Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и задания к контрольной работе № 2 для студентов-заочников I курса ФТУГ

Минск 2007

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и задания к контрольной работе № 2 для студентов-заочников I курса ФТУГ

Минск 2007

УДК 51 (075.8)
~~ББК 22.1я7~~
В 93

Составители:
З.М. Алейникова, М.Н. Покатилова,
А.Ф. Шидловская, М.В. Кураленко

Рецензенты:
Т.С. Яцкевич, А.С. Гахович

В настоящем издании помещены программы и контрольные задания (25 вариантов) по темам: «Неопределённый и определённый интеграл», «Функции многих переменных» и «Дифференциальные уравнения». Приводятся краткие теоретические сведения, даны подробные решения типовых примеров и задач.

Студентам рекомендуется изучить теоретический материал в соответствии с программой, разобрать образцы решений типовых примеров и задач, а затем выполнить контрольное задание по номеру варианта.

ПРОГРАММА

Тема 1. Неопределённый интеграл

Первообразная. Неопределённый интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования: замена переменной; интегрирование по частям; интегрирование рациональных дробей, тригонометрических и иррациональных выражений.

Тема 2. Определённый интеграл

Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла. Интегральная сумма. Определённый интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле. Несобственные интегралы. Геометрические приложения определённого интеграла (вычисление площадей плоских фигур, объёмов тел и длин дуг в декартовых координатах).

Тема 3. Функции многих переменных

Функции многих переменных. Область определения. Предел и непрерывность функции двух переменных.

Частные производные функции нескольких переменных, их геометрический смысл для функции двух переменных.

Дифференцируемость функции многих переменных. Полный дифференциал, его применение к приближенным вычислениям. Дифференцирование сложных функций, Неявные функции и их дифференцирование.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Частные производные высших порядков.

Экстремум функции многих переменных. Необходимое и достаточное условие экстремума. Условный экстремум. Метод Лагранжа.

Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент и его свойства. Метод наименьших квадратов.

Тема 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения 1го порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными, однородных, линейных, уравнений Бернулли и в полных дифференциалах.

Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Свойства линейного дифференциального оператора. Линейно-зависимые и линейно-независимые системы функций. Определитель Вронского.

Линейные однородные дифференциальные уравнения, условие линейной независимости их решений. Фундаментальная система решений. Структура общего решения. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Структура общего решения. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Тема 1. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Понятие неопределённого интеграла

Функция $F(x)$, определённая в промежутке $[a;b]$ называется *первообразной* данной функции $f(x')$, если для $x \in [a;b]$ выполнено равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Для заданной функции $f(x)$ её первообразная определяется неоднозначно. Доказано, что если $F'(x)$ - первообразная, для $f(x)$, то выражение $F(x)+c$, где c – произвольное число, задаёт все возможные первообразные для функции $f(x)$.

Любая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$. Неопределённым интегралом от данной функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных:

$$\int f(x)dx = F(x)+c. \quad (F'(x) = f(x)),$$

где: $\int$ - знак неопределённого интеграла, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Нахождение для функции $f(x)$ всех её первообразных называется её интегрированием. Интегрирование – действие обратное дифференцированию.

Свойства неопределённого интеграла (НИ)

Из определения НИ непосредственно вытекают его свойства:

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$$

2. Дифференциал НИ равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx;$
4. $\int \left(f_1(x) f_2(x)\right) o / x = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx;$
5. $\int dF(x) = F(x) + c.$

Таблица интегралов

1. $\int dx = x + c_1;$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c\,(n \neq -1);$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c;$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c, \quad (a > 0, a \neq 1); \int e^x dx = e^x + c;$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + c;$
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c;$
7. $\int \cos x dx = -\sin x + c;$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c;$
9. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + c, \ a \neq 0;$

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} - \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} + c \right|$;

11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} - \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$;

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$;

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$.

Справедливость этих формул проверяется дифференцированием.

Основные методы интегрирования

Задача: данный интеграл свести к табличным.

Непосредственное интегрирование

Знать таблицу интегралов, его основные свойства, уметь преобразовывать алгебраические и тригонометрические выражения.

Пример 1. Найти интегралы:

а). $\int \frac{\left(x+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}} dx = \left| (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \right| =$

$$= \int \frac{\left(x^3 + 3x^2\sqrt{x} + 3x^2 + x^{\frac{3}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \left| \frac{x^n}{x^k} = x^{n-k} \right| =$$

$$= \int \left(x^{\frac{8}{3}} + 3x^{\frac{13}{6}} + 3x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{7}{6}} \right) dx = \frac{3}{11} x^{\frac{11}{3}} + 3 \cdot \frac{6}{11} x^{\frac{11}{6}} + \frac{6}{13} x^{\frac{13}{6}} + c =$$

$$= \frac{3}{11} x^3 \sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{8} x^2 \sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{11} x^6 \sqrt{x^5} + \frac{6}{13} x^2 \sqrt[6]{x} + c.$$

б) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx = \left| \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} dx \right| =$

$$= \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2} (tgx + x) + c.$$

Метод подведения функции под знак дифференциала

Сознательное понимание таблицы.

Любая формула интегрирования $\int f(x)dx = F(x)+c$ сохраняет свой вид, если в неё вместо независимой переменной x, подставить любую дифференцируемую функцию $u=u(x)$

$$\int f(u)du = F(u)+c.$$

Подведение функции под знак дифференциала состоит в том, что под знак дифференциала записывают функцию, дифференциал которой равен данному выражению. Подведение функции под знак дифференциала применяется для сведения интегралов к табличным, т.е. к виду:

$$\int f(u)du = F(u)+c.$$

Применяя метод подведения функции под знак дифференциала, найти интегралы:

$$1.\quad \int e^{arctgx}\frac{dx}{1+x^2} = \left| \begin{array}{c} 1)\ \int e^u du = e^u + c \\ 2)\ u = arctgx \\ 3)\ du = d(arctgx) = \dfrac{1}{1+x^2}dx \end{array} \right| =$$

$$= \int e^{arctgx} d(arctgx) = e^{arctgx} + c.$$

$$2.\quad \int \frac{dx}{x\ln^3 x} = \left| \begin{array}{c} 1)\ \int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c \\ 2)\ u = \ln x \\ 3)\ du = d(\ln x) = \dfrac{1}{x}dx \end{array} \right| = \int (\ln x)^{-3} d(\ln x) =$$

$$= \frac{(\ln x)^{-2}}{-2} + c = c - \frac{1}{2\ln^2 x}.$$

Интегралы, содержащие квадратный трёхчлен

$$\int \frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} dx \quad \text{и} \quad \int \frac{A_2 x + B_2}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx .$$

Для сведения этих интегралов к табличным надо в числителе дроби выделить дифференциал квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, т.е. слагаемое $(2ax+b)dx$. А затем интеграл разбить на сумму двух интегралов, каждый из которых – табличный (во втором интеграле квадратный трёхчлен представить в виде суммы или разности квадратов).

1) $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + c$	1) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c;$
2) *а.* $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + c;$	2) *а.* $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c;$
б. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{u-a}{u+a} \right\rvert + c;$	*б.* $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\rvert + c;$

Найти интегралы:

1. $$\int \frac{3x-7}{x^2+6x+25} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+6) - \frac{18}{2} - 7}{x^2+6x+25} dx = \frac{3}{2} \int \frac{(2x+6)dx}{x^2+6x+25} -$$

$$-16 \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4^2} = \frac{3}{2} \ln\lvert x^2+6x+25 \rvert - 16 \cdot \frac{1}{4} arctg \frac{x+3}{4} + c.$$

2. $$\int \frac{(4x-5)dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \int \frac{-2(-2x+2)+4-5}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx = -2 \int (-x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}} (-2x+2) dx -$$

$$-\int \frac{d(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = -4\sqrt{-x^2+2x+3} - \arcsin \frac{x-1}{2} + c.$$

3. $\int\frac{(2x+6)dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}}=\int\frac{\frac{1}{9}(18x+6)-\frac{2}{3}+6}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx=\frac{1}{9}\int(9x^2+6x+2)^{-\frac{1}{2}}(18x^2+6)dx+$

$+\frac{16}{9}\int\frac{d(3x+1)}{\sqrt{(3x+1)^2+1}}=\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{16}{9}\ln\left|3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right|+c.$

Метод подстановки (замена переменной)

Этот способ часто полезен в тех случаях, когда интеграл $\int f(x)dx$ не может быть непосредственно преобразован к табличным. Полагая $x=\varphi(t)$, где t – новая переменная, а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную.

Тогда $f(x)=f(\varphi(t)),\ dx=\varphi'(t)dx$ и

$$\boxed{\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(y)dt}$$

- формула замены переменной в неопределенном интеграле.

Замечание. Иногда целесообразно применить обратную подстановку: $t=\varphi(x),\ dt=\varphi'(x)dx$.

Формула доказывается дифференцированием обеих её частей. Удачная подстановка позволяет упростить исходный интеграл, сведя его к табличным. Однако даже в тех случаях, когда метод подстановки не приводит исходный интеграл к табличному, он часто позволяет упростить подынтегральную функцию и тем самым облегчить вычисление интеграла.

Найти интегралы:

1. $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\left|\begin{matrix}t=e^x\ ;\ dx=\dfrac{dt}{t}\\ dt=e^xdx=tdx;\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t\left(t+t^{-1}\right)}=\int\frac{dt}{t^2+1}=$

$=arctgt+c=arctge^x+c.$

2. $$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx=\left|\begin{array}{l}1+\ln x=t^2\\ \frac{1}{x}dx=2tdt\\ \ln x=t^2-1\end{array}\right|=2\int\frac{t^2dt}{t^2-1}=2\int\frac{\left(t^2-1\right)}{t^2-1}dt=$$

$$=2\left(\int dt+\int\frac{dt}{t^2-1}\right)=2\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+c=\left|t=\sqrt{1+\ln x}\right|=$$

$$=2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}-1}\right|+c=2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\ln x\right|-$$

$$-2\left|\sqrt{1+\ln x}+1\right|+c.$$

Замечание. Чаще метод подстановки применяется при интегрировании иррациональных выражений.

$$\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}=\left|\begin{array}{c}e^x+1=t^4\\ e^xdx=4t^3dt\\ e^x=t^4-1\end{array}\right|=\int\frac{\left(t^4-1\right)4t^3dt}{t}=4\int\left(t^6-t^2\right)dt=4\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^3}{3}\right)+c=$$

$$=\left|t=\sqrt[4]{e^x+1}\right|=4\sqrt[4]{\left(e^x+1\right)^3}\left(\frac{e^x+1}{7}+\frac{1}{3}\right)+c.$$

Интегрирование по частям

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции.

Известно, что $d(uv)=vdu+udv,\Rightarrow udv=d(uv)-vdu$.

Интегрируя последнее соотношение, получим:

$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu}$$

- формула интегрирования по частям для неопределённого интеграла.

Применение метода интегрирования по частям целесообразно в том случае, когда интеграл в правой части окажется более простым для вычисления, чем исходный интеграл.

При его применении подынтегральное выражение данного интеграла разбивается на два сомножителя $(u$ и $dv)$. При переходе к правой части формулы первый из них дифференцируется $(du = u'dx)$; второй интегрируется $\left(V = \int dv\right)$, (если дифференцирование существенно упростит один множитель, при условии, что интегрирование не слишком усложнит другой).

Некоторые классы интегралов, которые удобно брать по частям:

1. $\int x^n e^x dx,\ \int x^n \sin x dx,\ \int x^n \cos x dx\ \left(u = x^n\right)$
2. $\int x^n \ln x dx,\ \int x^n \arcsin x dx,\ \int x^n \mathrm{arctg} x dx$.

За u в этом случае принимаются логарифмическая или обратная тригонометрическая функция.

3. Круговые или циклические интегралы.

$\int e^x \sin x dx,\ \int a^x \cos x dx,\ \int \cos \ln x dx$. Выбор u и dv равносилен.

Найти интегралы:

$$1. \int \mathrm{arctg} x dx = \left| \begin{matrix} u = \mathrm{artg} x & du = \dfrac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = x\mathrm{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} =$$

$$= x\mathrm{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + c.$$

Иногда полезно повторить интегрирование по частям.

$$2. \int x^2 \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & du = 2x dx \\ \cos x dx = dv & V = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ du = \sin x dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c.$$

Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется отношение двух многочленов: $\dfrac{Pm(x)}{Qn(x)}$. Если $m<n$, то рациональная дробь правильная; если $m \le n$ - неправильная.

