МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

Е. И. Федорако
Е. Д. Бачило

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пособие

Минск
БНТУ
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

Е. И. Федорако
Е. Д. Бачило

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕРГАЛЫ

Пособие для студентов специальностей
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»,
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,
1-70 03 01 «Автомобильные дороги»,
1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»,
1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна»,
1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов»,
1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций»

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области строительства и архитектуры

Минск
БНТУ
2017

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.1я7
Ф 33

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра «Математика и физика»
Высшего государственного колледжа связи
(зав. кафедрой, д-р физ.-мат. наук, проф. *Л. Л. Гладков*);
доцент кафедры «Общая математика и информатика»
Белорусского государственного университета,
канд. физ.-мат. наук, доцент *А. А. Самодуров*

Федорако, Е. И.

Ф 33 Кратные и криволинейные интегралы: пособие для студентов специальностей 1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций», 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью», 1-70 03 01 «Автомобильные дороги», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены», 1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство», 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», 1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций» / Е. И. Федорако, Е. Д. Бачило. – Минск : БНТУ, 2017. – 61 с.

ISBN 978-985-550-646-2.

Пособие предназначено для помощи студентам второго курса при изучении раздела «Определенный интеграл по фигуре». Содержит краткий теоретический материал, проиллюстрированный практическими примерами, а также задачи для аудиторной и самостоятельной работы студентов, к которым приведены ответы.

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.1я7

ISBN978-985-550-646-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Понятие и вычисление повторного интеграла

Повторным интегралом называется выражение вида

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right). \tag{1.1}$$

Правая часть равенства (1.1) дает порядок вычисления повторного интеграла: вычисление производят справа налево, т. е. сначала находят $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = F(x)$, в котором переменную x считают постоянной, затем вычисляют $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$.

Аналогично вычисляют интеграл

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right):$$

сначала находят интеграл $\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x = G(y)$, в котором переменную y считают постоянной, затем находят $\int_c^d G(y)\mathrm{d}y$.

Пример 1. Вычислить повторный интеграл $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^x (x-y)\mathrm{d}y$.

Решение. Сначала вычислим внутренний интеграл

$$\int\limits_1^x (x-y)\,\mathrm{d}y = |x = \text{const}| = \left(xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=1}^{y=x} = \left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) - \left(x - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} = F(x).$$

Тогда исходный двойной интеграл равен

$$\int\limits_1^2 \mathrm{d}x \int\limits_1^x (x-y)\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 F(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x \right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} = \left(\frac{8}{6} - \frac{4}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Замечание. Если в повторном интеграле пределы интегрирования по обеим переменным постоянные, а подынтегральную функцию $f(x, y)$ можно представить в виде произведения $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ (т. е. удается разделить переменные), то результат вычисления повторного интеграла можно найти как произведение двух определенных интегралов:

$$\int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_c^d f(x, y)\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_c^d \varphi(x)\psi(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int\limits_c^d \psi(y)\mathrm{d}y.$$

Пример 1. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^1 \frac{e^x}{y}\mathrm{d}x$.

Решение. $\int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^1 \frac{e^x}{y}\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}y}{y} \int\limits_0^1 e^x \mathrm{d}x = (\ln y)\Big|_1^2 \cdot \left(e^x\right)\Big|_0^1 =$

$$= (\ln 2 - \ln 1) \cdot \left(e^1 - e^0 \right) = \ln 2 \cdot (e - 1).$$

Ответ: $\ln 2 \cdot (e-1)$.

Задачи для самостоятельного решения

№ 1. Вычислить повторные интегралы:

1) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1 (2x+4y)dy$;

2) $\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_x^{x^2} (2x-1)dy$;

3) $\int\limits_1^2 dy\int\limits_{-1}^y (4xy-2)dx$;

4) $\int\limits_1^4 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^y (x+2y)dx$;

5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int\limits_0^{\cos x} 2y\sin x dy$;

6) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx\int\limits_0^x \cos x dy$;

7) $\int\limits_1^e dy\int\limits_1^y \ln y dx$;

8) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_1^{x+1} (y-x)dy$;

9) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\frac{1}{y^2+1}} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{arctg} y}}$;

10) $\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} \frac{y}{x^2+1}dy$.

1.2. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Пусть область *D* на плоскости (рис. 1.1) ограничена слева и справа вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$, а снизу и сверху – графиками непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций $y=g_1(x)$ и $y=g_2(x)$ ($g_1(x) < g_2(x)$) соответственно, где функция $f(x,y)$ непрерывна в области *D*. Тогда двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области *D* вычисляется как повторный интеграл.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

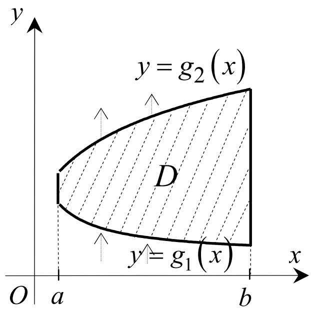

Рис. 1.1

Замечание 1. В некоторых случаях одна или обе вертикальные прямые $x = a$ или $x = b$ могут вырождаться в точку (рис. 1.2, 1.3). Другими словами, область D заключена в пределах вертикальной полосы от $x = a$ до $x = b$.

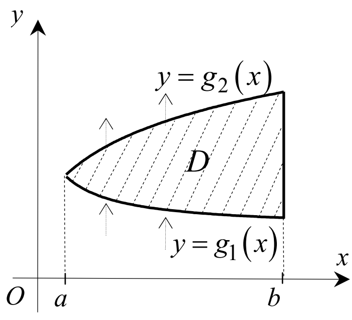

Рис. 1.2

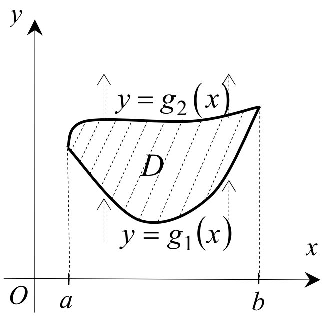

Рис. 1.3

Описанная выше область D называется правильной в направлении оси Oy. Так как при движении «сквозь» область D параллельно оси Oy снизу вверх мы на входе в эту область пересекаем кривую $y = g_1(x)$, а на выходе из области – кривую $y = g_2(x)$, график функции $y = g_1(x)$ называется линией входа, а график функции $y = g_2(x)$ – линией выхода.

Если область D на плоскости (рис. 1.4) ограничена снизу и сверху горизонтальными прямыми $y = c$ и $y = d$, а слева и справа – графиками непрерывных на отрезке $[c;d]$ функций $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$ ($\varphi_1(y) < \varphi_2(y)$) соответственно, где функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, то двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области D вычисляется как повторный интеграл:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x. \qquad (1.2)$$

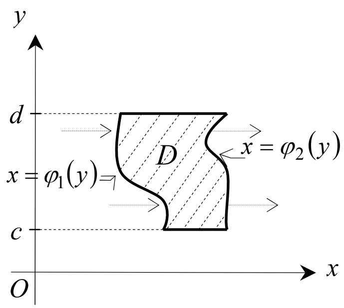

Рис. 1.4

Замечание 2. В некоторых случаях одна или обе горизонтальные прямые $y = c$ или $y = d$ могут вырождаться в точку (рис. 1.5, 1.6). Другими словами, область D заключена в пределах горизонтальной полосы от $y = c$ до $y = d$.

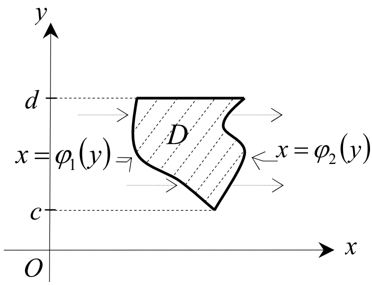

Рис. 1.5

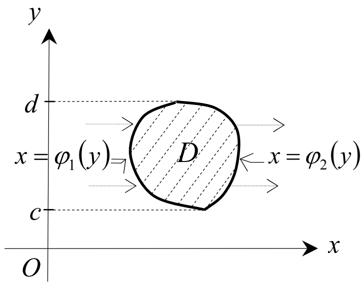

Рис. 1.6

Описанная выше область D называется правильной в направлении оси Ox. Так как при движении «сквозь» область D параллельно оси Ox слева направо мы на входе в эту область пересекаем кривую $x = \varphi_1(y)$, а на выходе из области – кривую $x = \varphi_2(y)$, график функции $x = \varphi_1(y)$ называется линией входа, а график функции $x = \varphi_2(y)$ – линией выхода.

Замечание 3. Если область интегрирования D не является правильной относительно ни одной из осей координат, то ее разбивают на две или несколько частей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, каждая из которых является правильной относительно какой-нибудь из осей. Тогда двойной интеграл по области D вычисляют как сумму интегралов по каждой из областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$.

Замечание 4. Если при вычислении двойного интеграла как повторного по формуле вида (1.1) переходят к вычислению того же двойного интеграла как повторного по формуле вида (1.2) или наоборот, то говорят, что в двойном интеграле изменился порядок интегрирования.

Перечислим некоторые свойства двойного интеграла, используемые при его вычислении (при условии, что подынтегральные функции интегрируемы):

1) $\iint\limits_D c \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ где c – const;

2) $\iint\limits_D \left(f_1(x,y) \pm f_2(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \pm \iint\limits_D f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$

3) если область D состоит из n непересекающихся частей $D_1, D_2, ..., D_n$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + ... + \iint\limits_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

4) интеграл по области D от единицы равен площади области D:

$$S = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Пример 1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{2x^2}^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Решение. По условию область интегрирования ограничена слева и справа прямыми $x=0$ и $x=1$ соответственно, снизу – графиком функции $y=2x^2$ – параболой с вершиной в точке $(0;0)$, ветви которой направлены вверх (линия входа), сверху – графиком функции $y=2x$ – прямой, проходящей через точки $(0;0)$ и $(1;2)$ (линия выхода) (рис. 1.7). Найдем точки пересечения графиков данных функций: решим уравнение $2x^2=2x$, $x^2-x=0$, $x(x-1)=0$, $\Rightarrow x_1=0, \Rightarrow$ $\Rightarrow x_2=1$ – абсциссы точек пересечения.

