УДК 518.85

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ПЛАНИРОВАНИИ И УПРАВЛЕНИИ ПРОИЗВОДСТВОМ

Листопад В.В.

Национальный университет пищевых технологий, Киев, Украина, vlystopad@ukr.net

В докладе рассмотрены некоторые задачи целочисленного линейного программирования в планировании и производственном процессе. При решении этих задач используется функция-оптимизатор «Поиск решения» с электронных таблиц Microsoft Excel.

Появление требований целочисленности в экономических задачах есть достаточно очевидным и связано с наличием в моделях параметров, которые могут принимать только целочисленные значения. Отметим, что задачи целочисленного программирования есть частичным типом задач дискретной оптимизации. Требование дискретности переменных характерно для задач выбора последовательности производственного процесса, календарное планирование работы предприятия, планирования и обеспечения материально-технических поставок, размещение предприятий, распределение капиталовложений, планирование использования оборудования и др. Традиционные методы решения целочисленных задач линейного программирования рассмотрены [1,3], в [2] – использование информационно-коммукативных технологий.

Задача о рюкзаке. Одной из самых простых задач целочисленного программирования с одним ограничением, есть задача о рюкзаке. Эта задача имеет много примеров практического применения. Название «задача о рюкзаке» связано с интерпретацией задачи выбора наилучшего состава предметов, которые удовлетворяют некоторой условной гипотетической проблеме туриста относительно выбора для похода оптимального количества вещей.

Турист может выбрать нужные вещи из списка n предметов. Известно вес каждого j-го предмета m_j $(j=\overline{1,n})$ и ценность – w_j. Максимальный вес всего груза в рюкзаке не может превышать указанного объема M. Необходимо определить, сколько предметов каждого вида турист должен положить в рюкзак, чтобы общая ценность снаряжения была максимальной при условии выполнения ограничения на вес рюкзака.

Обозначим через x_i – количество предметов j -го вида в рюкзаке. Тогда математическая модель задачи имеет вид:

$$F=\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le M,\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z^+,\quad j=\overline{1,n}\ .$$

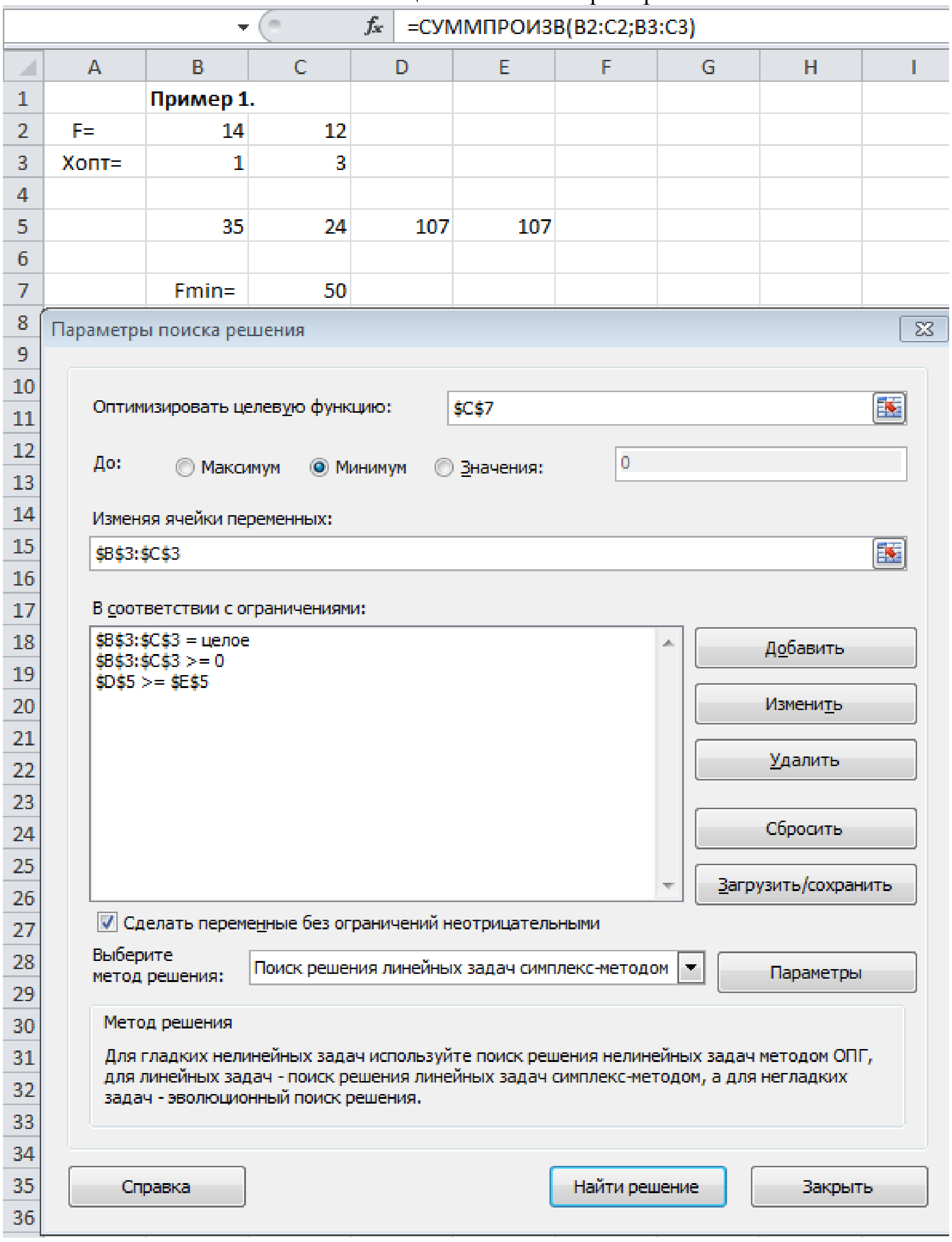
Пример 1. Малому предприятию для стирки белья необходимо 107 кг стирального порошка на две недели. Они могут купить стиральный порошок в упаковках по 35 кг стоимостью 14 у.е. или по 24 кг – стоимостью 12 у.е. Целью малого предприятия есть покупка не менее 107 кг стирального порошка с минимальными затратами. При этом надо покупать или целую упаковку, или не покупать ее совсем, так как часть упаковки приобрести невозможно.