Если дробь неправильная, надо выделить целую часть, разделить числитель на знаменатель, т.е. неправильную дробь представить в виде суммы многочлена и <u>правильной</u> рациональной дроби.

Пример:

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^4-x^3+1 & x^2+x-2 \\ \cline{3-3}
 & x^4+x^3-2x^2 & x^2-2x+4 \\ \cline{1-2}
- & -2x^3+2x^2+1 & \\
 & -2x^3-2x^2+4x & \\ \cline{1-2}
- & 4x^2-4x+1 & \\
 & 4x^2+4x-8 & \\ \cline{1-2}
 & -8x+9, \Rightarrow &
\end{array}
$$

неправильная дробь

$$\frac{x^4-x^3+1}{x^2-2x-2}=\left(x^2-2x+4\right)-\frac{8x-9}{x^2+x-2}.$$

Простейшие рациональные дроби

$$1.\ \frac{A}{x-a};\quad 2.\ \frac{A}{(x-a)^2};\quad 3.\ \frac{M_1x+N_1}{ax^2+bx+c};\quad 4.\ \frac{M_2x+N_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}\ k\ge 2.$$

Квадратный трёхчлен ax^2+bx+c не имеет действительных корней.

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие:

Теорема. Каждая правильная рациональная дробь $\dfrac{Pm(x)}{Qn(x)}$, $(m<n)$ может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей.

Это разложение связано с разложением знаменателя дроби на множители:

а) Каждому линейному множителю знаменателя $(x - a)^k$ соответствует k простейших дробей вида (1), (2), числитель которых – неопределённые коэффициенты, а знаменатель – целые положительные степени двучлена $(x - a)$, начиная со степени k и кончая первой;

б) Каждому квадратному множителю $\left(x^2 + px + q\right)^k$ соответствует k простейших дробей вида (3), (4),числитель которых – многочлен первой степени, с неопределёнными коэффициентами, а знаменатель – положительные степени трёхчлена $\left(x^2 + px + q\right)$, начиная со степени k и кончая первой. Итак, для интегрирования рациональных дробей надо:

1. Установить, является ли данная рациональная дробь правильной или неправильной. Если она неправильная, выделить целую часть.

2. Проинтегрировать целую часть и правильную дробь. Для интегрирования правильной дроби необходимо:

3. Разложить знаменатель дроби на множители.

a. Представить дробь в виде суммы простейших дробей с неопределёнными коэффициентами.
b. Найти коэффициенты.
c. Проинтегрировать простейшие дроби.

Найти интегралы

1. $\int \frac{x-2}{x^3+2x^2+x}dx$.

Решение. $f(x) = \frac{x-2}{x^3+2x^2+x}$ - правильная рациональная дробь, следовательно, её можно, разложить на простейшие:

$$\frac{x-2}{x^3+2x^2+x} = \frac{x-2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Неопределённые коэффициенты разложения находят методом неопределённых коэффициентов или методом частных значений.

Используем метод неопределённых коэффициентов:

Приведём простейшие дроби к общему знаменателю и приравняем числители:

$$\frac{x-2}{x^3+2x^2+x}=\frac{A^{(x+1)^2}}{x}+\frac{B^x}{(x+1)^2}+\frac{C^{(x+1)x}}{x+1}=\frac{Ax^2+2Ax+A+Bx+Cx^2+Cx}{x(x+1)^2};$$

$$Ax^2+2Ax+A+Bx+Cx^2+Cx=x-2.$$

Многочлены равны, если равны все коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+C=0 \\ x & 2A+B+C=1 \\ x^0 & A=-2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=-2 \\ C=2 \\ B=3 \end{array}$$

$$\int\frac{(x-2)\,dx}{x^2+2x^2+x}=-2\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{(x+1)^2}+2\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=-2\ln|x|-\frac{3}{x+1}+2\ln|x+1|+c=2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{3}{x+1}+c.$$

2. $\displaystyle\int\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx$.

Решение. $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-5}{x^3-8}$ - неправильная рациональная дробь, выделяем целую часть:

$$\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}=\frac{(x^3-8)+x^2+3}{x^3-8}=1+\frac{x^2+3}{x^3-8}.$$

Интегрируем правильную дробь $\dfrac{x^2+3}{x^3-8}$, разложив её на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+3}{x^3-8}=\frac{x^2+3}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4},$$

$$(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+4A-2C=x^2+3.$$

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A+B=1 \\ x & 2A-2B+C=0 \\ x^0 & 4A-2C=3 \end{array}\Bigg\}$$ Решая систему, получим $A=\frac{7}{12};\ B=\frac{5}{12};\ C=-\frac{1}{3};$

$$\int\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx=\int dx+\frac{7}{12}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{12}\int\frac{5x-4}{x^2+2x+4}dx=$$

$$=x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+\frac{1}{12}\int\frac{\frac{5}{2}(2x+2)-9}{x^2+2x+4}dx=$$

$$=x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+5/24\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+4}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+\frac{5}{24}\ln\left|x^2+2x+4\right|-$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

Интегрирование тригонометрических выражений

Так как любое тригонометрическое выражение можно записать только через *sinx* и *cosx*, то получим интеграл рационально зависящий от *sinx* и *cosx*: $\int R(\sin x,\cos x)dx\,(*)$.

Этот интеграл всегда сводится к интегралу от рациональной функции относительно новой переменной с помощью подстановки $tg\frac{x}{2}=t$, тогда

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

<u>Пример</u>. Найти интеграл

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{aligned} tg\frac{x}{2}&=t\\ \sin x&=\frac{2t}{1+t^2}\\ dx&=\frac{2dt}{1+t^2}\end{aligned}\right|=\int\frac{\cancel{2}dt\,\cancel{\left(1+t^2\right)}}{\cancel{\left(1+t^2\right)}\cdot\cancel{2}t}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+c.$$

Универсальная подстановка <u>всегда</u> позволяет вычислить интеграл (*), однако её используют очень редко, так как она часто приводит к интегрированию громоздких рациональных дробей. Она используется в тех случаях, когда другие подстановки применять нельзя.

<u>*Частные случаи:*</u>

1) Интеграл вида: $\int(\sin x)^m(\cos x)^n\,dx$.

а). Если один из показателей m или n – целое положительное нечётное число, второй любой то подстановка $\sin x=t$, $\cos x dx=d(\sin x)=dt$ или $(\cos x=t-\sin x dt=dt)$ быстрее приводит к цели.

<u>Пример.</u>

$$\int\frac{\cos^5 x}{\sqrt{\sin x}}=\int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)^2 d(\sin x)}{\sqrt{\sin x}}=\int\frac{1-2\sin^2 x+\sin^4 x}{\sqrt{\sin x}}d(\sin x)=$$

$$=\int(\sin x)^{-\frac{1}{2}}d(\sin x)-2\int(\sin x)^{\frac{3}{2}}d(\sin x)+\int(\sin x)^{\frac{7}{2}}d(\sin x)=$$

$$=2\sqrt{\sin x}-\frac{4}{5}\sin^2 x\sqrt{\sin x}+\frac{2}{9}\sin^4 x\sqrt{\sin x}+c=$$

$$=\sqrt{\sin x}\left(2-\frac{4}{5}\sin^2 x+\frac{2}{9}\sin^4 x\right)+c.$$

б). Оба показателя m и n – целые положительные чётные, тогда используют формулы:

$$\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2};\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Пример.

$$\int \sin^4 x\cos^4 x dx = \frac{1}{16}\int (\sin 2x)^4 dx = \frac{1}{16}\int\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{64}\int\left(1-2\cos 4x+\cos^2 4x\right)dx = \frac{1}{64}\left(x-\frac{1}{2}\sin 4x+\int\frac{1+\cos 8x}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{64}\left(x-\frac{\sin 4x}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\sin 8x\right)+c = \frac{1}{64}\left(\frac{3x}{2}-\frac{\sin 4x}{2}+\frac{1}{16}\sin 8x\right)+c.$$

в). Оба показателя чётные целые, но хотя бы один из них отрицательный, тогда используется подстановка $tgx = t$ или с помощью тригонометрических преобразований.

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x} = \left| \begin{array}{l} tgx = t \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int\frac{\left(1+t^2\right)^2 dt}{t^4\left(1+t^2\right)} = \int\frac{\left(1+t^2\right)}{t^4}dt = \int\left(t^{-4}+t^{-2}\right)dt =$$

$$= \frac{t^{-3}}{-3}+\frac{t^{-1}}{-1}+c = c-ctgx-\frac{1}{3}ctg^3 x.$$

С помощью тригонометрических преобразований:

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x} = \int\cos ec^2 x\cdot\cos ec^2 x = -\int\left(1+ctg^2 x\right)cl\left(ctgx\right) = -ctgx-\frac{ctg^3 x}{3}+c.$$

г). Иногда удобно ввести тригонометрическую единицу:

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos^3 x} = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^3 x}dx = \int\frac{\sin x dx}{\cos^3 x}+\int\frac{dx}{\sin x\cos x} =$$

$$= -\int(\cos x)^{-3} d(\cos x)+2\int\frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|tgx|+c.$$

д). Иногда применяется метод интегрирования по частям.

Пример.

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx=\left|\begin{array}{ll} \int udv=uv-\int vdu & \\ u=\cos x & du=-\sin x dx \\ dv=\dfrac{\cos xdx}{\sin^3 x} & v=\int(\sin x)^{-3}d\sin x=\dfrac{-1}{2\sin^2 x}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{-\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}=c-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|.$$

2). Интегралы вида:

$$\int\sin mx\cos nxdx,\quad m\neq n$$

$$\int\cos mx\cos nxdx,$$ преобразуются по формулам:

$$\int\sin mx\sin nxdx,$$

$$\sin mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right],$$

$$\cos mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right],$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right].$$

Пример.

$$\int\sin 3xcox5xdx=\frac{1}{2}\int(\sin 8x-\sin 2x)dx=-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+c.$$

3). Интегралы вида: $\int tg^n xdx$, $\int \mathrm{ctg}^n xdx$, $(n\in N, n\neq 1)$ приводятся к табличным следующим образом: выделяется $tg^2 x=\sec^2 x-1$. Затем интеграл разбивают на сумму двух интегралов (первый – степенной, а второй $\int(tgx)^{n-2}dx$; с ним поступают так же).

Пример.

$$\int tg^5 x dx = \int tg^3 x\left(\sec^2 x - 1\right)dx = \int tg^3 x d\left(tgx\right) - \int tg^3 x dx =$$
$$= \frac{tg^4 x}{4} - \int tgx\left(\sec^2 x - 1\right)dx = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} - \ln\left|\cos x\right| + c.$$

4). $\int \sec^n x dx\left(\int \operatorname{cosec}^n x dx\right)$, если n – чётное целое положительное число, тогда $\sec^2 x dx = d\left(tgx\right)$, а оставшаяся чётная степень $\sec x$ заменяют через tgx. $\left(\sec^2 x = 1 + tg^2 x\right)$.

Пример.

$$\int \sec^6 x dx = \int \left(1 + tg^2 x\right)^2 dtgx = \int \left(1 + 2tg^2 x + tg^4 x\right)d\left(tgx\right) =$$
$$= tgx + \frac{2}{3}tg^3 x + \frac{1}{5}tg^5 x + c.$$

Интегрирование иррациональных выражений

Алгебраическая функция, не являющаяся рациональной называется иррациональной.

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции.

Рассмотрим иррациональные функции интегралы от которых с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональной функции.

1. Интегрирование простейших иррациональностей.

а). Интеграл вида $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx$ сводится к интегралу рациональной функции подстановкой $x = t^k$, где k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

Пример: $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1} = \begin{vmatrix} x = t^4 \\ dx = 4t^3dt \end{vmatrix} = \int \frac{t^2 4t^3 dt}{t^3+1} = 4\int \frac{t^2\left(\left(t^3+1\right)-1\right)}{t^3+1}dt =$

$$= 4\left(\int t^2 dt - \int \frac{t^2 dt}{t^3+1}\right) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right| + c = \left|t = \sqrt[4]{x}\right| =$$

$$= \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right| + c\right).$$

б). $\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m}{n}}, \dots, (ax+b)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ сводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $(ax+b) = t^k$, где k-общий знаменатель дробных показателей.

