy.$$

Последний интеграл есть двойной интеграл по кругу  $D \subset Oxy$ , на который проектировался круг  $T$ ;  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ . Перейдем к полярным координатам:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi]$ ,  $r \in [0; 1]$ . В итоге:

$$J = -3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cos^2 \varphi r^2 \sin^2 \varphi r dr = -3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 r^5 dr = -\frac{\pi}{8}.$$

**Пример 3.** Найти поток  $\Pi$  векторного поля  $\vec{F} = (x^2; y^2; z^2)$ , через полную поверхность  $T$  пирамиды  $W: \begin{cases} x + 2y + 3z \leq 6; \\ x > 0, y > 0, z > 0. \end{cases}$  (рис. 2.19) в направлении внешней нормали к поверхности.

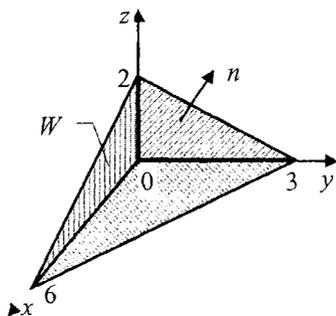


Рис. 2.19

**Решение.** Поток равен  $\Pi = \iint_T x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy.$

Применяя формулу Остроградского-Гаусса (2.24), сводим задачу к вычислению тройного интеграла по фигуре  $W$ -пирамиде:

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \iiint_W \left( \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} \right) dx dy dz = \\
 &= 2 \iiint_W (x + y + z) dx dy dz = 2 \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} dy \int_0^{2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}} (x + y + z) dz = \\
 &= \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} \left( 4 + \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{5}{9}x^2 - \frac{14}{9}xy - \frac{8}{9}y^2 \right) dy = \\
 &= \int_0^6 \left( 10 + x - \frac{7}{6}x^2 + \frac{13}{108}x^3 \right) dx = 20.
 \end{aligned}$$

**Пример 4.** Найти поток  $\Pi$  векторного поля  $\vec{F} = (x + 3z)\vec{k}$  через полную поверхность  $T$  пирамиды  $W$ :  $x + 2y + 3z \leq 6$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$  (рис. 2.20), в направлении внешней нормали к поверхности.

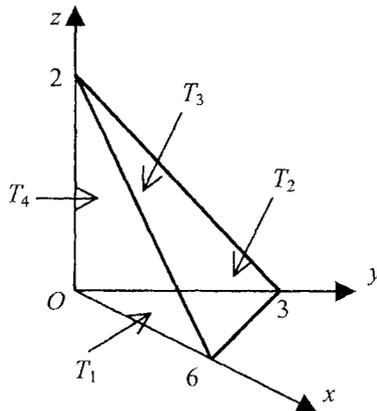


Рис. 2.20

**Решение.** Применим формулу Остроградского-Гаусса (2.24)

$$\Pi = \iiint_W \frac{\partial(x + 3z)}{\partial z} dx dy dz = \iiint_W 3 dx dy dz = 3V = 18, \text{ где } V - \text{объем}$$

пирамиды. Сравним с решением непосредственного вычисления потока ( $T_1, T_2, T_3, T_4$  – грани пирамиды).

$$\Pi = \iint_T (x + 3z) dx dy dz = \iint_{T_1} + \iint_{T_2} + \iint_{T_3} + \iint_{T_4} ;$$

$$\iint_{T_3} (x + 3z) dx dy = \iint_{T_4} (x + 3z) dx dy = 0;$$

так как проекция граней  $T_3, T_4$  на плоскость  $Oxy$  имеет нулевую площадь (рис. 2.21),

$$\iint_{T_1} (x + 3z) dx dy = - \iint_G x dx dy$$

$$\iint_{T_2} (x + 3z) dx dy = \iint_G (x + 6 - x - 2y) dx dy,$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_G (6 - x - 2y) dx dy = \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} (6 - x - 2y) dx = \\ &= \int_0^3 \left( (6 - 2y)^2 - \frac{(6 - 2y)^2}{2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^3 (6 - 2y)^2 dy = 18. \end{aligned}$$

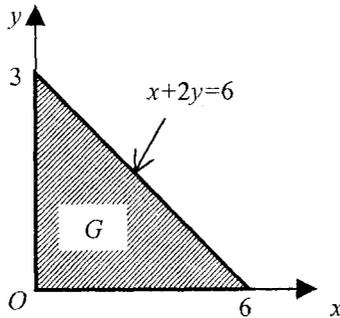


Рис.2.21

### 3. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

#### 3.1. Оригинал и его изображения

Функция  $f(t)$  действительного переменного  $t$  называется оригиналом, если она удовлетворяет условиям:

- 1)  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ ;
- 2) существуют такие постоянные  $M > 0$  и  $S_0 \geq 0$ , что  $|f(t)| < Me^{S_0 t}$  для всех  $t$ ;
- 3) при  $t \geq 0$  функция  $f(t)$  непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода на каждом конечном интервале оси  $Ot$ .

