



Министерство образования
Республики Беларусь

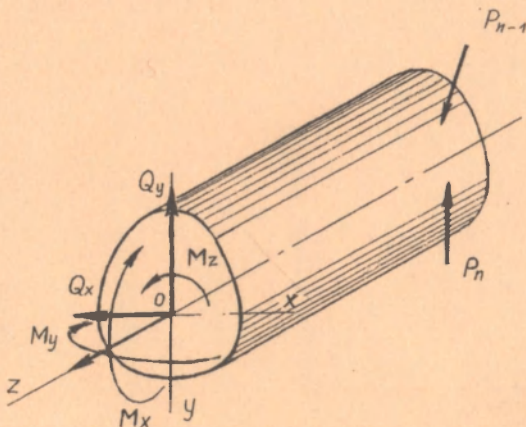
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Детали машин, подъемно-транспортные
машины и механизмы»

ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МАШИН И ПРИБОРОВ

Учебно-методическое пособие по решению задач

Часть 1



Минск 2008

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Детали машин, подъемно-транспортные
машины и механизмы»

ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МАШИН И ПРИБОРОВ

Учебно-методическое пособие по решению задач

В 2 частях

Часть 1

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

Под редакцией д-ра техн. наук, профессора А.Т. Скойбеды

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Республики Беларусь по образованию
в области машиностроительного оборудования и технологий
для студентов немашиностроительных специальностей учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования*

М и н с к 2 0 0 8

620.1

УДК 621.01:531.8(075.8)

~~ББК 30.121я7~~

О-75

Авторы:

Н.Н. Розанова, И.М. Комяк,
В.И. Шпилевский, В.Д. Василенок

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор В.М. Сурин;
канд. техн. наук, доцент А.Н. Шинкевич

О 75 Основы проектирования машин и приборов: учебно-методическое пособие по решению задач. В 2 ч. Ч. 1. Механика материалов / Н.Н. Розанова, И.М. Комяк, В.И. Шпилевский, В.Д. Василенок; под ред. А.Т. Скойбеды. – Минск: БНТУ, 2008. – 120 с.

ISBN 978-985-479-696-3 (Ч. 1).

В данном пособии изложены основные теоретические сведения, необходимые для решения задач по разделу «Механика материалов» дисциплины «Основы проектирования машин и приборов». В нем приводятся подробные решения типовых задач, помещены задачи для самостоятельной проработки, содержатся справочные данные, используемые при решении задач.

Пособие предназначено для студентов заочной формы обучения, выполняющих контрольные и расчетно-графические работы по указанной выше дисциплине, но может быть использовано и студентами дневных отделений, а также лицами, самостоятельно изучающими основы проектирования машин и приборов.

УДК 621.01: 531.8(075.8)

ББК 30.121я7

ISBN 978-985-479-696-3 (Ч. 1)

ISBN 978-985-479-717-5

© БНТУ, 2008

ВВЕДЕНИЕ

Это пособие по разделу «Механика материалов» дисциплины «Основы проектирования машин и приборов» предназначено для студентов немашиностроительных специальностей технических вузов, в будущей практической деятельности которых вопросы механики материалов и конструкций занимают значительное место.

Механика материалов – это наука о прочности, жесткости и устойчивости элементов машин и сооружений. В ней тесно сочетаются теория и эксперимент. Все отправные положения и гипотезы механики материалов основаны на опытных данных. В отличие от теоретической механики механика материалов имеет дело с реальными деформируемыми телами и рассматривается как раздел механики твердых деформируемых тел. Используя основы теории упругости и пластичности, применяя современные методы расчета, она, по существу, является расширенным курсом сопротивления материалов.

При проектировании машин и сооружений чаще всего приходится сталкиваться либо с проверкой на прочность, жесткость и устойчивость уже существующих деталей, либо определять необходимые размеры вновь проектируемых частей, удовлетворяющих не только прочности, жесткости и устойчивости, но и условиям экономичности и полной безопасности эксплуатации. Решению этих вопросов в данной работе уделено основное внимание. В пособии представлены наиболее важные и обязательные для самостоятельной проработки разделы механики материалов.

Кроме подробного решения типовых примеров, знакомящих студентов с методикой решения задач, и задач для самостоятельной проработки в каждом разделе имеется краткое изложение необходимых теоретических сведений, приводятся справочные данные. Единицы измерения в пособии приняты в соответствии с Международной системой единиц измерения СИ.

Настоящее издание ставит своей целью облегчить студентам заочной формы обучения выполнение контрольных и расчетно-графических работ, но может быть использовано и студентами дневных отделений, начинающими преподавателями, а также лицами, самостоятельно изучающими основы проектирования машин и приборов.

1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА

1.1. Продольные силы и нормальные напряжения в поперечных сечениях брусьев

Растяжением (сжатием) называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила. Для определения внутренних сил, возникающих в брусѐ от действия внешних нагрузок, применяют метод сечений.

Определим величину продольной силы N в каком-либо поперечном сечении бруса, закрепленного справа и нагруженного внешними силами F_1 и F_2 слева. Силы F_2 действуют под некоторым углом к продольной оси бруса (рис. 1.1).

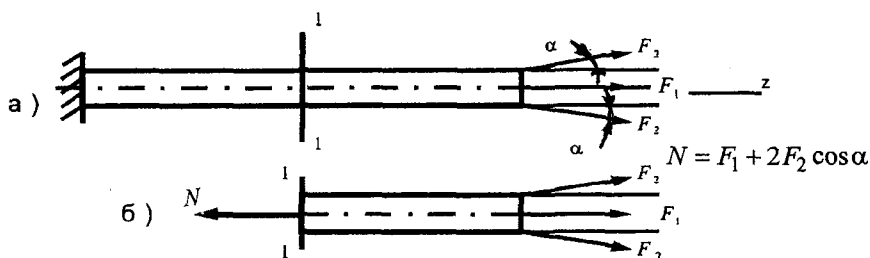


Рис. 1.1

Методика нахождения продольной силы (метод сечений)

1. Мысленно разрежем брус по сечению 1-1 (см. рис. 1.1, а).
2. Отбросим, например, левую часть.
3. К оставшейся правой части (см. рис. 1.1, б) в разрезе приложим неизвестное продольное усилие N , заменяющее действие отброшенной части.
4. Составив уравнение равновесия всех сил, приложенных к правой части, найдем величину этого усилия.

Продольная сила в произвольном поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме проекций на его продольную ось всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения:

$$N = \sum F_{iz}.$$

Напряжение, возникающее в поперечном сечении бруса:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где A – площадь поперечного сечения,

В качестве единицы напряжения принят паскаль ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$). В практических расчетах удобно измерять напряжения в мегапаскалях ($1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Н/мм}^2$).

1.2. Продольная и поперечная деформация. Закон Гука

Продольную деформацию бруса характеризуют абсолютным удлинением Δl , которое при растяжении считают положительным (рис. 1.2):

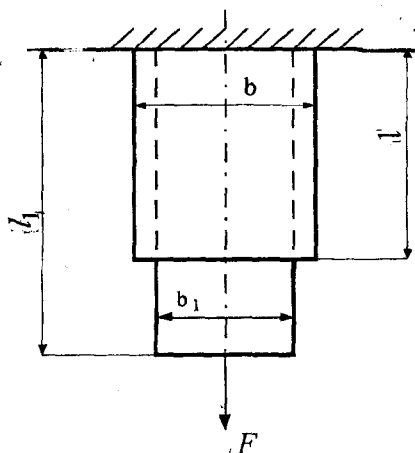


Рис. 1.2

$$\Delta l = l_1 - l,$$

где l – начальная длина бруса;
 l_1 – его конечная длина,
и относительным удлинением

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Поперечная деформация характеризуется абсолютной поперечной деформацией

$$\Delta b = b - b_1,$$

где b – первоначальный поперечный размер;

b_1 – соответствующий размер деформированного бруса,

и относительной поперечной деформацией

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}.$$

Коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона)

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|.$$

Экспериментально установлено, что в упругой стадии работы любого материала значение μ для него постоянно.

Абсолютное удлинение стержня постоянного поперечного сечения при постоянной продольной силе определяют по закону Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Величина E – модуль продольной упругости (модуль упругости; модуль упругости 1-го рода; модуль Юнга).

Модуль продольной упругости – физическая постоянная данного материала, характеризующая его жесткость. Чем жестче материал, тем меньше он деформируется при данной величине напряжений.

Модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона

Материал	Сталь	Чугун	Медь	Алюминий	Бетон	Дерево
E , МПа	$2 \cdot 10^5$	$1,6 \cdot 10^5$	$1,3 \cdot 10^5$	$0,7 \cdot 10^5$	$0,2 \cdot 10^5$	$0,13 \cdot 10^5$
μ	0,3	0,25	0,33	0,35	0,17	0,43

Используя формулы $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ и $\sigma = \frac{N}{A}$ получим математическое выражение закона Гука:

$$\sigma = \varepsilon E.$$

Таким образом, модуль упругости имеет ту же размерность, что и напряжение.

1.3. Расчеты на прочность

При расчетах на прочность сравнивают наибольшее рабочее напряжение с допускаемым напряжением $[\sigma]$:

$$\sigma \leq [\sigma].$$

Допускаемое напряжение связано с предельным напряжением зависимостью

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]},$$

где $[n]$ – требуемый (допускаемый) коэффициент запаса прочности, величина которого зависит от физико-механических свойств материала и от условий работы.

Для пластичных материалов предельным напряжением является предел текучести σ_T :

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_T; [n] = 1,2 \dots 2,5.$$

Для хрупких материалов предельным напряжением является предел прочности σ_B :

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_B; [n] = 2 \dots 5.$$

В практических расчетах на растяжение и сжатие могут встретиться три различных типа задач в зависимости от того, какая из величин, входящих в условие прочности

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma],$$

является искомой.

1. Проверочный расчет – нахождение наибольшего рабочего напряжения и сравнение его с допускаемым по формуле

$$\sigma \leq [\sigma].$$

2. Проектный расчет – определение требуемой площади поперечного сечения по формуле

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

3. Определение допускаемой нагрузки по формуле

$$[N] \leq A[\sigma].$$

Зная допускаемое значение продольной силы, при помощи метода сечений можно определить допускаемые значения внешних сил.

Пример 1.1. По оси стального ступенчатого бруса AB приложены силы F_1, F_2, F_3 . Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений. $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $A_1 = 200$ мм²; $A_2 = 400$ мм². Сделать заключение о прочности и экономичности конструкции (рис. 1.3, a).

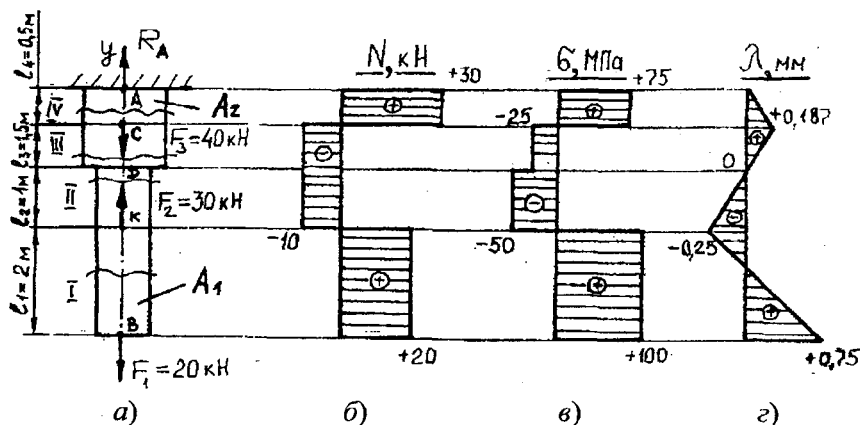


Рис. 1.3

Решение. Мысленно освободившись от связи – заделки, заменим ее действие реакцией связи R_A . Находим ее, спроецировав все силы на ось y :

$$\sum Y = 0; \quad R_A - F_3 + F_2 - F_1 = 0;$$

$$R_A = F_3 - F_2 + F_1 = 40 - 30 + 20 = 30 \text{ кН.}$$

Далее, разбив брус на участки, методом сечений определяем продольные силы.

Участок I (рис. 1.4, а):

$$\sum Y = 0; \quad -F_1 + N_1 = 0; \quad N_1 = F_1 = 20 \text{ кН.}$$

Продольная сила положительна, следовательно, участок I работает на растяжение.

Проведя сечение 2-2 на участке II (рис. 1.4, б) и рассматривая равновесие нижней отсеченной части, получим

$$\sum Y = 0; \quad -F_1 + F_2 + N_2 = 0;$$

$$N_2 = F_1 - F_2 = 20 - 30 = -10 \text{ кН.}$$

Участок II работает на сжатие.

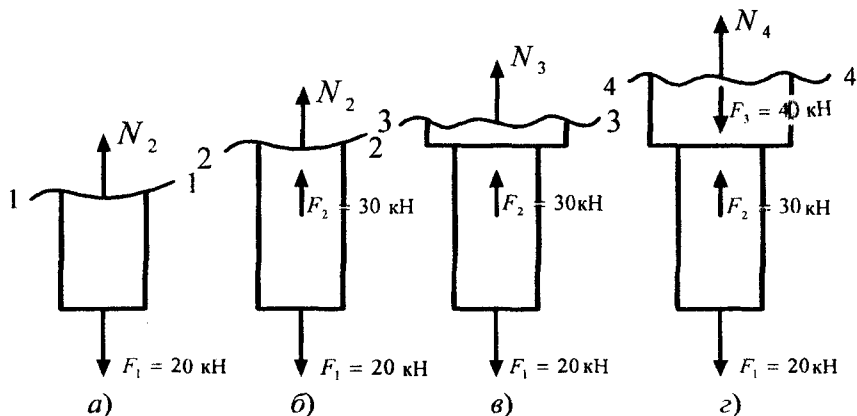


Рис. 1.4

На участке III продольная сила $N_3 = -10$ кН (рис. 1.4, в).

На участке IV (рис. 1.4, з)

$$\sum Y = 0; \quad -F_1 + F_2 - F_3 + N_4 = 0; \quad -$$

$$N_4 = F_1 - F_2 + F_3 = 20 - 30 + 40 = 30 \text{ кН.}$$

По полученным значениям продольных усилий строим эпюру (см. рис. 1.3, б).

Эпюра – график распределения внутреннего силового фактора вдоль оси бруса. В данном случае – продольного усилия.

Проверка правильности построения эпюры:

1. На протяжении участка, где не приложены внешние силы, внутренняя сила остается постоянной, а эпюра параллельна оси бруса.

2. В сечении, где приложена внешняя сила, на эпюре возникает скачок на величину этой силы.

В поперечных сечениях бруса возникают нормальные напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{20 \cdot 10^3}{200} = 100 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-10 \cdot 10^3}{200} = -50 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-10 \cdot 10^3}{400} = -25 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{30 \cdot 10^3}{400} = 75 \text{ МПа.}$$

Строим эпюру нормальных напряжений (см. рис. 1.3, в).

Для построения эпюры перемещений достаточно определить перемещения сечений, совпадающих с границами участков.

Сечение A неподвижно, т.е. $\lambda_A = 0$ (построение эпюры перемещений следует всегда начинать от неподвижного или условно принятого за неподвижное сечения).