Пример: $\int \frac{xdx}{(x+9)^{4/3} - 3(x+9)^{5/6}} = \begin{vmatrix} x+9 = t^6 \\ dx = 6t^5dt \end{vmatrix} = \int \frac{\left(t^6-9\right)6t^5 dt}{t^8 - 3t^5} =$

$$= 6\int \frac{\left(t^3-3\right)\left(t^3+3\right)}{t^3-3}dt = 6\int\left(t^3+3\right)dt = \frac{3}{2}t^4 + 18t + c = \left|t = \sqrt[6]{x+9}\right| =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[6]{(x+9)^4} + 18\sqrt[6]{x+9} + c.$$

в) $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ сводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, k – общий знаменатель дробных показателей.

Пример: $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{4+x}{x}}dx = \left| \frac{4+x}{x} = t^2;\ x = \frac{4}{t^2-1};\ \ dx = \frac{-8tdt}{\left(t^2-1\right)^2} \right| =$

$$= \int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{16} \cdot \frac{t\left(-8t\right)dt}{\left(t^2-1\right)^2} = -\frac{1}{2}\int t^2dt = -\frac{1}{6}t^3 + c = \left| t = \sqrt{\frac{4+x}{x}} \right| =$$

$$= -\frac{1}{6}\sqrt{\left(\frac{4+x}{x}\right)^3} + c = c - \frac{4+x}{6x}\sqrt{\frac{4+x}{x}}.$$

Тема 2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Вычисление определённого интеграла

а). Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема. Если $f(x)$ – непрерывна на $[a,b]$ то

$$(1)\quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ - любая первообразная для функции $f(x)$ на $[a;b]$.

Пример 1. Вычислить определённый интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sec^2 x - 1\right) tgx\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\,d\left(tgx\right) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\,dx = \left(\frac{tg^2 x}{2} + \ln\left|\cos x\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(0 + \ln 1\right) = \frac{1 - \ln 2}{2}.$$

б). Замена переменной в определённом интеграле.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[c;d]$ и $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, $a \le \varphi(t) \le b$, то

$$(2)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt,$$

- формула замены переменной в определённом интеграле.

Пример 2. Вычислить определенный интеграл.

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \left|\begin{array}{ll} 2x+1 = t^2 & x=0,\ t^2=1,\ t=1 \\ x = \frac{1}{2}\left(t^2-1\right) & x=4,\ t^2=9,\ t=3 \\ dx = tdt & \end{array}\right| = \int_1^3 \frac{tdt}{+t} =$$

$$= \int_1^3 \frac{(t+1)-1}{1+t}\,dt = \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = \left(t - \ln(t+1)\Big|_1^3\right) =$$

$$= (3 - \ln 4) - (1 - \ln 2) = 2 - \ln 2.$$

в). Интегрирование по частям в определённом интеграле.

Теорема. Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - непрерывно дифференцируемые на $[a;b]$ то (3) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ - формула интегрирования по частям в определённом интеграле.

Пример 3.

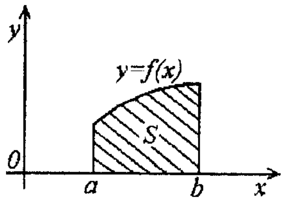
$$\int_0^1 xarctgxdx = \left| \begin{array}{l} u = arctgx, \quad dv = xdx \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}dx, \quad v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}arctgx\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx =$$

$$= \left(\frac{x^2 arctgx}{2} - \frac{x}{2} + \frac{arctgx}{2} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Приложение определённого интеграла

а). Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь криволинейной трапеции, ограничена прямыми $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, осью ox и непрерывной кривой $y = f(x), (y > 0)$.



Вычисляется по формуле

(4) $\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$

Пример 4. Найти площадь области, ограниченной линиями $xy = 4$; $x+y=5$

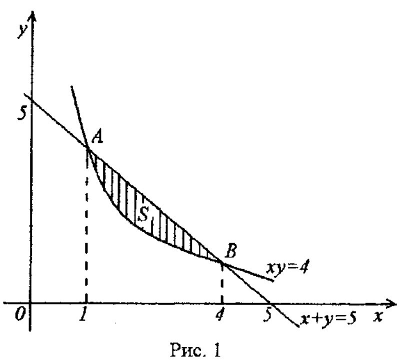


Рис. 1

Решение: Построим область S (рис.4) и найдём абсциссы точек пересечения A, B:

$$\begin{cases} xy = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$y = 5 - x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$x_1 = 1;\quad x_2 = 4,\quad$ тогда $S = \int_1^4 \left(5 - x - \dfrac{4}{x}\right)dx =$

$$= \left(5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right)\Bigg|_1^4 = 7\frac{1}{2} - 8\ln 2 \text{ ед}^2.$$

Пример 5. Найти площадь области, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 1; x - y = 1$.

Решение: Построим область S (рис.2) и найдём ординаты точек пересечения A, B:

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= y + 1 \\ y^2 &= 2(y+1) + 1 \end{aligned}$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0,\quad y_1 = -1,\quad y_2 = 3.$$

$$S = \int_{-1}^{3}\left(y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2}\right)dy = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y - \frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

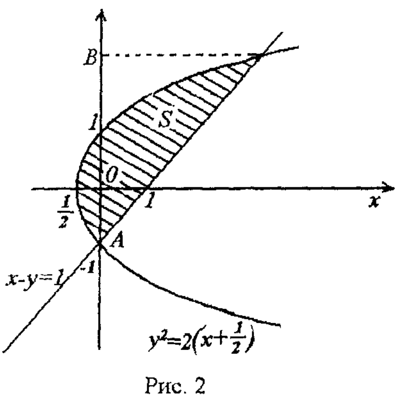


Рис. 2

Несобственные интервалы

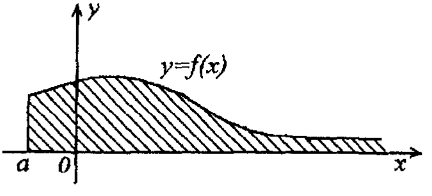
Пример: $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$, чего не может быть, так как интеграл от положительной функции должен быть положительным. Ошибка от незаконного применения формулы Ньютона-Лейбница. Действительно, $f(x)=\frac{1}{x^2}$ при $x=0$ не является непрерывной $(x_0\in[-1;1])$.

Понятие определённого интеграла дано для конечного отрезка $[a;b]$ и непрерывной на нём функции $f(x)$. Оно теряет смысл, если интервал интегрирования бесконечен или функция в интервале интегрирования имеет точки разрыва $2^{\text{го}}$ рода.

Интеграл называется несобственным, если функция $f(x)$ не ограничена на $[a;b]$, или неограниченна сама область интегрирования.

Интегралы с бесконечными пределами (I рода)

Если $f(x)$ непрерывна, $a\le x<\infty$, то по определению



$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \quad (3.1)$$

Если существует *конечный* предел в правой части формулы (3.1.), то несобственный интеграл называется *сходящимся*, если же этот предел бесконечен, или не существует, то – *расходящимся* и значения не имеет.

Аналогично определяются интегралы:

$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx+\lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx$$

Если <u>оба</u> предела в правой части <u>*конечны*</u>, то интеграл называется *сходящимся*, если же <u>*хотя бы один из них*</u> бесконечный или не существует, то – *расходящимся*.

Итак, несобственные интегралы с бесконечными пределами – пределы определённых интегралов с переменными верхними или нижними пределами при стремлении этих пределов к бесконечности.

Вычислить несобственные интегралы, или установить их расходимость:

$$1)\ \int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to\infty}\int_e^{b}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to\infty}\int_e^{b}\frac{d(\ln x)}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_e^{b}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)=1\Rightarrow$$

интеграл сходится и его значение равно 1.

$$2)\ \int_{-\infty}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^4 x^{-2/3}dx=\lim_{a\to-\infty}3\sqrt[3]{x}\Big|_a^4=3\lim_{a\to-\infty}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{a}\right)=\infty,\Rightarrow$$

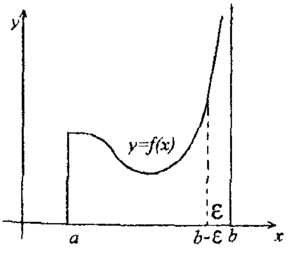
интеграл расходится и значений не имеет.

$$3)\ \int_0^{\infty}\cos x dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\cos x dx=\lim_{b\to\infty}\sin x\Big|_0^{b}=\lim_{b\to\infty}\sin b$$

- предел не существует $\Rightarrow$ интеграл расходится.

Интегралы от неограниченных функций (II рода)

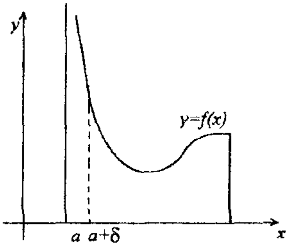
Рассмотрим функции с бесконечными разрывами на отрезке $[a;b]$.



Пусть функция $f(x)$ непрерывна $\forall x\in[a;b)$ в точке $x=b$ – разрыв 2$^{\text{го}}$ рода, т.е. $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=\infty$, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\xi\to 0}\int_a^{b-E}f(x)dx\ .\ (1)$$

Если этот предел существует и <u>*конечен*</u>, то несобственный интеграл называется <u>*сходящимся*</u>, а если он не существует или равен бесконечности, то интеграл называется <u>*расходящимся*</u>.

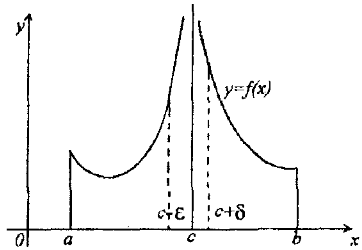


Аналогично определяются интегралы:

а) $f(x)$ - непрерывна $\forall x \in (a;b]$,

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\sigma\to 0}\int_{a+\sigma}^{b} f(x)dx \ . (2)$$



б) f(x) терпит разрыв 2го рода в точке *x=c, (a<c<b)*. Тогда по определению: (3)

$$\int_a^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\xi} f(x)dx + \lim_{\sigma\to 0}\int_{c+\sigma}^{b} f(x)dx, \varepsilon$$

ε и δ стремятся к нулю произвольно, независимо друг от друга.

Если хотя бы <u>*один*</u> из пределов правой части (3) бесконечен, или не существует, то интеграл называется <u>*расходящимся*</u> и значения не имеет, в противном случае – <u>*сходящимся*</u>.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$1)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{c} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \text{ непрерывная } \forall x \in [0;1), \\ \text{а } x = 1 - \text{точка разрыва II рода} \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin x\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to o}\left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

интеграл сходится и его значение равно $\frac{\pi}{2}$.

2) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left| \begin{array}{l} f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} - \text{непрерывна в интервале} \\ [0;2], \text{ кроме } x = 1 \text{ - точка разрыва II рода} \end{array} \right| =$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\sigma \to 0} \int_{1+\sigma}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{x-1} \Bigg|_0^{1-\varepsilon} \right)_x +$$

$$+ \lim_{\sigma \to 0} \left(-\frac{1}{x-1} \Bigg|_{1+\sigma}^{2} \right) = \lim_{\sigma \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\sigma \to 0} \left(-1 + \frac{1}{\sigma} \right) = \infty + \infty = \infty,$$

$\Rightarrow$ интеграл расходится.

б). Геометрический смысл несобственного интеграла от неограниченных функции.

Если несобственные интегралы II рода сходятся, то они определяют площадь криволинейной трапеции с бесконечной высотой.

Тема 3. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

На практике часто приходится рассматривать величины, значения которых зависят от нескольких изменяющихся независимо друг от друга переменных. Для изучения таких величин вводят понятие функции нескольких переменных.

Основные понятия

Определение. Переменная u называется функцией n переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$, если каждой системе значений $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ из области их изменения соответствует одно вполне определённое значение величины u ($u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$).

1. Функция полезности $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ - функция, выражающая полезность от n приобретённых товаров.

2. Производственная функция $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ - функция, выражающая результат производственной деятельности от обусловивших его факторов. $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Рассмотрим функцию двух переменных (n=2), практически все понятия и теоремы, сформулированные для n=2, легко переносятся на случай n>2. Рассмотрение функций двух переменных позволяет использовать геометрическую иллюстрацию основных понятий.

Определение. Переменная Z называется функцией двух переменных x и y, если каждой паре допустимых значений x и y соответствует единственное значение Z.