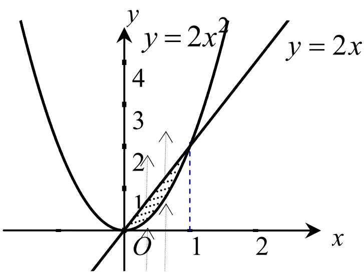

Рис. 1.7

Ординаты этих точек: $y_1 = 2 \cdot 0 = 0$, $y_2 = 2 \cdot 1 = 2$. Таким образом, точки пересечения графиков – $(0; 0)$ и $(1; 2)$.

Для изменения порядка интегрирования необходимо указать, в пределах какой горизонтальной полосы расположена область интегрирования. В данном случае пределы по переменной y: $y = 0$ и $y = 2$ (пределы снизу и сверху соответственно). Для нахождения пределов по переменной x выразим переменную x из уравнений $y = 2x$ и $y = 2x^2$, получим $x = \frac{y}{2}$ и $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$ (корень взяли со знаком +, так как в области интегрирования $x \geq 0$) – пределы слева (линия входа) и справа (линия выхода) соответственно (рис. 1.8). Таким образом,

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{2x^2}^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

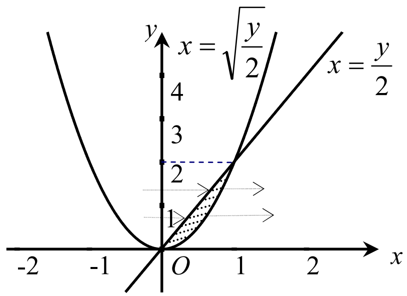

Рис. 1.8.

Заметим, что область интегрирования является правильной относительно обеих координатных осей.

Задачи для самостоятельного решения

№ 2. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^1 f(x,y)dy$;

2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_1^{2-x^2} f(x,y)dy$;

3) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2-1}^1 f(x,y)dy$;

4) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{3x^2}^{3x} f(x,y)dy$;

5) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{3}}^{4-x^2} f(x,y)dy$;

6) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^2 f(x,y)dy$;

7) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

8) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^3}^{4x} f(x,y)dy$;

9) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{4-x^2} f(x,y)dy$;

10) $\int\limits_0^8 dx \int\limits_0^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)dy$.

Пример 2. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2\sqrt{x}}^{4-2x} f(x,y)dy.$$

Решение. По условию область интегрирования ограничена слева прямой $x=0$, справа – прямой $x=1$, снизу – графиком функции $y=2\sqrt{x}$ – верхней частью параболы $x=\frac{y^2}{4}$ с вершиной в точке $(0;0)$, ветви которой направлены вправо (линия входа), сверху – графиком функции $y=4-2x$ – прямой, проходящей через точки

$(0;4)$ и $(2;\ 0)$ (линия выхода). Найдем точки пересечения графиков данных функций: решим уравнение $2\sqrt{x}=4-2x$, $\begin{cases}4x=16-16x+4x^2,\\ 4-2x\geq 0,\end{cases} \Rightarrow x=1$ – абсцисса точки пересечения. Ее ордината равна $2\sqrt{1}=2$.

Изобразим область интегрирования (рис. 1.9). Она является правильной относительно оси *Oy*.

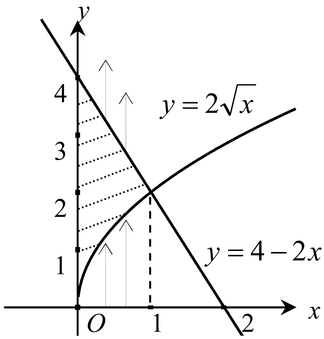

Рис. 1.9

Для изменения порядка интегрирования необходимо разбить область горизонтальной прямой $y=2$ на две части, каждая из которых является правильной относительно оси *Ox* (рис. 1.10):

а) одна из частей расположена в пределах горизонтальной полосы от $y=0$ до $y=2$ (пределы по переменной *y* снизу и сверху соответственно). Для нахождения пределов по переменной *x* выразим ее из уравнения $y=2\sqrt{x}$, получим: $x=\dfrac{y^2}{4}$. Тогда $x=0$ и $x=\dfrac{y^2}{4}$ – нижний (линия входа) и верхний (линия выхода) пределы по переменной *x* соответственно;

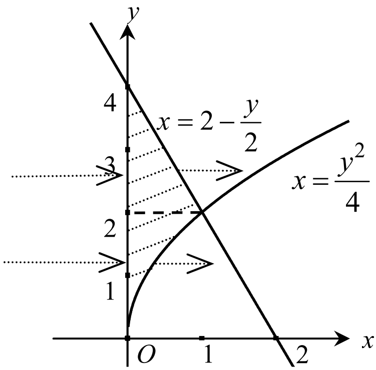

Рис. 1.10

б) другая часть области расположена в пределах горизонтальной полосы от $y = 2$ до $y = 4$ (пределы по переменной y снизу и сверху соответственно). Для нахождения пределов по переменной x выразим ее из уравнения $y = 4 - 2x$, получим $x = \frac{4-y}{2}$. Тогда $x = 0$ и $x = \frac{4-y}{2}$ – нижний (линия входа) и верхний (линия выхода) пределы по переменной x соответственно.

Таким образом, получим

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{2\sqrt{x}}^{4-2x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^{\frac{y^2}{4}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_2^4 \mathrm{d}y \int_0^{2-\frac{y}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

Задачи для самостоятельного решения

№ 3. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле:

1) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{2-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$;

2) $\int_0^3 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x+1}}^{8-2x} f(x,y)\mathrm{d}y$;

3) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{x^2-1}^{3-3x} f(x,y)\mathrm{d}y$;

4) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{3x}^{4-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$;

5) $\int\limits_{-2}^0 \mathrm{d}x \int\limits_{x+1}^{3-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$;

6) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{x}^{\sqrt{2-x}} f(x,y)\mathrm{d}y$;

7) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{x^2+1}^{4-2x} f(x,y)\mathrm{d}y$;

8) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{x^3}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$;

9) $\int\limits_{-1}^0 \mathrm{d}x \int\limits_{2x^2}^{x+3} f(x,y)\mathrm{d}y$;

10) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{3\sqrt{x}}^{5-2x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

Пример 3. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_1^{2^y} f(x,y)\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_1^{3-y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

Решение. По условию область интегрирования состоит из двух частей. Одна из них ограничена снизу и сверху прямыми $y=0$ и $y=1$, слева – прямой $x=1$, справа – графиком функции $x=2^y$. Вторая часть ограничена снизу и сверху прямыми $y=1$ и $y=2$, слева и справа – прямыми $x=1$ и $x=3-y$ соответственно. Изобразим их в одной координатной плоскости (рис. 1.11). Получим фигуру, ограниченную слева и справа прямыми $x=1$ и $x=2$ соответственно, снизу – графиком функции $y=\log_2 x$ (выразили y из уравнения $x=2^y$), сверху – прямой $y=3-x$ (из уравнения $x=3-y$ выразили y). Область является правильной относительно оси Oy (рис. 1.12).

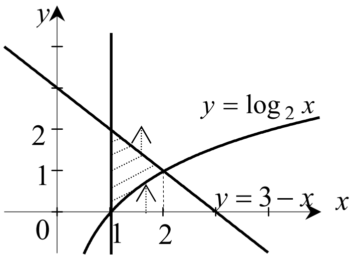

Рис. 1.12

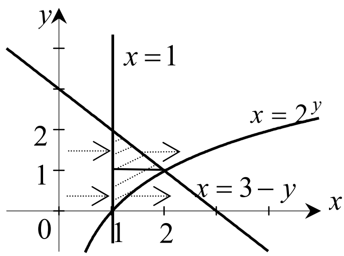

Рис. 1.11

Получим следующий результат

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_1^{2^y} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_1^{3-y} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\log_2 x}^{3-x} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

Пример 4. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

Решение. По условию область интегрирования ограничена слева прямой $x=0$, справа – прямой $x = 1/\sqrt{2}$, снизу – прямой $y=x$ (линия входа), сверху – кривой $y=\sqrt{1-x^2}$ – верхней половиной окружности $x^2+y^2=1$ (линия выхода). Найдем точки пересечения графиков данных функций: решим уравнение $x=\sqrt{1-x^2}$, $\begin{cases} x^2 = 1-x^2, \\ x \ge 0, \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ – абсцисса точки пересечения. Ее ордината равна $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (рис. 1.13).

Область интегрирования является правильной относительно оси Oy. Для изменения порядка интегрирования необходимо разбить область горизонтальной прямой $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ на две части, каждая из которых является правильной относительно оси Ox (рис. 1.14).

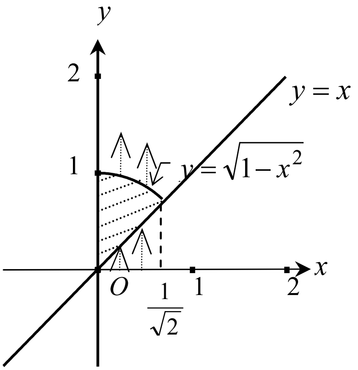

Рис. 1.13

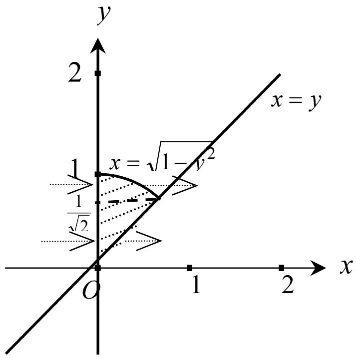

Рис. 1.14

В результате получим

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}x \int\limits_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}y \int\limits_0^y f(x,y)\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

Задачи для самостоятельного решения

№ 4. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле:

1) $\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \mathrm{d}x \int\limits_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y;$

2) $\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{-x} f(x,y)\mathrm{d}y;$

3) $\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y;$

4) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^0 \mathrm{d}x \int\limits_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y;$

5) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-x} f(x,y)\mathrm{d}y.$

Пример 5. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D (x+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

по области D, ограниченной линиями: $x=1, x=8, y=\sqrt[3]{x}, \quad y=2\sqrt[3]{x}$. Выполнить чертеж.