Перемещение сечения C равно изменению длины (в данном случае удлинению) участка AC (участок IV) бруса.

$$\lambda_C = \Delta l_{IV} = \frac{N_4 l_4}{EA_2} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} = 0,187 \text{ мм.}$$

Сечение C перемещается вниз; соответствующую ординату условно будем считать положительной.

Перемещение сечения D равно алгебраической сумме изменений длин участков IV и III бруса:

$$\lambda_D = \lambda_C + \Delta l_{III} = 0,187 + \frac{N_3 l_3}{EA_2} = 0,187 + \frac{(-10) \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} = 0.$$

Перемещение сечения K

$$\lambda_K = \lambda_D + \Delta l_{II} = 0 + \frac{N_2 l_2}{EA_1} = -\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 200} = -0,25 \text{ мм.}$$

Перемещение сечения B

$$\lambda_B = \lambda_K + \Delta l_I = -0,25 + \frac{N_1 l_1}{EA} = -0,25 + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 200} = 0,75 \text{ мм.}$$

Строим эпюру перемещений (см. рис. 1.3, z).

Полное удлинение бруса $\Delta l = 0,75$ мм.

Данная конструкция прочная, так $\sigma_{\max} < [\sigma]$.

Для стали $[\sigma] = 160$ МПа. $\sigma_{\max} = 100$ МПа.

Конструкция недогружена.

$$\delta = \frac{160 - 100}{160} = 37 \%$$

Допустима недогрузка до 20 %. Поэтому конструкция неэкономичная.

Удлинение бруса постоянного сечения от действия собственного веса вдвое меньше, чем удлинение от сосредоточенной силы.

$$\Delta l = \frac{G \cdot l}{2EA},$$

где G – вес бруса:

$$G = \gamma Al,$$

где γ – удельный вес бруса.

Пример 1.2. Определить перемещения сечений I–I и II–II бруса, изображенного на рис. 1.5. Учесть влияние силы тяжести бруса (удельная сила тяжести равна γ).

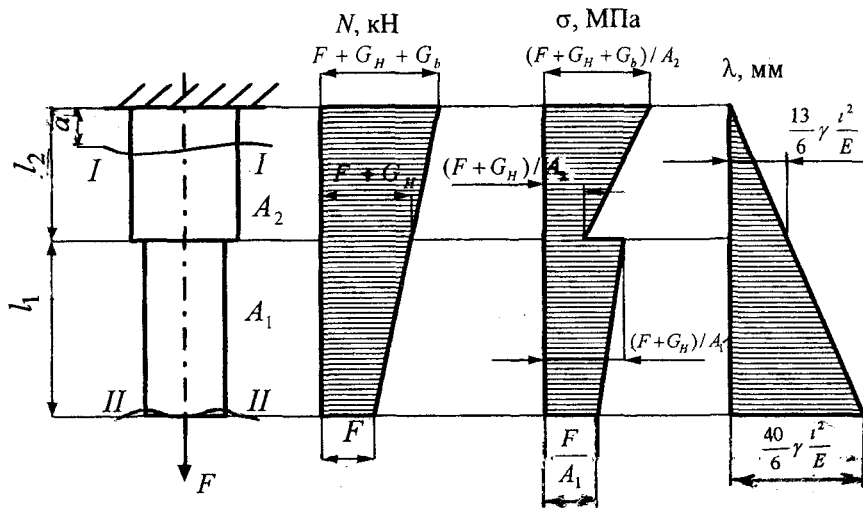


Рис. 1.5

Решение.

Перемещение сечения I–I равно удлинению верхней части бруса длиной a . Для этой части сила F и сила тяжести нижележащих час-

тей бруса являются сосредоточенными нагрузками, а собственная сила тяжести – равномерно распределенной нагрузкой. Применяя принцип независимости действия сил, имеем

$$\delta_I = \Delta l_a = \frac{Fa}{EA_2} + \frac{G_H a}{EA_2} + \frac{G_{B1} a}{EA_2} + \frac{G_{B2} a}{2EA_2},$$

где $G_H = \gamma A_1 l_1$ – сила тяжести нижней части;

$G_{B1} = \gamma A_2 (l_1 - a)$ – сила тяжести участка верхней части, расположенного ниже сечения I–I;

$G_{B2} = \gamma A_2 a$ – сила тяжести участка, расположенного выше сечения I–I.

Перемещение сечения II–II равно удлинению всего бруса, т.е.

$$\delta_{II} = \Delta l_H + \Delta l_B.$$

Удлинение нижней части складывается из удлинений от силы F и силы тяжести этой части:

$$\Delta l_H = \frac{Fl_1}{EA_1} + \frac{G_H l_1}{2EA_1}.$$

Удлинение верхней части складывается из удлинений от сосредоточенной силы, равной $F + G_H$, и силы тяжести G_B этой части:

$$\Delta l_B = \frac{(F + G_H)l_2}{EA_2} + \frac{G_B l_2}{2EA_2}.$$

На рис. 1.5 показаны эпюры N , σ и δ , построенные при $l_1 = l_2 = l$; $A_2 = 3A_1$; $F = 4\gamma A_1 l$.

Пример 1.3. Стальной круглый стержень переменного сечения находится под действием продольной силы F и собственного веса (рис. 1.6). Найти наибольшее напряжение в сечении круглого стержня и определить величину перемещения сечения I–I.

$$A = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 400 \text{ мм}^2; \quad a = 6 \text{ м}; \quad b = 7 \text{ м}; \quad c = 7 \text{ м}; \quad F = 40 \text{ кН};$$

$$\gamma = 7,7 \frac{\text{МГ}}{\text{м}^3} = 7,7 \cdot \frac{10^4}{10^9} = 7,7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Н}}{\text{мм}^3}; \quad E = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}.$$

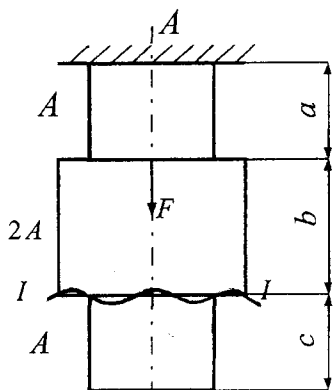


Рис. 1.6

Решение.

1. Определяем наибольшее напряжение в сечении стержня.

Наибольшее напряжение имеет место в защемлении стержня:

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \sigma_F = \sigma_G,$$

где $\sigma_F = \frac{F}{A}$ — напряжение от действия внешней силы F ;

$$\sigma_G = \frac{G}{A} = \frac{G_c + G_b + G_a}{A} \text{ — напряжение от веса стержня,}$$

где $G = (Aa + 2Ab + Ac)\gamma = (a + 2b + c)\gamma A$ — вес стержня.

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{F}{A} + (a + 2b + c)\gamma = \frac{40 \cdot 10^3}{400} + (6 + 2 \cdot 7 + 7) \cdot 10^3 \cdot 7,7 \cdot 10^{-5} = \\ &= 100 + 2,1 = 102,1 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

2. Определим перемещение сечения I-I.

$$\delta_I = \delta_F + \delta_G,$$

где δ_F — перемещение сечения I-I от внешней силы F :

$$\delta_F = \frac{Fa}{EA},$$

δ_G – перемещение сечения I–I от веса участков стержня:

$$\delta_G = \frac{G_a a}{2EA} + \frac{G_b a}{EA} + \frac{G_b \frac{b}{2}}{2EA} + \frac{G_c a}{EA} + \frac{G_c b}{2EA};$$

$$\begin{aligned} \delta_I &= \frac{Fa}{EA} + \frac{(\gamma A a)a}{2EA} + \frac{(2\gamma A b)a}{EA} + \frac{(2\gamma A b)b}{4EA} + \frac{(\lambda A c)a}{EA} + \frac{(\gamma A c)b}{2EA} = \\ &= \frac{Fa}{Ea} + \frac{\gamma}{E} \left(\frac{a^2}{2} + 2ab + \frac{b^2}{2} + ac + \frac{bc}{2} \right) = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} + \frac{7,7 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^5} \times \\ &\times \left(\frac{6^2}{2} + 2 \cdot 6 \cdot 7 + \frac{7^2}{2} + 6 \cdot 7 + \frac{7,7}{2} \right) 10^6 = 3 + 0,074 = 3,074 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Пример 1.4. К системе из двух шарнирно соединенных стержней AB и BC подвешен груз в 50 кН (рис. 1.7, а). Оба стержня стальные, трубчатого сечения с внешним диаметром $D = 36$ мм и толщиной стенки $\delta = 2$ мм. Определить перемещение точки B .

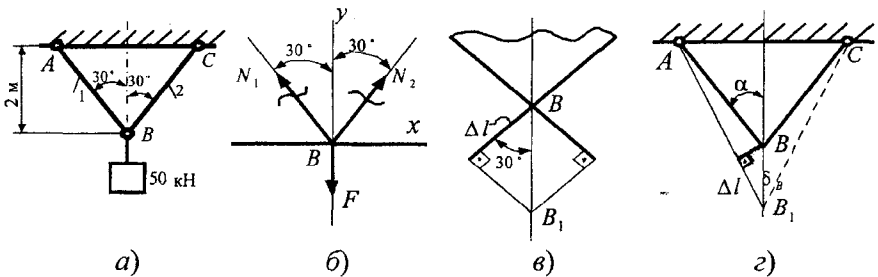


Рис. 1.7

Решение. Шарниры считаем идеальными, т.е. такими, трение в которых отсутствует. Реакции в шарнирах будут направлены вдоль стержней.

Нахождение усилий в стержнях проводим по следующей методике:

1. Выделяем узел B , который в данной задаче рассматривается как объект равновесия.

2. Прикладываем к узлу заданную силу F .

3. Освобождаем узел B от связей, которые осуществляются стержнями AB и BC , прикладываем вместо них реакции стержней N_1 и N_2 , направляем их от узла, т.е. полагаем, что в обоих стержнях AB и BC действуют растягивающие усилия.

4. Выбрав координатные оси и приложив все активные (F) и реактивные (N_1 и N_2) силы, будем иметь плоскую систему сходящихся сил (рис. 1.7, б).

5. Записываем уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; \quad N_2 \cos 60^\circ - N_1 \cos 60^\circ = 0; \quad N_1 = N_2 = N;$$

$$\sum Y = 0; \quad -F + 2N \cos 30^\circ = 0; \quad N = \frac{F}{2 \cos 30^\circ} = \frac{50}{2 \cdot 0,866} = 28,9 \text{ кН.}$$

Данные усилия вызывают удлинения стержней. Очевидно, что

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l.$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{28,9 \cdot 10^3 \cdot 2309}{2 \cdot 10^5 \cdot 213,5} = 1,5 \text{ мм;}$$

$$l = \frac{2000}{\cos 30^\circ} = \frac{2000}{0,866} = 2309 \text{ мм;}$$

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{3,14}{4} (36^2 - 32^2) = 213,5 \text{ мм}^2.$$

При определении перемещения узла B на продолжении стержня 1 откладываем его удлинение Δl_1 а на продолжении стержня 2 – удлинение Δl_2 . В нашем случае $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l$ (рис. 1.7, в). Из концов

полученных отрезков восстанавливаем перпендикуляры, пересечение которых определит положение узла после деформации системы.

$$\delta_B = BB_1 = \frac{\Delta l}{\cos 30^\circ} = \frac{1,56}{0,866} = 1,8 \text{ мм.}$$

Определение перемещения точки B может быть выполнено иначе. Изобразим новое положение шарнира, т.е. B_1 (рис. 1.7, з). Поскольку под действием силы F угол α меняется на величину совершенно незначительную, будем считать его неизменным и в итоге

$$\text{получим величину } BB_1 = \frac{\Delta l}{\cos 30^\circ}.$$

Пример 1.5. Сделать заключение о прочности и экономичности системы стержней, соединенных между собой шарнирно (рис. 1.8, а). Стержень OA – стальной, круглого сечения, $d = 20$ мм; стержень OB – медный, квадратного сечения со стороной $a = 20$ мм. Стержни составляют с вертикалью углы $\alpha_1 = 30^\circ$ и $\alpha_2 = 45^\circ$. Допускаемые напряжения: для стали $[\sigma]_c = 160$ МПа, для меди $[\sigma]_M = 100$ МПа.

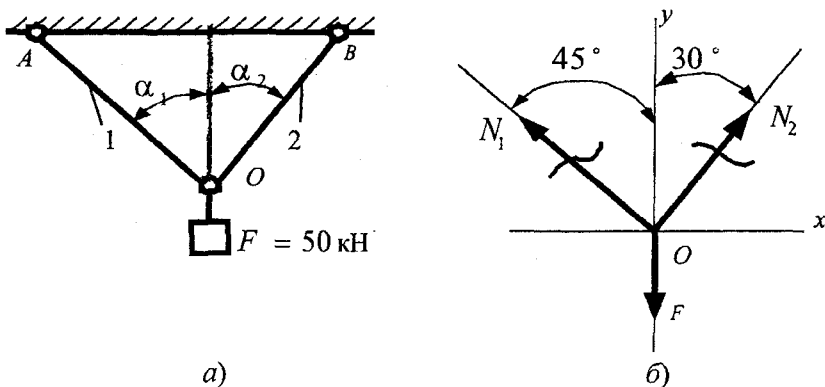


Рис. 1.8

Решение. Вырезаем узел O (рис. 1.8, б) и определяем усилия в стержнях.

$$\sum X = 0; \quad -N_1 \cos 45^\circ + N_2 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad N_1 \cos 45^\circ + N_2 \cos 30^\circ - F = 0.$$

Сложив эти уравнения, получим

$$N_2 \frac{1}{2} + N_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = F,$$

откуда

$$N_2 = \frac{2F}{1 + \sqrt{3}} = 36,7 \text{ кН}; \quad N_1 = \frac{N_2 \cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{36,7 \cdot 0,5 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 26 \text{ кН}.$$

Проверим, соблюдается ли условие прочности.

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} = 314 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{26 \cdot 10^3}{314} = 82,5 \text{ МПа} < [\sigma]_c.$$

$$A_2 = a^2 = 400 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{36,7 \cdot 10^3}{400} = 91,8 \text{ МПа} < [\sigma]_m.$$

Прочность обеих стержней обеспечена.

Стержень AO недогружен, в его поперечных сечениях возникают напряжения на 50 % ниже допускаемых. Размеры второго стержня рациональны. Но в целом конструкция неэкономична. Следует всегда стремиться к тому, чтобы все элементы конструкции были полностью нагружены, т.е. чтобы напряжения в них были близки к допускаемым.

Пример 1.6. Определить допускаемую нагрузку для системы из шарнирно соединенных стержней (рис. 1.9, a). Стержни изготовлены из дюралевых труб с наружным диаметром 30 мм и толщиной стенки 3 мм. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 75 \text{ МПа}$.