Обозначение: $Z = f(x, y)$,

x, y – независимое переменные (аргументы);

Z – зависимая переменная (функция).

Геометрическим изображением функции $Z=f(x,y)$ является некоторая поверхность в пространстве, а проекция этой поверхности на плоскость XOY является областью определения функции – $D(f)$. Это может быть вся плоскость или её часть, ограниченная линиями. Линии, ограничивающие область D, называют её *границей*.

Точки, не лежащие на границе, но принадлежащие области, называются *внутренними точками* этой области.

Область, состоящая только из внутренних точек, называется открытой. Если же в область входят точки, принадлежащие границе, она называется замкнутой.

$E(f)$ – множество значений функции $Z = f(x, y)$.

Частное значение функции при $x = x_0$, $y = y_0$ - $f(x_0, y_0)$ – число. Функция $Z = f(x, y)$ может быть задана таблицей, аналитически, графиком. Чаще используется аналитический способ – формулой.

Пример 1. Найти область определения функции

$$Z = \sqrt{25 - 16x^2 - 9y^2}.$$

Решение. Данная функция определена лишь для неотрицательных значений подкоренного выражения, т.е. для тех значений x, y, для которых $25 - 16x^2 - 9y^2 \geq 0$, Значит для всех точек, лежащих на эллипсе.

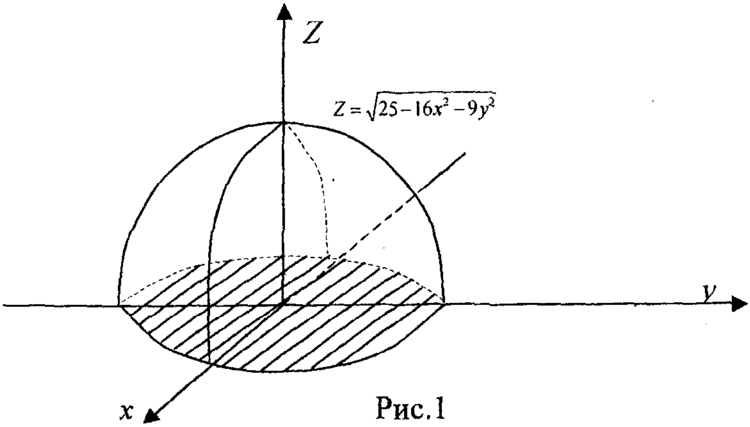


Рис.1

$$\frac{x^2}{\frac{25}{16}} + \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1$$ и внутри его (рис.1).

Частные производные

1. Частные производные первого порядка и их геометрический смысл.

Пусть задана функция $Z=f(x;y)$. Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, другая сохранять своё значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется частным приращением Z по x и обозначается $\Delta_x Z$:

$$\Delta_x Z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично получаем частное приращение по y:

$$\Delta_y Z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Полное приращение ΔZ определяется равенством:

$$\Delta Z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Определение. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x Z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

то он называется частной производной функции $Z=f(x;y)$ в точке $M(x,y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$Z'_x, f'_x, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по x в точке $M_0(x_0,y_0)$ – число: $f'_x(x_0, y_0)$, f'_x/M_0.

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функция одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $f(x,y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функций одной переменной.

<u>Пример.</u> Найти частные производственные функции

$$Z = tg^5\left(e^x + y^3\right),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y-const} = 5tg^4\left(e^x + y^3\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(e^x + y^3\right)}\cdot e^x,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x-const} = 5tg^4\left(e^x + y^3\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(e^x + y^3\right)}\cdot 3y^2.$$

Итак, все формулы и правила нахождения производной функции одного переменного без изменений переносятся на функции нескольких переменных.

Полный дифференциал функции нескольких переменных

Если полное приращение ΔZ функции $z = f(x;y)$ в точке $M(x;y)$ можно представить в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial z(x;y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(x;y)}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)p,$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$; $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ - бесконечно малая функция Δx и Δy при $p \to 0$, то функция $Z=f(x;y)$, называется дифференцируемой в точке $M(x;y)$, а выражение $\frac{\partial z(x;y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(x;y)}{\partial y}\Delta y$ называется полным дифференциалом функции $Z=f(x;y)$ в точке $M(x;y)$, так как $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, получим $\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$ - формула вычисления дифференциала функции $Z=f(x;y)$. Эта формула справедлива и для функции n переменных ($n>2$).

Например, при $n=3$, $u=f(x,y,z)$ имеем:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Формула (1) может быть записана в виде $dz = d_x z + d_y z$

где $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx$, $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy$ - частные дифференциалы функции $Z=f(x;y)$.

Пример. Найти дифференциал функции $u = x^{yz}$, $x>0$, в производной точке $M(x;y)$ и в точке $M_0(2;1;4)$.

Решение. $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz^{yz-1},\ \frac{\partial u}{\partial y}=x^{yz}\cdot(\ln x)z,\ \frac{\partial u}{\partial z}=x^{yz}(\ln x)y.$$

тогда $du=zx^{yz-1}dx+x^{yz}(\ln x)zdx+x^{yz}(\ln x)ydz$.

Заменяя в последнем выражении x,y,z их значениями в точке $M_0(2,1,4)$, получим

$$du(2,1,4)=16(2dx+4\ln 2dy+\ln 2dz).$$

Теоремы и соответствующие формулы для дифференциалов арифметических действий, установленные для функций одной переменной, остаются справедливыми и для функций n переменных x.

Частные производные высших порядков

Рассмотрим функцию $Z=f(x_0;y)$. Её частные производные первого порядка $\frac{\partial Z(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z(x,y)}{\partial y}$ - функции двух переменных $(x,y)\in D$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются частными производными второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\left(Z''xx,f''_{x^2},(x,y)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}\left(Z''_{xy},f''_{xy}(x,y)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=Z''_{xy}=\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=Z''_{yy}=f''_{y^2}(x,y).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го, …, n-го порядков:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 Z}{\partial x^2\partial y};\quad \frac{\partial^4 Z}{\partial x\partial y\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial x\partial y\partial x}\right);\quad \frac{\partial^n Z}{\partial x^k\partial y^{n-k}}.$$

Частная производная второго и более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной частной производной.

Пример. Показать, что функция $Z=\sin^2(y-ax)$ удовлетворяют уравнению $\frac{a^2\partial^2 Z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$.

Решение:

$$\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{x-const}=2\sin(y-ax)\cos(y-ax)=\sin 2(y-ax),$$

$$\left.\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right|_{x-const}=2\cos 2(y-ax),$$

$$\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{y-const}=2\sin(y-ax)\cos(y-ax)(-a)=-a\sin 2(y-ax),$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=2a^2\cos 2(y-ax)\Rightarrow\frac{a^2\partial^2 Z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}.$$

Пример 2. Найти частные производные второго порядка функции $Z=x^3+xy^2-5xy^3+y^5$.

Решение:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=3x^2+y^2-5y^3;\quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=6x,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=2xy-15xy^2+5y^4;\quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=2x-30xy+20y^3,$$

$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=2y-15y^2;\quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}=2y-15y^2$, получили, что

$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}$. Этот результат не случаен.

Теорема. Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

Экстремум функции двух переменных

Основные определения. Пусть функция $Z=f(x,y)$ определена в некоторой области D, точка $N(x_0,y_0)\in D$.

Точка (x_0,y_0) называется точкой максимума (минимума) функции $Z=f(x,y)$, если существует такая δ-окрестность точки (x_0,y_0), что для каждой точки (x,y), отличной от (x_0,y_0), из этой окрестности выполняется неравенство.

$$f(x,y)<f(x_0,y_0) \qquad \left(f(x,y)>f(x_0,y_0)\ \right).$$

Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции. Максимум и минимум функции называют её *экстремумами.*

Замечание. В силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют локальный характер: значение функции в точке (x_0,y_0) сравнивается с её значениями в точках, достаточно близких к (x_0,y_0). В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

Необходимые и достаточные условия экстремума

Рассмотрим условия существования экстремума.

Теорема 1. (необходимое условие экстремума). Если в точке $N(x_0, y_0)$ дифференцируемая функция $Z=f(x, y)$ имеет экстремум, то её частные производные в этой точке равны нулю:

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0, \\ f'_y(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

Геометрические равенства $f'_x(x_0;y_0)=0$ и $f'_y(x_0;y_0)=0$ означают, что в точке экстремума функции $z=f(x,y)$ касательная плоскость к поверхности, изображающей функцию $f(x,y)$, параллельна плоскости Oxy, т.к. уравнение касательной плоскости

$z-z_0=f'_x(x_0;y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0;y_0)(y-y_0)$ принимает вид $z=z_0$.

Замечание: Функция может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует.

Пример. Функция $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ имеет максимум в точке $O(0,0)$, но не имеет в этой точке частных производных.

Точка, в которой частные производные первого порядка функции $Z=f(x,y)$ равны нулю, т.е. $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, называется *стационарной* точкой функции $Z = f(x, y)$.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная не существует, называются *критическими точками.*

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума.

Пример. Функция $Z = xy$. Для неё точка $O(0, 0)$ – критическая точка, так как $Z'_x = y$ и $Z'_y = x$ обращаются в нуль в этой точке. Однако экстремума в ней функция $Z = xy$ не имеет по определению: в достаточно малой окрестности точки $O(0,0)$ найдутся точки для которых $Z > 0$ (точки I и III четвертей) и $Z < 0$ (точки II и IV четвертей).

Таким образом, для нахождения экстремумов функции в данной области необходимо каждую критическую точку функций исследовать на экстремум.

Теорема 2. (достаточное условие экстремума).Пусть в стационарной точке (x_0,y_0) и некоторой её окрестности функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке (x_0,y_0) значения

$$A = f''_{xx}(x_0,y_0),\quad B = f''_{xy}(x_0,y_0),\quad C = f''_{yy}(x_0,y_0).$$

Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Тогда:

1) если $\Delta>0$, то функция $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) имеет экстремум: максимум, если $A<0$;минимум, если $A>0$;

2) если $\Delta<0$, то функция $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) экстремума не имеет.

3) если $\Delta=0$ экстремум в точке (x_0,y_0) может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Исследование функции $z=f(x,y)$ на экстремуме проводится по схеме:

1)Найти область определения функции.

2)Найти частные производные функции $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3)Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \end{cases}$ и найти критические точки функции.

4)Найти частные производные второго порядка, вычислить их значения в каждой критической точке и с помощью достаточного условия сделать правильный вывод о наличии экстремумов.

5)Найти экстремальные значения функции

<u>Пример</u>. Исследовать функцию $z = x^3 + y^3 - 6xy$ на экстремум.

<u>Решение</u>.

1. Функция $z = x^3 + y^3 - 6xy$ определена для всех точек плоскости.

2. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 6x$, Точек, в которых частные производные не существуют, нет.

3. Найдём стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases}; \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ y^2 - 2x = 0 \end{cases}; \begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^4}{4} - 2x = 0. \end{cases}$$

$x^4 - 8x = 0$; $x(x^3 - 8) = 0$; $x_1 = 0,\ y_1 = 0$; $x_2 = 2,\ y_2 = 2$.

Стационарные точки функции $M_1(0,0)$, $M_2(2,2)$.

4) Находим частные производные второго порядка:

$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 6x$; $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = -6$; $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 6y$ и подсчитываем из значения в стационарных точках:

a). $M_1(0;0)$. $A=\left.\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right|_{M_1}=0,\ B=\left.\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}\right|_{M_1}=6,\ C=\left.\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}\right|_{M_1}=0,$

$=>\ \Delta = AC\text{-}B^2=-36<0,$

экстремума в точке $M_1(0,0)$ – нет.

b). $M_2(2;2)$. $A=\left.\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right|_{M_2}=12,\ B=\left.\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}\right|_{M_2}=6,\ C=\left.\dfrac{\partial^2 Z}{\partial}\right|_{M_2}=12,\ =>$

$\Delta = AC\text{-}B^2=108>0,$

точка $M_2(2;2)$ – точка экстремума, а так как $A=12>0$, то точка $(2;2)$- точка минимума.

5) Находим экстремум функции $Z_{min}=Z\ (2;2)=-8$.

Пример. Исследовать функцию $Z = sinx + siny + sin(x+y)$, при $0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ на экстремум.