Изображением функции  $f(t)$  по Лапласу называется функция  $F(p)$  комплексного переменного  $p = \alpha + i\beta$ , определяемая

равенством  $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ . Если  $f(t)$  – оригинал, интеграл

в правой части последнего равенства сходится при  $\text{Re } p = \alpha > S_0$ .

Тот факт, что  $F(p)$  является изображением оригинала  $f(t)$ , бу-

дем обозначать так:  $F(p) = L(f(t))$  или  $F(p) \leftarrow f(t)$ ,  $F(p) \rightarrow f(t)$ .

Таблица 3.1

Изображение основных элементарных функций

$f(t)$ при $t > 0$	$L(f(t))$
1	$\frac{1}{p}$
$t^n$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
$n!$	$\frac{1}{p - \alpha}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
$\sin \beta t$	

$f(t)$ при $t > 0$	$L(f(t))$
$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
$\text{sh} \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
$\text{ch} \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$
$t \sin \beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2 + \beta^2)^2}$
$t \cos \beta t$	$\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$

### 3.2. Основные теоремы операционного исчисления

#### 1. Теорема линейного изображения.

Для любых оригиналов  $f(t)$  и  $g(t)$  и любых чисел  $a, b$

$$\mathcal{L}(af(t) + bg(t)) = a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t)).$$

Пусть всюду в дальнейшем  $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ .

#### 2. Теорема подобия (изменения масштаба). Для любого

постоянного  $C > 0$   $\mathcal{L}(f(Ct)) = \frac{1}{C} F\left(\frac{p}{C}\right)$ .

#### 3. Теорема сдвига. Для любого числа

$$\alpha: \mathcal{L}(e^{-\alpha t} f(t)) = F(p + \alpha).$$

#### 4. Теорема о дифференцировании оригинала. Если функции

$f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$  являются оригиналами, то

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0);$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0);$$

.....

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

#### 5. Теорема о дифференцировании изображения.

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(p), \quad n = 1, 2, \dots$$

**6. Теорема об интегрировании оригинала**

$$L\left(\int_0^t f(s) ds\right) = \frac{F(p)}{p}.$$

**7. Теорема об интегрировании изображения**

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^\infty F(y) dy \quad (\text{если интеграл сходится}).$$

**8. Теорема запаздывания.**  $L(f(t-t_0)) = e^{-pt_0}F(p)$ ,  $t_0 > 0$ .

**9. Теорема об изображении свертки двух функций**

$L(f_1 * f_2) = F_1(p)F_2(p)$ , где  $f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(s)f_2(t-s)ds$  — свертка функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ ,  $F_1(p) = L(f_1(t))$ ,  $F_2(p) = L(f_2(t))$ .

**Пример 1.** Найти изображения функции  $\text{sh } at \sin bt$ .

**Решение.** Известно, что

$$L(\sin bt) = \frac{b}{p^2 + b^2} = F(p); \quad \text{sh } at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at}). \quad \text{Тогда}$$

$\text{sh } at \sin bt = \frac{1}{2}e^{at} \sin bt - \frac{1}{2}e^{-at} \sin bt$ . По теореме линейности

имеем  $L(\text{sh } at \sin bt) = \frac{1}{2}L(e^{at} \sin bt) - \frac{1}{2}L(e^{-at} \sin bt)$ . В каждом из

полученных слагаемых применим теорему смещения и получаем

$$\frac{1}{2}F(p-a) - \frac{1}{2}F(p+a) = \frac{1}{2} \frac{b}{(p-a)^2 + b^2} - \frac{1}{2} \frac{b}{(p+a)^2 + b^2}. \quad \text{Это и}$$

есть искомое изображение.