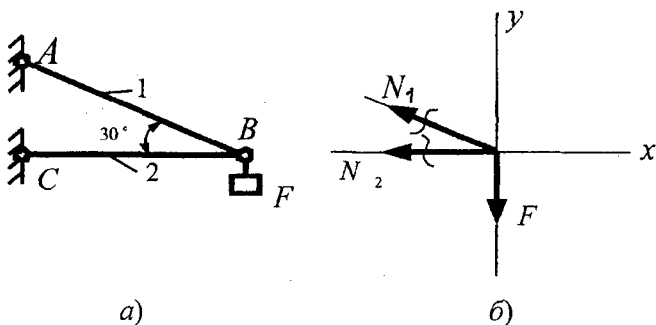


Рис. 1.9

Решение. Рассматривая равновесие шарнира B , определяем усилия в стержнях, выражая их через неизвестную пока силу F :

$$\sum Y = 0; \quad N_1 \cos 60^\circ - F = 0; \quad N_1 = \frac{F}{\cos 60^\circ} = 2F;$$

$$\sum X = 0; \quad -N_1 \cos 30^\circ - N_2 = 0;$$

$$N_2 = -N_1 \cos 30^\circ = -2F \cdot 0,866 = -1,73F.$$

Стержень AB растянут, BC – сжат. Больше нагружен стержень AB . Из условия прочности этого стержня определяем допускаемую нагрузку конструкции:

$$[N_1] = 2[F] = A[\sigma],$$

откуда

$$[F] = \frac{A[\sigma]}{2} = \frac{\frac{\pi}{4}(30^2 - 24^2) \cdot 75}{2} = 9,5 \cdot 10^3 \text{ Н} = 9,5 \text{ кН}.$$

Задача 1.1. Поперечина AB подвешена на двух стальных тросах AD и BK (рис. 1.10). Посередине поперечины приложена сила F . Диаметр троса AD $d_1 = 20$ мм, диаметр троса BK $d_2 = 25$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Определить удлинения каждой троса и перемещение точки C приложения силы F , считая поперечину AB абсолютно жесткой.

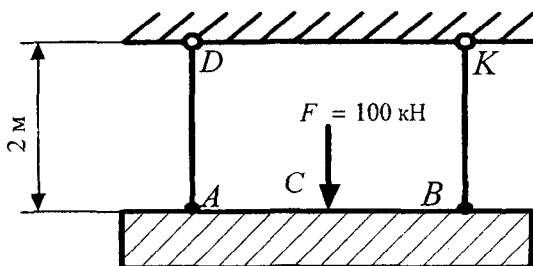


Рис. 1.10

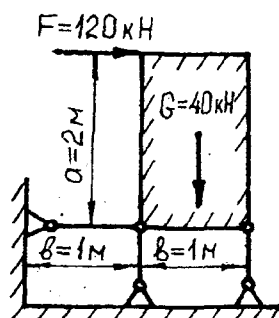


Рис. 1.11

Задача 1.2. Жесткая конструкция (рис. 1.11) прикреплена к фундаменту при помощи трех стержней. Конструкция весит 40 кН и испытывает боковое давление 120 кН, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Стержни имеют круглое поперечное сечение $d = 50$ мм. Проверить прочность стержней при $[\sigma] = 160$ МПа.

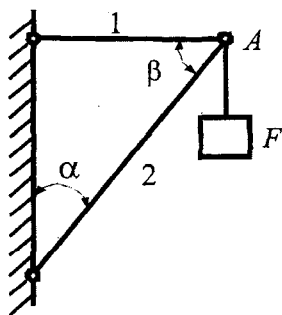


Рис. 1.12

Задача 1.3. Стальные стержни 1 и 2 круглого сечения соединены между собой и вертикальной стеной посредством шарниров (рис. 1.12). На шарнирный узел A действует вертикальная сила $F = 10$ кН, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$. Из условия прочности определить необходимые диаметры стержней. $[\sigma] = 160$ МПа.

Задача 1.4. Жесткий стержень AB нагружен силой F и поддерживается стальной тягой DC круглого поперечного сечения диаметром 20 мм (рис. 1.13).

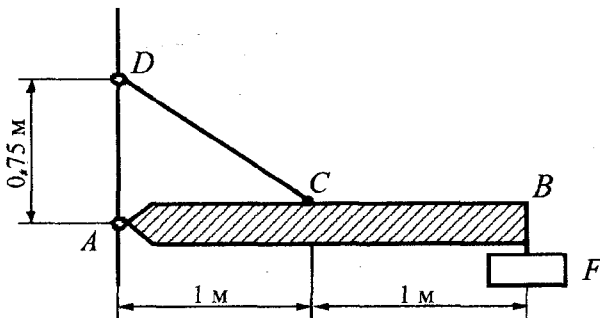


Рис. 1.13

Определить наибольшую допустимую нагрузку F и опускание точки B . Допускаемое напряжение для материала стержня CD равно 160 МПа.

1.4. Статически неопределимые задачи на растяжение и сжатие

Имеется много конструкций, в элементах которых усилия не могут быть определены только из уравнений равновесия. Такие конструкции (системы) называются статически неопределимыми.

Для их решения необходимо составить дополнительное уравнение, которое должно выразить условие совместности деформаций элементов системы.

Чтобы составить уравнение совместности деформаций, необходимо представить систему в деформированном виде и непосредственно из чертежа установить зависимость между деформациями различных стержней (частей) системы.

Пример 1.7. Определить величину напряжений, возникающих в стержнях 1 и 2, поддерживающих жесткую балку (рис. 1.14, а). Стержень 1 – медный, площадь сечения 2 см^2 ; стержень 2 – стальной, площадь сечения 1 см^2 .

Решение. Для определения усилий в тросах применяют метод сечений. Очевидно, что стержень 1 под действием внешней нагрузки будет растянут, а 2 – сжат. В точке C имеются две неизвестные реакции R_x и R_y . Получаем плоскую систему произвольно расположенных сил. Неизвестных реакций четыре. Статика даст три уравнения равновесия. Задача один раз статически неопределима.

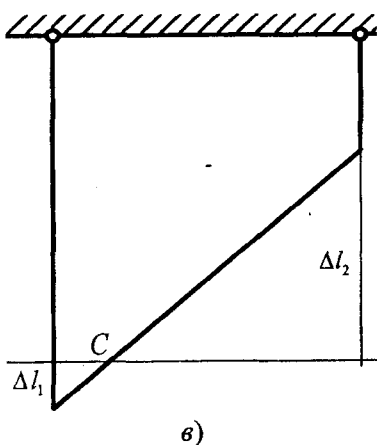
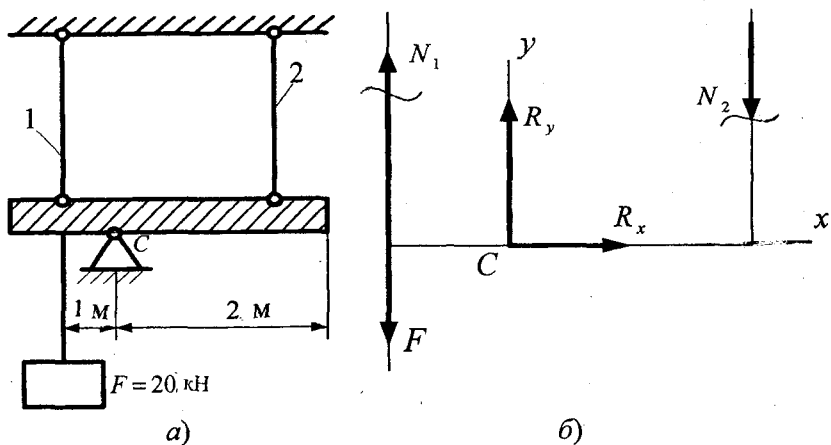


Рис.1.14

1. Составляем уравнения равновесия системы, изображенной на рис. 1.14, б.

$$\sum X = 0; \quad R_x = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad N_1 + R_y - F - N_2 = 0;$$

$$\sum M_C = 0; \quad -N_1 \cdot 1 - N_2 \cdot 2 + F \cdot 1 = 0; \quad N_1 + 2N_2 = F. \quad (1.1)$$

2. Далее требуется составить дополнительное уравнение. Обратимся к условию совместимости деформации системы (см. рис. 1.14, в). Под действием силы F балка повернется вокруг точки C на некоторый малый угол, вызвав продольные деформации тяг Δl_1 и Δl_2 .

Соотношение между деформациями

$$\frac{\Delta l_1}{1} = \frac{\Delta l_2}{2};$$

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1;$$

$$l_1 = l_2 = l.$$

Выразим деформации через усилия в тягах:

$$\frac{N_2 l}{E_2 A_2} = 2 \frac{N_1 l}{E_1 A_1};$$

$$\frac{N_2 l}{2 \cdot 10^5 \cdot 100} = \frac{2 N_1 l}{1 \cdot 10^5 \cdot 200},$$

следовательно,

$$N_2 = 2N_1.$$

Подставив данное выражение в уравнение (1.1), получим

$$N_1 + 4N_1 = 20; \quad N_1 = 4 \text{ кН}; \quad N_2 = 8 \text{ кН}.$$

3. Напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{4 \cdot 10^3}{200} = 20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{8 \cdot 10^3}{100} = 80 \text{ МПа}.$$

Пример 1.8. Абсолютно жесткая балка AC симметрично подвешена на трех стержнях из одинакового материала, имеющих одинаковое поперечное сечение $A = 200 \text{ мм}^2$. Определить напряжения в стержнях, а также величину, на которую опускается балка AC ; $E = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ (рис. 1.15).

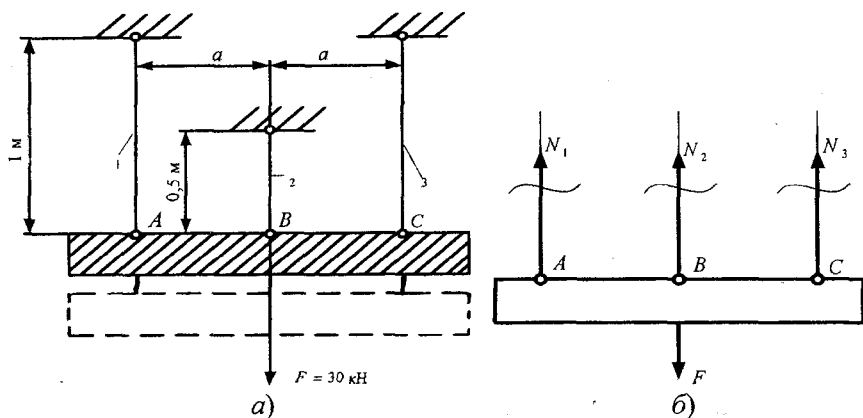


Рис. 1.15

Задача статически неопределима – неизвестны N_1 , N_2 и N_3 , а уравнений равновесия для плоской системы параллельных сил можно составить только два:

$$\sum Y = 0; \quad N_1 + N_2 + N_3 = F;$$

$$\sum M_B = 0; \quad N_1 \cdot a - N_3 \cdot a = 0; \quad N_1 = N_3.$$

В результате деформации стержней балка займет положение, показанное на рис. 1.15, а штриховыми линиями. Предположение о высокой жесткости балки позволяет пренебречь ее изгибом, а симметрия самой системы и нагрузки приводит к заключению, что все стержни удлинятся одинаково.

Таким образом, геометрическая сторона задачи может быть выражена уравнением

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3.$$

Выразим эти удлинения через усилия:

$$\frac{N_1 l}{EA} = \frac{N_2 \cdot 0,5l}{EA} = \frac{N_3 l}{EA}$$

или

$$N_1 = N_3 = 0,5N_2.$$

Решив совместно эти три уравнения, получим

$$N_2 = 0,5F = 15 \text{ кН}; \quad N_1 = N_3 = 0,25F = 0,25 \cdot 30 = 7,5 \text{ кН}.$$

Напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{N_1}{A} = \frac{7,5 \cdot 10^3}{200} = 37,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{15 \cdot 10^3}{200} = 75 \text{ МПа}.$$

Опускание балки

$$\delta_{ABC} = \Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3 = \frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{7,5 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^5 \cdot 200} = 0,375 \text{ мм}.$$

Пример 1.9. Система из трех стержней одинаковых сечений (рис. 1.16, а) нагружена вертикальной силой $F = 50 \text{ кН}$, $\alpha = 30^\circ$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Определить площадь поперечного сечения стержней.

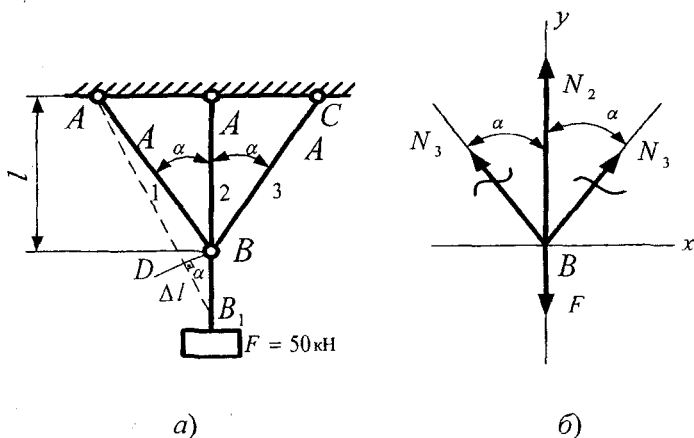


Рис. 1.16

1. Составим уравнения равновесия узла B :

$$\sum X = 0; \quad N_1 = N_3;$$

$$\sum Y = 0; \quad 2N_1 \cos \alpha + N_2 = F.$$

Полученных уравнений недостаточно для определения всех усилий. Необходимо составить дополнительно одно уравнение перемещений.

Вследствие действия нагрузки получаем точку B_1 , дающую положение шарнира B после деформации.

$BB_1 = \Delta l_2$ — удлинение центрального стержня;

$DB_1 = \Delta l_1$ — удлинение бокового стержня.

Из прямоугольного треугольника BDB_1 имеем

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha.$$

Это и есть искомое уравнение перемещений.

Выражаем удлинения через усилия:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA \cos \alpha}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA},$$

тогда

$$N_1 = N_2 \cos^2 \alpha.$$

Решая это уравнение совместно с уравнениями равновесия, получим

$$N_1 = N_3 = \frac{F \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad N_2 = \frac{F}{1 + 2 \cos^3 \alpha};$$

$$N_1 = N_3 = \frac{50 \cdot 0,866^2}{1 + 2 \cdot 0,866^3} = \frac{37}{2,26} = 16,3 \text{ кН};$$

$$N_2 = \frac{50}{1 + 2 \cdot 0,866^3} = \frac{50}{2,26} = 22,1 \text{ кН}.$$

Площадь будем подбирать по наиболее нагруженному стержню:

$$A_2 = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{22,1 \cdot 10^3}{160} = 138 \text{ мм}^2.$$

Пример 1.10. Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров (рис. 1.17, а).