Решение. Обозначим количество упаковок весом 35 кг и 24 кг соответственно переменными x_1, x_2. Получим модель задачи:

$$F=14x_1+12x_2 \to \min$$
$$35x_1+24x_2 \ge 107,$$
$$x_1, x_2 \in Z^+.$$

Решение найдем с помощью функции–оптимизатора «ПОИК РЕШЕНИЯ» в Microsoft Excel.

Таблица 1 – Решение примера1.



В результате получим оптимальный план $X^* = (1;3)$ и $F_{\min} = 50$, т.е. нужно купить 1 упаковку весом 35 кг и 3 упаковки стирального порошка весом по 24 кг и минимальные затраты при этом составляют 50 у.е.

Задача оптимального раскроя материалов. На предприятии осуществляется раскрой m разных партий материала в объеме $b_i \ (i = \overline{1,n})$ единиц одинакового размера в каждой партии. Из материалов всех партий нужно изготовить максимальное количество комплектов Z, в каждую из них входит p разных видов отдельных частей в количестве $k_r \ (r = \overline{1,p})$ единиц, учитывая, что каждую единицу материала можно разрезать на отдельные части n разными способами, причем в случае раскроя единицы i–й партии j–м способом получаем a_{ijr} деталей r–го вида.

Запишем математическую модель задачи. Обозначим через x_{ij} – количество единиц материала i – й партии, которые будут разрезаны j – м способом. Тогда с i – й партии при

$j-$м способе раскроя получим $a_{ijr}x_{ij}$ деталей $r-$го вида. Со всей $i-$й партии, в случае применения к ней всех n способов раскроя, получим $\sum_{j=1}^{n} a_{ijr}x_{ij}$ деталей $r-$го вида, а со всех m партий их будет $Z_r = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijr}x_{ij}$. В каждый комплект должно входить $k_r\,(r=\overline{1,p})$ деталей, поэтому частное $\frac{Z_r}{k_r}\,(r=\overline{1,p})$ определяет количество комплектов, которые можна изготовить с деталей $r-$го вида. Количество полных комплектов для всех видов деталей определяется наименьшим с этих отношений.