**Пример 2.** Найти свертку функций  $t$  и  $e^t$  и ее изображение.

**Решение.**  $t * e^t = \int_0^t se^{t-s} ds = \int_0^t se^t e^{-s} ds = e^t \int_0^t se^{-s} ds$ . Вычис-

ляя интеграл, имеем  $te^t = e^t(1 - te^{-t} - e^{-t})$ . По теореме об изо-

$$\text{бражении свертки } L(t * e^t) = L(t)L(e^t) = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

**Пример 3.** Найти  $L(te^{-2t} \sin t)$ .

**Решение.** Найдем  $F(p) = L(\sin t) = \frac{1}{p^2 + 1}$ . По теореме о дифференцировании изображения

$$L(\sin t \cdot t) = -F'(p) = -\left(\frac{1}{p^2 + 1}\right)' = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} = G(p). \text{ Наконец, по}$$

$$\text{теореме смещения } L(e^{-2t} t \sin t) = G(p + 2) = \frac{2(p + 2)}{\left((p^2 + 1)^2 + 1\right)^2}.$$

### 3.3. Отыскание оригинала по изображению

При отыскании оригинала по изображению в простейших случаях используют таблицу изображений основных элементарных функций и теоремы разложения.

Вторая теорема разложения позволяет найти оригинал по известному изображению, являющемуся дробно-рациональной функцией  $p: F(p) = u(p)/v(p)$ , где  $u(p)$  и  $v(p)$  – многочлены от  $p$  соответственно степени  $m$  и  $n$ , причем  $m < n$ . Если разложение  $v(p)$  на простейшие множители имеет вид  $v(p) = (p - p_1)^{k_1} (p - p_2)^{k_2} \dots (p - p_r)^{k_r}$ ,  $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ , то, как известно,  $F(p)$  может быть разложена на сумму элементарных

дробей вида  $\frac{A_{js}}{(p - p_j)^{k_j - s + 1}}$ ;  $j = \overline{1, r}$ ;  $s = \overline{1, k_j}$ . Итак,

$$F(p) = \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{k_j} \frac{A_{js}}{(p - p_j)^{k_j - s + 1}}. \quad (3.1)$$

Все коэффициенты могут быть найдены по формуле

$$A_{js} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{p \rightarrow p_j} \left[ \frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}} \left[ (p - p_j)^{k_j} F(p) \right] \right]. \quad (3.2)$$

Вместо этой формулы для определения коэффициентов  $A_{js}$  можно использовать элементарные приемы, применяемые в математическом анализе при интегрировании рациональных дробей.

Если все корни многочлена  $v(p)$  простые, разложение упрощается:  $v(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)$ ; ( $p_j \neq p_k$  при  $j \neq k$ );

$$F(p) = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{p - p_j}, \text{ где } A_j = \frac{u(p_j)}{v'(p_j)}. \quad (3.3)$$

После отыскания тем или иным способом разложения  $F(p)$  на простейшие дроби оригинал  $f(t)$  находится так:

а) в случае кратных корней знаменателя

$$f(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{k_j} A_{js} \frac{t^{k_j-s}}{(k_j-s)!} e^{p_j t}; \quad (3.4)$$

б) в случае простых корней знаменателя  $v(p)$

$$f(t) = \sum_{j=1}^r \frac{u(p_j)}{v'(p_j)} e^{p_j t}. \quad (3.5)$$

**Пример 1.** Найти оригинал  $f(t)$ , если известно, что

$$F(p) = L(f(t)) = \frac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

**Решение.** У изображения  $F(p)$  в данном случае все корни знаменателя – действительные и простые. Поэтому лучше всего воспользоваться формулой (3.5). Имеем

$$\begin{aligned} u(p) &= p+1; \quad v(p) = p(p-1)(p-2)(p-3) = \\ &= p^4 - 6p^3 + 11p^2 - 6p; \quad v'(p) = 4p^3 - 18p^2 + 22p - 6. \end{aligned}$$

Корни

$$v(p): \quad p_1 = 0; \quad p_2 = 1; \quad p_3 = 2; \quad p_4 = 3; \quad \frac{u(p_1)}{v'(p_1)} = -\frac{1}{6};$$

$$\frac{u(p_2)}{v'(p_2)} = 1; \quad \frac{u(p_3)}{v'(p_3)} = -\frac{3}{2}; \quad \frac{u(p_4)}{v'(p_4)} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда по формуле (3.5) находим  $f(t)$ :

$$f(t) = -\frac{1}{6} + e^t - \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t}.$$

**Пример 2.** Найти оригинал  $f(t)$  по его изображению

$$F(p) = \frac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}.$$

**Решение.** Разложение  $F(p)$  на простейшие дроби имеет вид

$$F(p) = \frac{A_{11}}{(p-1)^3} + \frac{A_{12}}{(p-1)^2} + \frac{A_{13}}{p-1} + \frac{A_{21}}{(p+2)^2} + \frac{A_{22}}{p+2}. \quad (3.6)$$