Решение. 1) Находим частные производные

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=cosx+cos(x+y),\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=cosy+cos(x+y).$

2) Находим стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases}\cos x+\cos(x+y)=0\\ \cos y+\cos(x+y)=0\end{cases}\Rightarrow cosx=cosy\Rightarrow x=y.$$

$cosx+cos2x=0,\ 1+cos2x=2cos^2x,\ cos^2x+\dfrac{1}{2}cosx-\dfrac{1}{2}=0.$

$cosx=-\dfrac{1}{4}\pm\sqrt{\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{2}};$

1) $cosx=\dfrac{1}{2},\ x_1=\dfrac{\pi}{3},$

2) $cosx=-1,\ x_2=\pi$ - не подходит т.к. $x=\pi\notin\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Стационарная точка - $M_0\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$.

3). Проверим выполнение в $M_0\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$ достаточного условия экстремума:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = -\sin x - \sin(x+y);\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y);\ \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = -\sin y - \sin(x+y).$$

Подсчитаем значения этих производных в стационарной точке $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$.

$$A = \left.\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\right|_{M_0} = -\sin\frac{\pi}{3} - \sin(2\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}.$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}\right|_{M_0} = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};\quad C = A = -\sqrt{3}.$$

Так как $\Delta = AC - B^2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \succ 0$, то в точке $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$ есть экстремум. А так как А= $-\sqrt{3} \prec 0$, то точка $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$ - точка максимума.

4). Находим экстремум функции $Z_{max} = Z\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Скалярное поле

Рассмотрим функцию $u=u(x,y,z)$, определённую и дифференцируемую в некоторой области D.

Скалярное поле – это всё пространство (или его часть), в каждой точке которого задана некоторая скалярная величина $u=u(x,y,z)$. Если рассматриваемая величина $u = u(x, y)$ задана в плоской области, то поле называется плоским.

Характеристики скалярного поля $u=u(x,y,z)$:

1. Множество точек, в которых функция $u(x,y,z)$ $(u(x,y))$ принимает одно и тоже значение называется поверхностью уровня (линией уровня): $u(x,y,z)=c$, $(u(x,y=c))$.

Пример 1. Найти поверхности уровня функции $u=x^2+y^2+z^2$.

Решение. Приравняем значение функции к постоянному $x^2+y^2+z^2=c$, получим:

а) если $c<0$, поверхностями уровня является семейство двуполостных гиперболоидов $\frac{x^2}{c}+\frac{y^2}{c}-\frac{z^2}{c}=1$.

б) $c>0$ $\frac{x^2}{c}+\frac{y^2}{c}-\frac{z^2}{c}=1$ – семейство однополостных гиперболоидов.

в) $c=0$, $\frac{x^2}{c}+\frac{y^2}{c}-\frac{z^2}{c}=1$ – круговой конус с вершиной в начале координат.

2. Производная функции поля $u=u(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ по направлению $\vec{l}$, α, β, γ – углы, образованные вектором $\vec{l}_0$ с координатными осями; $\vec{l}_0$ - единичный вектор направления $\vec{l}$, т.е. $\vec{l}_0=$ $=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

- производная по направлению не зависит от длины вектора $\vec{l}$, а только от направления.

Частные случаи: а) $\vec{l}=\vec{l}(1,0,0), \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial z}$;

б) $\vec{l}=\vec{j}(0,1,0), \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial y}$;

в) $\vec{l}=\vec{k}(0,0,1), \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial z}$,

т.е. частные производные выражают скорость изменения функции в направлении осей координат.

Градиент скалярного поля – вектор, координаты которого есть значения частных производных функции поля в точке *M(x,y,z)*.

$$grad\, u(M) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Это означает, что в области *V* определено векторное поле – поле градиентов данной функции поля.

Связь производной функции поля *u=u(x,y,z)* по направлению $\vec{l}$ с градиентом этого поля:

1. $\frac{\partial u}{\partial l} = (qrad\, u, \vec{l}_0)$.

2. $\frac{\partial u}{\partial l} = |qrad\, u|\cos\varphi = np_{\vec{l}}\, qrad\, u$, φ - угол между векторами $grad\, u, \vec{l}_0$.

3. Производная функции в точке по направлению $\vec{l}$ имеет наибольшее значение, если направление $\vec{l}$ совпадает с направлением градиента данной функции, которое равно модулю вектора *grad u*.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |grad\, u|\cos\varphi = |\varphi = 0| = |grad\, u| = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}.$$

<u>Пример 2</u>. Найти скорость изменения скалярного поля, заданного функцией $u = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ в направлении вектора $\vec{a} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$ в точке $M_0(1,1,1)$.

<u>Решение:</u>

1. Найдём значения частных производных в точке $M_0(1,1,1)$

Решение:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = (10xyz - 7y^2z + 5yz^2)\Big/_{M_0} = 8,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = (5x^2z - 14xyz + 5xz^2)\Big/_{M_0} = -4,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (5x^2z - 7xy^2 + 10xyz)\Big/_{M_0} = 8,$$

и направляющие косинусы:

$$\vec{a}(a_x, a_y, a_z),\ \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},\ \cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}, \cos\alpha, \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}.$$

Вычислим косинусы углов вектора $\vec{a}$ с осями координат:

$$\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{64+16+64}} = \frac{2}{3};\ \cos\beta = \frac{-1}{3};\ \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

Скорость изменения поля в точке *M(x,y,z)* равна: $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma$.

Тогда в точке $M_0(1,1,1)$ имеет:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0} = 8\cdot\frac{2}{3} + (-4)\cdot\left(\frac{-1}{3}\right) + 8\frac{2}{3} = 12.$$

<u>Пример 4</u>. Найти величину и направление градиента поля $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ в точке $M_0(2,1,1)$. Определить, в каких точках *grad u* перпендикулярен *OZ*, а в каких он равен нулю. *Решение.*

$$1)\, grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{l} + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3yz; \frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$= 3y^2 - 3xz; \frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - 3yx;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 9; \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = -3; \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -3; \Rightarrow grad\, u(M_0) = 9\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}.2),$$

$$\left|grad\, u(M_0)\right| = \sqrt{81+9+9} = 3\sqrt{11}.$$

$$3)\, grad\, u \perp OZ\ если\ (grad\, u, \vec{k}) = 0, \vec{k}(0,0,1)$$

$$(grad\, u, \overrightarrow{k}) = 3(z^2 - xy), z^2 - xy = 0, z^2 = xy$$

гиперболический параболоид.

Тема 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Понятие дифференцированного уровня

Дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0 \qquad (4.1)$$

Решением дифференциального уравнения *называют любую* функцию $y = y(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество.

Функция $y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ называется **общим решением** ДУ, если она обращает ДУ в тождество при любых значениях постоянных $c_1, c_2, \ldots c_n$

Для начальных условий

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

можно найти значение постоянных $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$, при которых функция $y = y(x, c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0)$ будет удовлетворять этим начальным условиям.

Функцию $y = y(x, c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0)$ называют частным решением ДУ.

Порядком ДУ *называют наибольший порядок производной*, входящий в это уравнение.

4.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение можно разделить относительно y', то оно имеет вид

$$y' = f(x,y). \qquad (4.2)$$

Общим решением дифференциального уравнения I порядка называется функция

$$y' = \varphi(x_1, c_1), \qquad (4.3)$$

которая зависит от одного произвольного постоянного C и удовлетворяет условиям:

1. Она удовлетворяет ДУ при любом C

2. Каково бы ни было начальное условие $y\big|_{x=x_0} = y_0$ можно найти такое $c = c_0$, что $y' = \varphi(x,\ c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию

Частным решением уравнения (4.2) называется функция $y = \varphi(x,\ c_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x,\ c)$, при определенном значении $c = c_0$.

Геометрически:

а) **Общие решения ДУ** - семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной C (интегральные кривые).

б) **частное решение** – одна интегральная кривая семейства, проходящая через данную точку (x_0, y_0) плоскости.

Решить (*проинтегрировать*) ДУ – значит:

1. Найти его общее решение

2. Найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Уравнение с разделяющими переменными.

Уравнение вида $M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0$ называется уравнением с разделяющими переменными, если функции $M(x,\ y),\ N(x,\ y)$ можно представить в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного переменного х или у.

Чтобы проинтегрировать уравнение, надо разделить переменные – это значит перед дифференциалом dx оставить функцию, зависящую только от x, а перед дифференциалом dy, зависящую только от y.

Пример 1. Решить уравнение $(x\cdot y^2 + x)dx + (y - x^2\cdot y)dy = 0$

Решение. $x\cdot(y^2+1)dx + y\cdot(1-x^2)dy$. Разделив переменные, получим $\int\frac{ydy}{y^2+1} = \int\frac{-xdx}{1-x^2}$

или

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \frac{1}{2}\ln c,\text{ т.е.}\quad 1+y^2 = c\left(1-x^2\right)$$

- (общее решение в неявном виде).

Пример 2. Решить задачу Коши для уравнения

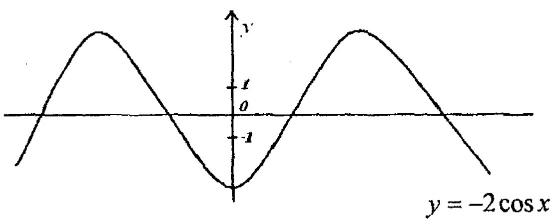
$$ydx + ctgxdy = 0,\ y\big|_{x=\frac{\pi}{3}} = -1;\ y\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = -1.$$

Решение. а) Разделяя переменные, получим $\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{ctgx}$, тогда $\ln y = \ln\cos x + \ln c$ или $y = c\cos x$ – общее решение уравнения.

б) Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию: $y\big|_{x=\frac{\pi}{3}} = -1$.

Подставляя начальное условие в общее решение, получим

$-1 = c\cdot\cos\frac{\pi}{3}$, $c = -2$, $y = -2\cdot\cos x$ – частное решение:



Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Функция $f(x,y)$ называется однородной измерения k относительно x и y,если она удовлетворяет при любом t равенству:

$$f(tx,\ ty) = t^k f(x\ ,y).$$

Уравнение $M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy$ называется однородным если функции $M(x,\ y)$, $N(x,\ y)$-однородные функции одного и того же измерения.

Замена $y = u\cdot x$ приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$.

Пример 3. Решить уравнение. $(2\cdot x-y)dx+(x+y)dy=0$ - однородное дифференциальное уравнение (n=1).

Решение: $y=u\cdot x,\ dy=xdu+udx$.

$$(2\cdot x-u\cdot x)dx+(x+u\cdot x)(udx+xdu)=0,$$

$$\text{или } x\cdot(1+u)du=-(2+u^2)dx.$$

Разделяя переменные, интегрируя, получим.

$$\int\frac{1+u}{2+u^2}du=-\int\frac{dx}{x};\ \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|2+u^2\right|=-\ln x+\ln c$$

$u=\dfrac{y}{x}, \ln c\cdot\sqrt{2\cdot x^2+y^2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\dfrac{y}{\sqrt{2}x}$ - общий интеграл.

Замечание. Уравнение вида $y'=f(x,y)$ называется однородным, если $f(x,y)$-однородная функция нулевого измерения.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейное ДУ первого порядка называется уравнение вида

$$y'+P(x)\cdot y=Q(x).$$

Решается с помощью подстановки $y=u\cdot v$,где $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые функции, тогда

$$u'+v'u+P(x)\cdot u\cdot v=Q(x) \text{ или } u'\cdot v+u(v'+P(x)\cdot v)=Q(x).$$

Функция $v(x)$ находится так, что $v'+P(x)v=0,\ \Rightarrow$ получаем систему $\begin{cases} v'(x)+P(x)\cdot v=0 \\ u'\cdot v(x)=Q(x). \end{cases}$

Определив $u(x)$ и $v(x)$, получим общее решение линейного уравнения $y=u(x\cdot c)\cdot v$.

Пример 5. Решить уравнение $y'+y\cdot tgx=\cos^2 x$.

Решение. Данное уравнение – линейное относительно функции $y(x)$ и $y'(x)$.