В случае полного комплекта должно выполняться равенство отношений: $\frac{Z_1}{k_1}=\frac{Z_2}{k_{12}}=\ldots=\frac{Z_r}{k_r}=\ldots=\frac{Z_p}{k_p}$, откуда $p-1$ отношение можно выразить через любое из них, например, через первое:

$$Z_r/k_r = Z_1/k_1 \;(r=\overline{2,p}) \text{ или } Z_r = k_r Z_1/k_1 \;(r=\overline{2,p}).$$

Заменив Z_r на Z_1 их значениями, получим $p-1$ ограничение относительно комплектов:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijr}x_{ij} = \frac{k_2}{k_1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij1}x_{ij};\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ijr}-\frac{k_2}{k_1}a_{ij1}\right)x_{ij}=0 \quad r=\overline{2,p}.$$

Учитывая наличие количества единиц материала в партиях, запишем m ограничений относительно ресурсов:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = b_i \;\;(i=\overline{1,m}). \qquad (1)$$

(Ограничения относительно использованных ресурсов могут быть уравнениями или неравенствами в зависимости от того, полностью или не полностью необходимо использовать имеющийся объем ресурсов).

Все x_{ij} должны удовлетворять условие не отрицательности $x_{ij}\ge 0 \quad i=\overline{1,m};\; j=\overline{1,n}$ и цело численности.

И так, необходимо определить наибольшее значение функции

$$F=\min_{1\le r\le p}\frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijr}x_{ij}\to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_j = b_i \;\;(i=\overline{1,m}),\\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ijr}-\frac{k_2}{k_1}a_{ij1}\right)x_{ij}=0 \quad r=\overline{2,p};\end{cases} \qquad (2)$$

$$x_{ij}\ge 0\;,\; x_{ij}\in Z^{+},\; i=\overline{1,m};\; j=\overline{1,n}\;.$$

Рассмотрим пример задачи оптимального раскроя материалов.

<u>Пример 2.</u> В цеху разрезают железные прутья длиной 6 м на заготовки 1,4; 2 и 2,5 м. Цех обслуживает двух заказчиков, для каждого из которых отдельно нужно найти:

1) Как разрезать 200 прутьев, чтобы получить н менее 40, 60 и 50 заготовок длиной 1,4; 2 и 2,5 м соответственно. Критерий оптимизации – минимизация отходов;

2) Как разрезать 200 прутьев для формирования из полученных заготовок комплектов, которые состоят из двух заготовок длиной по 1,4 м и по одной длиной 2 и 2,5 м. Критерий оптимизации – максимальное количество комплектов.

Решение. 1) Решим задачу по условиям первого заказчика. Имеем партию железных прутьев в количестве $b = 200$ штук. Известны нижняя грань количества заготовок каждого вида. Введем обозначения: $r\,(r = 1, 2, 3)$ – вид заготовки;

$j\ (j = \overline{1, n})$ – способ разрезания прутьев;

a_{jr} – выход в случае разрезания прутьев j – м способом заготовок r – го вида;

c_j – отходы в случае разрезания прутьев j – м способом заготовок r – го вида:

b – фактическое наличие прутьев:

D_r – нижняя грань потребности в r – й заготовке;

x_j – количество прутьев разрезанных j – м способом.

Запишем математическую модель для решения первого пункта задачи оптимального раскроя. Критерий оптимальности есть минимальное количество отходов.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

Количество полученных заготовок каждого вида должно быть не меньше указанного спроса:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq D_r \ \ (r = \overline{1, p}).$$

Суммарное количество прутьев разрезанных различными способами не может быть больше от количества имеющихся прутьев т.е (1).

Переменные задачи x_j – неотрицательны и целые числа. И так имеем модель:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq D_r \ \ (r = \overline{1, p}). \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \leq b; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0\ ,\ x_j \in Z^+, \quad j = \overline{1, n}\ .$$

Построим числовую экономико–математическую модель разрезания прутьев, рассмотрев возможные их варианты разрезания:

Таблица 2 – Условие задачи 2.