Находим коэффициенты  $A_{ij}$  по формуле (3.2)

$$A_{11} = \frac{1}{0!} \lim_{p \rightarrow 1} ((p-1)^3 F(p)) = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{p}{(p+2)^2} = \frac{1}{9};$$

$$A_{12} = \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d}{dp} ((p-1)^3 F(p)) = \lim_{p \rightarrow 1} \left( \frac{p}{(p+2)^2} \right)' =$$

$$= \lim_{p \rightarrow 1} \left( \frac{p}{(p+2)^2} - \frac{2p}{(p+2)^3} \right) = \frac{1}{27};$$

$$A_{13} = \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d^2}{dp^2} ((p-1)^3 F(p)) = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 1} \left( \frac{p}{(p+2)^2} \right)'' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 1} \left( -\frac{4}{(p+2)^3} + \frac{6p}{(p+2)^4} \right) = -\frac{1}{27}.$$

Аналогично получим  $A_{21} = \frac{2}{27}$ ;  $A_{22} = \frac{1}{27}$ . Следовательно,

$$F(p) = \frac{1}{27} \left[ \frac{3}{(p-1)^3} + \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1} + \frac{2}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2} \right]. \text{ Отсю-}$$

да по таблице изображений и теоремам смещения и линейности изображения имеем

$$f(t) = \frac{1}{27} \left[ \frac{3}{2} t^2 e^t + t e^t - e^t + 2t e^{-2t} + 2^0 e^{-2t} \right] =$$

$$= \frac{1}{54} (3t^2 + 2t - 2) e^t + \frac{1}{27} (2t + 1) e^{-2t}.$$

Заметим, что коэффициенты разложения (3.6) можно найти и таким способом, который применялся в математическом анализе при интегрировании рациональных дробей.

### 3.4. Решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений операционным методом

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение (ЛДУ)  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t),$$

правая часть которого  $f(t)$  является оригиналом. Тогда и решение  $y(t)$  этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = y_0, y'(0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$  (то есть решение задачи Коши для данного ЛДУ), тоже будет оригиналом.

Обозначим изображение искомого решения  $y(t)$  через  $s(p)$ , то есть  $s(p) = L(y(t))$ . Используя теорему о дифференцировании оригинала и свойство линейности, находим изображение левой части исходного ЛДУ и приравниваем его к  $L(f(t))$ . В итоге вместо ЛДУ с начальными условиями получается так называемое изображающее уравнение, которое является линейным алгебраическим уравнением относительно новой неизвестной функции  $s(p) = L(y(t))$ . Решая изображающее уравнение, находим  $s(p)$ . Определяя затем по  $s(p)$  оригинал  $y(t)$ , мы тем самым найдем искомое решение  $y(t)$  задачи Коши. Аналогично решаются и системы ЛДУ.

**Пример 1.** Решить ЛДУ  $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = e^{3t}$ , если  $y(0) = y'(0) = 0$ .

**Решение.** Обозначим  $L(y(t)) = S(p)$ . По теореме о дифференцировании оригинала имеем  $L(y'(t)) = pS(p) - y_0$ ;  $L(y''(t)) = p^2 S(p) - py_0 - y'_0 = p^2 S(p)$ . Тогда изображающее уравнение таково:

$$p^2 S(p) - 2pS(p) - 3S(p) = \frac{1}{p-3}. \quad \text{Отсюда}$$

$$S(p) = \frac{1}{(p-3)(p^2 - 2p - 3)} = \frac{1}{(p+1)(p-3)^2}.$$

Восстановим теперь оригинал  $y(t) \leftarrow S(p)$ . Разложим вначале дробь  $S(p)$  на про-

стейшие дроби:  $\frac{1}{(p+1)(p-3)^2} = \frac{A}{(p-3)^2} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p+1}$ . Ищем

$A, B, C$ :  $1 = A(p+1) + B(p-3)(p+1) + C(p-3)^2$ . Полагая  $p = -1$ , получаем  $1 = 16C$ , то есть  $C = 1/16$ ; полагая  $p = 3, p = 0$ , получаем  $1 = A - 3B + 9C$ , откуда  $B = \frac{1}{3}(A + 9C - 1) = -\frac{1}{16}$ ,  $A = \frac{1}{4}$ .

Следовательно,

$$s(p) = \frac{1}{4} \frac{1}{(p-3)^2} - \frac{1}{16} \frac{1}{p-3} + \frac{1}{16} \frac{1}{p+2} \rightarrow y(t) = \\ = \frac{1}{4} t e^{3t} - \frac{1}{16} e^{3t} + \frac{1}{16} e^{-t}.$$

Решение поставленной задачи Коши найдено.