Решение. Перейдем от двойного интеграла к повторному:

$$\iint\limits_D (x+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^8 (x+1)\,\mathrm{d}x \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{2\sqrt[3]{x}} \mathrm{d}y = \int\limits_1^8 (x+1)\,\mathrm{d}x \cdot y \Bigg|_{\sqrt[3]{x}}^{2\sqrt[3]{x}} =$$

$$= \int\limits_1^8 (x+1)\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_1^8 \left(x\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}\right) = \int\limits_1^8 \left(x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7}+\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\right)\Bigg|_1^8 =$$

$$= 3\left(\frac{8^{\frac{7}{3}}}{7}+\frac{8^{\frac{4}{3}}}{4}-\left(\frac{1^{\frac{7}{3}}}{7}+\frac{1^{\frac{4}{3}}}{4}\right)\right) = 3\left(\frac{128}{7}+\frac{16}{4}-\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right) = 65\frac{19}{28}.$$

Область интегрирования изображена на рис. 1.15.

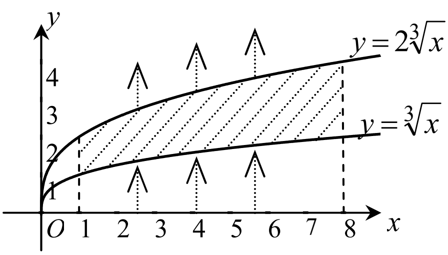

Рис. 1.15

Ответ: $65\dfrac{19}{28}$.

Задачи для самостоятельного решения

№ 5. Вычислить двойной интеграл по области D. Выполнить чертеж.

1) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon x=1, x=2, y=x, y=\sqrt{5}x$;

2) $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon x=\sqrt{2},\ \ x=\sqrt{3}, y=x, y=x^3$;

3) $\iint\limits_D \dfrac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon x=1,\ x=3,\ y=x,\ y=\dfrac{x}{2}$;

4) $\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \ D: x=1,\ x=\sqrt[3]{3},\ y=x,\ y=3x$;

5) $\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \ D: x=\sqrt[5]{2},\ x=3,\ y=x,\ y=2x$;

6) $\iint\limits_D (x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \ D: x=1,\ x=2,\ \ y=2x,\ y=4x$;

7) $\iint\limits_D \dfrac{y}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \ D: x=1,\ x=\sqrt[3]{3},\ y=x^2,\ y=2x^2$;

8) $\iint\limits_D (x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \ D: x=1,\ x=4,\ y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x}$.

1.3. Вычисление площади плоской фигуры

При нахождении площади плоской фигуры будем использовать свойство двойного интеграла: двойной интеграл по области D от единицы равен площади области D: $S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x = \sqrt{y}$, $x + y = 2$, $y = 2$.

Решение. Фигура, ограниченная линиями $x = \sqrt{y}$, $x + y = 2$ и $y = 2$, является правильной относительно оси *Ox*. Найдем ординаты точек пересечения указанных линий (т. е. пределы интегрирования), для этого решим уравнение $2 - y = \sqrt{y}$, корень которого $y = 1$ (рис. 1.16).

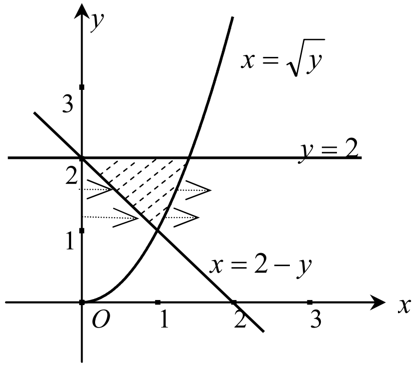

Рис. 1.16

Тогда площадь фигуры равна

$$S = \int_1^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{y}} dx = \int_1^2 dy \cdot x \Big|_{2-y}^{\sqrt{y}} = \int_1^2 \left(\sqrt{y} - 2 + y\right) dx = \left(\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - 2y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - 4 + 2\right) - \left(\frac{2}{3} - 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{8\sqrt{2} - 7}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{8\sqrt{2} - 7}{6}$.

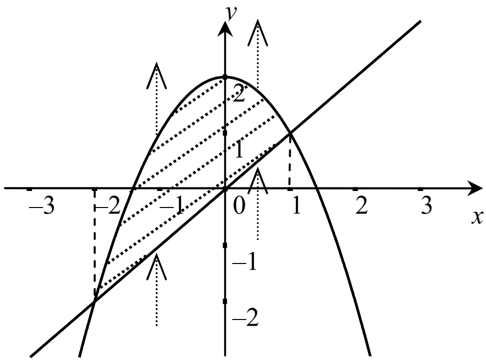

Рис. 1.17

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 2 - x^2$, $y = x$.

Решение. Фигура, ограниченная линиями $y = 2 - x^2$ и $y = x$, является правильной относительно оси Oy (рис. 1.17). Найдем абсциссы точек пересечения указанных линий (т. е. пределы интегрирования), для этого решим уравнение $2 - x^2 = x$, корни которого: $x_1 = -2,\ x_2 = 1$. Тогда площадь фигуры равна

$$S = \int\limits_{-2}^{1} \mathrm{d}x \int\limits_{x}^{2-x^2} \mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{1} \mathrm{d}x \cdot y \Bigg|_{x}^{2-x^2} = \int\limits_{-2}^{1} \left(2 - x^2 - x\right) \mathrm{d}x = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

Задачи для самостоятельного решения

№ 6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $x = -\sqrt{y},\ y - x = 2,\ y = 0;$ 2) $x = y,\ y = \dfrac{1}{x},\ y = 2;$

3) $x=\sqrt{y},\ x+y=2,\ y=0;$ 4) $y=\sqrt[3]{x},\ x+y=2,\ y=0;$

5) $y=\dfrac{1}{x^2},\ y=x,\ y=2;$ 6) $x=-\sqrt{y},\ y-x=2,\ y=0;$

7) $y=6-x^2,\ y=-x;$ 8) $y=8-x^2,\ y=2x;$

9) $y=3-x^2,\ y=2x;$ 10) $x=y,\ y=\dfrac{1}{x},\ x=2.$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=2-x,\ y=x^3,\ y=0$.

Решение. Фигура, ограниченная линиями $y=2-x$, $y=x^3$ и осью *Ox*, является правильной относительно оси *Ox* (рис. 1.18). Координаты точек пересечения графиков функций $y=2-x$ и $y=x^3$ находим графически (т. к. корни уравнения $2-x=x^3$ непросто найти аналитически): $x=1$, $y=1$. Проверим найденное значение $x=1$ подстановкой в уравнение $2-x=x^3$. Таким образом, пределы интегрирования по переменной *y*: $y=0$ (из условия). Пределы по *x*: $x=\sqrt[3]{y}$ (линия входа) и $x=2-y$ (линия выхода). Тогда искомая площадь равна

$$S=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt[3]{y}}^{2-y}\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}y\cdot x\Big|_{\sqrt[3]{y}}^{2-y}=\int_0^1\left(2-y-y^{\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}y=\left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-0=\frac{3}{4}.$$

Ответ: 0,75.

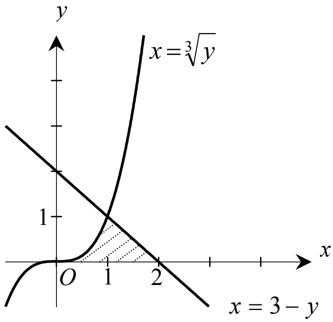

Рис. 1.18

1.4. Геометрический и механический смысл двойного интеграла

Геометрический смысл двойного интеграла: объем цилиндрического тела, ограниченного снизу непрерывной поверхностью $z = f_1(x)$, сверху – непрерывной поверхностью $z = f_2(x)$, а с боков – цилиндрической поверхностью, направляющей поверхностью которой является граница области *D*, а образующие параллельны оси *Oz* (рис. 1.19), равен

$$V = \iint_D \left(f_2(x,y) - f_1(x,y) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (1.3)$$

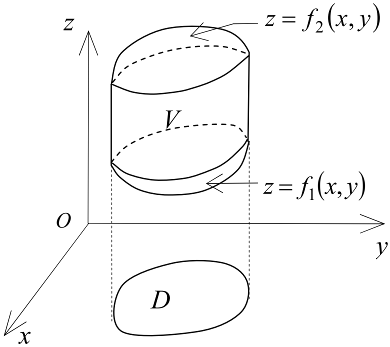

Рис. 1.19

Механический смысл двойного интеграла: если область D – плоская пластинка, расположенная в плоскости Oxy и имеющая поверхностную плотность $\gamma = \gamma(x, y)$, то масса пластинки

$$m = \iint_D \gamma(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.4}$$

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $y = 4$, $2z + y = 8$, $z = 1$.

Решение. Данное тело ограничено сбоку поверхностью параболического цилиндра $y = x^2$ и плоскостью $y = 4$, снизу – плоскостью $z = 1$, сверху – плоскостью $z = 4 - \dfrac{y}{2}$ (рис. 1.20).

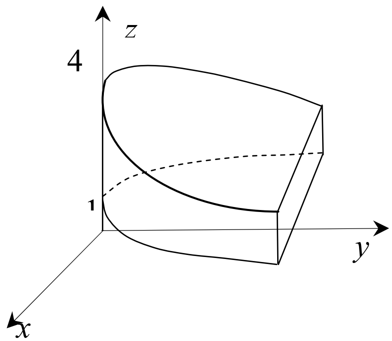

Рис. 1.20

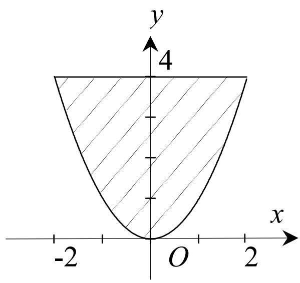

Рис. 1.21

Его проекцией на плоскость Oxy является область, ограниченная параболой $y = x^2$ и прямой $y = 4$ (рис. 1.21). Объем данного тела:

$$V = \int_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{4} \left(4 - \frac{y}{2} - 1\right)\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} \left(3y - \frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_{x^2}^{4} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(12 - 4 - 3x^2 + \frac{x^4}{4}\right)dx = \left(8x - x^3 + \frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 19{,}2.$$

Ответ: 19,2.

1.5. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Распространенная система координат на плоскости – это полярные координаты r и φ, которые связаны с декартовыми координатами x и y точки M соотношениями

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \tag{1.5}$$

где r – расстояние от точки M до начала координат;

φ – угол между радиус-вектором точки M и осью Ox (отсчитывается против часовой стрелки) (рис. 1.22). При этом $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (или $-\pi \leq \varphi \leq \pi$).