Длина заготовки, м	Варианты раскроя прутьев						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1,4	4	–	–	1	1	2	2
2	–	3	–	1	2	1	–
2,5	–	–	2	1	–	–	1
Длина отходов, м	0,4	0	1	0,1	0,6	1,2	0,7

Желательно, чтобы в это множество вошли все возможные варианты, даже те, которые, на первый взгляд, кажутся неэффективными, например x_6 числовую экономико–математическую модель раскроя прутьев:

$$Z = 0,4x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 0,1x_4 + 0,6x_5 + 1,2x_6 + 0,7x_7 \to \min$$

при условиях:

а) количество заготовок длины 1,4 м

$$4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 \geq 40;$$

б) количество заготовок длины 2 м

$$4x_1 + x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 60;$$

в) количество заготовок длины 2,5 м

$$2x_3 + x_4 + x_7 \geq 50;$$

г) количество прутьев в наличии:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 200;$$

д) не отрицательность переменных

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,7});$$

е) цело численность переменных

$$x_j \in Z^+ \ (j = \overline{1,7}).$$

Итак, в общем, имеем математическую модель

$$Z = 0,4x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 0,1x_4 + 0,6x_5 + 1,2x_6 + 0,7x_7 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 \geq 40; \\ 4x_1 + x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 60; \\ 2x_3 + x_4 + x_7 \geq 50; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 200 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,7}); x_j \in Z^+ \ (j = \overline{1,7}).$$

Решаем задачу с помощью функции–оптимизатора ПОИСК РЕШЕНИЯ.

Таблица 3- решение задачи 2 п. 1.

B10 fx =СУММПРОИЗВ(B8:H8;B12:H12)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Задача разрезания прутьев с критерием оптимальности - минимизация отходов**							
2	Длина	Варианты разрезания прутьев						
3	заготовки,м	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
4	1,4	4	0	0	1	1	2	2
5	2	0	3	0	1	2	1	0
6	2,5	0	0	2	1	0	0	1
7	Длина							
8	остатков,м	0,4	0	1	0,1	0,6	1,2	0,7
9								
10	Fmin=	5						
11								
12	ПЛАН	0	4	0	50	0	0	0
13								
14				50		40		
15				62		60		
16				50		50		
17				54		200		

Полученный план обеспечивает изготовление всех видов заготовок в минимально возможном количестве отходов и для этого используется 54 прута. $X_{опт} =$ 0;4;0;50;0;0;0 и $Z_{\min} = 5$, т.е. 4 прута надо разрезать вторым способом (по 3 заготовки длиной 2 м) и 50 прутьев четвертым способом (по одной заготовке каждого вида). Суммарная длина остатков равна 5 метров.

Замечание. Открытым остается вопрос: как в Excel получить альтернативные решения, которые имеют значение при принятии управленческих решений в конкретных производственных ситуациях.

Усложним пример задачи оптимального раскроя материалов, что предусматривает только один тип материала и отсутствие формирования комплектов конечной продукции.

Решим задачу по условиям второго заказчика. Поскольку в этом случае отсутствуют ограничения относительно количества заготовок, но требуется формирование комплектов, необходимы некоторые изменения:

$r\,(r=1,2,3)$ – вид заготовки;

$j\ (j=\overline{1,n})$ – способ разрезания прутья;

a_{jr} – выход в случае разрезания прутьев j – м способом заготовок r – го вида;

b – фактическое наличие прутьев;

x_j – количество прутьев разрезанных j – м способом;

k_r – количество r – го вида заготовок в комплекте;

Z_r – количество всех заготовок r – го вида.

Математическая модель в этом случае существенно отличается от предыдущего случая.

Со всего материала можно получить $Z_r=\sum_{j=1}^{n}a_{jr}x_j$ заготовок r – го вида. В каждый комплект должно входить две заготовки первого типа $k_1=2$, поэтому отношение $\frac{Z_1}{k_1}$ определяет количество комплектов, которые можно сформировать из заготовок первого вида. Аналогично можна определить количество комплектов для других видов заготовок Z_2/k_2 и Z_3/k_3. Количество возможных полных комплектов определяется наименьшим из этих соотношений: $min\left\{\frac{Z_1}{k_1};\frac{Z_2}{k_2};\frac{Z_3}{k_3}\right\}$.