**Пример 2.** Решить систему ЛДУ  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y; \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y + 1, \end{cases}$  , если

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 5.$$

**Решение.** Обозначим  $L(x(t)) = T(p)$ ,  $L(y(t)) = S(p)$  и найдем изображения левой и правой частей каждого из уравнений системы.

$$\begin{cases} pT(p) - (-1) = T(p) + 2S(p); \\ pS(p) - 5 = 2T(p) + S(p) + \frac{1}{p}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-1)T(p) - 2S(p) = -1; \\ -2T(p) + (p-1)S(p) = S + \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Из последней линейной алгебраической системы уравнений находим неизвестную  $T(p)$  (например, по формулам Крамера)

$$T(p) = \frac{-p^2 + 11p + 2}{p((p-1)^2 - 4)} = \frac{-p^2 + 11p + 2}{p(p+1)(p-3)}.$$

Разложим  $T(p)$  на простейшие рациональные дроби:

$$T(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-3} = \frac{-p^2 + 11p + 2}{p(p+1)(p-3)}. \text{ Для определения чисел } A, B, C \text{ получаем равенство}$$

$$A(p+1)(p-3) + Bp(p-3) + Cp(p+1) = -p^2 + 11p + 2.$$

Подставляя в обе части равенства вместо  $p$  поочередно числа  $-1$ ;  $3$  и  $0$ , имеем  $4B = -10$ ,  $12C = 26$ ,  $-3A = 2$ . Отсюда

$$B = -\frac{5}{2}; \quad C = \frac{13}{6}; \quad A = -\frac{2}{3}; \quad T(p) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{13}{6} \cdot \frac{1}{p-3}.$$

Пользуясь таблицей изображений и свойством линейности изображения, найдем оригинал  $x(t) \leftarrow T(p)$ . Итак,

$$x(t) = -\frac{2}{3} - \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{13}{6}e^{3t}, \text{ одна из искомым функций найдена.}$$

Функцию  $y(t)$  можно найти аналогично  $x(t)$ , предварительно определив ее изображение  $S(p)$ . Но в данном случае  $y(t)$  можно найти проще, выражая из первого уравнения исходной системы ЛДУ

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} - x(t) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{13}{2}e^{3t} + \frac{2}{3} + \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{13}{6}e^{3t} \right) = \\ &= \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{13}{2}e^{3t} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Задача решена.

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

1-20. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь плоской области  $D$ , ограниченной заданными линиями:

1.  $D: y = 2 - 2x^2, y \geq -6.$

2.  $D: y^2 = 4x, x = \frac{8}{y^2 + 4}.$

3.  $D: y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$

4.  $D: x = y^2 + 1, x + y = 3.$

5.  $D: x^2 = 3y, y^2 = 3x.$

6.  $D: x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x, y = x, y = 0.$

7.  $D: x = 4 - y^2, x - y + 2 = 0.$

8.  $D: x = y^2, x = \sqrt{2 - y^2}.$

9.  $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1, y \leq \frac{1}{2}x, y \geq 0.$

10.  $D: y^2 = 4 - x, y = x + 2.$

11.  $D: x^2 + y^2 = 2y, x = \sqrt{3}y.$

12.  $D: y = 6x^2, x + y = 2, x \geq 0.$

13.  $D: y^2 = x + 2, x = 2.$

14.  $D: x = -2y^2, x = 1 - 3y^2, x \leq 0, y \geq 0.$

15.  $D: x^2 + y^2 = 25, y \geq x, y \leq \sqrt{3}x.$

16.  $D: y = \frac{1}{1 + x^2}, y = \frac{1}{2}x^2.$

17.  $D: y = x^2 + 1, x + y = 3.$

18.  $D: x = \sqrt{4 - y^2}, y = \sqrt{3}x, x \geq 0.$

19.  $D: xy = 1, x^2 = y, y = 2, x = 0.$

20.  $D: x^2 + y^2 - 2y = 0, x^2 + y^2 - y = 0, y = x, y = -x.$

21-30. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

21.  $y^2 = x$ ,  $x = 3$ ,  $z = x$ ,  $z \geq 0$ .

22.  $z = y^2$ ,  $x + y = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

23.  $z = x^2 + 2y^2$ ,  $y = x$ ,  $x \geq 0$ ,  $y = 1$ ,  $z \geq 0$ .