Пусть в полярных координатах область D ограничена лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ и графиками непрерывных на отрезке $[\alpha;\beta]$ функций $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$, $r_1(\varphi) < r_2(\varphi)$ (рис. 1.23). Такая область называется правильной.

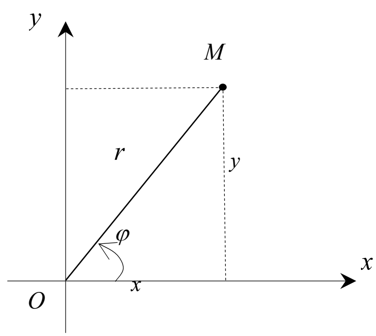

Рис. 1.22

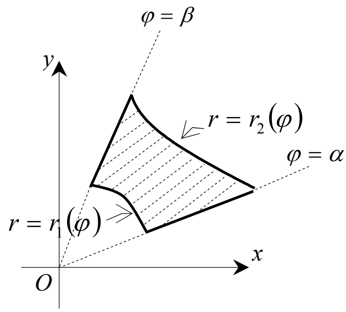

Рис. 1.23

Тогда двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D вычисляется как повторный интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\mathrm{d}r. \qquad (1.6)$$

Замечание 1. Следует обратить внимание на множитель r в формуле (1.6). Это модуль определителя матрицы перехода (якобиана), который всегда (!) появляется при переходе от декартовых координат к полярным в двойном интеграле.

Замечание 2. Переход от декартовых координат к полярным целесообразно выполнять в случаях, когда областью D является окружность или ее часть. Так, уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R в декартовой системе координат имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$, а в полярной (с учетом того, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$), получим $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = R^2$, или $r = R$.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^2 r\cos\varphi\,\mathrm{d}r$. Изобразить область интегрирования.

Решение.

$$\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^2 r\cos\varphi\,\mathrm{d}r = \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\varphi\cdot\left.\left(\frac{r^2}{2}\right)\right|_0^2\mathrm{d}\varphi = 2\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\left.(\sin\varphi)\right|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} =$$

$$= 2\left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\pi\right) = 2(-1-0) = -2.$$

Область интегрирования – часть круга с центром в начале координат радиуса 2, расположенная в 3-й координатной четверти (рис. 1.24).

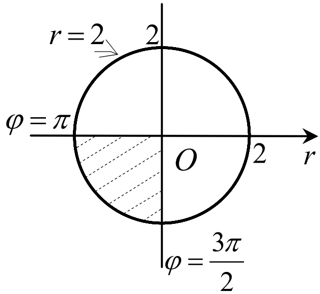

Рис. 1.24

Ответ: -2.

Пример 2. Вычислить двойной интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{2\cos\varphi} r\ \mathrm{d}r.$$

Изобразить область интегрирования.
Решение.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{2\cos\varphi} r\ \mathrm{d}r = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos^2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right) - \left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi-2}{4}.$$

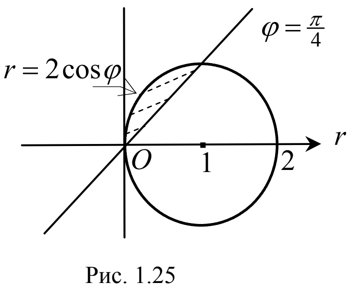

Рис. 1.25

Уравнение $r = 2\cos\varphi$ в декартовых координатах имеет вид $\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ или после упрощения: $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Это уравнение окружности с центром в точке (1; 0) и радиусом 1. Уравнение $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ в декартовых координатах есть уравнение прямой $y = x$. Таким образом, область интегрирования есть часть круга с центром в точке (1; 0) и радиусом 1, расположенная выше прямой $y = x$ (рис. 1.25).

Ответ: $\dfrac{\pi - 2}{4}$.

Пример 3. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в двойном интеграле

$$\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

если область D ограничена линиями $x^2 + y^2 - 2y = 0,\ y = x\ ,\ \ y = -x$.

Решение. Приведем первое уравнение к каноническому виду: $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Это уравнение окружности с центром в точке $(0;1)$ и радиусом $R = 1$. В полярных координатах (с учетом того, что $x^2 + y^2 = r^2,\ y = r\sin\varphi$) уравнение имеет вид: $r = 2\sin\varphi.$

Уравнения прямых $\dfrac{y}{x} = 1, \Rightarrow\ \ \mathrm{tg}\varphi = 1,\ \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{y}{x} = -1, \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\varphi = -1,\ \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}\ \iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\mathrm{d}r.$$

Область интегрирования изображена на рис. 1.26.

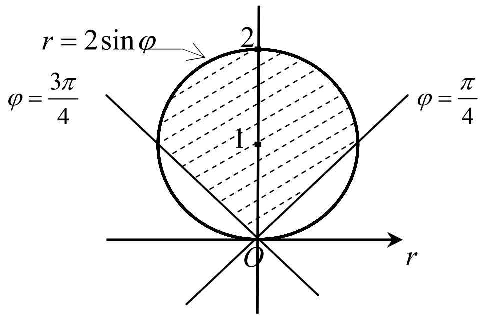

Рис. 1.26

Пример 4. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в двойном интеграле

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

если область D ограничена линиями $x^2 + y^2 + 2x = 0,\ x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Приведем первое уравнение к каноническому виду: $(x+1)^2 + y^2 = 1$. Это уравнение окружности с центром в точке $(-1; 0)$ и радиусом $R = 1$. В полярных координатах (с учетом того, что $x^2 + y^2 = r^2$, $y = r\cos\varphi$) уравнение имеет вид $r = -2\cos\varphi$.

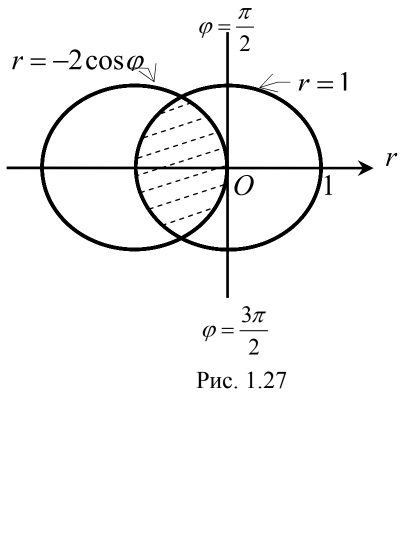

Рис. 1.27

Уравнение $x^2+y^2=1$ – это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $R=1$. В полярных координатах оно имеет вид $r=1$.

Заштрихованная фигура (рис. 1.27) расположена в пределах от $\varphi=\frac{\pi}{2}$ до $\varphi=\frac{3\pi}{2}$, т. е. эти значения являются нижним и верхним пределами интегрирования соответственно по координате φ.

Так как любой луч, выходящий из начала координат, в направлении заштрихованной фигуры, сначала пересекает кривую $r=-2\cos\varphi$, а затем кривую $r=1$, то они являются нижним и верхним пределами интегрирования соответственно по координате r. Таким образом, получим

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int\limits_{-2\cos\varphi}^{1}f\left(r\cos\varphi,r\sin\varphi\right)r\mathrm{d}r.$$

Пример 5. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

по области D: $x^2+y^2\le 16,\ x\le 0$, $y\ge 0$, используя полярные координаты.

Решение. Уравнение $x^2+y^2=16$ – это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом 4. Неравенство $x^2+y^2\le 16$ задает круг, ограниченный данной окружностью. С учетом неравенств $x\le 0$, $y\ge 0$ получим, что область D – часть этого круга, расположенная во второй координатной четверти (рис. 1.28).

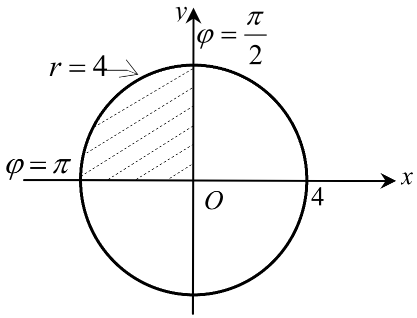

Рис. 1.28

Перейдем к полярным координатам по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Уравнение окружности $x^2+y^2=16$ в полярной системе координат имеет вид $r=4$, поэтому область D в полярной системе координат определяется неравенствами $\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$, $0\le r\le 4$. Тогда исходный интеграл будет равен

$$\iint\limits_D \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^4\frac{e^{\sqrt{r^2}}}{\sqrt{r^2}}\cdot r\mathrm{d}r=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^4 e^r\mathrm{d}r=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^r\Big|_0^4\mathrm{d}\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(e^4-1\right)\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\left(e^4-1\right)\cdot\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi\left(e^4-1\right)}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi\left(e^4-1\right)}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

№ 7. Вычислить двойной интеграл по области D, используя полярные координаты.

1) $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D: y^2+x^2\le 16,\ x\le 0,\ y\le 0;$

2) $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D: y^2+x^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\le 0;$

3) $\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D: y^2+x^2\le 16,\ x\le 0, y\le 0;$

4) $\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D: y^2+x^2\le 9,\ x\ge 0, y\le 0;$

5) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D: y^2+x^2\le 25,\ x\le 0, y\le 0;$

6) $\iint\limits_D \left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D: y^2+x^2\le 25,\ x\le 0, y\le 0;$

7) $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D: y^2+x^2\le 4x,\ y\ge 0;$

8) $\iint\limits_D 2e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D: y^2+x^2\ge 1,\ y^2+x^2\le 9,\ x\ge 0,\ y\le 0;$

9) $\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D: y^2+x^2\le 4x,\ x^2+y^2\ge 4, y\ge 0,\ x\ge 0;$

10) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D: y^2+x^2\le 9,\ y\ge x, y\le\sqrt{3}x.$

Глава 2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Вычисление тройного интеграла, так же как и двойного, осуществляется путем последовательного интегрирования.

Пусть область *V* в пространстве, ограниченная поверхностью *S*, удовлетворяет следующим условиям:

1) любая прямая, параллельная оси *Oz*, проведенная через внутренние точки области *V*, пересекает поверхность *S* ровно в двух точках;

2) вся область *V* проектируется на плоскость *Oxy* в правильную область *D*.