В случае полного комплекта, выполняется равенство $\frac{Z_1}{k_1}=\frac{Z_2}{k_2}=\frac{Z_3}{k_3}$, откуда два соотношения можно выразить, например, через первое $\frac{Z_2}{k_2}=\frac{Z_1}{k_1};\frac{Z_3}{k_3}=\frac{Z_1}{k_1}$, откуда $Z_2=k_2\frac{Z_1}{k_1};Z_3=k_3\frac{Z_1}{k_1}$.

Заменим Z_3, Z_2 и Z_1 их значениями:

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(a_{j2}-\dfrac{k_2}{k_1}a_{j1}\right)x_j=0;\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\left(a_{j3}-\dfrac{k_3}{k_1}a_{j1}\right)x_j=0.\end{cases}$$

Учитывая ограничение (1) на ресурсы и все x_{ij} должны удовлетворять условию не отрицательности и цело численности мы поучим математическую модель задачи.

И так необходимо найти максимальное значение функции:

$$Z = \left\{ \min \left[\frac{1}{k_1} \sum_{j=1}^{n} a_{j1} x_j ; \frac{1}{k_2} \sum_{j=1}^{n} a_{j2} x_j ; \frac{1}{k_3} \sum_{j=1}^{n} a_{j3} x_j ; \right] \right\} \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{j2} - \frac{k_2}{k_1} a_{j1} \right) x_j = 0; \\ \sum_{j=1}^{n} \left(a_{j3} - \frac{k_3}{k_1} a_{j1} \right) x_j = 0; \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \le b. \end{cases} \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,7}); x_j \in Z^+ \ (j = \overline{1,7}).$$

Решение. Запишем числовую модель, используя предыдущими данными расчетами возможных вариантов разрезания прутьев (табл. 2).

Из условий формирования комплектов имеем:

$$\frac{Z_1}{2} = \frac{Z_2}{1} = \frac{Z_3}{1} \Rightarrow Z_1 = 2Z_2 = 2Z_3,$$

Т.е. заготовок первого вида должно быть у два раза больше, нежели заготовок второго и третьего видов. Отсюда следует, что за минимальное количество комплектов может быть принято одно из соотношений $\frac{Z_2}{1}$ или $\frac{Z_3}{1}$.

Выберем , например $\min\left\{\frac{Z_r}{k_r}\right\} = Z_2$.. Используя таблицу 1запишем выражения для целевой функции и ограничения:

$$Z = Z_2 = 3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 - x_4 - 3x_5 + 2x_7 = 0; \\ 4x_1 - 4x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \le 200 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,7}); x_j \in Z^+ \ (j = \overline{1,7}).$$

Решаем задачу с помощью функции–оптимизатора ПОИСК РЕШЕНИЯ.

Таблица 4 – Решение задачи 2, п. 2.

B12 f_x =СУММПРОИЗВ(B4:H4;B6:H6)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Задача разрезания прутьев с критерием оптимальности - максимизация**									
2			**количества комплектов**							
3		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7		
4	Z=	0	3	0	1	2	1	0		
5										
6	Хопт=	40	0	0	160	0	0	0		
7					**Система ограничений**					
8		4	-6	0	-1	-3	0	2	0	0
9		4	0	-4	-1	1	2	0	0	0
10		1	1	1	1	1	1	1	200	200
11										
12	Zmax=	160								

Получим оптимальный план $X_{onm} = 40;0;0;160;0;0;0$ и $Z_{\max} = 160$ комплектов.

К задачам целочисленного линейного программирования относятся: задача коммивояжера; задача с постоянными элементами затрат; задача планирования производственной линии; задача о назначении и другие.

Задачи целочисленного линейного программирования очень громоздкие как по составлению модели, так и по методам решения. В данной работе рассмотрены некоторые типы указанных задач и их решение с помощью информационно-коммуникационных технологий, что сокращает час решения в 10–50 раз. Единственный недостаток этого метода – невозможность получить альтернативные решения, которые очень важны для принятия оптимальных направлений деятельности в рассматриваемой ситуации.

Литература

1. Ващук Ф.Г., Лавер О.Г., Шумило Н.Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення: Навч. посібник. – К.:Знання, 2008. –368с.
2. Кузьмичев А.І., Медвєдєв М.Г.Математичне програмування в Excel. Навч. посібник – К.: Видавництво Європейського університету, 2005.– №14 (21). –320 с.
3. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування.: Навчальний посібник. К.: КНЕУ, 2005 – 452с.