24.  $z^2 = 4 - x$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $z \geq 0$ .

25.  $y = x^2$ ,  $z = 0$ ,  $y + z = 2$ .

26.  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 2 - x^2 - y^2$ ,  $z \geq 0$ .

27.  $x^2 + y^2 = 4y$ ,  $z^2 = 4 - y$ ,  $z \geq 0$ .

28.  $y = 1 - z^2$ ,  $y = x$ ,  $y = -x$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

29.  $y = 2x$ ,  $x + y + z = 2$ ,  $x \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

30.  $z = 2x^2 + y^2$ ,  $x + y = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

31-40. Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного заданными поверхностями ( $\gamma = \gamma(x, y, z)$  – плотность в точке  $M(x, y, z)$ ).

31.  $V: z = 0$ ,  $z = x$ ,  $y = 0$ ,  $y = 4$ ,  $z = \sqrt{25 - y^2}$ ,  $\gamma = 2y$ .

32.  $V: z = 0$ ,  $z = 9 - y^2$ ,  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $\gamma = x^2 + y^2$ .

33.  $V: z = x^2 + y^2$ ,  $x + y = 2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $\gamma = x + 1$ .

34.  $V: y = x^2 + z^2 + 1$ ,  $y = 5$ ,  $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

35.  $V: z = \sqrt{1 - y}$ ,  $y = x$ ,  $y = -x$ ,  $z = 0$ ,  $\gamma = 3z$ .

36.  $V: x = 1$ ,  $y = x$ ,  $z = 0$ ,  $z = y^2$ ,  $\gamma = xy$ .

37.  $V: z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x + y = 2$ ,  $2z = x^2 + y^2$ ,  $\gamma = 3$ .

38.  $V: 2z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2$ ,  $\gamma = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ .

39.  $V: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 2$ ,  $\gamma = z$ .

40.  $V: x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 - z^2 = -4$ ,  $\gamma = 1$ .

41-50. Найти массу, где  $\mu(\rho)$  – плотность:

41. отрезка  $AB$ , где  $A(1,2)$ ;  $B(2,4)$ , если плотность в каждой его точке равна произведению квадратов координат этой точки;

42. верхней половины кардиоиды  $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ , если  $\mu(\rho) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;

43. дуги кривой  $y = x^2 + 4$  от точки  $A(0,4)$  до  $B(2,8)$ , если плотность в каждой точке ее равна абсциссе точки;

44. дуги лемнискаты  $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$ ,  $\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\right)$ , если

$$\mu(\rho) = \sqrt{x^2 + y^2};$$

45. дуги синусоиды  $y = \sin x$ ,  $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ , если

$$\mu(\rho) = \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}};$$

46. дуги окружности  $x^2 + y^2 = 9$ , лежащей в первой четверти, если плотность в каждой ее точке равна абсциссе точки;

47. дуги кривой  $y = x^3$  от точки  $A(1;1)$  до точки  $B(2;8)$ , если плотность в каждой точке кривой равна ординате этой точки;

48. дуги окружности  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ , лежащей в первой четверти, если плотность ее в каждой точке равна произведению абсциссы на квадрат ординаты этой точки;

49. одной арки циклоиды  $x = 3(t - \sin t)$ ,  $y = 3(1 - \cos t)$ , если плотность ее в каждой точке равна ординате точки;

50. дуги тангенсоиды  $y = \operatorname{tg} 3x$ ,  $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{12}\right)$ , если

$$\mu(\rho) = \sqrt{9 + \cos^4 3x}.$$

51-60. Вычислить работу силового поля  $\vec{F}$  при перемещении материальной точки вдоль пути  $\overset{\cup}{AB}$ .

$$51. \vec{F} = \cos^2 x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}; \quad \overset{\cup}{AB}: x = t; \quad y = \cos t, \quad z = t^2, \\ A(0; 1; 0); B\left(\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi^2}{4}\right).$$

$$52. F = 2x \cdot i + y \cdot j - z \cdot k; \\ \overset{\cup}{AB}: x = t - 1; \quad y = \sin 2t, \quad z = \cos 2t, \\ A\left(\frac{\pi}{2} - 1; 0; -1\right); B(-1; 0; 1).$$

$$53. F = y \cos z \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}; \quad \overset{\cup}{AB}: \text{отрезок прямой,} \\ A(0; 1; 0); B(2; 7; 0).$$

$$54. F = \sin y \cdot \vec{i} + \cos x \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}; \\ \overset{\cup}{AB}: x = 2t; \quad y = 3t, \quad z = t + 2, \\ A(0; 0; 2); B(2\pi; 3\pi; \pi + 2).$$