Замена $y=u(x)\cdot v(x)$ приводит к системе двух уравнений с разделяющимися переменными:

$$u'\cdot v+v'\cdot u+u\cdot v\cdot tgx=\cos^2 x,\ u'\cdot v+u\cdot(v'+v\cdot tgx)=\cos^2 x,\Rightarrow$$

$$\begin{cases} v' + v \cdot tgx = 0 \\ u' \cdot v = \cos^2 x. \end{cases}$$

1) $\dfrac{dv}{dx} = -v \cdot tgx, \quad \int \dfrac{dv}{v} = -\int tgxdx, \; v = \cos x.$

2) $u' \cdot v = \cos^2 x, \quad \int du = \int \cos xdx, \quad u = \sin x + c$

$y = (\sin x + c)\cos x$ - общее решение.

Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, $n \neq 0, n \neq 1$ называется уравнением Бернулли. Заменой $y(x) = u(x)v(x)$ оно сводится к линейному. На практике оно решается с помощью подстановки.

Пример 5. Решить уравнение Бернулли

$y' + 2xy = 2x^3 y^3 - DY(n = 1)$.

Решение. Применяем метод подстановки

$\underline{y = uv}$. $\quad y' = u'v + v'u. \qquad u'v + v'u + 2xuv = 2x^3 v^3 u^3$.

$$u'v + u(v' + 2xu) = 2x^3 u^3 v^3, \begin{cases} v' + 2xv = 0 \\ u'v = 2x^3 u^3 v^3. \end{cases}$$

1) $v' + 2xv = 0$; $\dfrac{dv}{dx} == 2xv$; $\int \dfrac{dv}{v} = -2\int xdx$; $\ln|xv| = -x^2$.

2) $u' = 2x^3 u^3 v^2$, $\dfrac{du}{dx} = 2x^3 u^3 e^{-2x^2}$, $\underline{v = e^{-x^2}}$.

$$\int \frac{du}{x^3} = \int x^3 e^{-2x^2} dx; -\frac{1}{2u^2} = \left| \begin{array}{ll} \int udv = uv - \int vdu & \\ u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^{-2x^2} xdx & v = -\frac{1}{4} e^{-2x^2} \end{array} \right|$$

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x^2} + \int e^{-2x^2} xdx;$$

$$-\frac{1}{2u^2}=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x^2}-\frac{1}{4}e^{-2x^2}+c;\ y=uv;\ \frac{1}{y^2}=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{v^2}.$$

$$\frac{1}{y^2}=\left(x^2e^{-2x^2}+\frac{1}{2}e^{-2x^2}+c\right)e^{2x^2};\ \frac{1}{y^2}=x^2+\frac{1}{2}+ce^{2x^2},$$

- общий интеграл уравнения.

Уравнение в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение вида (5) $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции *u(x,y)*;

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Теорема. Для того чтобы уравнение (5) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнилось условие $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}, \forall(x,y)\in D$, функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в односвязной области D. Уравнение (5) в этом случае можно записать в виде $du(x,y)=0$. Общий интеграл этого уравнения $u(x,y)=c$.

Функция $u(x,y)$ находится из системы $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y).\end{cases}$

Пример 6. Решить уравнение

$$2x\cos^2 ydx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0.$$

Решение. $M(x,y)=2x\cos^2 y,\ N(x,y)=2y-x^2\sin 2y.$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x\cdot 2\cos y(-\sin y)=-2x\sin 2y;\ \frac{\partial N}{\partial x}=-2x\sin 2y,\Rightarrow$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Т.о. данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, общий интеграл которого имеет вид $u(x,y) = c$.

Найдем функцию $u(x,y)$ из системы: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos^2 y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y - x^2 \sin 2y \end{cases}.$

Из первого уравнения этой системы находим:

$$u(x,y) = \int 2x\cos^2 y dx = x^2 \cos^2 y + \varphi(y).$$

Дифференцируя это равенство по y, получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x^2 \cos y \sin y + \varphi'(y).$$

Или учитывая 2-ое уравнение системы, имеем:

$$2y - x^2 \sin 2y = -x \ \sin 2y + \varphi'(y); \ \varphi'(y) = 2y, \ \varphi(y) = y^2 + c.$$

Следовательно, $u(x,y) = x^2 \cos^2 y + y^2 + c$, а общий интеграл уравнения имеет вид $x^2 \cos^2 y + y^2 = c$.

Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка

Линейным дифференциальным уравнением высшего порядка называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (4.4)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x), \ldots, a_n(x)$ и $f(x)$ – заданные непрерывные функции на (a,b).

Уравнение (4.4) называется *неоднородным*, если $f(x) \neq 0$, и *однородным*, $f(x)=0$.

Уравнение (4.4) при любых начальных условиях имеет единственное решение, удовлетворяющее этим начальным условиям.

Линейные дифференциальные уравнения описывают реальные процессы или дают первое приближение к этим процессам, поэтому имеют широкое практическое применение.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейное *однородное* дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} +...+a_{n-1}y^{I} + a_ny = 0, \qquad (4.5)$$

где $a_i \in R,\ i=\overline{1n}$.

Совокупность n определенных и линейно независимых решений уравнения (2) называется фундаментальной системой решений.

Основная теорема. Если $y_1, y_2,...,y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (2), то их линейная комбинация

$$y=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n, \qquad (4.6)$$

где $c_1, c_2,..., c_n$ – произвольные постоянные числа, является *общим решением* уравнения (2).

Для нахождения общего решения уравнения (4.6) составляется характеристическое уравнение

$$\kappa^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + ..+ a_{n-1}k + a_n = 0 \qquad (4.7)$$

(заменяя производную i-го порядка i-ой степенью k, $i = \overline{1,n}$).

Возможны следующие случаи:

1) все корни $k_1,k_2,...,k_n$ характеристического уравнения (4) действительные и различные.

Общее решение уравнения (2) записывается в виде

$$y = c_1e^{\kappa_1 x} + c_2e^{\kappa_2 x} +...+ c_ne^{\kappa_n x}. \qquad (4.8)$$

2) корни характеристического уравнения действительные, но среди них есть кратные ($k_1 = k_2 = ... = k_r$), r – кратность корня κ характеристического уравнения. Все остальные $n - r$ корней различные.

Общее решение однородного уравнения принимает вид

$$y=e^{kx}(c_1+c_2x+c_3x^2+...+c_rx^{r-1})+c_{r+1}e^{\kappa_{r+1}x}+...+c_ne^{\kappa_nx}. \quad (4.9)$$

3) среди корней характеристического уравнения есть однократные комплексно сопряженные, например, $\kappa_{1,2}=\alpha_1\pm\beta_1 i$; $\kappa_{3,4}=\alpha_2\pm\beta_2 i$. Остальные корни действительные и различные (если есть кратные действительные корни, смотри случай 2).

$$y=e^{\alpha_1x}(c_1\cos\beta_1x+c_2\sin\beta_1x)+e^{\alpha_2x}(c_3\cos\beta_2x+$$
$$+c_4\sin\beta_2x)+c_5e^{k_5x}+...+c_n{}^{k_nx}. \quad (4.10)$$

4) пара комплексно сопряженных корней $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ уравнения (4) имеет кратность r. В этом случае соответствующие r пар членов в формуле (5) заменяются слагаемыми.

$$e^{\alpha x}\left[(c_1+c_2x+...+c_rx^{r-1})\cos\beta x+(c_{r+1}+c_{r+2}x+...+c_{2r}x^{r-1})\sin\beta x\right].$$

Примеры. Найти общее решение уравнений:

1) $y^{IV}+2y^{III}+y^{II}=0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\kappa^4+2\kappa^3+\kappa^2=0.$$

Найдем его корни $\kappa^2(\kappa^2+2\kappa+1)=0,\Rightarrow\kappa_{1,2}=0,\kappa_{3,4}=-1$, общее решение на основании формулы (6) имеет вид

$$y=c_1+c_2x+e^{-x}(c_3+c_4x).$$

2) $y^{III}+y^{II}+y^{I}+y=0.$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\kappa^3+\kappa^2+\kappa+1=0.$$

Найдем его корни: $(k+1)(k^2+1)=0\Rightarrow k_1=-1\Rightarrow k_{2,3}=\pm i$.

Учитывая корни характеристического уравнения, общее решение запишется в виде $y=c_1e^{-x}+c_2\cos x+c_3\sin x$.

4) Для уравнения $y^{II}+4y^{I}=0$ найти интегральную кривую, проходящую через точку (0,0) и касающуюся в этой точке прямой $y=x$.

Решение. а) Найдем общее решение данного уравнения:

$\kappa^2+4\kappa=0 \quad \kappa(\kappa+4)=0, \quad \kappa_1=0,\kappa_2=-4,\Rightarrow$,

общее решение данного уравнения имеет вид $y=c_1+c_2e^{-4x}$.

б) Чтобы найти соответствующую интегральную кривую, используем заданные начальные условия $y(0)=0,\ y^{I}(0)=1$.

$y=c_1+c_2e^{-4x}\quad y(0)=c_1+c_2,$

$$y^{I}=-4c_2e^{-4x}\quad y^{I}(0)=-4c_2,\Rightarrow\begin{cases}c_1+c_2=0\\-4c_2=1\end{cases}\quad \begin{matrix}c_2=-\dfrac{1}{4}\\ c_1=\dfrac{1}{4}.\end{matrix}$$

Таким образом, искомая интегральная кривая имеет уравнение

$$y=\frac{1}{4}(1-e^{-4x}).$$

3) $y^{III}+4y^{II}+29y^{I}=0.$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\kappa^3+4\kappa^2+29\kappa=0\quad \kappa(\kappa^2+4\kappa+29)=0,\quad \kappa_1=0,$$

$$\kappa_{2,3}=-2\pm\sqrt{4-29}=-2\pm 5i,\Rightarrow,$$

общее решение имеет вид $y=c_1+e^{-2x}(c_2\cos 5x+c_3\sin 5x)$.

Линейное *неоднородное* дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y^{I}+a_ny=f(x),\tag{4.11}$$

где $a_i\in R,\ i=\overline{1,n},\quad f(x)$ – непрерывная функция.

Лагранж разработал общий метод решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Метод применим, если известно общее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (8). Этот метод называется методом вариации произвольных постоянных или методом Лагранжа.

Пусть $\overline{y}=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n$ – общее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению(8):

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y^{I}+a_ny=0.\tag{4.12}$$

Метод Лагранжа состоит в том, что общее решение уравнения (8) ищется в виде

$$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2+...+c_n(x)y_n,$$

где $c_1(x),c_2(x),...,c_n(x)$ – неизвестные функции. Эти функции определяются из системы

$$\begin{cases} c_1^1(x)y_1 + c_2^1(x)y_2 + \ldots + c_n^1(x)y_n = 0 \\ c_1^1(x)y_1^1 + c_2^1(x)y_2^1 + \ldots + c_n^1(x)y_n^1 = 0 \\ c_1^1(x)y_1^{(n-1)} + c_2^1(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n^1(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Для уравнения второго порядка $y^{II} + p_1y^I + p_2y = f(x)$ данная система имеет вид $\begin{cases} c_1^1(x)y_1 + c_2^1(x)y_2 = 0 \\ c_1^1(x)y_1^1 + c_2^1(x)y_2^1 = f(x). \end{cases}$

Суть метода Лагранжа для уравнения состоит в следующем:

$$y^{II} + py^I + qy = fx\ .$$

1). Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y^{II} + py^I + qy = 0$ и записываем его в виде

$$\bar{y} = c_1y_1 + c_2y_2\ ,$$

где c_1 и c_2 произвольные постоянные.

2). Для нахождения общего решения неоднородного уравнения $y^{II} + py^I + qy = f(x)$ записываем его в виде

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2, \qquad (4.13)$$

где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ – неизвестные функции, они должны быть такими, чтобы удовлетворялось неоднородное уравнение.

3). Находим выражения для *производных* функций $c_1(x)$ и $c_2(x)$. Для этого составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1^1(x)y_1 + c_2^1(x)y_2 = 0 \\ c_1^1(x)y_1^1 - c_2^1(x)y_2^1 = f(x). \end{cases}$$

4). Найденные из этой системы производные $c_1^I(x)$, $c_2^I(x)$ интегрируются и выражения $c_1(x)$ и $c_2(x)$ подставляются в общее решение (   ) со своими произвольными постоянными c_1 и c_2, полученными при интегрировании.

Пример. Найти общее решение уравнения $y^{II} - y = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}.$

Решение. 1). Находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$\kappa^2 - 1 = 0,$

$\kappa = \pm 1, \quad \Rightarrow \quad y^{II} - y = 0 \ \overline{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \ y_1 = e^x, y_2 = e^{-x} y_1^{\,1} = e^x,$

$y_2^{\,1} = -e^{-x}.$

2). Записываем общее решение неоднородного уравнения: $y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$.