$F = 100 \text{ кН}$; $a = 2 \text{ м}$; $b = 3 \text{ м}$; $c = 2 \text{ м}$; $l_1 = 2 \text{ м}$; $l_2 = 3 \text{ м}$; $A_1 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$;

$A_2 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $\alpha_1 = 90^\circ$; $\alpha_2 = 120^\circ$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

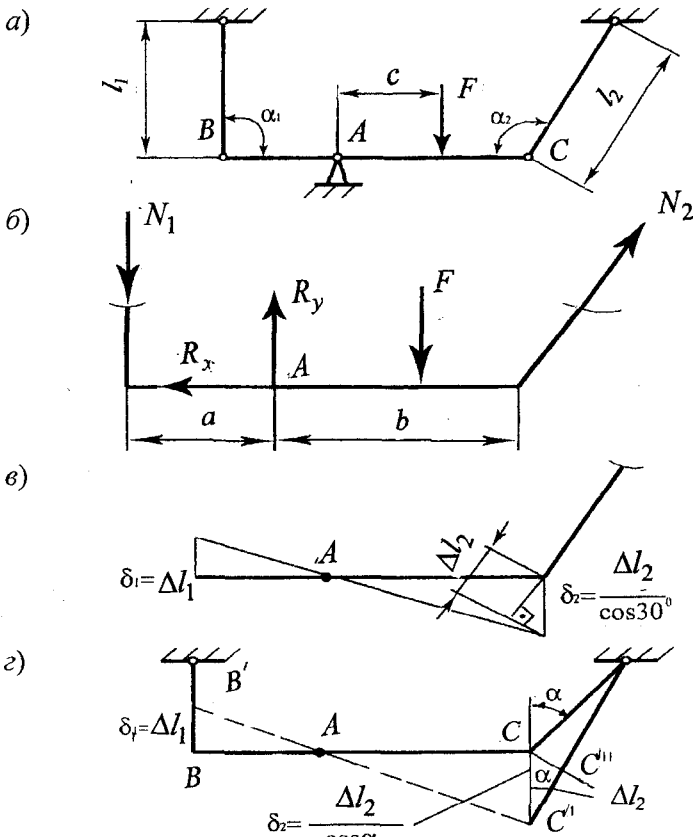


Рис. 1.17

Требуется:

1. Определить напряжения в стержнях.
2. Исходя из прочности стержней определить наибольшую допускаемую нагрузку $[F]_{\max}$.
3. Определить действительный коэффициент запаса прочности стержней.

Решение. Система один раз статически неопределима – для плоской системы произвольно расположенных сил статика дает три уравнения равновесия, а неизвестных усилий четыре: вертикальная и горизонтальная реакции шарнира A и усилия в стержнях N_1 и N_2 .

Запишем уравнения статики:

$$\sum Y = 0; \quad -N_1 + R_y - F + N_2 \cdot \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum X = 0; \quad -R_x + N_2 \cdot \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad N_1 \cdot a + bN_2 \cdot \cos 30^\circ - F \cdot c = 0. \quad (1.2)$$

Дополнительным уравнением будет уравнение перемещений. Изобразим для этого положение балки после деформации (рис. 1.17, *е*).

В силу жесткости балки она и после деформации системы остается прямолинейной и наклонится относительно шарнира A за счет удлинения стержня 2 и укорочения стержня 1. Удлинения отложены по направлению стержней.

Схему перемещений можно изобразить иначе (см. рис. 1.17, *з*). Для второго стержня покажем новое его положение (пунктиром). Разность между новой и первоначальной длиной дает Δl_2 . Ввиду малости перемещений угол при вершине прямоугольного треугольника $CC'C''$ α . Из треугольника находим

$$\delta_2 = \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha}.$$

Из подобия треугольников ABB' и ACC' запишем

$$\frac{\delta_1}{a} = \frac{\delta_2}{b}$$

или

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{b \cos 30^\circ}; \quad \frac{N_1 l_1}{E \cdot A_1 a} = \frac{N_2 l_2}{E A_2 b \cos 30^\circ};$$

$$\frac{N_1 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{N_2 \cdot 3}{6 \cdot 3 \cdot 0,866}; \quad N_1 = \frac{2N_2}{3 \cdot 0,866} = 0,77 \cdot N_2;$$

$$N_1 = 0,77 \cdot N_2. \quad (1.3)$$

Для определения усилий N_1 и N_2 достаточно рассмотреть уравнения (1.2) и (1.3):

$$0,77 \cdot N_2 \cdot 2 + N_2 \cdot 0,866 \cdot 3 = 2 \cdot F; \quad N_2 \cdot (1,54 + 2,6) = 2 \cdot F;$$

$$N_2 = \frac{2 \cdot F}{4,14} = \frac{2 \cdot 100}{4,14} = 48,3 \text{ кН};$$

$$N_1 = 0,77 \cdot N_2 = 0,77 \cdot 48,3 = 37,2 \text{ кН}.$$

1. Напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{37,2 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^2} = -93 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{48,3 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^2} = 80,5 \text{ МПа}.$$

Коэффициент запаса прочности в первом и втором стержнях:

$$k_1 = \frac{\sigma_T}{\sigma_1} = \frac{240}{93} = 2,58;$$

$$k_2 = \frac{\sigma_T}{\sigma_2} = \frac{240}{80,5} = 2,98.$$

2. Наибольшее напряжение возникает в первом стержне, поэтому

$$[\sigma_1] = [\sigma] = 160 \text{ МПа},$$

следовательно,

$$[N_1] = A_1 \cdot [\sigma_1] = 4 \cdot 10^2 \cdot 160 = 64000 \text{ Н} = 64 \text{ кН};$$

из уравнения (1.3)

$$[N_2] = \frac{[N_1]}{0,77} = 83 \text{ кН}.$$

Подставим значения допускаемых усилий в уравнение (1.2):

$$64 \cdot 2 + 3 \cdot 83 \cdot 0,866 = 2[F];$$

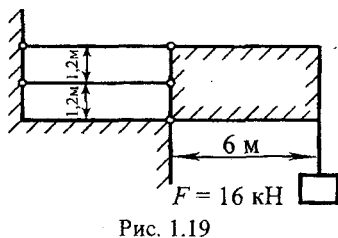
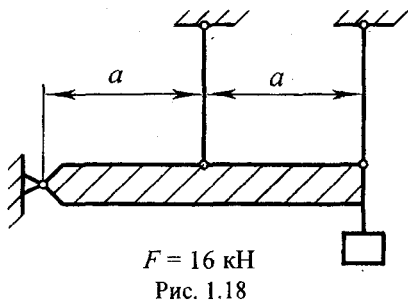
$$[F] = \frac{128 + 215,6}{2} = 171,8 \text{ кН}.$$

3. Коэффициент запаса прочности в стержнях при максимально допускаемой нагрузке:

$$k'_1 = \frac{\sigma_T}{\sigma_1} = \frac{240}{160} = 1,5; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{83 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^2} = 138 \text{ МПа};$$

$$k'_2 = \frac{\sigma_T}{\sigma_2} = \frac{240}{138} = 1,74.$$

Задача 1.5. Жесткий брус закреплен с помощью системы стальных стержней одинакового поперечного сечения. Принимая $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, определить площадь поперечного сечения стержней (рис. 1.18 и 1.19).



1.5. Основы теории напряженного состояния

Совокупность нормальных и касательных напряжений, возникающих на всем бесчисленном множестве площадок, которые можно провести через данную точку, характеризует напряженное состояние в этой точке.

Через каждую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки называются главными площадками, а действующие на них нормальные напряжения называются главными напряжениями и обозначаются $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Существует три вида напряженного состояния:

1. Линейное – когда два главных напряжения равны нулю.
2. Плоское – когда одно из главных напряжений равно нулю.
3. Объемное – когда все три главных напряжения отличны от нуля.

1.6. Линейное напряженное состояние

Для такого состояния

$$\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \sigma_1 = \frac{N}{A} \text{ (рис. 1.20).}$$

$$\text{Тогда } \sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha; \tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha,$$

причем $\sigma_\alpha = \sigma_1$ при $\alpha = 0$,

$$\max \tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \text{ при } \alpha = 45^\circ.$$

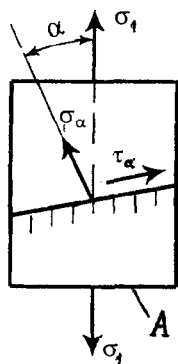


Рис. 1.20

1.7. Плоское напряженное состояние

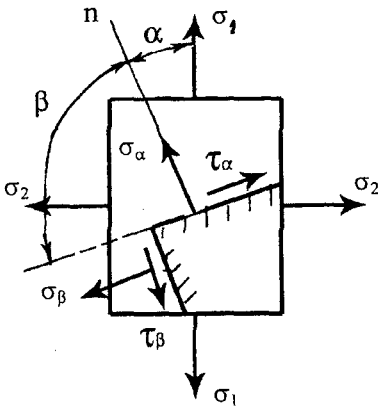


Рис. 1.21

1. $\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma_3 = 0$ (рис. 1.21).

Тогда

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha;$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \text{ при } \alpha = 45^\circ.$$

Положительный угол α между направлением σ_1 и нормалью к произвольной площадке будем отсчитывать против часовой стрелки.

2. Обратная задача.

Даны σ_α и σ_β ; $\tau_\alpha = \tau_\beta = \tau$, причем $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$ (рис. 1.22). Тогда главные напряжения определяют по формуле

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4 \cdot \tau^2}.$$

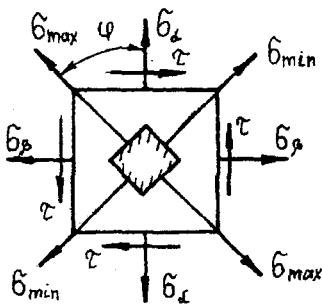


Рис. 1.22

Положение главных площадок определяется формулой

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\tau}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}.$$

За положительное направление отсчетов угла φ примем направление против часовой стрелки.

Пример 1.11. Стержень круглого сечения растянут силой $F = 300$ кН. Наибольшее касательное напряжение не должно превышать 75 МПа. Определить диаметр стержня.

Решение. Наибольшее касательное напряжение $\tau_{\max} = 0,5 \cdot \sigma_1$, откуда $\sigma_1 = 2 \cdot \tau_{\max} = 2 \cdot 75 = 150$ МПа.

Площадь поперечного сечения

$$A = \frac{F}{\sigma_1} = \frac{300 \cdot 10^3}{150} = 2 \cdot 10^3 \text{ мм}^2.$$

Диаметр стержня

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14}} = 51 \text{ мм}.$$

Пример 1.12. В сжатом стержне напряжения на одной из площадок $\sigma_\alpha = -60$ МПа, $\tau_\alpha = 24$ МПа (рис. 1.23). Вычислить наибольшие нормальные и касательные напряжения, возникающие в данном стержне.

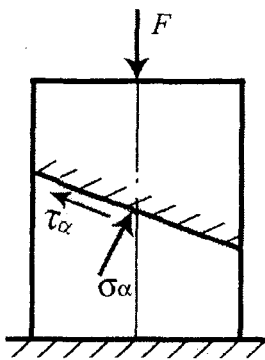


Рис. 1.23

Решение. Напряжения в наклонном сечении:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha, \quad (1.4)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha. \quad (1.5)$$

Из этой системы уравнений найдем напряжение σ_1 в поперечном сечении стержня, которое и является наибольшим нормальным напряжением.

Разделив (1.5) на (1.4), получим

$$\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_{\alpha}} = \frac{0,5 \cdot \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Подставив числовые значения, найдем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{-60} = -0,4.$$

Зная, что

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 0,4^2} = 0,862,$$

из формулы (1.4) найдем

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{\alpha}}{\cos^2 \alpha} = \frac{-60}{0,862} = -69,6 \text{ МПа.}$$

Находим абсолютную величину максимального касательного напряжения:

$$|\tau_{\max}| = \frac{|\sigma_1|}{2} = \frac{69,6}{2} = 34,8 \text{ МПа.}$$

Пример 1.13. Стержень имеет прямоугольное сечение со сторонами b и h , причем $\frac{h}{b} = \frac{3}{5}$. Растягивающая нагрузка $F = 150$ кН создает в поперечном сечении нормальное напряжение $\sigma_1 = 100$ МПа. Определить угол наклона сечения α , при котором $\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_{\alpha}} = 0,4$; вычислить напряжения τ_{α} и σ_{α} и определить размеры сечения b и h .

Решение.

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha; \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha = \sigma_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

По условию задачи

$$\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_{\alpha}} = 0,4 \quad \text{или} \quad \frac{\sigma_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha} = 0,4,$$

тогда $\operatorname{tg} \alpha = 0,4; \alpha = 21^{\circ}50'$.

Площадь поперечного сечения

$$A = \frac{F}{\sigma_1} = \frac{150 \cdot 10^3}{100} = 15 \cdot 10^2 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha = 100 \cdot \cos^2 21^{\circ}50' = 84,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{100}{2} \cdot \sin 43^{\circ}40' = 34,5 \text{ МПа}.$$

Размеры сечения

$$A = b \cdot h = 15 \cdot 10^2 \text{ мм}^2;$$

$$\frac{h}{b} = \frac{3}{5}; \quad h = \frac{3}{5} \cdot b; \quad b \cdot \frac{3}{5} \cdot b = 15 \cdot 10^2; \quad b = 50 \text{ мм}; \quad h = 30 \text{ мм}.$$

Пример 1.14. Главные напряжения в точке элемента при плоском напряженном состоянии $\sigma_1 = 150$ МПа и $\sigma_3 = -160$ МПа. Определить напряжения на наклонной площадке, образующей с вертикальной осью угол 30° (рис. 1.24).

Решение. Угол α будет равен 60° . Применяв формулы для определения σ_{α} и τ_{α} с заменой σ_2 на σ_3 и учтя, что σ_3 отрицательно, получим

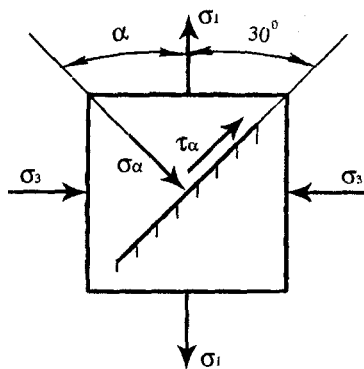


Рис. 1.24

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_3 \cdot \sin^2 \alpha = 150 \cdot \cos^2 60^\circ - 160 \cdot \sin^2 60^\circ = \\ &= 150 \cdot \frac{1}{4} - 160 \cdot \frac{3}{4} = -82,5 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha = \frac{150 + 160}{2} \sin 120^\circ = 134 \text{ МПа}.$$

Пример 1.15. Для заданного напряженного состояния (рис. 1.25) определить главные напряжения и положение главных площадок.

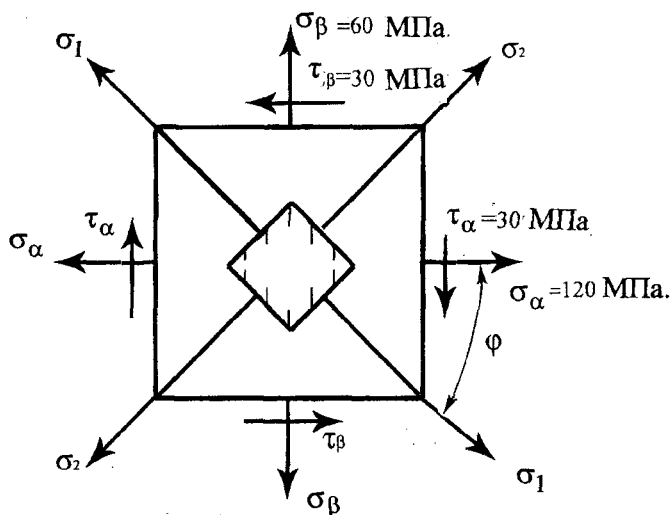


Рис. 1.25

Решение. Главные напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 + 4\tau^2} = \\ &= \frac{120 + 60}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(120 - 60)^2 + 4 \cdot 30^2} = 90 \pm 42,4; \\ \sigma_{\max} &= 132,4 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\min} = 47,6 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Оба главных напряжения положительны, т.е. равное нулю главное напряжение минимально, и его следует обозначить σ_3 .

