УДК 53:002.6; 53:37.016

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ WOLFRAM MATHEMATICA ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КУРСА «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

Максименко Н.В., Дерюжкова О.М.
УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», г. Гомель, Беларусь, maksimenko@gsu.by, dom@gsu.by

Теоретическая механика изучает законы общее для любых материальных объектов. За годы ее развития были созданы собственные методы исследования и выработаны абстрактные модели реальных тел. В зависимости от условий задачи одно и то же физическое тело может быть материальной точкой, абсолютно твердым телом и материальной системой. Таким образом, теоретическая механика использует модельный подход для описания и исследования наблюдаемых механических явлений. Зачастую решение физических задач сводится к довольно сложным уравнениям. Численные методы позволяют в таких случаях получить приближённые решения этих уравнений. Несмотря на приближенность такого решения, погрешность его, как правило, сведена к минимуму и качественно не влияет на наблюдаемые физические закономерности. Эти уравнения могут быть вполне разрешимы современным математико-аналитическим аппаратом, но их решение может занять длительное время. Численные методы помогают воспроизводить одновременно несколько физических моделей за короткий промежуток времени и значительно упрощают исследование этих моделей.

В отличие от современных систем компьютерной алгебры Wolfram Mathematica (WM) не направлена на решение определенного круга задач (MatLab – матричный анализ; MathCad – численное моделирование), а является универсальным аппаратом, как в области аналитического, так и в области численного моделирования. Кроме того, применение интерактивной компьютерной графики позволяет обеспечить максимальную наглядность, необходимую для корректного и всестороннего изучения поставленной задачи. Особенно это важно, если данный материал используется в образовательном процессе.

Рассмотрим систему WM в качестве помощника для решения дифференциальных уравнений (ДУ) и создания анимации для физических систем класса гармонический осциллятор. Исследуем простейшую систему: колебания пружинного маятника в среде с сопротивлением. В данном случае к численному решению можно было и не прибегать, т.к. WM обладает мощным аналитическим аппаратом, но для простоты исследования и построения анимации будем решать ДУ численно. Для реализации моделирования колебаний осциллятора в среде с сопротивлением воспользуемся следующими операторами и функциями: Module (в него заключается тело программы, задаются входные/выходные параметры, любые другие операторы), GeometricTransformation (выполняет всю работу по перемещению любого тела в пространстве), Evaluate (дает ядру понять какое выражение следует вычислить, данный оператор применяется в связке с операторами построения графиков Plot, ParametricPlot, PolarPlot и т.п.), NDSolve (один из самых популярных операторов для численного решения ДУ), Manipulate (задает набор элементов управления интерактивной моделью, самые различные ползунки изменения начальных/граничных параметров, шаг, обозначения, подписи). В результате получим не только решение уравнения движения осциллятора с заданными начальными условиями, но и проведем графический анализ колебаний, а так же наглядно продемонстрируем колебания пружинного маятника в вязкой среде.

Пружинный маятник в среде с вязким трением ($F = -\gamma\dot{x}$, где γ – коэффициент сопротивления среды) под действием упругих сил ($F = -kx$, где k – коэффициент жесткости системы) совершает затухающие с течением времени колебания с циклической частотой

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, где $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ – собственная частота колебаний маятника, β – коэффициент затухания (имеет размерность частоты), зависящий от свойств среды и характеризующий интенсивность влияния вязкого трения на колебания системы. Такую систему называют затухающим или диссипативным осциллятором. Уравнение движения диссипативного осциллятора имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{1}$$

где $2\beta = \dfrac{\gamma}{m}$, m – масса груза.

Данное уравнение с точки зрения математики является ДУ второго порядка. Будем анализировать его в зависимости от значений начальных условий и коэффициента затухания β. Начальное значение амплитуды пружинного маятника и начальная фаза зависят от способа возбуждения колебаний и определяются из начальных условий. Для характеристики затухающих колебаний используют понятие время затухания или время релаксации τ – это интервал времени, за который амплитуда колебаний уменьшится в $e \approx 2{,}72$ раза. Время релаксации и коэффициент затухания обратно пропорциональны друг другу: $\tau = \dfrac{1}{\beta}$. Груз на пружине претерпевает колебания под действием возвращающей силы (сила упругости пружины), а сила сопротивления среды (сила вязкого трения) вызывают диссипацию энергии системы и таким образом система больше не является консервативной (рисунок 1). Если трение не слишком велико, то система совершает почти периодическое движение: синусоидальные колебания с постоянной частотой и экспоненциально убывающей амплитудой.