Описанная выше область *V* называется правильной в направлении оси *Oz*. Пусть пространственная область *V* ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху – поверхностью $z = z_2(x, y)$ и является правильной (рис. 2.1). Тогда тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по области *V* вычисляется по формуле

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \qquad (2.1)$$

Порядок вычисления тройного интеграла: вычисление производят справа налево, т. е. сначала находят $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z = F(x, y)$,

в котором переменные *x* и *y* считают постоянными, затем вычисляют двойной интеграл $\iint_D F(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Если область *D* ограничена линиями $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, ($f_1(x) < f_2(x)$), то, перейдя от двойного интеграла к повторному в формуле (2.1), получим формулу для вычисления тройного интеграла

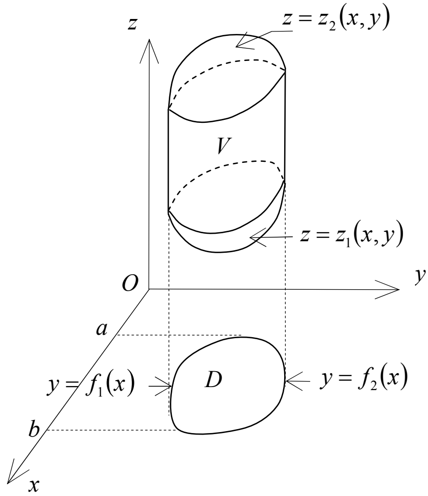

Рис. 2.1

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \qquad (2.2)$$

Эту формулу чаще записывают в виде

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} \mathrm{d}y \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z. \qquad (2.3)$$

Интеграл в правой части формулы (2.3) называют трехкратным.

Пример 1. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V (x-2y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

где область V определена неравенствами: $0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le x$, $1 \le z \le 2$.

Решение.

$$\iiint\limits_V (x-2y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{x^2}^{x} \mathrm{d}y \int\limits_1^2 (x-2y+z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{x^2}^{x} \left(xz - 2yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_{z=1}^{z=2} \mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{x^2}^{x} \left(2x - 4y + 2 - x + 2y - \frac{1}{2} \right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{x^2}^{x} \left(x - 2y + \frac{3}{2} \right)\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left(xy - y^2 + \frac{3}{2}y \right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 - x^2 + \frac{3}{2}x - x^3 + x^4 - \frac{3}{2}x^2 \right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\frac{3}{2}x - x^3 + x^4 - \frac{3}{2}x^2 \right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{4} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{2} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{10}.$$

Ответ: –0,3.

Пример 2. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

где область V ограничена поверхностями: $y = 2x$, $y = 1$, $x + y + z = 3$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

Решение. Область интегрирования V ограничена снизу координатной плоскостью Oxy, сверху – плоскостью $x + y + z = 3$, по бокам – плоскостями $y = 2x$ и $y = 1$, параллельными оси Oz (рис. 2.2). Проекция этой области на плоскость Oxy – треугольник, ограниченный прямыми $y = 2x$, $y = 1$ и $x + y = 3$ (рис. 2.3). Эта фигура является правильной относительно оси Ox.

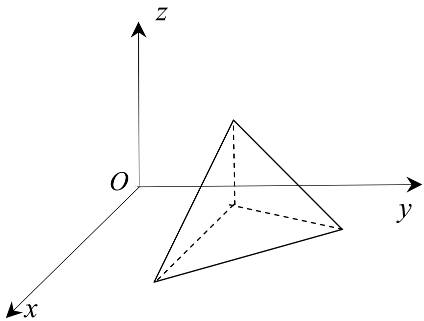

Рис. 2.2

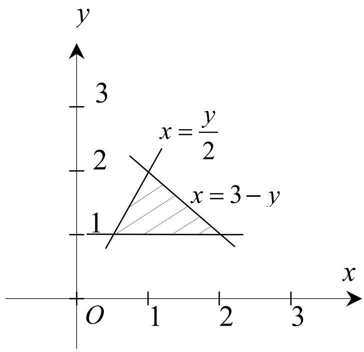

Рис. 2.3

Перейдем от тройного интеграла к трехкратному:

$$\iiint\limits_V xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int\limits_1^2\left(\int\limits_{\frac{y}{2}}^{3-y}\left(\int\limits_0^{3-x-y}xy\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int\limits_1^2\left(\int\limits_{\frac{y}{2}}^{3-y}\left(xyz\right)\Big|_{z=0}^{z=3-x-y}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=$$

$$=\int\limits_1^2\left(\int\limits_{\frac{y}{2}}^{3-y}\left(3xy-xy^2-\frac{xy^2}{2}\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int\limits_1^2\left(\frac{3x^2y}{2}-\frac{3x^2y^2}{4}\right)\Bigg|_{x=\frac{y}{2}}^{x=3-y}\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{3}{4}\int\limits_1^2\left(2y(3-y)^2-y^2(3-y)^2-\frac{2y^3}{4}+\frac{y^4}{4}\right)\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{3}{4}\int\limits_1^2\left(-\frac{3y^4}{4}+\frac{15y^3}{2}-21y^2+18y\right)\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{3}{4}\left(-\frac{3y^5}{20}+\frac{15y^4}{8}-7y^3+9y^2\right)\Bigg|_1^2=\frac{177}{160}.$$

Ответ: $\frac{177}{160}$.

Задачи для самостоятельного решения

№ 8. Вычислить тройной интеграл по области V, ограниченной заданными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V (y-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\, V:\ y+z=2,\, x=0,\ x=2,\, y=0,\, z=0;$

2) $\iiint\limits_V (z+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\, V:\ z=x^2,\, x=2,\ y=1,\, y=0,\, z=0,\, x\geq 0,\ y\geq 0,$ $z\geq 0;$

3) $\iiint\limits_V xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\, V:\ z=4-x^2,\, y=3,\ x=0,\, y=0,\, z=0,\ x\geq 0,\ y\geq 0;$

4) $\iiint\limits_V x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\, V:\ z=y^2,\, x=0,\, x=1,\, y=2,\, z\geq 0;$

5) $\iiint\limits_V x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\, V:\ x+y+z=4,\, x=0,\, y=0,\, z=0;$

6) $\iiint\limits_V y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\, V:\ z=x^2+y^2,\, x=0,\, x=1,\, y=0,\, y=1,\, z=0;$

7) $\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\, V:\ x+z=3,\, x=0,\, y=2,\, y=0,\, z=0;$

8) $\iiint\limits_V xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\, V:\ z=2-y^2,\, x=0,\, x=2,\, y=0,\, z=0;$

9) $\iiint\limits_V x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\, V:\ 6x+3y+2z=6,\, x=0,\ y=0,\, z=0;$

10) $\iiint\limits_V y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\, V:\ x+2y+z=2,\, x=0,\, y=0,\, z=0.$

2.2. Свойства тройного интеграла

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла:

1) $\iiint\limits_V cf(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = c\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, где c – const;

2) $\iiint\limits_V \left(f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_V f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z +$
$+\iiint\limits_V f_2(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

3) если область V состоит из n непересекающихся частей $V_1, V_2, ..., V_n$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + ... +$$

$$+\iiint\limits_{V_n} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

4) тройной интеграл по области V от единицы равен объему области V:

$$V = \iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Пример. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 4 - y^2$, $y = x$, $x = 0$, $z = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Решение. Найдем объем тела V, ограниченного данными поверхностями, по формуле

$$V = \iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Область V ограничена сверху параболическим цилиндром $z = 4 - y^2$ с образующими, параллельными оси Ox, снизу – плоскостью $z=0$, по бокам – плоскостями $y=x$ и $x=0$ (рис. 2.4). Проекцией области V на плоскость Oxy является треугольник, ограниченный прямыми $y=x$, $y=2$ и осью Oy (рис. 2.5).

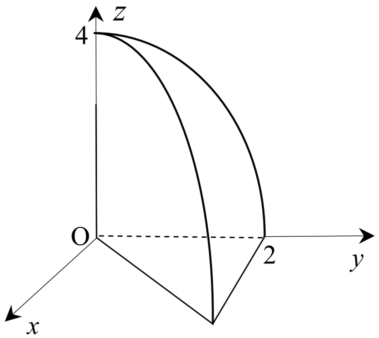

Рис.2.4

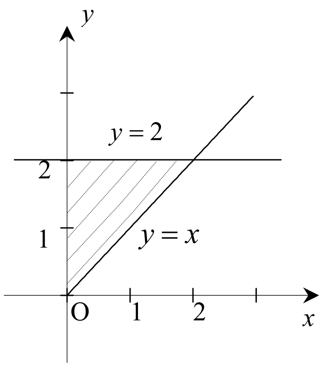

Рис.2.5

$$V=\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int\limits_0^2\left(\int\limits_x^2\left(\int\limits_0^{4-y^2}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(\int\limits_x^2\left(4-y^2\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(4y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_x^2=$$

$$=\int\limits_0^2\left(8-\frac{8}{3}-4x+\frac{x^3}{3}\right)dx=\left(\frac{16x}{3}-2x^2+\frac{x^4}{12}\right)\Bigg|_0^2=\frac{32}{3}-8+\frac{4}{3}=4.$$

Ответ: 4.

Задачи для самостоятельного решения

№ 9. Вычислить объем тела, ограниченного данными поверхностями:

1) $y=x^2,\ 2y+z=4,\ z=0,\ z\geq 0;$

2) $z=x^2,\ y=x,\ \ y=3,\ z=0,\ z\geq 0;$

3) $2y+x=2,\ z+2x+3y=6,\ z=0,\ x=0,\ y=0;$

4) $z = 9 - y^2, y = x, y = 0, z = 0, x \geq 0, y \geq 0;$

5) $z^2 + x^2 = 4, y = x, z = 0, y = 0, z \geq 0;$

6) $z = y^2, y = 2, x = 3, z = 0;$

7) $y = 2 - x^2, y = 0, z = 0, z = 2;$

8) $y + x = 2, z - x - y = 3, x = 0, y = 0, z = 0;$

9) $z = y^2 + x^2, y = x, x = 2, z = 0, y = 0;$

10) $z = 4 - y^2 - x^2, y + x = 2, x = 0, z = 0, y = 0.$

2.3. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Положение точки в пространстве можно задать не только в декартовых, но и в других системах координат. Одной из наиболее часто употребляемых систем координат являются цилиндрические координаты. Положение точки *M* в такой системе определяется полярными координатами *r* и φ ее проекции – точки M' – на координатную плоскость *Oxy* и аппликатой (координатой *z*) (рис. 2.6.). Таким образом, точка *M* имеет координаты $M(\varphi, r, z)$.