$$55. F = 3(x + y)\vec{i} + yz \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}; \quad \overset{\cup}{AB}: \text{отрезок прямой,} \\ A(-1; 3; 2); B(1; 1; 2).$$

$$56. F = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}; \quad \overset{\cup}{AB}: x = t; \quad y = 2t, \quad z = 3t, \\ A(1; 2; 3); B(2; 4; 6).$$

$$57. F = \frac{y}{x^2} \cdot \vec{i} + \frac{x}{y} \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}; \quad \overset{\cup}{AB}: \text{отрезок прямой,} \\ A(1; 2; -1); B(1; 3; 2).$$

$$58. F = xz \cdot \vec{i} + (y + 1)\vec{j} - z^2 \cdot \vec{k}; \quad \overset{\cup}{AB}: x = 3t; \quad y = 2t, \quad z = t, \\ A(3; 2; 1); B(9; 6; 3).$$

$$59. F = y \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}; \quad \overset{\cup}{AB}: x = \sin t; \quad y = \cos t, \quad z = t,$$

$$A(0;1;0); B\left(1;0;\frac{\pi}{2}\right).$$

$$60. F = x^2 y \cdot \vec{i} - y^2 \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}; \overline{AB}: x = t; y = t-1, z = t^2, \\ A(0;-1;0); B(1;0;1).$$

61-80. Даны векторное поле  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  и плоскость  $Ax + By + Cz + D = 0(P)$ , которая вместе с координатными плоскостями образует пирамиду  $V$ . Требуется вычислить поток векторного поля  $\vec{F}$  через полную поверхность пирамиды  $V$  в направлении внешней нормали к ее поверхности. Сделать чертеж пирамиды  $V$ .

$$61. \vec{F} = (2x - y + 3z)\vec{i}, (P): 2x + 3y + 6z - 6 = 0.$$

$$62. \vec{F} = (x - 2y - z)\vec{j}, (P): 6x - 2y + 3z - 6 = 0.$$

$$63. \vec{F} = (2x + 2z)\vec{k}, (P): 6x - 3y - 2z + 6 = 0.$$

$$64. \vec{F} = (2z + 3y)\vec{i}, (P): 2x - 3y - 6z + 6 = 0.$$

$$65. \vec{F} = (x + 2y + z)\vec{j}, (P): 6x - 2y + 3z + 6 = 0.$$

$$66. \vec{F} = (y + 2x - 2z)\vec{k}, (P): 6x - 3y + 2z + 6 = 0.$$

$$67. \vec{F} = (y - 2x + 2z)\vec{i}, (P): 2x + 3y - 6z + 6 = 0.$$

$$68. \vec{F} = (z - x + 2y)\vec{j}, (P): 6x + 2y - 3z + 6 = 0.$$

$$69. \vec{F} = (2z - y)\vec{k}, (P): 6x + 3y - 2z - 6 = 0.$$

$$70. \vec{F} = (y - 2x)\vec{i}, (P): 2x - 3y + 6z - 6 = 0.$$

$$71. \vec{F} = (x - z)\vec{j}, (P): 6x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

$$72. \vec{F} = (x - 2z)\vec{k}, (P): 6x + 3y - 2z + 6 = 0.$$

$$73. \vec{F} = (2x - y + 3z)\vec{i}, (P): 2x + 3y + 6z + 6 = 0.$$

$$74. \vec{F} = (2x + 2y)\vec{j}, (P): 6x + 2y + 3z + 6 = 0.$$

$$75. \vec{F} = (2x - y + 2z)\vec{k}, (P): 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

76.  $\vec{F} = (2x + 6y - z)\vec{i}$ , (P):  $2x - 3y - 6z - 6 = 0$ .
77.  $\vec{F} = (6x + 2y + 5z)\vec{j}$ , (P):  $6x - 2y + 3z + 6 = 0$ .
78.  $\vec{F} = (x - y)\vec{k}$ , (P):  $6x + 3y + 2z + 6 = 0$ .
79.  $\vec{F} = (y - 6z - 2x)\vec{i}$ , (P):  $2x - 3y + 6z + 6 = 0$ .
80.  $\vec{F} = (3x + 2y - z)\vec{j}$ , (P):  $6x + 2y + 3z + 6 = 0$ .

81-100. Решить уравнение или систему дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями операционным методом.