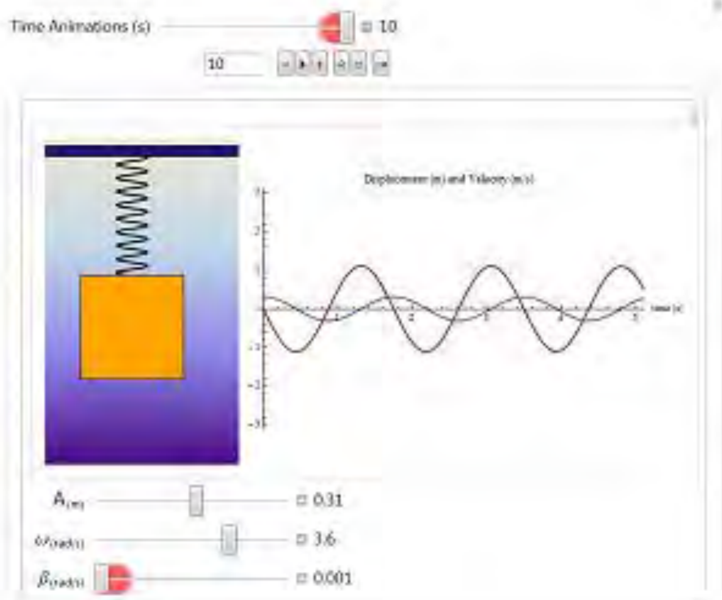

Рисунок 1 – Колебания пружинного маятника в среде с сопротивлением в WM 9.0

Данный процесс имеет три режима колебаний:

1. Режим апериодического затухания (сила вязкого трения среды велика) при $\beta > \omega_0$.
2. Граничный режим или критическое затухание при $\beta = \omega_0$.
3. Режим малого затухания (малое трение среды) при $\beta < \omega_0$.

Первый из приведённых режимов – режим апериодического затухания. В этом случае (при сильном затухании) уравнение движения (1) имеет два действительных корня, которые отрицательны. В системе отсутствуют колебания, она монотонно стремится к положению равновесия, возврат к равновесному состоянию происходит по экспоненциальному закону, т.е. апериодически (рисунок 2). При этом, после отклонения от положения равновесия осциллятор может совершить два вида движения: медленное приближение к положению равновесия с одной стороны или пересечение положения равновесия и асимптотическое приближение к нему с другой стороны.

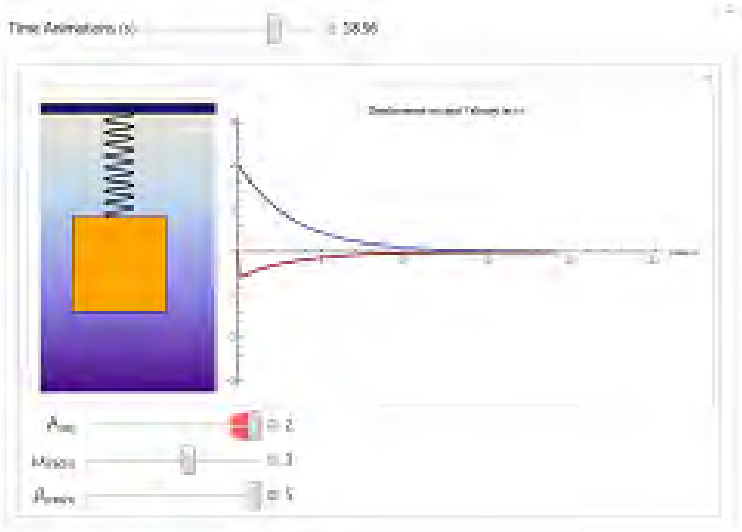

Рисунок 2 – Апериодичность колебаний пружинного маятника в вязкой среде в WM 9.0

Второй режим колебаний называется граничным и выполняется при условии $\beta = \omega_0$. Начиная с такого значения коэффициента затухания, осциллятор будет совершать так называемое неколебательное движение. В данном случае уравнение движения (1) имеет два положительных корня, которые совпадают. В этом режиме величина *x(t)* может даже возрастать в начале процесса, но в итоге отклонение *x(t)* быстро уменьшается вследствие экспоненциального затухания с характерным временем $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. Заметим, что в критическом режиме релаксация происходит быстрее, чем в случае апериодического затухания, т.к. время релаксации определятся меньшим (по абсолютной величине) корнем и выражается в виде:

$$\tau = \frac{2\pi}{\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0}\left[\frac{\beta}{\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2 - 1}\right]. \qquad (2)$$

В выражении (2) введем обозначение $\Phi\left[\dfrac{\beta}{\omega_0}\right] = \dfrac{2\pi}{\omega_0}\left[\dfrac{\beta}{\omega_0} + \sqrt{\left(\dfrac{\beta}{\omega_0}\right)^2 - 1}\right]$, при этом функция $\Phi\left[\dfrac{\beta}{\omega_0}\right]$ является монотонно возрастающей и всегда большей или равной 1. Для апериодического режима затухания $\Phi\left[\dfrac{\beta}{\omega_0}\right] > 1$, а для граничного $\Phi\left[\dfrac{\beta}{\omega_0}\right] = 1$. Таким образом, граничный или критический режим релаксации обеспечивает максимально быстрый возврат системы в равновесное состояние, что представлено на рисунке 3.