Таким образом, $\sigma_1 = 132,4$ МПа; $\sigma_2 = 47,6$ МПа; $\sigma_3 = 0$.

Направление главных напряжений

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot \tau}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = -\frac{2 \cdot 30}{120 - 60} = -1;$$

$$2\varphi = -45^\circ; \quad \varphi = -22^\circ 30'.$$

Угол φ , так как он отрицателен, отсчитывается от направления σ_α по часовой стрелке. Выделяются главные площадки и показываются действующие по ним главные напряжения.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Геометрическими характеристиками сечения, зависящими от его формы, являются статические моменты, моменты инерции и моменты сопротивления.

2.1. Статические моменты плоских фигур.

Центр тяжести

Статические моменты площади плоской фигуры относительно осей X и Y , лежащих в ее плоскости (рис. 2.1), определяются выражениями

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA.$$

Если известно положение центра тяжести (c) сечения (координаты x_c и y_c), то статические моменты определяются проще:

$$S_x = Ay_c; \quad S_y = Ax_c,$$

где A – площадь сечения.

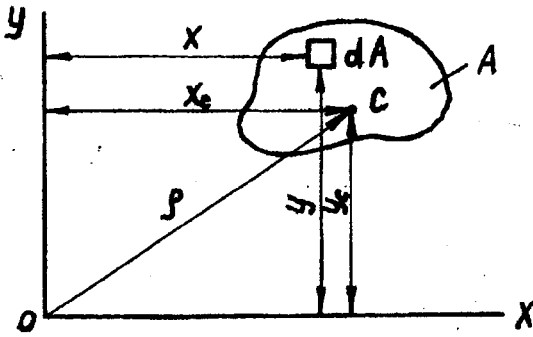


Рис. 2.1

Статический момент плоской фигуры относительно любой оси, проходящей через ее центр тяжести, равен нулю.

Статический момент любой фигуры можно определить как сумму статических моментов составляющих ее частей:

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n;$$

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n.$$

Координаты центра тяжести сечения в выбранной системе осей X и Y определяют следующим образом:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n};$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n},$$

где S_x и S_y – статические моменты площади сечения относительно осей X и Y ;

A_1, A_2, \dots, A_n – площади отдельных частей, на которые разбивается сечение;

x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n – координаты центров тяжести частей сечения в системе осей X и Y .

2.2. Моменты инерции плоских фигур

1. Осевые моменты инерции площади сечения относительно осей X и Y , лежащих в его плоскости, представляют собой интегралы следующего вида:

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA,$$

где X и Y – координаты элементарной площадки dA (см. рис. 2.1).

2. Полярный момент инерции площади относительно точки (полюса), лежащей в ее плоскости:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA,$$

где ρ – расстояние от точки O до элементарной площадки (см. рис. 2.1).

3. Центробежный момент инерции относительно взаимно перпендикулярных осей X и Y , лежащих в плоскости фигуры:

$$I_{xy} = \int_A xy dA.$$

Все моменты инерции измеряются единицами длины в четвертой степени (мм^4 , см^4 и т.д.).

Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны и не равны нулю, а центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и равным нулю в зависимости от положения сечения относительно осей.

Радиусы инерции плоской фигуры относительно осей X и Y представляют собой величины

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

и измеряются в линейных единицах (мм , см и т.д.).

4. Момент инерции площади сложной фигуры равен алгебраической сумме моментов инерции составляющих ее частей:

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} + \dots + I_{x_n}.$$

5. Полярный момент инерции площади фигуры равен сумме осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через полюс, т.е.

$$I_p = I_x + I_y.$$

6. Зависимость между осевыми моментами инерции относительно параллельных осей (рис. 2.2)

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A; \quad I_{y_1} = I_y + b^2 A.$$

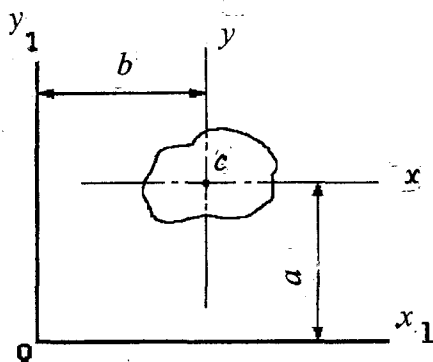


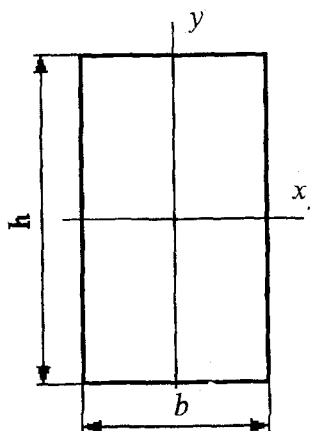
Рис. 2.2

7. Формула для пересчета центробежного момента инерции при параллельном переносе осей координат имеет вид

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + abA.$$

8. Моменты инерции некоторых простых фигур определяют по следующим формулам:

а) прямоугольник

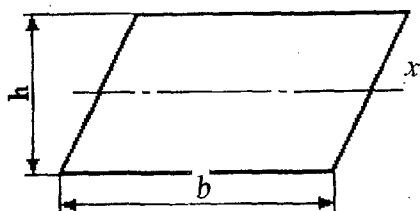


$$I_x = \frac{bh^3}{12},$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12};$$

Рис. 2.3

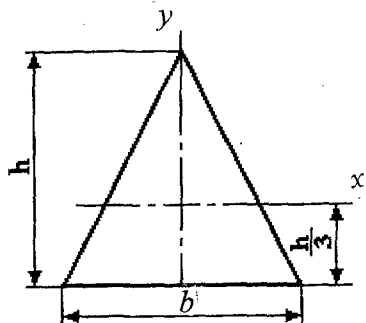
б) параллелограмм



$$I_x = \frac{bh^3}{12};$$

Рис. 2.4

в) треугольник



$$I_x = \frac{bh^3}{36},$$

$$I_y = \frac{hb^3}{48};$$

Рис. 2.5

г) круг

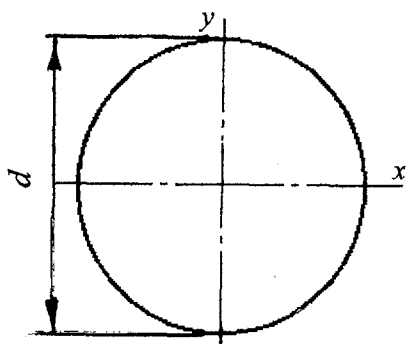


Рис. 2.6

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64};$$

д) круговое кольцо

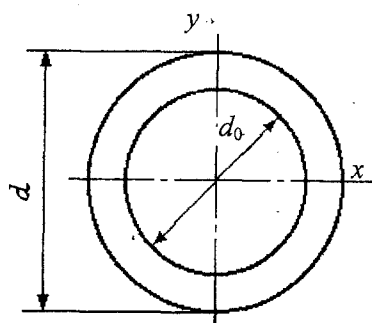


Рис. 2.7

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi d_0^4}{64} = \frac{\pi d^4}{64} (1 - C^4),$$

где $C = \frac{d_0}{d}$;

е) полукруг

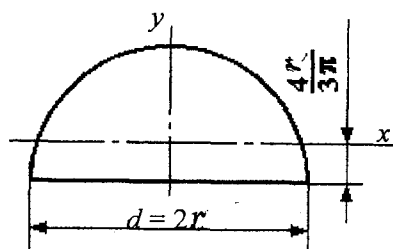


Рис. 2.8

$$I_x = 0,11 r^4,$$

$$I_x = \frac{\pi r^4}{8}.$$

2.3. Главные оси и главные моменты инерции

Главными осями инерции являются две взаимно перпендикулярные оси U и V , проходящие через данную точку, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями. Моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции. Главный момент инерции относительно одной из осей является наибольшим ($I_u = I_{\max}$), относительно другой – наименьшим ($I_v = I_{\min}$) по сравнению с моментами инерции этого же сечения относительно других осей, проходящих через данную точку (рис. 2.9).

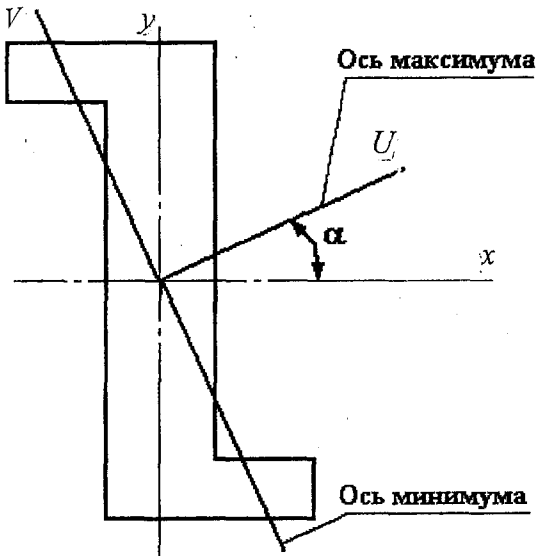


Рис. 2.9

Величины главных моментов инерции можно определить по формуле

$$I_{\max \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}.$$

Угол α наклона этих осей к исходным осям x и y определяют на основании формулы

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}.$$

Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось и ось, ей перпендикулярная, являются главными осями. Если сечение имеет две оси симметрии, то эти оси являются главными центральными осями.

2.4. Вычисление моментов инерции составных сечений, имеющих ось симметрии

Главные центральные моменты инерции простейших сечений вычисляют по готовым формулам.

Размеры и геометрические характеристики профилей стандартного проката приведены в таблицах государственных стандартов.

Методика решения задач

1. Составное сечение разбивается на простейшие фигуры, моменты инерции которых известны из формул.

2. Определяется положение центра тяжести сечения, а следовательно, и главных центральных осей.

3. Вычисляются значения моментов инерции отдельных частей сечения относительно собственных центральных осей, параллельных главным центральным осям всего сечения.

4. Вычисляются моменты инерции частей, составляющих сечение, относительно его главных центральных осей.

5. Определяются главные центральные моменты инерции всего сечения путем суммирования величин для каждой из главных осей.

Пример 2.1. Определить главные центральные моменты инерции таврового сечения (рис. 2.10).

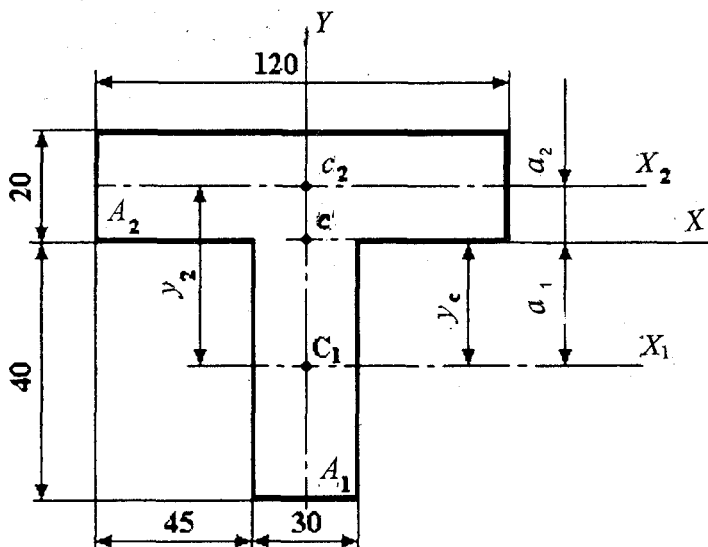


Рис. 2.10

Решение.

1. Определяем координаты центра тяжести. Для этого разбиваем сечение на два прямоугольника, проводим оси координат так, чтобы ось Y совпала с осью симметрии (эта ось будет главной центральной осью), а другая – X_1 прошла через центр тяжести первого прямоугольника.

Тогда

$$A_1 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ см}^2; \quad x_1 = 0; \quad y_1 = 0;$$

$$A_2 = 2 \cdot 12 = 24 \text{ см}^2; \quad x_1 = 0; \quad y_2 = 3;$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{24 \cdot 3}{12 + 24} = 2 \text{ см.}$$

Проводим центральную ось x на расстоянии 2 см от оси x_1 .

2. Вычисляем главные центральные моменты инерции, предварительно вычислив моменты инерции прямоугольников:

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16 \text{ см}^4; \quad a_1 = 2 \text{ см}^2; \quad a_2 = 1 \text{ см}^2;$$

$$I_{y_1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{4 \cdot 3^3}{12} = 9 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_2} = \frac{12 \cdot 2^3}{12} = 8 \text{ см}^4; \quad I_{y_2} = \frac{2 \cdot 12^3}{12} = 288 \text{ см}^4;$$

$$I_x = (I_{x_1} + a_1^2 A_1) + (I_{x_2} + a_2^2 A_2) = 16 + 2^2 \cdot 12 + 8 + 1^2 \cdot 24 = 96 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 9 + 288 = 297 \text{ см}^4.$$

Ось y является осью максимума, поскольку $I_y > I_x$.

Пример 2.2. Определить максимальный главный центральный момент инерции заданного сечения (рис. 2.11).

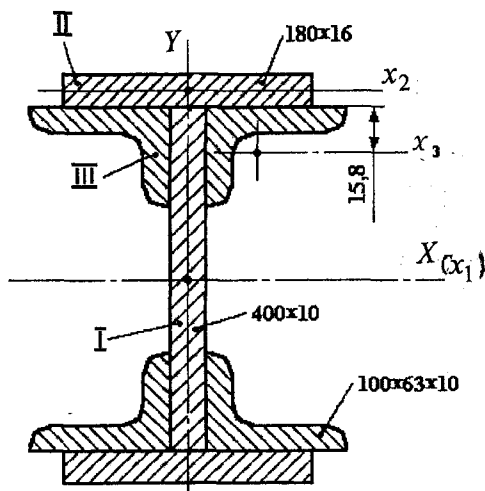


Рис. 2.11

Решение. Сечение имеет две оси симметрии, которые и являются главными центральными осями. Максимальный момент инерции относительно оси X .

Сечение разбиваем на элементарные площади.

1. Определяем момент инерции частей сечения относительно собственных центральных осей, параллельных главной оси X .

Для полосы I

$$I_{x_1}^I = \frac{1,0 \cdot 40^3}{12} = 5330 \text{ см}^4.$$

Для полосы II

$$I_{x_2}^{II} = \frac{18 \cdot 1,6^3}{12} = 6,14 \text{ см}^4.$$

Для уголка III по таблице ГОСТ 8510-86

$$I_{x_3}^{III} = 47,1 \text{ см}^4.$$

2. Определяем моменты инерции частей сечения относительно оси X :

$$I_x^I = I_{x_1}^I = 5300 \text{ см}^4;$$

$$I_x^{II} = I_{x_2}^{II} + a_2^2 A_2 = 6,14 + 20,8^2 \cdot 18 \cdot 1,6 = 12460 \text{ см}^4;$$

$$I_x^{III} = I_{x_3}^{III} + a_3^2 A_3 = 47,1 + 18,42^2 \cdot 15,5 = 5310 \text{ см}^4.$$

Площадь сечения и положение центра тяжести уголка взяты из таблицы ГОСТ 8510-72.