3). Для нахождения производных функций $c_1(x)$ и $c_2(x)$ составляем систему

$$\begin{cases} c_1^{\,1}(x)e^x + c_2^{\,1}(x)e^{-x} = 0 \\ c_1^{\,1}(x)e^x - c_2^{\,1}(x)e^{-x} = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}. \end{cases}$$

$c_1^{\,1}(x)e^x = -c_2^{\,1}(x)e^{-x}$, подставляя во второе уравнение системы, получим:

$$-c_2^{\,1}(x)e^{-x} - c_2^{\,1}(x)e^{-x} = \frac{2e^x}{e^x - 1}, \ \Rightarrow \ c_2^{\,1}(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x - 1}, \ c_1^{\,1}(x) = \frac{1}{e^x - 1}.$$

4). Интегрируя найденные $c_1^{\,1}(x)$ *и* $c_2^{\,1}(x)$, получим:

$$c_1(x) = \int \frac{dx}{e^x - 1} = \int \frac{1 + e^x - e^x}{e^x - 1} dx = -\int \frac{(e^x - 1) - e^x}{e^x - 1} dx = -\int dx + \int \frac{e^x dx}{e^x - 1} =$$

$$= -x + ln(e^x - 1) + c_1.$$

$$c_2(x) = -\int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1} = \begin{vmatrix} e^x - 1 = t \\ e^x dx = dt \\ e^x = t + 1 \end{vmatrix} = -\int \frac{(t+1)}{t} dt = -(t + \ln t) =$$

$$= -(e^x - 1 + \ln\left|e^x - 1\right|) + c_2 = (1 - e^x - ln\left|e^x - 1\right|) + c_2.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = e^x(c_1 - x + ln\left|e^x - 1\right|) + e^{-x}(1 - e^x - ln\left|e^x - 1\right| + c_2).$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами Метод неопределенных коэффициентов

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение *n-го* порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=f(x), \qquad (4.14)$$

где $a_i \in R,\ i=1,\overline{n},\ \ f(x)$ – непрерывная функция.

Соответствующее однородное уравнение:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=0. \qquad (4.15)$$

Запишем характеристическое уравнение для уравнения (4.15):

$$\kappa^n+a_1\kappa^{n-1}+...+a_n=0. \qquad (4.16)$$

Общее решение уравнения (4.14) имеет вид:

$$y=\overline{y}+y^*,$$

где $\overline{y}$ – общее решение уравнения (4.15), а y^* – частное решение уравнения (4.14).

Форма частного решения y^* уравнения (4.14) зависит от вида правой части *f(x)* и корней характеристического уравнения.

Пусть правая часть уравнения (4.14) имеет вид

$$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+\theta_m(x)\sin\beta x), \qquad (4.17)$$

где $P_n(x)$ *и* $\theta_m(x)$ – многочлены, соответственно степени *n* и *m*.

Тогда

$$y^*=x^re^{\alpha x}(u_s(x)\cos\beta x+\upsilon_s(x)\sin\beta x) \qquad (4.18),$$

где $u_s(x)$ и $v_s(x)$ – многочлены степени S с неопределенными коэффициентами, $s=\max\{n,m\}$, r – кратность пар корней $\alpha\pm\beta i$ характеристического уравнения.

Частный случай: Если $\beta=0$, то $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$ и y^* записывается в виде:

$$y^*=x^re^{\alpha x}u_n(x), \qquad (4.19)$$

где $u_n(x)$ – многочлен степени *n* с неопределенными коэффициентами, *r* – кратность корня α характеристического уравнения.

Метод неопределенных коэффициентов состоит в следующем:

1) составляем y^* по формуле (14 или 15), где многочлены общего вида записаны с неопределенными коэффициентами;

2) находим производные $(y^*)^{(n)}$ нужного порядка и вместе с y^* подставляем в уравнение (10);

3) приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях уравнения. При наличии тригонометрических функций приравниваются коэффициенты в левой и правой частях уравнения при произведениях одинаковых степеней x при

$$x^n \cos\beta x \ \ и \ \ x^n \sin\beta x, \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

4) находим числовые значения неизвестных коэффициентов и подставляем их в y^*.

Примеры. Для каждого из заданных дифференциальных уравнений найти общее решение и частное решение в тех случаях, когда заданы начальные условия.

1. $y^V + y^{III} = x^2 - 1$ – ЛНДУ с постоянными коэффициентами.

$y = \overline{y} + y^*$.

1) $\overline{y} : y^V + y^{III} = 0, \ \kappa^5 + \kappa^3 = 0, \ \kappa^3(\kappa^2 + 1) = 0, \ \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$.

$\kappa^2 + 1 = 0, \ \kappa^2 = -1, \ \kappa^2 = -1, \ \kappa_{4,5} = \pm i; \Rightarrow$.

$\overline{y} = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos x + c_5 \sin x$.

2) $y^* : f(x) = x^2 - 1, \Rightarrow y^* = x^r e^{\alpha x} u_n(x), \alpha = 0, n = 2, r = 3,$ т.е.

0 $\quad y^* = x^3(Ax^2 + Bx + c) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3$.

0 $\quad y^{*'} = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2$.

0 $\quad y^{II} = 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx$.

1 $\quad y^{*III} = 60Ax^2 + 24Bx + 6c$.

0 $\quad y^{*IV} = 120Ax + 24B$.

1 $\quad y^{*V} = 120A$.

Подставляя в данное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа, получим

$$120A + 60Ax^2 + 24Bx + 6c = x^2 - 1.$$

$x^2\big|\,60A=1$

$x\ \big|\,24B=0$

$x^0\big|\,120A+6C=-1,\Rightarrow$.

$A=\frac{1}{60};\ \ B=0;\ \ C=-\dfrac{1}{2};\ \ y^*=\dfrac{1}{2}x^3(\dfrac{1}{30}x^2-1)$.

3) $y=\overline{y}+y^*.\ y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4\cos x+c_5\sin x+\dfrac{1}{2}x^3(\dfrac{1}{30}x^2-1)$.

2. $y^{IV}+5y^{II}+4y=3\sin x.$ – ЛНДУ с постоянными коэффициентами, следовательно,

$y=\overline{y}+y^*.$

1) $\overline{y}:y^{IV}+5y^{II}+4y=0;\kappa^4+5\kappa^2+4=0.\ \kappa^2=t;t^2+5t+4=0,t_1=-4$.

$t_2=-1$.

$k^2=-4,\ k_{1,2}=\pm 2i$.

$k^2=-1,\ k_{3,4}=\pm i,\Rightarrow$.

$\overline{y}=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+c_3\cos x+c_4\sin x.$

2) $y^*:f(x)=3\sin x.\ \ y^*=x^re^{\alpha x}(Us(x)\cos\beta x+V_s(x\sin\beta x)$.

$\alpha=0,\beta=1;\alpha\pm\beta i=\pm i;n=m=0\Rightarrow s=0,r=1,$ тогда

$4\big|\ \ y^*=x(A\sin x+B\cos x).$

Находим A и B: $0\big|\ \ \ y^{*'}=A\sin x+B\cos x+x(A\cos x-B\sin x)$.

$5\big|\,y^{*''}=A\cos x-B\sin x+A\cos x-Bsix+x(-A\sin x-B\cos x=$

$=2A\cos x-2B\sin x+x(-A\sin x-B\cos x)$.

$0|\, y^{*III} = -2\sin x - 2B\cos x - A\sin x - B\cos + x(-A\cos x + B\sin x) =$
$= -3A\sin x - 3B\cos x + x(B\sin x - A\cos x).$

$1|\, y^{*IV} = -3A\cos x + 3B\sin x + B\sin x - A\cos x + x(B\cos + A\sin x) =$
$= -4A\cos x - 4B\sin x + (B\cos x + A\sin x).$

Подставляя в данное уравнение, получим

$$6A\cos\alpha - 6B\sin x = 3\sin x$$

$$\begin{cases} 6A = 0 \\ -6B = 3 \end{cases} \quad A = 0,\; B = -\frac{1}{2,} \Rightarrow \quad y^* = -\frac{1}{2} x\cos x.$$

3. $y^{II} - 3y^{I} = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y^{I}(0)$ – ЛНДУ (n=2) с постоянными коэффициентами $y = \overline{y} + y^*$.

1)
$\overline{y} : y^{II} - 2y^{I} = 0, \kappa^2 - 2\kappa = 0, \kappa(\kappa - 2) = 0, \kappa_1 = 0, \kappa_2 = 2 \Rightarrow.$
$\overline{y} = c_1 + c_2 e^{2x}.$

2) $y^* : f(x) = xe^{-x}, y^* = x^r e^{\alpha x} U_n(x), \alpha = -1, n = 1, r = 0.$

$y^* = (Ax + B)e^{-x}$, подставляя в данное уравнение, получим:

$0\;|\, y^* = (Ax + B)e^{-x}.$

$-2|\, y^{*I} = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x}.$

$1\;|\, y^{*II} = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + (Ax + B)e^{-x}.$

$$(-2A + Ax + B - 2A + 2Ax + 2B) = x.$$

$x\;|\, A + 2A = 1.$

$x^0|-4A + 2B = 0 \quad A = \frac{1}{3}, B = \frac{2}{3}. \quad y^* = \frac{1}{3}(x + 2)e^{-x}.$

3) $y = \overline{y} + y^*,\; y = c_1 + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3}(x + 2)e^{-x}.$

4). Найдем частное решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y^{1}(0)=0$.

$$y=c_1+c_2e^{2x}+\frac{1}{3}(x+2)e^{-x},$$

$$y^{1}=2c_2e^{2x}+\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}(x+2)e^{-x}.$$

Подставляя начальные условия $y(0)=1$, $y^{1}(0)=0$, будем иметь

$$\begin{cases} 1=c_1+c_2+\dfrac{2}{3} & c_1={}^{5}\!/_{6}, \\ 0=2c_2+\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3} & c_2=-\dfrac{1}{2}, \Rightarrow \end{cases}$$

частное решение запишется $y=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{3}(x+2)e^{-x}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Задание 1. Найти интегралы

1.1. а) $\int tg^4 x dx$; б) $\int x\sin 2x dx$; в) $\int \frac{2x^5-6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$.

1.2. а) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$; б) $\int \ln^3 x dx$; в) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$.

1.3. а) $\int \cos^4 x\sin^2 x dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[3]{x}}dx$; в) $\int x^2 e^{2x}dx$.

1.4. а) $\int \frac{7x^2+4x+20}{(x^2+4)(x+2)}dx$; б) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; в) $\int arctg\sqrt{x}dx$.

1.5. а) $\int (x+2)e^{-x}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^3-1}$; в) $\int \cos^4 x\sin^3 x dx$.

1.6. а) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; б) $\int \frac{3x^2+6x+1}{(x-1)(x^2+4x+5)}dx$; в) $\int ctg^4 3x dx$.

1.7. а) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; б) $\int x\ln x dx$; в) $\int \sin^4 x dx$.

1.8. а) $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^3-x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$; в) $\int x2^{-x}dx$.

1.9. а) $\int x^4\ln x dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$; в) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}dx$.

1.10. а) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$; б) $\int x arctg x dx$; в) $\int \frac{dx}{(5-x)\sqrt{1-x}}$.

1.11. а) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$; б) $\int x\cos 5x dx$; в) $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$.

1.12. а) $\int ctg^3 x dx$; б) $\int \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$; в) $\int \arcsin x dx$.

1.13. а) $\int\frac{(x+3)dx}{x^2+4x+9}$; б) $\int ctg^3 xdx$; в) $\int x\sec^2 xdx$.

1.14. а) $\int(1+2\sin 3x)^2 dx$; б) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$; в) $\int\frac{x^3-3x+1}{(x+1)(x-2)}dx$.

1.15. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\int\frac{\sin xdx}{1-\sin x}$; в) $\int x\cdot 3^x dx$.

1.16. а) $\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$; б $\int\frac{x-\sqrt{arctg 2x}}{1+4x^2}dx$; в) $\int\sin^3 x\cos^3 xdx$.

1.17. а) $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$; б) $\int\arccos xdx$; в) $\int\cos^5 xdx$.