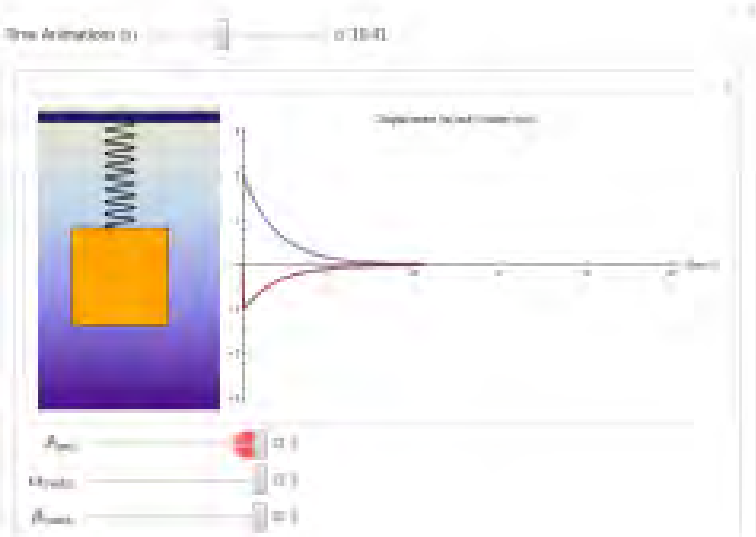

Рисунок 3 – Граничный режим колебаний пружинного маятника в вязкой среде в WM 9.0

Последний возможный режим колебаний – режим малого затухания, в этом случае коэффициент затухания β гораздо меньше собственной частоты колебаний в отсутствии трения ω_0. Для данного режима решение уравнения движения пружинного маятника (1) представляется в форме комплексно-сопряжённых корней. В системе происходят классические затухающие колебания, при этом частота затухающих колебаний пружинного маятника ω меньше гармонической частоты колебаний ω_0, амплитуда уменьшается по экспоненциальному закону $exp(-\beta t)$, а максимальные отклонения осциллятора убывают со временем в геометрической прогрессии (рисунок 4).

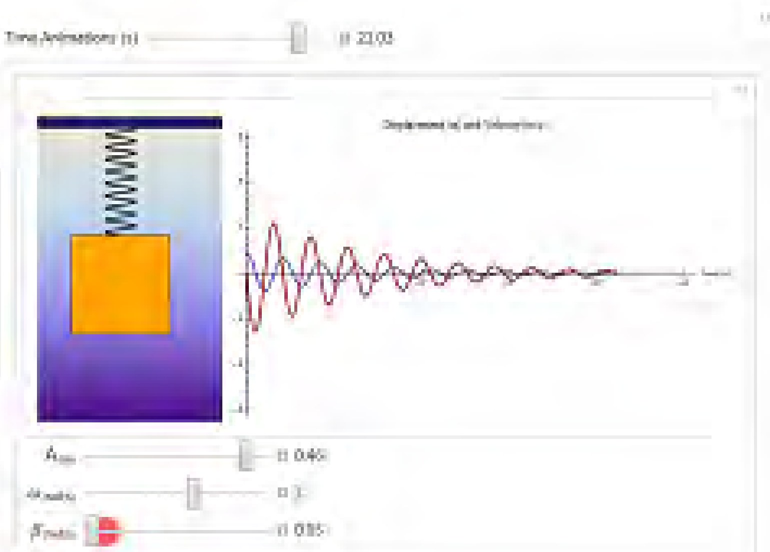

Рисунок 4 – Режим малых затухании пружинного маятника в вязкой среде в WM 9.0

.

Итак, из рисунков 2-4 следует, что при сверхкритическом (апериодическом) и критическом (граничном) затухании после начального возбуждения колебаний осциллятор возвращается в положение равновесия асимптотически, не совершая колебаний, т. е. не пересекая более одного раза положение равновесия. А при затуханиях меньших критических, после начального возбуждения, движение имеет почти колебательный характер с периодическим пересечением положения равновесия.

Таким образом, WM предоставляет широкие возможности для численного и аналитического программирования, а также обладает современными анимационными средствами, что в свою очередь, сказывается на удобстве и скорости обработки экспериментальных и теоретических данных.