3. Определяем моменты инерции I_x :

$$I_x = I_x^I + 2I_x^{II} + 4I_x^{III} = 5300 + 2 \cdot 12460 + 4 \cdot 5310 = 51490 \text{ см}^4.$$

Пример 2.3. Определить главные центральные моменты инерции и положение главных центральных осей для сечения, состоящего из полосы размерами 15 x 2 см, швеллера № 24 и неравнополочного уголка размерами 12,5 x 8,0 x 1,0 см (рис. 2.12).

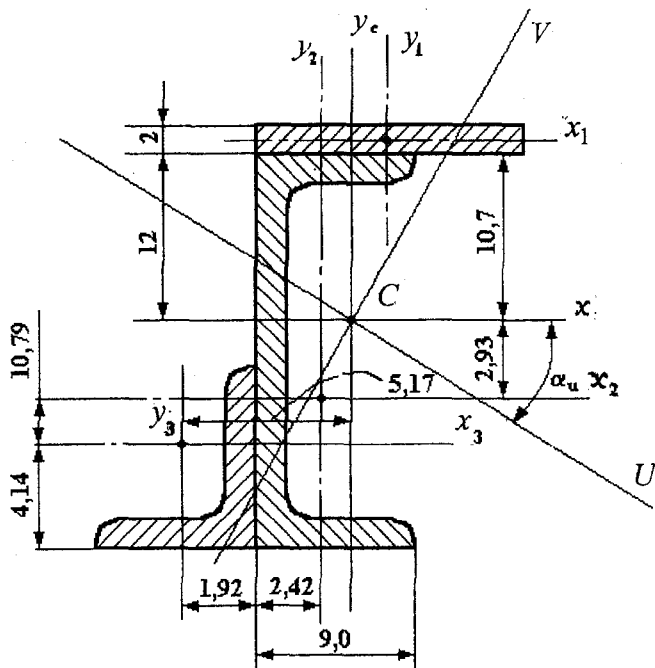


Рис. 2.12

Решение.

1. Проведем через центры тяжести частей фигуры горизонтальные и вертикальные оси $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ и выпишем данные, которые потребуются при дальнейших расчётах.

а. Прямоугольник

$$A_1 = 15 \cdot 2 = 30 \text{ см}^2; \quad I_{x_1} = \frac{15 \cdot 2^3}{12} = 10 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1} = \frac{2 \cdot 15^3}{12} = 562,5 \text{ см}^4; \quad I_{x_1 y_1} = 0.$$

б. Швеллер № 24

$$A_2 = 30,6 \text{ см}^2; \quad I_{x_2} = 2900 \text{ см}^4; \quad I_{y_2} = 208 \text{ см}^4; \quad J_{x_2 y_2} = 0.$$

Расстояние $x_{02} = 2,42 \text{ см}$.

в. Уголок 12,5 x 8,0 x 1,0 см.

$$A_3 = 19,7 \text{ см}^2; \quad I_{x_3} = 312 \text{ см}^4; \quad I_{y_2} = 100 \text{ см}^4;$$

Координаты центра тяжести

$$y_{03} = 4,14 \text{ см}; \quad x_{03} = 1,92 \text{ см}; \quad I_{\min} = 59,3 \text{ см}^4.$$

2. Определим положение центра тяжести сечения по отношению к главным центральным осям швеллера x_2 и y_2 :

$$x_c = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{30(7,5 - 2,42) + 19,7(-2,42 - 1,92)}{30 + 30,6 + 19,7} = 0,83 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{30(12 + 1) + 19,7(12 + 4,14)}{30 + 30,6 + 19,7} = 2,93 \text{ см}.$$

Через найденный центр тяжести C проводим оси x_c и y_c .

3. Вычислим осевые моменты инерции заданного сечения относительно центральных осей x_c и y_c .

$$I_{x_c} = \sum (I_{x_i} + a_i^2 A_i) = 10 + 30 \cdot 10,07^2 + 2900 + 30,6 \cdot 2,93^2 + 312 + 19,7 \cdot 10,79^2 = 8820 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = \sum (I_{y_i} + b_i^2 A_i) = 562,5 + 30 \cdot 4,25^2 + 208 + 30,6 \cdot 0,83^2 + 100 + 19,7 \cdot 5,17^2 = 1960 \text{ см}^4.$$

4. Вычислим центральный момент инерции заданного сечения относительно центральных осей x_c и y_c .

Предварительно определим центробежный момент инерции уголка относительно его центральных осей x_3 и y_3 :

$$I_{x_3 y_3} = \pm \sqrt{(I_{x_3} - I_{3_{\min}})(I_{y_3} - I_{3_{\min}})} = \\ = \sqrt{(312 - 59,3)(100 - 59,3)} = 100,4 \text{ см}^4.$$

Знак перед радикалом определяется различным положением сечения. Для уголка имеем (рис. 2.13) знак «плюс», когда ось I_{\min} уголка повернута по отношению к оси Y по часовой стрелке.

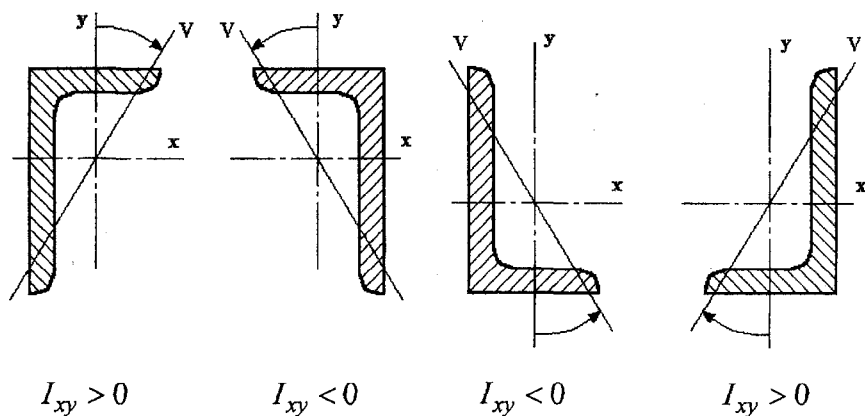


Рис. 2.13

Центробежный момент инерции всего сечения

$$I_{x_c y_c} = I_{x_1 y_1} + A_1 a_1 b_1 + I_{x_2 y_2} + A_2 a_2 b_2 + I_{x_3 y_3} + A_3 a_3 b_3 = \\ = 30 \cdot 4,25 \cdot 10,07 + 30,6(-0,83)(-2,93) + 101,4 + 19,7(-5,17)(-10,79) = \\ = 2559 \text{ см}^4.$$

5. Определение главных центральных моментов инерции.

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} =$$
$$= \frac{1}{2} \left[(8820 + 1960) \pm \sqrt{(8820 - 1960)^2 + 4 \cdot 2559^2} \right] = \frac{1}{2} (10780 \pm 8560);$$

$$I_{\max} = I_u = 9670 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_v = 1110 \text{ см}^4.$$

В качестве проверки

$$I_{\max} + I_{\min} = 9670 + 1110 = 10780;$$

$$I_{x_c} + I_{y_c} = 8820 + 1960 = 10780.$$

6. Находим положение главных осей:

$$\operatorname{tg} \alpha_u = \frac{I_{xy}}{I_x - I_{\min}} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} 2\alpha_u = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_u = \frac{2559}{8820 - 1110} = 0,332; \quad \alpha_u = 18^\circ 20'.$$

Угол откладываем от оси x_c по часовой стрелке, угол определяет положение главной оси U .

Задача 2.1. Определить центральные моменты инерции (рис. 2.14).

Задача 2.2. Определить главные центральные моменты инерции сечения, представляющего собой прямоугольник, из которого вырезан круг (рис. 2.15).

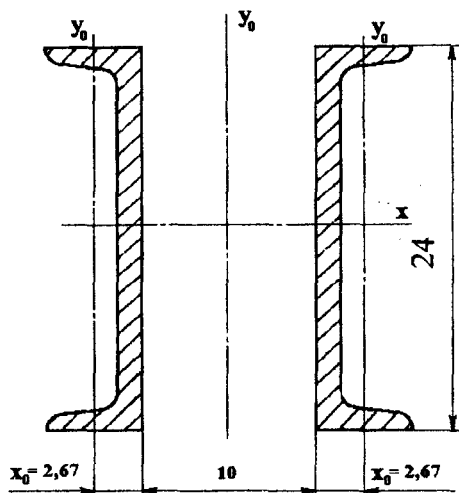


Рис. 2.14

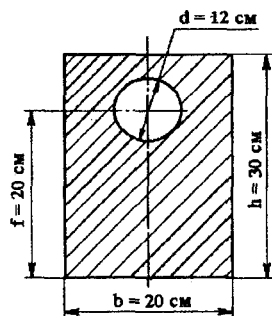


Рис. 2.15

Задача 2.3. Вычислить главные центральные моменты инерции и положение главных центральных осей (рис. 2.16).

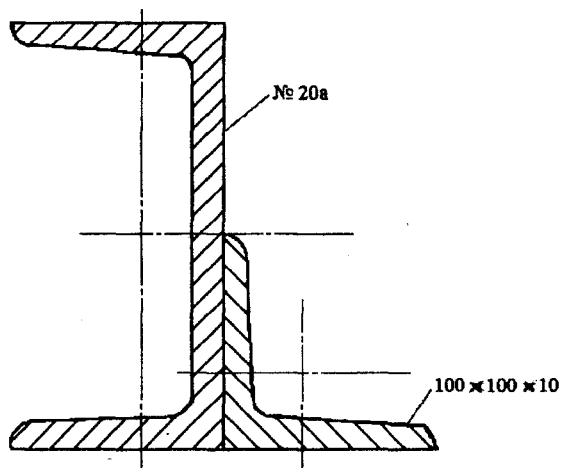


Рис. 2.16

2.5. Моменты сопротивления

Осевыми моментами сопротивления плоских фигур относительно главных центральных осей, расположенных в плоскости фигур, называют отношения моментов инерции относительно этих осей к расстояниям от этих осей до наиболее удаленных точек фигур:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}.$$

Полярный момент сопротивления определяется по формуле

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}},$$

где ρ_{\max} — расстояние от полюса до наиболее удаленной точки плоской фигуры.

Моменты сопротивления измеряются единицами длины в третьей степени (мм^3 , см^3 и т.д.).

Моменты сопротивления сложных фигур в отличие от моментов инерции нельзя вычислять как алгебраические суммы моментов сопротивления их частей.

3. КРУЧЕНИЕ

3.1. Общие сведения

Кручение – это такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает единственный внутренний силовой фактор – крутящий момент M_K .

Деформация кручения возникает при нагружении бруса парами сил, плоскости действия которых перпендикулярны к его продольной оси. Моменты этих внешних пар будем называть внешними крутящими моментами и обозначать буквой T .

На рис. 3.1, а изображен брус, работающий на кручение под действием приложенных к нему внешних крутящих моментов. Это условное изображение моментов применено взамен показанного на рис. 3.1, б, где дано нагружение этого же бруса парами сил.

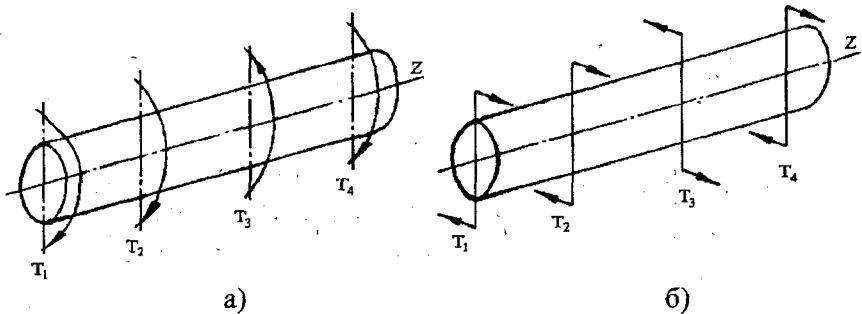


Рис. 3.1

Алгебраическая сумма внешних крутящих моментов равна нулю, т.е. брус находится в равновесии: $\sum T_z = 0$. При решении задач на кручение возникает необходимость построения эпюр крутящих моментов – M_K .

3.2. Порядок построения эпюр крутящих моментов

Эпура крутящих моментов представляет собой график изменения значений крутящих моментов по длине вала.

а. На чертеже (рис. 3.2, а) указываются размеры вала, величины заданных моментов, а также их направление и принятые номера участков.

б. Величина крутящего момента на каждом участке определяется методом сечения (рис. 3.2, б).

$$M_k = \sum T_z.$$

Знак крутящего момента не имеет физического смысла.

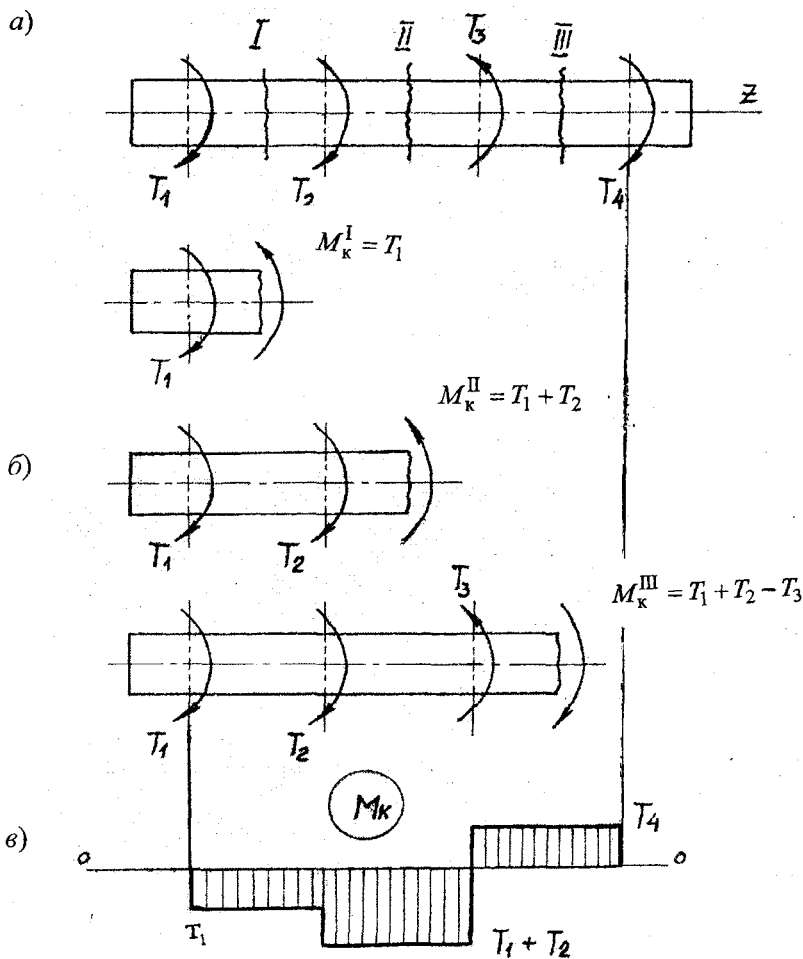


Рис. 3.2

3.3. Проверка правильности построения эпюры

а. На протяжении участка, где не приложены внешние моменты, крутящий момент постоянен, а эпюра представляет собой прямую, параллельную оси Z .