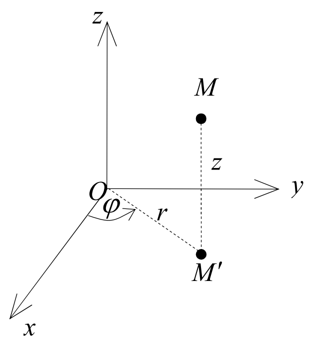

Рис. 2.6

Формулы, связывающие цилиндрические координаты точки с декартовыми, имеют вид

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \tag{2.4}$$

Переход от декартовых координат к цилиндрическим в тройном интеграле осуществляют по формуле

$$\iiint\limits_V f\left(x, y, z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_V f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z\right)\cdot r\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}z. \tag{2.5}$$

Замечание. Следует обратить внимание на множитель r в формуле (2.5). Это модуль определителя матрицы перехода (якобиана), который всегда (!) появляется при переходе от декартовых координат к цилиндрическим в тройном интеграле.

Как правило, переход от декартовых координат к цилиндрическим целесообразно выполнять в случаях, когда проекцией области V на координатную плоскость Oxy является окружность или ее часть.

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2 + y^2 = 9,\ 2x + 3y + z = 12,\ z = 0.$$

Решение. Тело ограничено цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = 9$, образующие которой параллельны оси Oz, плоскостями $2x + 3y + z = 12$ и $z = 0$ (координатной плоскостью Oxy). Тело изображено на рис. 2.7. Его проекцией на плоскость Oxy является круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 9$, с радиусом 3 и центром в начале координат (рис. 2.8).

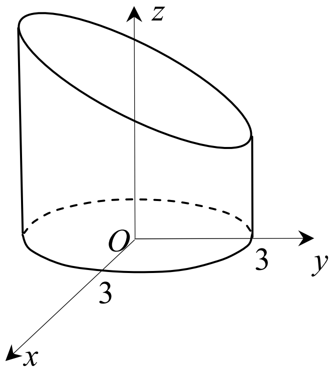

Рис. 2.7

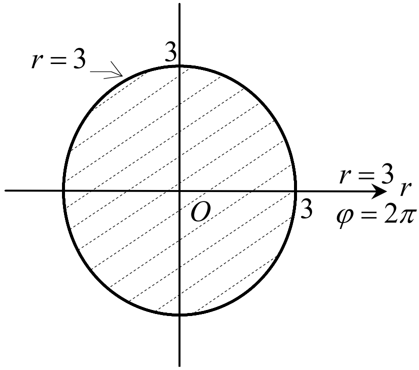

Рис. 2.8

Так как уравнение этой окружности в цилиндрических координатах имеет вид $r = 3$, то пределы в тройном интеграле по φ: $0 \le \varphi \le 2\pi$, а по r: $0 \le r \le 3$. Уравнение плоскости $2x + 3y + z = 12$ соответственно имеет вид $z = 12 - 2r\cos\varphi - 3r\sin\varphi$.

Объем тела равен $V = \iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, а в цилиндрических координатах эта формула запишется $V = \iiint\limits_V r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}z.$

Таким образом, получим следующий результат:

$$V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^3 \mathrm{d}r \int_0^{12-2r\cos\varphi-3r\sin\varphi} r\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^3 r\left(12 - 2r\cos\varphi - 3r\sin\varphi\right)\mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(6r^2 - \frac{2r^3}{3}\cos\varphi - r^3\sin\varphi \right)\Bigg|_{r=0}^{r=3} \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left(54 - 18\cos\varphi - 27\sin\varphi\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left(54\varphi - 18\sin\varphi + 27\cos\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = 108\pi.$$

Ответ: 108π.

Пример 2. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V (y-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

по области V, ограниченной поверхностями: $z=1-x^2-y^2$, $x=y$, $z=0$, $y=0$.

Решение. Область интегрирования V ограничена сверху поверхностью параболоида $z=1-x^2-y^2$, сбоку – плоскостями $x=y$ и $y=0$, снизу – плоскостью $z=0$ (рис. 2.9).

Проекцией области V на плоскость Oxy является часть круга $x^2+y^2\le 1$, расположенная между прямой $x=y$ и осью Ox (рис. 2.10). Уравнение окружности $x^2+y^2=1$ в цилиндрических координатах имеет вид $r=1$, а прямой $x=y$ имеет вид $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. Уравнение параболоида $z=1-x^2-y^2$ запишем в виде $z=1-r^2$. Тогда в новой системе координат получим

$$\iiint\limits_V (y-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^1\mathrm{d}r\int\limits_0^{1-r^2}(r\sin\varphi-r\cos\varphi)\cdot r\,\mathrm{d}z=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^1(\sin\varphi-\cos\varphi)r^2\left(1-r^2\right)\mathrm{d}r=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\varphi-\cos\varphi)\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^1\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\frac{2}{15}(-\cos\varphi-\sin\varphi)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{15}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=\frac{2\left(1-\sqrt{2}\right)}{15}.$$

Ответ: $\dfrac{2\left(1-\sqrt{2}\right)}{15}$.

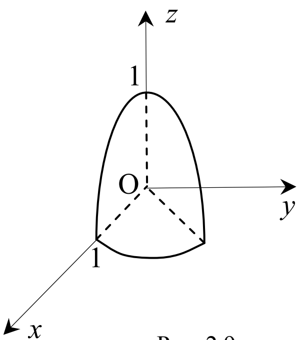

Рис. 2.9

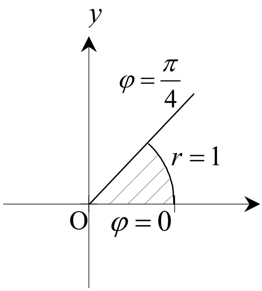

Рис. 2.10

Задачи для самостоятельного решения

№ 10. Вычислить тройной интеграл по области V в цилиндрических координатах:

1) $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V:\ x^2 + y^2 = 4, z = 1, z = 2;$

2) $\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V:\ x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1,\ x = 0, y = 0, x \geq 0, y \geq 0;$

3) $\iiint\limits_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V:\ z = x^2 + y^2, z = 1;$

4) $\iiint\limits_V x^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V:\ z^2 = x^2 + y^2, z = 1, y = 0, y \geq 0;$

5) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V:\ 2z = x^2 + y^2, z = 2;$

6) $\iiint\limits_V xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V:\ z = 1 - x^2 - y^2, z = 0;$

7) $\iiint\limits_V \sqrt{9-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V:\ x^2+y^2=9, z=0, z=2, x=y, y=0,$
$y\ge 0, x\ge 0;$

8) $\iiint\limits_V \left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V:\ x^2+y^2=z^2, z=2, x=0, x\ge 0;$

9) $\iiint\limits_V xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V:\ x^2+y^2-4y=0, z=0, z=2, x=0, x\ge 0;$

10) $\iiint\limits_V \sqrt{4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V:\ x^2-2x+y^2=0, z=0, x+z=2.$

2.4. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах

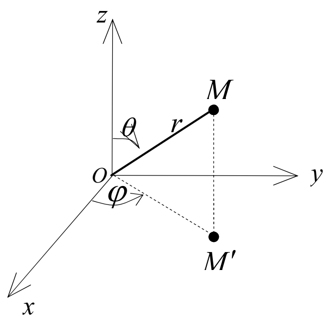

Рис. 2.11

В сферических координатах положение точки M в пространстве определяется тремя числами: φ, θ и r, где φ – угол между проекцией радиус-вектора точки на плоскость Oxy и осью Ox (отсчитывается против часовой стрелки), θ – угол между радиус-вектором точки и осью Oz, r – расстояние от точки M до начала координат (длина радиус-вектора точки) (рис. 2.11).

Для любой точки M в пространстве имеем: $0\le r<+\infty$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\pi$.

Связь прямоугольных декартовых координат точки с ее сферическими координатами выражается формулами:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{2.6}$$

Формула перехода в тройном интеграле от прямоугольных координат к сферическим имеет вид

$$\begin{gathered}\iiint\limits_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\ = \iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Замечание 1. Множитель $r^2\sin\theta$ в формуле (2.6) (!) появляется при переходе от декартовых координат к сферическим.

Замечание 2. Переход к сферическим координатам удобен в случае, когда область интегрирования V есть шар (либо его часть), а также, если подынтегральная функция имеет вид $f\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$. Это объясняется тем, что выражение $x^2 + y^2 + z^2$ в сферических координатах преобразуется в r. Так, уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом R в декартовых координатах: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а в сферических: $r = R$.

Пример. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

по области V, ограниченной поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$).

Решение. Область интегрирования есть часть шара, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ с центром в начале координат и радиусом 2, расположенная в первом октанте (рис. 2.12).

Перейдем к сферическим координатам по формулам (2.6). Уравнение сферы в этих координатах имеет вид $r = 2$. Проекция области V на плоскость Oxy – часть круга радиуса 2 с центром в точке $O(0;\ 0)$ (рис. 2.13), значит пределы по φ: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Пределы по θ: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (так как в область V расположена от оси Oz до плоскости Oxy). Пределы по r: $0 \le r \le 2$, так как точки области V расположены от начала координат до поверхности с уравнением $r = 2$.

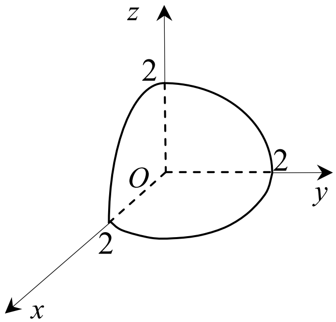

Рис. 2.12

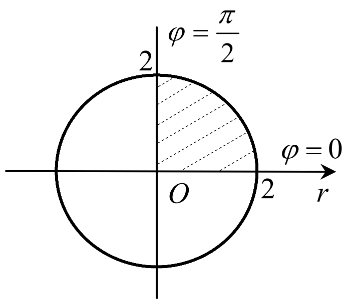

Рис. 2.13

Перейдем в исходном тройном интеграле к сферическим координатам с учетом полученных пределов интегрирования и формулы (2.7):

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int\limits_0^{2} \sqrt{r^2} \cdot r^2 \sin\theta \mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int\limits_0^{2} r^3 \sin\theta \mathrm{d}r = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 \mathrm{d}\theta = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta =$$

$$= -4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi = 2\pi.$$

Ответ: 2π.