81.  $y'' - 9y = 2 - t$ ;  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = 1$ .
82.  $y'' - y' - 6y = 6$ ;  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = 2$ .
83.  $\begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = 3x + 2y; \end{cases} \quad x(0) = 2; \quad y(0) = 0.$
84.  $y'' + y' - 4y = (10 + 4t)e^{2t}$ ;  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = 2$ .
85.  $\begin{cases} x'' + y = 1, \\ y'' + x = 0; \end{cases} \quad x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0.$
86.  $y'' + 3y = 8\operatorname{sh}3t$ ;  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = 1$ .
87.  $\begin{cases} x'' + y'' = 0, \\ x' + y = 1 + e^t; \end{cases} \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = -1.$
88.  $y'' + y' - y = 6e^t \cos t$ ;  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = 2$ .
89.  $\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \\ y' + 2x + 6y = 0; \end{cases} \quad x(0) = 3; \quad y(0) = 15.$
90.  $y'' - 9y = 6e^{3t}$ ;  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = 1$ .
91.  $y'' + 9y = 8\sin t$ ;  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = -2$ .
92.  $\begin{cases} x'' - y' = 1, \\ y'' - x' = 0; \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad x'(0) = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$
93.  $y'' + 3y' + 2y = 2t^2 + 6t + 2$ ;  $y(0) = -1$ ;  $y'(0) = 2$ .
94.  $y''' - y' = 10e^{2t}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ ;  $y''(0) = -1$ .

$$95. \begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0; \end{cases} \quad x(0) = 2; \quad y(0) = 3.$$

$$96. \quad y'' - y = 4sht; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -1.$$

$$97. \quad y'' + y = te^t; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -2.$$

$$98. \begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0; \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

$$99. \quad y'' + 2y' + y = 2 \sin t; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 0.$$

$$100. \quad y'' + 2y' + 5y = 5; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$$

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление (для втузов). – М.: Наука, 1978. – Т. 2,3.
2. Бугров, Я.С., Никольский, С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981.
3. Щипачев, В.С. Высшая математика. – М.: Высш. школа, 1985.
4. Краснов, М.Л., Киселев, А.И., Макаренко, Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости (задачи и упражнения). – М.: Наука, 1971.
5. Данко, П. Е., Попов, А. Г., Кожевникова, Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. – М.: Высш. школа, 1980.– Ч. 2.
6. Герасимович, А. И. Математический анализ: Справочное пособие. В 2 ч. Ч. 2. – Мн.: Высш. школа, 1990.
7. Руководство к решению задач по высшей математике: учебное пособие. В 2 ч. Ч. 2/ Под общ. ред. Е. И. Гурского. – Мн.: Высш. школа, 1990.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРОГРАММА.....	3
1. РЯДЫ.....	4
1.1. Числовые ряды. Основные определения. Признаки сравнения.....	4
1.2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.....	7
1.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.....	10
1.4. Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда. Степенные ряды.....	12
1.5. Разложение функции в ряд Тейлора.....	16
1.6. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях.....	19
1.7. Ряд Фурье функции, заданной на отрезке длиной $2\pi$ .....	24
1.8. Ряд Фурье функции, заданной на отрезке длиной $2l$ .....	29
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №5.....	31
2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.....	36
2.1. Определенный интеграл по фигуре. Основные понятия и свойства.....	36
2.2. Вычисление двойных и тройных интегралов в декартовых координатах.....	38
2.3. Замена переменных в кратном интеграле.....	44
2.4. Криволинейные интегралы I и II рода.....	51
2.5. Поверхностные интегралы I и II рода.....	53
2.6. Вычисление криволинейных интегралов I и II рода.....	54
2.7. Вычисление поверхностных интегралов I и II рода. Связь между ними.....	56
2.8. Формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса.....	59
3. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.....	64
3.1. Оригинал и его изображения.....	64
3.2. Основные теоремы операционного исчисления.....	65
3.3. Отыскание оригинала по изображению.....	67
3.4. Решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений операционным методом.....	70
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №6.....	73
Рекомендуемая литература.....	80

Учебное издание

## ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания  
и контрольные работы № 5 и № 6  
для студентов-заочников  
машиностроительных специальностей

Составители:

АНДРИЯНЧИК Анатолий Николаевич  
МИКУЛИК Николай Александрович  
НАУМОВИЧ Руслан Федорович и др.

Технический редактор М.И. Гриневич  
Компьютерная верстка Е. А. Занкевич

---

Подписано в печать 21.09.2005.

Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 4,74. Уч.-изд. л. 3,72. Тираж 700. Заказ 573.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0056957 от 01.04.2004.

220013, Минск, проспект Независимости, 65.