б. В сечении, где приложен внешний момент, на эпюре – скачок на величину момента.

3.4. Напряжения и деформации при кручении бруса круглого сечения.

При кручении бруса в его поперечных сечениях возникают только касательные напряжения:

$$\tau = \frac{M_k}{W_p},$$

где W_p – полярный момент сопротивления сечения бруса, мм^3 .

Для сплошного круглого сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3.$$

Угол закручивания бруса постоянного диаметра при одинаковом во всех поперечных сечениях крутящем моменте

$$\varphi = \frac{M_k l}{GI_p},$$

где l – длина рассматриваемого участка, мм;

I_p – полярный момент инерции, мм^4 :

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4,$$

G – модуль сдвига, для стали $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Величина угла φ выражается в радианах.

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_k}{GI_p} - \text{относительный угол закручивания, рад/м.}$$

3.5. Расчёты на прочность и жёсткость при кручении

Условие прочности

$$\tau = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau],$$

где $[\tau] = 20 \dots 35$ МПа (для сталей).

На основании данной формулы могут проводиться три вида расчётов.

1. Проверка прочности (проверочный расчёт)

$$\tau \leq [\tau].$$

2. Подбор сечения (проектный расчёт)

$$W_p \geq \frac{M_k}{[\tau]}, \quad d = \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{0,2[\tau]}.$$

3. Определение допускаемого крутящего момента:

$$[M_k] = W_p [\tau].$$

Условие жёсткости

$$\theta = \frac{M_k}{GI_p} \leq [\theta].$$

Если вычислить относительный угол закручивания в градусах на 1 м длины вала, то

$$\theta^\circ = \frac{180}{\pi} \frac{M_k}{GI_p} \leq [\theta^\circ].$$

С помощью формулы условия жёсткости решаются три задачи, аналогичные задачам при расчётах на прочность.

1. Проверка жёсткости (проверочный расчёт)

$$\theta \leq [\theta].$$

2. Подбор сечения (проектный расчёт)

$$I_p \geq \frac{M_k}{G[\theta]}, \quad \text{т.е.} \quad d \geq 4 \sqrt{\frac{32M_k}{\pi G[\theta]}}.$$

Из двух значений диаметра, определённых по условиям прочности и жёсткости, должно быть принято большее.

3. Определение допускаемого крутящего момента:

$$[M_k] = G I_p [\theta].$$

Пример 3.1. При $[\tau] = 75$ МПа проверить прочность вала, имеющего диаметр 70 мм. Вал передаёт мощность 150 кВт, вращается с угловой скоростью $\omega = 30$ рад/с.

Решение. Определяем крутящий момент, равный моменту, передаваемому валом:

$$M_k = T = \frac{P}{\omega} = \frac{150 \cdot 10^3}{30} = 5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Наибольшее напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 70^3} = 72,8 \text{ МПа} < [\tau].$$

16

Пример 3.2. Для ступенчатого стального бруса круглого поперечного сечения (рис. 3.3, а) построить: эпюры крутящих моментов, максимальных касательных напряжений и углов поворота поперечных сечений. Проверить прочность бруса при $[\tau] = 60$ МПа.

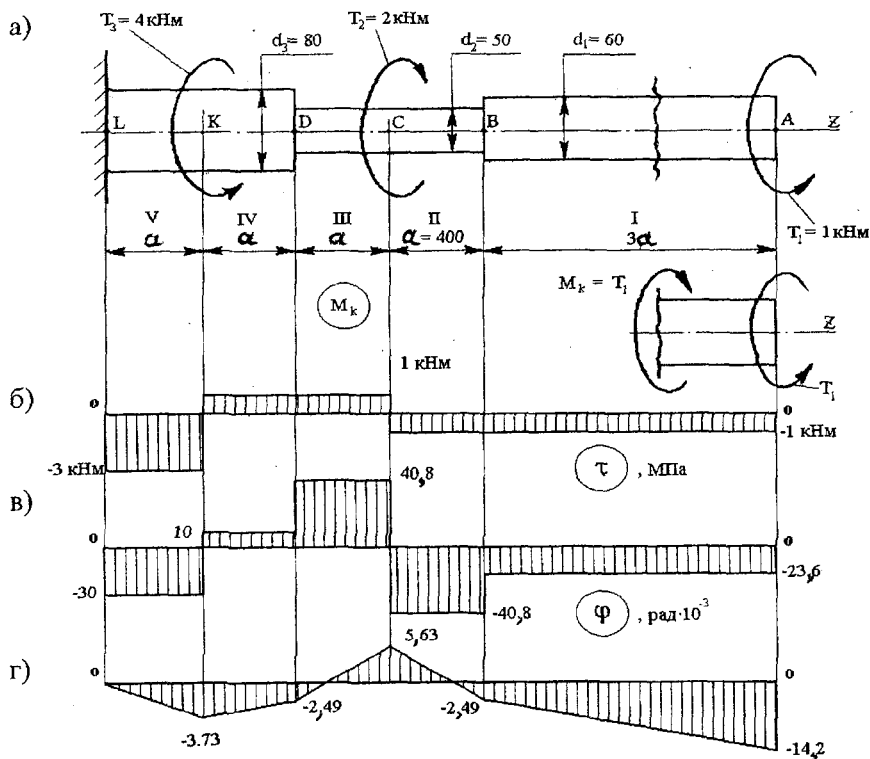


Рис. 3.3

Решение. Эпюру крутящих моментов строим, начиная от свободного конца, что позволяет не определять реактивный момент в заделке. Проводим сечение в пределах первого участка, отбрасываем левую часть и рассматриваем равновесие правой части.

$$M_K^I = -T_1 = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Аналогично на каждом участке:

$$M_K^{II} = M_K^I = -1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_K^{III} = -(T_1 - T_2) = -1 + 2 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{к}}^{\text{IV}} = M_{\text{к}}^{\text{III}} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{к}}^{\text{V}} = -(T_1 - T_2 + T_3) = -1 + 2 - 4 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Построение эпюры крутящих моментов совершенно аналогично построению эпюры продольных сил (рис. 3.3, б).

Для нахождения опасного сечения строим эпюру максимальных касательных напряжений:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\rho}},$$

где $W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}$.

$$\tau_{\text{I}} = \frac{M_{\text{к}}^{\text{I}}}{\frac{\pi d_1^3}{16}} = \frac{-1 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{\frac{3,14 \cdot 60^3}{16}} = -23,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{II}} = \frac{M_{\text{к}}^{\text{II}}}{\frac{\pi d_2^3}{16}} = \frac{-1 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{\frac{3,14 \cdot 50^3}{16}} = -40,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{III}} = -\tau_{\text{II}} = 40,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{IV}} = \frac{M_{\text{к}}^{\text{IV}}}{\frac{\pi d_3^3}{16}} = \frac{1 \cdot 10^6}{\frac{3,14 \cdot 80^3}{16}} = 10 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{V}} = \frac{M_{\text{к}}^{\text{V}}}{\frac{\pi d_3^3}{16}} = \frac{-3 \cdot 10^6}{\frac{3,14 \cdot 80^3}{16}} = -30 \text{ МПа}.$$

Ординаты эпюры τ_{\max} откладываем в ту же сторону, что и соответствующие ординаты эпюры M_k . Знак касательного напряжения при расчёте на прочность никакой роли не играет (рис. 3.3, в).

Опасными оказались поперечные сечения участков II и III. Таким образом, опасными оказались не те сечения, в которых крутящий момент максимален. Условие прочности $\tau_{\max} \leq [\tau]$ выполняется. Очевидно, что материал бруса использован нерационально, даже в опасном сечении максимальное напряжение на 32 % ниже допускаемого.

Эпюру углов поворота строим, начиная от защемлённого конца. Ординаты этой эпюры дают в выбранном масштабе величины углов поворота соответствующих поперечных сечений бруса (рис. 3.3, г):

$$\varphi_L = 0; \quad \varphi_K = \varphi_L + \varphi_{K-L};$$

$$\varphi_K = \frac{M_K^V a}{GI_p} = -\frac{3 \cdot 10^6 \cdot 400}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{3,14 \cdot 80^4}{32}} = -3,73 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_D = \varphi_K + \varphi_{D-K} = -3,73 \cdot 10^{-3} + \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 400}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{3,14 \cdot 80^4}{32}} = -2,49 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_C = \varphi_D + \varphi_{C-D} = -2,49 \cdot 10^{-3} + \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 400}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{3,14 \cdot 50^4}{32}} = 5,63 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_B = \varphi_C + \varphi_{B-C} = 5,63 \cdot 10^{-3} - \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 400}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{3,14 \cdot 50^4}{32}} = -2,49 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_A = \varphi_B + \varphi_{A-B} = -2,49 \cdot 10^{-3} - \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 400}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{3,14 \cdot 60^4}{32}} = -14,2 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Пример 3.3. Вал диаметром $d = 60$ мм имеет частоту вращения $n = 600$ об/мин. Определить из расчётов на прочность и жёсткость допускаемую величину мощности, которую может передать вал, если $[\tau] = 35$ МПа; $[\theta] = 0,4$ град/м; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Решение. Допускаемый по условию прочности крутящий момент, равный в данном случае передаваемому валом вращающему моменту, будет

$$\begin{aligned} [T'] = [M_k]' &= W_p [\tau] = \frac{\pi d^3}{16} [\tau] = \frac{3,14 \cdot 60^3}{16} \cdot 35 = \\ &= 1485 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм} = 1485 \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Определим допускаемый момент из расчета на жесткость:

$$\begin{aligned} [T]'' = [M_k]'' &= GI_p [\theta] = 8,0 \cdot 10^{10} \cdot \frac{3,14}{32} (60 \cdot 10^{-3})^4 \frac{3,14}{180} \cdot 0,4 = \\ &= 710 \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Множитель $\frac{\pi}{180} = \frac{3,14}{180}$ служит для перевода θ из град/м в рад/м.

Окончательно принимаем меньшее из двух значений $[T] = 710$ Н·м. Соответствующую мощность найдем по формуле

$$[P] = [T] \omega = [T] \frac{\pi n}{30} = 710 \frac{3,14 \cdot 600}{30} = 44,6 \cdot 10^3 \text{ Вт} = 44,6 \text{ кВт}.$$

При принятом значении допускаемого момента максимальные касательные напряжения в поперечном сечении вала

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{710 \cdot 10^3}{\frac{3,14 \cdot 60^3}{16}} = 16,7 \text{ МПа}.$$

Пример 3.4. Определить диаметр вала, передающего мощность $P = 90$ кВт. Угловая скорость вала $\omega = 12$ рад/с. Допускаемый относительный угол закручивания $[\theta] = 0,009$ рад/м, допускаемое напряжение $[\tau] = 40$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Решение. Крутящий момент, возникающий в любом поперечном сечении вала, равен передаваемому валом вращающему моменту:

$$M_k = T = \frac{P}{\omega} = \frac{90 \cdot 10^3}{12} = 7,5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Из условия прочности

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 7,5 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 40}} = 98,5 \text{ мм}.$$

Из условия жесткости

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M_k}{\pi G[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 7,5 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 9 \cdot 10^{-6}}} = 101,5 \text{ мм}.$$

Окончательно принимаем $d = 102$ мм.

Пример 3.5. Проверить прочность ведущего и ведомого валов редуктора, приняв $[\tau] = 25$ МПа (рис. 3.4). Передаваемая мощность $P = 15$ кВт. Угловая скорость вала электродвигателя $n_1 = 720$ об/мин, $z_1 = 20$, $z_2 = 60$, $d_1 = 40$ мм, $d_2 = 50$ мм. Коэффициент полезного действия передачи $\eta = 0,96$.

Решение. Угловая скорость ведущего вала

$$\omega = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{3,14 \cdot 720}{30} = 75,5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Крутящий момент на валу 1

$$M_1 = T_1 = \frac{P}{\omega} = \frac{15 \cdot 10^3}{75,5} = 199 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

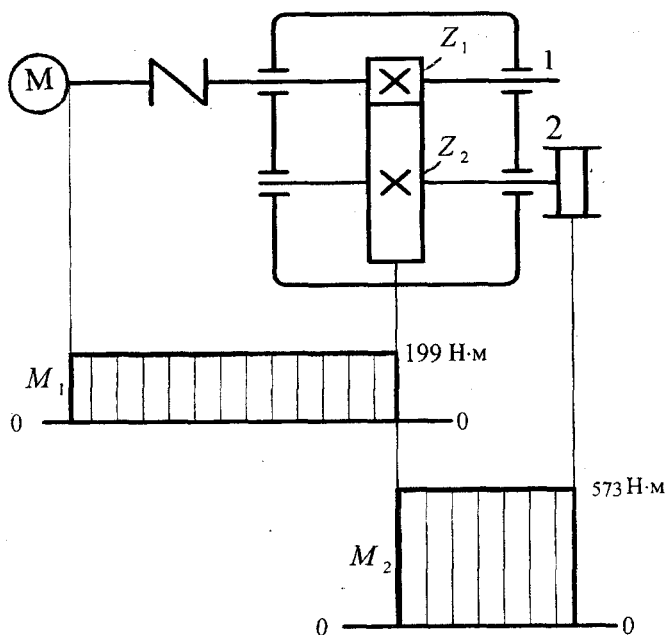


Рис. 3.4

Проверяем прочность этого вала:

$$\tau_1 = \frac{M_1}{W_{p1}} = \frac{199 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot 40^3} = 15,8 \text{ МПа} < [\tau].$$

Крутящий момент на валу 2

$$M_2 = T_2 = M_1 u \eta = M_1 \frac{z_2}{z_1} \eta = 199 \cdot 10^3 \cdot \frac{60}{20} \cdot 0,96 = 573 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм} = 573 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Проверим прочность вала 2:

$$\tau_2 = \frac{M_2}{W_{p2}} = \frac{573 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot 50^3} = 23,4 \text{ МПа} < [\tau].$$

Задача. На валу насажены четыре шкива, из которых шкив A получает от двигателя мощность $P_A = 60$ кВт, а шкивы B , C и D передают рабочим машинам мощности $P_B = 25$ кВт, $P_C = 10$ кВт, $P_D = 25$ кВт. Угловая скорость вала $\omega = 15$ рад/с. Построить эпюру крутящих моментов, определить диаметр вала при $[\tau] = 25$ МПа, найти углы поворота сечений D , B и C вала. Расстояние между шкивами $l = 1$ м, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Поменять местами шкивы A и B . Как изменится величина крутящего момента?

Примечание. Для определения углов закручивания надо руководствоваться правилом: угол закручивания отсчитывается от сечения вала в месте расположения ведущего шкива A .

4. ПРЯМОЙ ИЗГИБ

4.1. Основные понятия

На изгиб работают балки, оси, валы и другие детали конструкций.