Задачи для самостоятельного решения

№ 11. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах:

1) $\iiint\limits_V \sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V: x^2+y^2+z^2\le 4,\ y\ge 0;$

2) $\iiint\limits_V \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ V:\ x^2+y^2+z^2\le 1;$

3) $\iiint\limits_V x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V: x^2+y^2+z^2\le R^2;$

4) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V: x^2+y^2+z^2\le r^2,\ z\ge 0;$

5) $\iiint\limits_V xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V: x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0;$

6) $\iiint\limits_V \dfrac{x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ V:\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\le x,\ y\ge 0,\ z\ge 0;$

7) $\iiint\limits_V y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V: z=\sqrt{8-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ y\ge 0;$

8) $\iiint\limits_V \dfrac{x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ V: x^2+y^2+z^2\le 16,\ z\ge 0;$

9) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V: x^2+y^2+z^2\le 36,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ y\le -x;$

10) $\iiint\limits_V \dfrac{y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2},\ V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 36,\ x\ge 0,\ y\ge \sqrt{3}x,\ z\ge 0.$

Глава 3. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА (КРИ-1)

3.1. Свойства КРИ-1

Основные свойства криволинейного интеграла первого рода:

1) КРИ-1 не зависит от направления пути интегрирования: $\int\limits_{AB} f(x,y,z)\mathrm{d}l = \int\limits_{BA} f(x,y,z)\mathrm{d}l$;

2) $\int\limits_{L}\left(f(x,y,z)+g(x,y,z)\right)\mathrm{d}l = \int\limits_{L} f(x,y,z)\mathrm{d}l + \int\limits_{L} g(x,y,z)\mathrm{d}l$;

3) $\int\limits_{L} cf(x,y,z)\mathrm{d}l = c\int\limits_{L} f(x,y,z)\mathrm{d}l$, где c – const;

4) если $L = L_1 + L_2$,

то $\int\limits_{L} f(x,y,z)\mathrm{d}l = \int\limits_{L_1} f(x,y,z)\mathrm{d}l + \int\limits_{L_2} f(x,y,z)\mathrm{d}l$ (свойство аддитивности);

5) $L = \int\limits_{L} 1\mathrm{d}l$ – длина дуги кривой;

6) механический смысл КРИ-1: если считать линию L материальной, а линейная плотность кривой L выражается функцией $\gamma(x,y,z)$, то масса кривой равна $m = \int\limits_{L} \gamma(x,y,z)\mathrm{d}l$.

3.2. Вычисление КРИ-1

1. Рассмотрим плоскую непрерывную кривую L, в каждой точке которой задана непрерывная функция $f(x,y)$. Вычисление криволинейного интеграла первого рода от функции $f(x,y)$ по кривой L: $\int\limits_{L} f(x,y)\mathrm{d}l$ ($\mathrm{d}l$ – дифференциал длины дуги кривой) – сводится к вычислению определенного интеграла по следующим правилам:

а) если кривая L задана явно уравнением $y=\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $a \le x \le b$, то $\mathrm{d}l=\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}\mathrm{d}x$ и криволинейный интеграл примет вид

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}l=\int_a^b f\left(x,\varphi(x)\right)\cdot\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}\mathrm{d}x. \qquad (3.1)$$

Замечание. При вычислении криволинейного интеграла первого рода нижний предел в интеграле всегда должен быть меньше верхнего. Таким образом, при переходе от криволинейного интеграла к определенному переменная, выбранная в качестве основной, должна пробегать свои значения в сторону возрастания. В данном случае условие $a \le x \le b$ является обязательным! При этом не важно, в каком направлении пробегается кривая;

б) если кривая L задана явно уравнением $x=\psi(y)$, где $\psi(y)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $c \le y \le d$, то $\mathrm{d}l=\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}\mathrm{d}y$ и криволинейный интеграл примет вид

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}l=\int_c^d f\left(\psi(y),y\right)\cdot\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}\mathrm{d}y; \qquad (3.2)$$

в) если кривая L задана параметрически уравнениями $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$

где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, $\alpha \le t \le \beta$, то $\mathrm{d}l=\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}\mathrm{d}t$ и в результате перехода к определенному интегралу получим

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}l=\int_\alpha^\beta f\left(x(t),y(t)\right)\cdot\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}\mathrm{d}t; \qquad (3.3)$$

г) если кривая L задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $\alpha \le r \le \beta$, то $\mathrm{d}l = \sqrt{r^2 + \left(r'_\varphi\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi$, криволинейный интеграл примет вид

$$\int\limits_L f(x,y)\,\mathrm{d}l = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos t, r\sin t)\cdot\sqrt{r^2 + \left(r'_\varphi\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi. \qquad (3.4)$$

2. Рассмотрим непрерывную кривую L в пространстве, в каждой точке которой задана непрерывная функция $f(x,y,z)$. Если кривая L задана параметрически уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, $\alpha \le t \le \beta$, то $\mathrm{d}l = \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 + \left(z'_t\right)^2}\,\mathrm{d}t$ и в результате перехода к определенному интегралу получим

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}l = \int\limits_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\cdot\sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 + \left(z'_t\right)^2}\,\mathrm{d}t. \quad (3.5)$$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_L (2x - y)\,\mathrm{d}l$, где L – контур ΔABC с вершинами $A(-2;1)$, $B(0;1)$, $C(0;4)$.

Решение. В данном случае кривая интегрирования $L = AB + BC + CA$ (рис. 3.1), тогда, используя свойство аддитивности, получим $\int\limits_L (2x-y)\,\mathrm{d}l = \int\limits_{AB} (2x-y)\,\mathrm{d}l + \int\limits_{BC} (2x-y)\,\mathrm{d}l + \int\limits_{CA} (2x-y)\,\mathrm{d}l.$

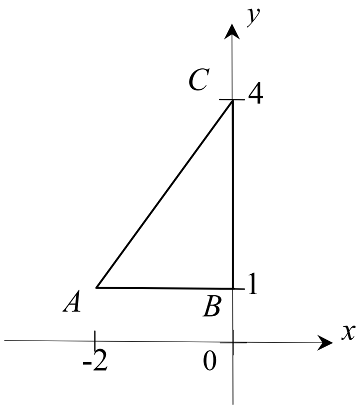

Рис. 3.1

Вычислим каждый из интегралов суммы. Уравнение стороны AB: $y = 1$, где $-2 \le x \le 0$. Тогда

$$\mathrm{d}l = \sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{1+0}\mathrm{d}x = \mathrm{d}x\,,$$

$$\int\limits_{AB} \left(2x - y\right)\mathrm{d}l = \begin{vmatrix} y = 1 \\ \mathrm{d}l = \mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int\limits_{-2}^{0} \left(2x - 1\right)\mathrm{d}x = \left(x^2 - x\right)\Big|_{-2}^{0} = 0 - \left(4 + 2\right) = -6.$$

Уравнение стороны BC: $x = 0$, где $1 \le y \le 4$. Тогда

$$\mathrm{d}l = \sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2}\mathrm{d}y = \sqrt{1+0}\mathrm{d}y = \mathrm{d}y,$$

$$\int\limits_{BC} \left(2x - y\right)\mathrm{d}l = \begin{vmatrix} x = 0 \\ \mathrm{d}l = \mathrm{d}y \end{vmatrix} = \int\limits_{1}^{4} \left(0 - y\right)\mathrm{d}y = \left(-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{4} = -8 + \frac{1}{2} = -7{,}5.$$

Уравнение стороны CA составим по двум точкам: $\frac{x+2}{0+2}=\frac{y-1}{4-1}$, получим $y=\frac{3}{2}x+4$, $-2\le x\le 0$. Тогда

$$\mathrm{d}l=\sqrt{1+\left(y_x'\right)^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{13}}{2}\mathrm{d}x,$$

$$\int\limits_{CA}(2x-y)\mathrm{d}l=\left|\begin{matrix} y=\frac{3}{2}x+4 \\ \mathrm{d}l=\frac{\sqrt{13}}{2}\mathrm{d}x \end{matrix}\right|=\int\limits_{-2}^{0}\left(2x-\frac{3}{2}x-4\right)\frac{\sqrt{13}}{2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{13}}{2}\int\limits_{-2}^{0}\left(\frac{x}{2}-4\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{\sqrt{13}}{2}\left(\frac{x^2}{4}-4x\right)\Bigg|_{-2}^{0}=\frac{\sqrt{13}}{2}\big(0-(1+8)\big)=-\frac{9\sqrt{13}}{2}.$$

Тогда

$$\int\limits_{L}(2x-y)\mathrm{d}l=-6-7{,}5-\frac{9\sqrt{13}}{2}=-13{,}5-4{,}5\sqrt{13}.$$

Ответ: $-13{,}5-4{,}5\sqrt{13}$.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{L}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}l$, где L – окружность $x^2+y^2=2y$.

Решение. Каноническое уравнение окружности $x^2+y^2=2y$ имеет вид $x^2+(y-1)^2=1$, т. е. это окружность с центром в точке (0; 1) радиуса 1 (рис. 3.2). Перейдем к полярным координатам по формуле (1.5). Тогда уравнение окружности в новых координатах будет иметь вид $r=2\sin\varphi$, где $0\le\varphi\le\pi$.

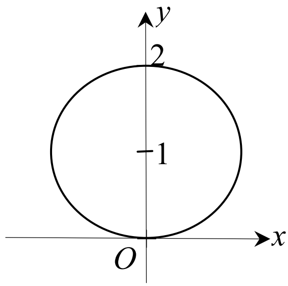

Рис.3.2

Для вычисления интеграла используем формулу (3.4):

$$\mathrm{d}l = \sqrt{r^2 + \left(r'_\varphi\right)^2}\mathrm{d}\varphi = \sqrt{4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi = 2\mathrm{d}\varphi.$$

Тогда исходный интеграл равен

$$\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}l = \int\limits_0^\pi \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} \cdot 2\mathrm{d}\varphi = 2\int\limits_0^\pi r\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^\pi 2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = -4\left(\cos\varphi\right)\Big|_0^\pi = 8\,.$$

Пример 3. Вычислить

$$\int\limits_L \left(x^2 - y^2 + z^2\right)\mathrm{d}l,$$

где L – первый виток винтовой линии, $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t$.