1.18. а) $\int\sqrt{x}\ln xdx$; б) $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$; в) $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$.

1.19. а) $\int\frac{2x^2-x+7}{(x+1)(x^2+4)}dx$; б) $\int x^2\ln(1+x)dx$; в) $\int tg^4 xdx$.

1.20. а) $\int(4+\cos 5x)^2 dx$; б) $\int\ln(x^2+1)dx$; в) $\int\frac{(-x^2-5x)dx}{(x^2+x+1)(x-2)}$.

1.21. а) $\int\frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}$; б) $\int\frac{4x^2-12x+12}{x^2(x-2)^2}dx$; в) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$.

1.22. а) $\int x^2\sin xdx$; б) $\int\frac{dx}{x^2(x-1)}$; в) $\int\cos^4 x\sin^2 xdx$.

1.23. а) $\int\cos^4 xdx$; б) $\int\ln^2 xdx$; в) $\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)^2}$.

1.24. а) $\int e^x\cos xdx$; б) $\int\cos^6 xdx$; в) $\int\frac{5dx}{(x^2+4)(x-1)}$.

1.25. а) $\int\frac{dx}{x^2-4x-5}$; б) $\int x^2\ln xdx$; в) $\int\cos^7 xdx$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

2.1. $\int\limits_{0}^{\infty} x\sin x dx$. 2.2. $\int\limits_{e}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$. 2.3. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+x)}$. 2.4. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$.

2.5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$. 2.6. $\int\limits_{0}^{\infty}(x+3)e^{-2x}dx$. 2.7. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{2x+3}{2x^2-4x+6}dx$.

2.8. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{arctg3x}}{1+9x^2}dx$. 2.9. $\int\limits_{\pi}^{\infty}x\cos 3x dx$. 2.10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$. 2.11. $\int\limits_{0}^{\infty}xe^{-3x}dx$.

2.12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{x^4+4x^2+8}$. 2.13. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$. 2.14. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{x^2+4}$.

2.15. $\int\limits_{6}^{\infty}\frac{dx}{x^2-6x+5}$. 2.16. $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^4}$. 2.17. $\int\limits_{\pi}^{\infty}x\cos^2 x dx$.

2.18. $\int\limits_{-\infty}^{-2}\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2}dx$. 2.19. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{5x^2+4x+3}$. 2.20. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx$.

2.21. $\int\limits_{0}^{\infty}xe^{-x^2}dx$. 2.22. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. 2.23. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x\ln^2\ln x}$.

2.24. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{4+x}}$. 2.25. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{(1+x)^2}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями с помощью определенного интеграла. Сделать чертеж

3.1. $y^2=16-8x;\ y^2=24x+48$. 3.14. $y=\ln x;\ y=0;\ x=e.$

3.2. $y=\frac{x^2}{16};\ y=\frac{1}{x^2};\ x=4$.

3.15. $y=\sin x;\ y=0;\ x=\frac{\pi}{4};\ x=\frac{3\pi}{4}$.

3.3. $y = x^2 - 3;\ y = \frac{4}{x^2};\ x = 1$.

3.4. $y = x^2 - 1;\ x = 2;\ y = 0$.

3.5. $xy = 4;\ x + y = 5$.

3.6. $y^2 = 2x + 1;\ x - y - 1 = 0$.

3.7. $x^2 = 4y;\ y = \frac{8}{x^2 + 4}$.

3.8. $y = 1 + \cos x;\ x = 0;\ y = 0$.

3.9. $y = -x^2 + 6x - 5;\ x = 0;\ y = 0$.

3.10. $y = 2 - x^2;\ y = \sqrt{2} - x;\ y = 0$.

3.23. $y = \ln x;\ y = -\ln x;\ x = 3$. 3.11. $y = e^x;\ y = e^{-x};\ y = 2$.

3.24. $y = 4 - x^2;\ y = x^2 - 2x$.

3.12. $y = (x+1)^2;\ x + y = 1;\ y = 0$.

3.25. $y = 2x;\ x^2 + y^2 = 25;\ y = 0, y > 0$.

3.13. $y = x^2 - 4x + 3;\ y = x + 3$.

3.16. $x = -2y^2;\ x = 1 - 3y^2$.

3.17. $y = x + 1;\ y = \cos x;\ y = 0$.

3.18. $x^2 + y^2 = 25;\ 2y - 5 = 0$.

3.19. $y = x^2 - 4x + 3;\ y = x + 3$.

3.20. $y = 8 - x^2;\ y = x^2$.

3.21. $y = 4x - x^2;\ y = 0$.

3.22. $y = \frac{1}{x};\ y = x^2;\ y = 4$.

Задание 4. Дана функция $u = u(x, y, z)$, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec{a}$. Найти:

а) полный дифференциал - du;

б) производную по направлению вектора $\vec{a} - \frac{\partial u}{\partial \vec{a}}$;

в) градиент скалярного поля в $M_0 - grad\ u(M_0)$.

4.1. $u=5^{xy-z}+arctg\sqrt{\frac{x-z}{y}};\vec{a}=\vec{j}+\vec{k};M_0(1;1;0)$.

4.2. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k},M_0(3;-4;5)$.

4.3. $u=\arccos\frac{x+y}{z}-(zy)^x,\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k};M_0(-1,1,1)$.

4.4. $u=arctg(xyz)-\ln(x+y+z),\vec{a}=\vec{i}-\vec{k};M_0(1,0,1)$.

4.5. $u=\sqrt[3]{xyz+1}-tg(x+y+z),\vec{a}=-\vec{i}+\vec{k};M_0\left(0,\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$.

4.6. $u=x^2yz^2+2x+1,\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k};M_0(1,-2,2)$.

4.7. $u=3x^4-y+4z^2x,\vec{a}=-3\vec{i}+4\vec{k};M_0(1,1,2)$.

4.8. $u=\ln(5x^2+xy+z),\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k};M_0(1,2,4)$.

4.9. $u=\sin\frac{x}{y}+z^2y,\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k};M_0\left(\frac{\pi}{2},1,2\right)$.

4.10. $u=\cos\frac{zx}{y}+y^2x,\vec{a}=\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k};M_0(0,2,2)$.

4.11. $u=\ln(5x^2-xy+z),\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k};M_0(1,2,4)$.

4.12. $u=x\ln(x^2+y)-z^2y,\vec{a}=4\vec{j}-8\vec{i}-8\vec{k};M_0(1,0,1)$.

4.13. $u=\arcsin\frac{z^2}{y}+x^2,\vec{a}=5\vec{i}+12\vec{k};M_0(-1,2,1)$.

4.14. $u=\cos^2 xy+3z,\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k};M_0(0,-1,1)$.

4.15. $u = tg^2 \dfrac{z}{y} - xy,\ \vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{k};\ M_0(3,\ 2,\ 0)$.

4.16. $u = e^{\frac{x}{y}} + \ln x,\ \vec{a} = 12\vec{j} - 5\vec{k};\ M_o(2,\ 1,\ 0)$.

4.17. $u = x \arccos xy + z^2, \vec{a} = -10\vec{i} + 10\vec{j} - 5\vec{k}; M_0(1,0,1)$.

4.18. $u = ctg \dfrac{y}{z} + x^2, \vec{a} = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 10\vec{k}; M_0(1,\pi,2)$.

4.19. $u = yx^2 \ln z + x^2 + y^2, \vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}; M_0(3,2,1)$.

4.20. $u = \cos \dfrac{zx}{y} + y^2 x, \vec{a} = 2\vec{j} + 2\vec{k}; M_0(3,4,1)$.

4.21. $u = \ln\left(\dfrac{x}{y} + z\right), \vec{a} = 2\vec{i} + 10\vec{j} - 11\vec{k}; M_0(2,3,0)$.

4.22. $u = \cos xy + z^2 y,\ \vec{a} = -\vec{j} + \vec{k};\ M_0(0,\ 2,\ 3)$.

4.23. $u = \dfrac{x+y}{x-y} + z^2, \vec{a} = 6\vec{j} - 6\vec{i} + 7\vec{k}; M_0(2,1,-4)$.

4.24. $u = \dfrac{z}{x^2} - yx^2, \vec{a} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}; M_0(1,-2,1)$.

4.25. $u = \dfrac{x}{x+z} - y^2 x, \vec{a} = 7\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}; M_0(-2,1,0)$.

Задание 5. Проинтегрировать уравнение. При заданном начальном условии найти соответствующий частный интеграл или частное решение

5.1. $y' = y^2 + 3y - 4$. 5.2. $yy' = \dfrac{1-2y}{y}$.

5.3. $xy' + y = \ln x + 1, y(1) = 4$.

5.4. $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(y - x^2 y\right)dy = 0$. 5.5. $y' \sin x = y \ln y$.

5.6. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$.

5.7. $\dfrac{dx}{xy - x^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$.

5.8. $\left(1 - x^2\right)y' - xy = xy^2, y(0) = \dfrac{1}{2}$. 5.9. $\left(2e^y - x\right)y' = 1$.

5.10. $x^2 y' + y^2 = xyy'$.

5.11. $\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx - \dfrac{2y}{x}dy = 0, y(1) = 2$.

5.12. $\left(\cos x - x\sin x\right)ydx + \left(x\cos x - 2y\right)dy = 0$.

5.13. $y' tgx - y = 1, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

5.14. $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xydx = 0$.

5.15. $xy' - y + xe^{\frac{y}{x}} = 0, y(1) = 0$. 5.16. $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$.

5.17. $3x^2 e^y + \left(x^3 e^y - 1\right)y' = 0$. 5.18. $xdy - 2ydx = x^3 \ln xdx$.

5.19. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$. 5.20. $y' + xy = y^3 e^{-x^2}$.

5.21. $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos^3 x}, y(0) = 3$.

5.22. $(\ln y - 2x)\,dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right)dy = 0$.

5.23. $y = x(y' - x\cos x), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

5.24. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0. y(1) = \frac{1}{2e}$.

5.25. $xy' + y = \frac{\ln x}{x}, y(1) = 2$.

Задание 6. Найти общее решение уравнений

6.1. $y'' - 3y' + 2y = x + 2$.

6.2. $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$.

6.3. $3y'' - 2y' = xe^{\frac{2}{3}x}$.

6.4. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$.

6.5. $y'' + 4y' + y = 4$.

6.6. $y'' + 6y' - 3y = x^2$.

6.7. $y'' + 6y' + 9y = 12e^{-3x}$.

6.8. $y'' + 4y' = 4xe^{-4x}$.

6.9. $y'' - 2y' = x^2 - x$.

6.10. $y'' - 5y' - 6y = (3x - 2)e^{-x}$.

6.11. $y'' + 2y' + 2y = 2 + x$.

6.12. $y'' + 2y' = 2x$.

6.13. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$.

6.14. $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}$.

6.15. $y'' - 2y' + y = x^3$.

6.16. $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.

6.17. $y'' - y' + y = x^3 + 6x$.

6.18. $y'' - 3y' + 2y = \left(x^2 + x\right)e^{3x}$.

6.19. $y'' + 2y' - 8y = (12x + 20)e^{2x}$.

6.20. $y'' + 4y = x + 6e^x$.

6.21. $y'' - 4y' = 10e^{3x}$.

6.22. $y'' + y' = x^2 - 6 + e^{4x}$.

6.23. $y'' - 4y' = 2e^{2x} - 4x$.

6.24. $y'' - 6y' + 9y = 16e^{-x} + 9x - 6$.

6.25. $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 4x - 5$.

Литература

1. Высшая математика. Общий курс/ Под ред. С.А. Самоля. – Минск: Выш. шк., 2000.

2. Высшая математика для экономистов/ Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 1998.

3. Шипачев, В.С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1985.

4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учебное пособие В 3 ч./ Под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1991.

Содержание

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и задания
к контрольной работе № 2
для студентов-заочников I курса ФТУГ

С о с т а в и т е л и:
АЛЕЙНИКОВА Зинаида Михайловна
ПОКАТИЛОВА Маргарита Николаевна
ШИДЛОВСКАЯ Анна Федосовна
КУРАЛЕНКО Маргарита Владимировна

Технический редактор М.И. Гриневич
Компьютерная верстка О.В. Дубовик

Подписано в печать 11.05.2007.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 4.18. Уч.-изд. л. 3,27. Тираж 500. Заказ 226.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0131627 от 01.04.2004.
220013, Минск, проспект Независимости, 65.