Решение. Кривая L задана в пространстве параметрически, тогда

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 + \left(z'_t\right)^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\mathrm{d}t.$$

Первому витку винтовой линии соответствуют значения параметра $0 \le t \le 2\pi$, по формуле (2.4) получим

$$\int\limits_L \left(x^2 - y^2 + z^2\right)\mathrm{d}l = \int\limits_0^{2\pi} \left(\cos^2 t - \sin^2 t + t^2\right)\sqrt{2}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(\cos 2t + t^2\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \sqrt{2}\left(0 + \frac{8\pi^3}{3}\right) = \frac{8\sqrt{2}\pi^3}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{8\sqrt{2}\pi^3}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

№ 12. Вычислить криволинейные интегралы первого рода по кривой L:

1) $\int\limits_L \left(x + y^2\right)\mathrm{d}l,$ L – отрезок прямой $y = 3x - 1$ от точки $A(1;2)$ до точки $B(3;8)$;

2) $\int\limits_L 2x\mathrm{d}l,$ L – дуга параболы $y = 2x^2$ от точки $A(0;0)$ до точки $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right)$;

3) $\int\limits_L (x + 2y)\mathrm{d}l,$ L – контур ΔABC с вершинами $A(1;0), B(3;0),$ $C(3;2)$;

4) $\int\limits_L (xy + 1)\mathrm{d}l,$ L – контур квадрата $ABCD,$ $A(-1;0), B(1;0),$ $C(1;2), D(-1;2)$;

5) $\int\limits_L \frac{\mathrm{d}l}{y - x},$ L – отрезок прямой $y = 3x + 1$ от точки $A(0;1)$ до точки $B(2;7)$;

6) $\int\limits_L (y+1)\mathrm{d}l$, L – дуга кривой $x=\dfrac{2}{3}\sqrt{y^3}$ от точки $A\left(\dfrac{2}{3};\ 1\right)$ до точки $B\left(\dfrac{16}{3};\ 4\right)$;

7) $\int\limits_L 8x\mathrm{d}l$, L – дуга параболы $y=x^2$, отсекаемая прямой $y=x+2$;

8) $\int\limits_L \sqrt{x+1}\mathrm{d}l$, L – дуга кривой $y=\ln x$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$;

9) $\int\limits_L \sin 2y\mathrm{d}l$, L – дуга кривой $x=2\cos y$ от точки $A(0;2)$ до точки $B\left(\dfrac{\pi}{2};\ 0\right)$;

10) $\int\limits_L \dfrac{\sqrt{1+e^{2x}}}{y}\mathrm{d}l$, L – дуга кривой $y=e^x$ от точки $A(0;1)$ до точки $B(1;e)$.

№ 13. Вычислить криволинейные интегралы первого рода по кривой L:

1) $\int\limits_L (2x+y)\mathrm{d}l$, L – дуга окружности $x=2\cos t,\ y=2\sin t$, $\dfrac{\pi}{4}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$;

2) $\int\limits_L xy^2\mathrm{d}l$, L – дуга окружности $x^2+y^2=9$ от точки $A(3;0)$ до точки $B(0;3)$;

3) $\int\limits_{AB} \left(2z^2 + y - x\right) \mathrm{d}l$, L – отрезок AB, $A(-2;\ 1;\ 0)$, $B(1; 3; -1)$;

4) $\int\limits_{AB} \dfrac{dl}{x + 2y - z}$, L – отрезок AB, $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 3; 1)$;

5) $\int\limits_{L} y\mathrm{d}l$, L – дуга астроиды $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$, лежащей в первом квадранте;

6) $\int\limits_{L} xyz\mathrm{d}l$, L – дуга винтовой линии $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = 2t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$;

7) $\int\limits_{L} xy\mathrm{d}l$, L – дуга окружности $x^2 + y^2 - 2x = 0$ от точки $A(2; 0)$ до точки $B(0; 0)$;

8) $\int\limits_{L} x\mathrm{d}l$, L – окружность $x^2 + y^2 - 2y = 0$;

9) $\int\limits_{L} \sqrt[4]{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}l$, L – дуга кардиоиды $r = 2(1 - \cos\varphi)$, $0 \le t \le \pi$;

10) $\int\limits_{L} x\mathrm{d}l$, виток лемнискаты $r^2 = \cos 2\varphi$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения.

№ 1. 1) $\frac{5}{3}$; 2) –2; 3) –5; 4) 20,2; 5) $\frac{1}{3}$; 6) $-1-\frac{\pi}{2}$;

7) $\frac{e^2-3}{4}$; 8) $\frac{2}{3}$; 9) $\sqrt{\pi}$; 10) $\frac{1}{4}\ln\frac{5}{2}$.

№ 2. 1) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$; 2) $\int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

3) $\int\limits_{-1}^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\mathrm{d}x$; 4) $\int\limits_0^3 \mathrm{d}y \int\limits_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

5) $\int\limits_{\sqrt{3}}^4 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x$; 6) $\int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_1^{\sqrt{2y}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

7) $\int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_{y^2}^4 f(x,y)\mathrm{d}x$; 8) $\int\limits_0^8 \mathrm{d}y \int\limits_{\frac{y}{4}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

9) $\int\limits_0^3 \mathrm{d}y \int\limits_1^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x$; 10) $\int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_{y^3}^8 f(x,y)\mathrm{d}x$.

№ 3. 1) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^y f(x,y)\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

2) $\int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{y^2-1} f(x,y)\mathrm{d}x + \int\limits_2^8 \mathrm{d}y \int\limits_0^{4-\frac{y}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

3) $\int\limits_{-1}^0 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int\limits_0^3 \mathrm{d}y \int\limits_0^{1-\frac{y}{3}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

4) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{\frac{y}{3}} f(x,y)dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx;$

5) $\int\limits_{-1}^2 dy \int\limits_0^{-\sqrt{3-y}} f(x,y)dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_{-\sqrt{3-y}}^{\sqrt{3-y}} f(x,y)dx;$

6) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{2-y^2} f(x,y)dx;$

7) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y-1}} f(x,y)dx + \int\limits_1^4 dy \int\limits_0^{2-\frac{y}{2}} f(x,y)dx;$

8) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx;$

9) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^0 f(x,y)dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_{y-3}^0 f(x,y)dx;$

10) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{y^3} f(x,y)dx + \int\limits_3^5 dy \int\limits_0^{\frac{(5-y)}{2}} f(x,y)dx.$

№ 4. 1) $\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int\limits_{-y}^0 f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^0 f(x,y)dx;$

2) $\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 dy \int\limits_0^{-y} f(x,y)dx;$

3) $\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^0 f(x,y)dx + \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 dy \int\limits_y^0 f(x,y)dx;$

4) $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f(x,y)dx;$

5) $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{-\sqrt{2}}^{0} dy \int\limits_{0}^{-y} f(x,y)dx;$

№ 5. 1) 7,5; 2) $\frac{5}{12}$; 3) 3; 4) $-\frac{4}{3}$; 5) 23,7; 6) 2; 7) 1; 8) 34,9.

№ 6. 1) $\frac{5}{6}$; 2) $1{,}5-\ln 2$; 3) $\frac{5}{6}$; 4) $\frac{5}{4}$; 5) $3{,}5-2\sqrt{2}$; 6) $\frac{5}{6}$; 7) $20\frac{5}{6}$; 8) 36; 9) $10\frac{2}{3}$; 10) $1{,}5-\ln 2$.

№ 7. 1) $-\frac{64}{3}$; 2) $-\frac{8}{3}$; 3) 8; 4) 4,5; 5) $\frac{625}{8}$; 6) 0; 7) 0; 8) $\frac{\pi e}{2}\left(e^{8}-1\right)$; 9) $\frac{4}{3}$; 10) $\frac{81}{32}$.

№ 8. 1) $-\frac{4}{3}$; 2) $\frac{88}{15}$; 3) 18; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{13}{24}$; 6) $\frac{32}{3}$; 7) 9; 8) 2; 9) –0,5; 10) $\frac{1}{6}$.

№ 9. 1) $\frac{64\sqrt{2}}{15}$; 2) $\frac{27}{4}$; 3) $\frac{11}{3}$; 4) $20\frac{1}{4}$; 5) $\frac{8}{3}$; 6) 8; 7) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$;8) $\frac{26}{3}$; 9) $\frac{16}{3}$; 10) $\frac{16}{3}$.

№ 10. 1) 8π; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{45}$; 5) $-\frac{224\pi}{15}$; 6) 0; 7) $-\frac{3\pi}{2}$; 8) $\frac{22\pi}{15}$; 9) $\frac{64}{3}$; 10) $-\frac{128}{15}$.

№ 11. 1) $\frac{64\pi}{3}$; 2) $\frac{4\pi\ln 2}{3}$; 3) $\frac{4\pi R^5}{15}$; 4) $\frac{4\pi r^5}{15}$; 5) $\frac{1}{48}$; 6) $\frac{7\sqrt{2}\pi}{24}$; 7) $4\pi-8$; 8) $\frac{16\pi}{3}$; 9) 81π; 10) $\frac{52\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)}{27}$.

№ 12. 1) $60\sqrt{10}$; 2) $\frac{13}{12}$; 3) $14+8\sqrt{2}$; 4) 8; 5) $\frac{\sqrt{10}\ln 5}{2}$; 6) $10\sqrt{5}-\frac{8\sqrt{2}}{5}$; 7) $\frac{2\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)}{3}$; 8) e; 9) $\frac{\left(5\sqrt{5}-1\right)}{6}$; 10) $e-e^{-1}$.

№ 13. 1) $2\left(4-\sqrt{2}\right)$; 2) 27; 3) $\frac{19\sqrt{14}}{6}$; 4) $\frac{3\ln 2}{2}$; 5) 9,6; 6) $\frac{R^2\sqrt{5}}{4}$; 7) 1; 8) 0; 9) 4π; 10) 1.

Учебное издание

ФЕДОРАКО Елена Ивановна
БАЧИЛО Елена Дмитриевна

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пособие для студентов специальностей
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»,
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,
1-70 03 01 «Автомобильные дороги»,
1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»,
1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна»,
1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов»,
1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций»

Редактор *Ю. В. Ходочинская*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 13.10.2017.Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,60. Уч.-изд. л. 2,82. Тираж 50. Заказ 915.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.