Прямой изгибом называется вид изгиба, при котором изгибающие моменты, возникающие в поперечных сечениях бруса, действуют в плоскости, совпадающей с одной из главных плоскостей бруса (рис. 4.1).

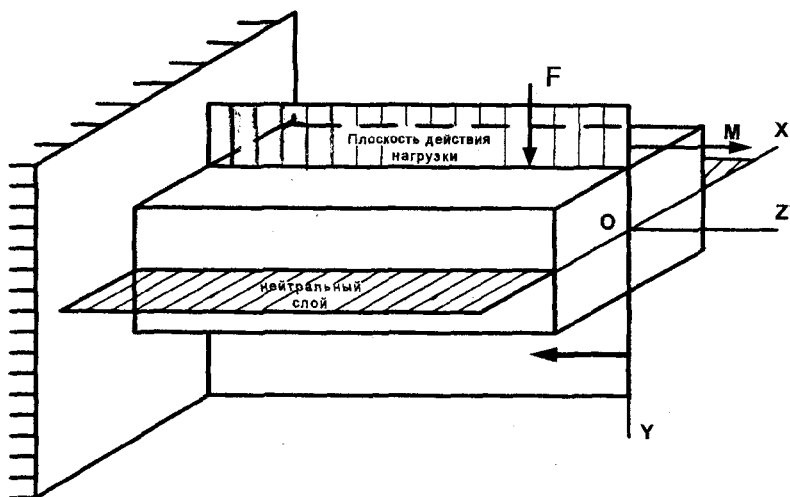


Рис.4.1

Прямой изгиб будет иметь место в двух случаях: либо когда силы лежат в плоскости ZOY , либо когда все силы лежат в плоскости ZOX .

В дальнейшем будем предполагать, что все силы приложены в плоскости ZOY и перпендикулярны к оси Z .

4.2. Поперечные силы и изгибающие моменты

В сечениях балок при прямом изгибе возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x . Внутренние силовые факторы зависят от внешней нагрузки и изменяются по длине балки.

Законы их изменения описываются некоторыми уравнениями, где аргументами являются координаты z поперечных сечений балки, а функциями — Q и M .

Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил строятся аналогично эпюрам продольных сил и крутящих моментов.

Правило знаков для изгибающих моментов и поперечных сил

Изгибающий момент принято считать положительным, если внешняя нагрузка изгибает балку выпуклостью вниз или стремится повернуть левую часть балки по направлению часовой стрелки, а правую часть — против часовой стрелки (рис. 4.2).

Поперечная сила считается положительной, если сумма внешних сил, лежащих по левую сторону от сечения, дает равнодействующую, направленную вверх (рис. 4.3), а по правую сторону — вниз.

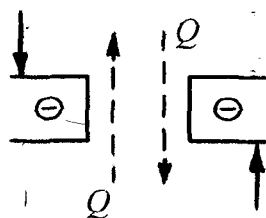
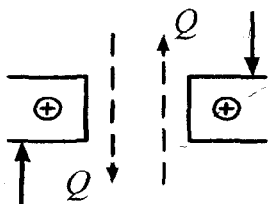
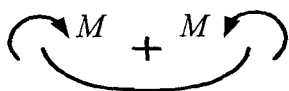


Рис. 4.2

Рис. 4.3

Зависимость между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью сплошной нагрузки q получены Д.И. Журавским в следующем виде:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q.$$

4.3. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Для наглядного изображения распределения вдоль оси балки поперечных сил и изгибающих моментов строят эпюры, которые дают возможность определить опасное сечение балки и установить значения поперечной силы и изгибающего момента в этом сечении.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов можно строить двумя способами.

Первый способ заключается в том, что сначала составляют аналитические выражения поперечных сил и изгибающих моментов для каждого участка как функций текущей координаты z поперечного сечения:

$$Q = f_1(z); \quad M = f_2(z).$$

Затем по полученным уравнениям строят эпюры.

Второй способ заключается в построении эпюр по характерным точкам и значениям поперечных сил и изгибающих моментов на границах участков. Применяя этот способ, в большинстве случаев можно обойтись без составления уравнений поперечных сил и изгибающих моментов. При наличии некоторого опыта второй способ является предпочтительным.

4.3.1. Методика решения задач на построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

1. Составляются уравнения равновесия балки, решением которых затем определяются значения опорных реакций.
2. Балка разбивается на отдельные участки, в пределах которых закон изменения Q и M имеет постоянное значение.
3. Составляются уравнения изгибающих моментов M и поперечных сил Q .
4. По полученным уравнениям вычисляются ординаты эпюр для ряда сечений в количестве, достаточном для изображения этих эпюр.
5. Определяются сечения, в которых действуют моменты M_{\max} и M_{\min} , и вычисляются значения этих моментов.
6. По полученным данным строятся эпюры.

Пример 4.1. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, шарнирно закрепленной двумя концами и нагруженной сосредоточенной силой (рис. 4.4, а).

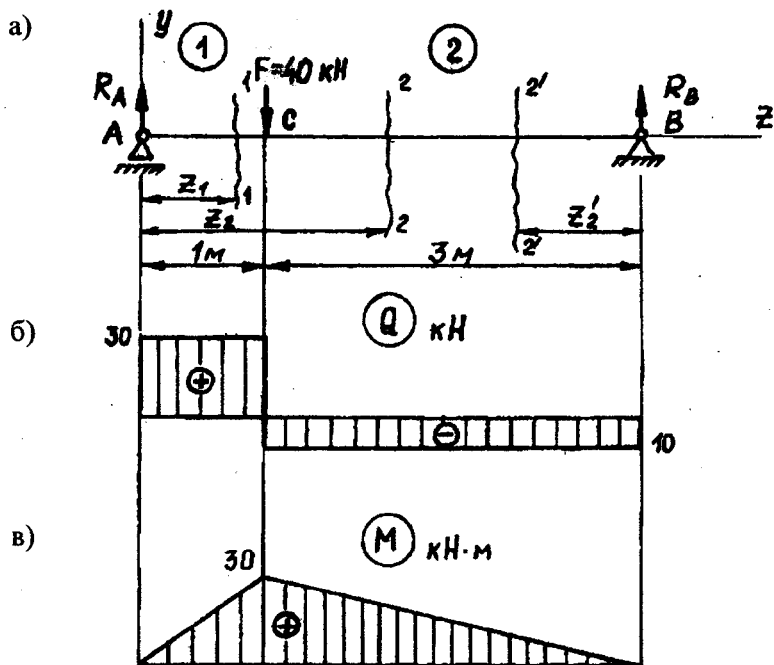


Рис. 4.4

Решение. Выбираем систему координат с началом на левом конце балки.

1. Балку разбиваем на участки. В данном примере границами участков являются точка C, в которой приложена сосредоточенная сила 40 кН, а также опоры A и B. Следовательно, данная балка состоит из двух участков.

2. Определим опорные реакции R_A и R_B , составив уравнения моментов относительно опор A и B:

$$\sum M_A = 0; \quad -F \cdot AC + R_B \cdot AB = 0; \quad -40 \cdot 1 + R_B \cdot 4 = 0;$$

$$R_B = \frac{F \cdot AC}{AB} = \frac{40 \cdot 1}{4} = 10 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot AB + F \cdot CB = 0; \quad -R_A \cdot 4 + 40 \cdot 3 = 0;$$

$$R_A = \frac{F \cdot CB}{AB} = \frac{40 \cdot 3}{4} = 30 \text{ кН.}$$

Проверим правильность определения реакций, составив уравнение проекций на ось y :

$$\sum Y = 0; \quad R_A + R_B - F = 0; \quad 10 + 30 - 40 = 0.$$

Полученное тождество говорит о том, что реакции определены правильно. Проверку найденных реакций производить *обязательно*, так как ошибка в определении опорных реакций приведет к ошибкам в построении эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

3. Построение эпюр поперечных сил.

На первом участке проводим сечение 1–1 на расстоянии z_1 от опоры A . Мысленно отбросив правую часть от сечения, рассматриваем равновесие левой части, записываем уравнение равновесия:

$$Q_1 = R_A = 30 \text{ кН.}$$

Далее в пределах второго участка (между точками C и B) проводим сечение 2–2 на расстоянии z_2 и также записываем уравнение равновесия:

$$Q_2 = R_A - F = 30 - 40 = -10 \text{ кН.}$$

То же значение получим, если рассмотрим часть балки, расположенную справа от сечения 2–2, тогда

$$Q_2 = -R_B = -10 \text{ кН.}$$

Найденные значения отложим на эпюре. В точке приложения сосредоточенной силы эпюра имеет скачок, численно равный этой силе (в нашем примере -40 кН) (рис. 4.4, б).

4. Построение эпюры изгибающих моментов.

В любом сечении 1–1 на первом участке выражение для изгибающего момента имеет вид

$$M_1 = R_A \cdot z_1,$$

причем $0 \leq z_1 \leq 1$. Поскольку z_1 содержится в этом уравнении в первой степени, эпюра моментов будет представлять собой прямую линию. Для построения эпюры M достаточно найти значения моментов на границах участка, т.е. при $z_1 = 0$ и $z_1 = 1$:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_1 = 0;$$

$$\text{при } z_1 = 1 \text{ м} \quad M_1 = 30 \cdot 1 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для определения изгибающего момента в сечении 2–2 проще рассмотреть правую часть балки, на которую действует одна сила. Проведем сечение 2'–2'. Отбросив мысленно левую часть от сечения, запишем уравнение моментов в оставшейся части относительно сечения 2'–2':

$$M'_2 = 10 \cdot z'_2, \quad 0 \leq z'_2 \leq 3;$$

$$\text{при } z'_2 = 0 \quad M'_2 = 0;$$

$$\text{при } z'_2 = 3 \text{ м} \quad M'_2 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным данным строим эпюру M . Наибольшее значение момента будет под сосредоточенной силой: $M_{\max} = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Это сечение будет опасным (рис. 4.4, в).

Пример 4.2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для данной балки (рис. 4.5, а).

Решение.

1. Определение опорных реакций:

$$\sum M_A = 0; \quad -40 \cdot 2 - 30 \cdot 7 + R_B \cdot 10 = 0; \quad R_B = 29 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 10 + 40 \cdot 8 + 30 \cdot 3 = 0; \quad R_A = 41 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum Y = 0; \quad 29 + 41 - 40 - 30 = 0$.

2. Значения поперечных сил:

$$Q_1 = R_A = 41 \text{ кН}; \quad Q_2 = R_A - F_1 = 41 - 40 = 1 \text{ кН};$$

$$Q_3 = -R_B = -29 \text{ кН}.$$

Строим эпюру Q (рис. 4.5, б).

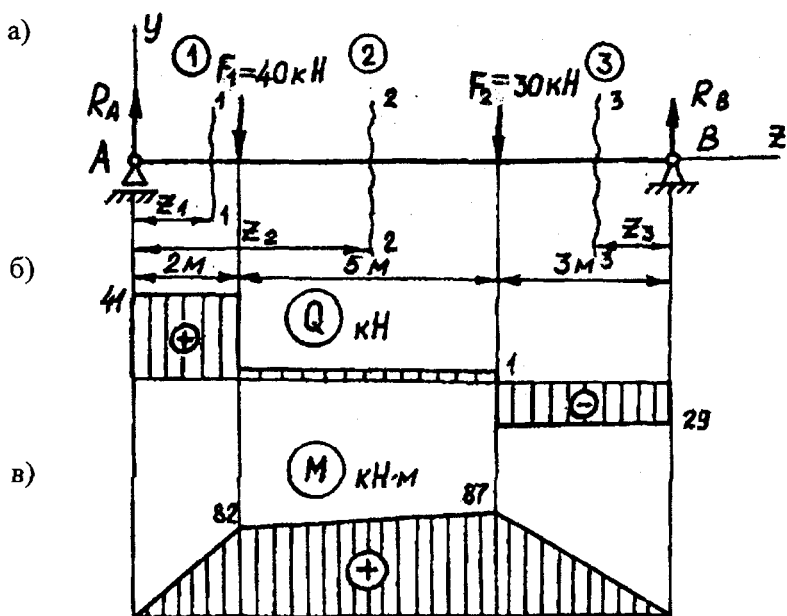


Рис. 4.5

Наибольшее значение поперечной силы по абсолютной величине в данном примере $Q_{\max} = 41$ кН.

3. Нахождение значений изгибающих моментов:

$$M_1 = R_A \cdot z_1, \quad 0 \leq z_1 \leq 2;$$

при $z_1 = 0$ $M_1 = 0;$

при $z_1 = 2$ $M = 41 \cdot 2 = 82$ кН·м;

$$M_2 = R_A \cdot z_2 - 40(z_2 - 2); \quad 2 \leq z_2 \leq 7;$$

при $z_2 = 2$ $M_2 = 82$ кН·м;

при $z_2 = 7$ $M_2 = 87$ кН·м;

$$M_3 = R_B \cdot z_3; \quad 0 \leq z_3 \leq 3;$$

при $z_3 = 0$ $M_3 = 0;$

при $z_3 = 3$ $M_3 = 87$ кН·м.

Строим эпюру изгибающих моментов, $M_{\max} = 87$ кН·м (рис. 4.5, в).

Пример 4.3. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, показанной на рис. 4.6, а.

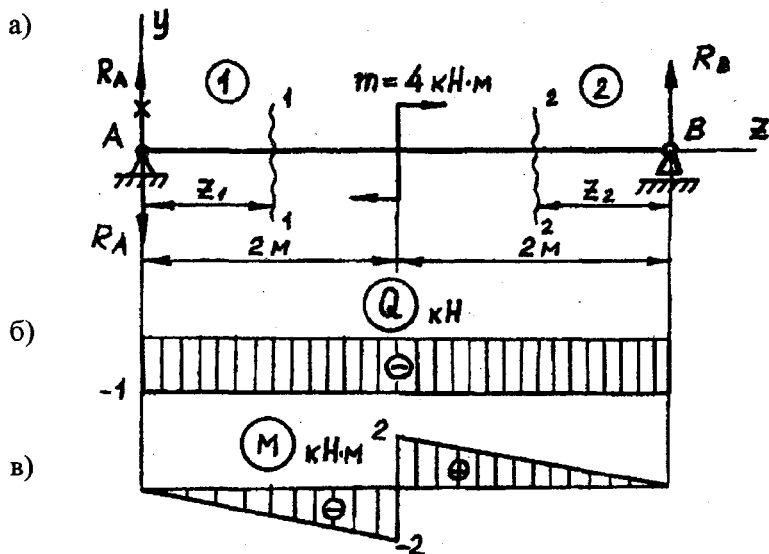


Рис. 4.6

Решение.

1. Нахождение опорных реакций:

$$\sum M_A = 0; \quad -4 + R_B \cdot 4 = 0; \quad R_B = 1 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; \quad -4 - R_A \cdot 4 = 0; \quad R_A = -1 \text{ кН.}$$

То есть реакция R_A должна быть направлена в противоположную сторону (вниз).

Проверка: $\sum Y = 0; \quad -1 + 1 = 0.$

2. При определении поперечных сил внешний момент не влияет на построение эпюры.

$$Q_1 = -R_A = -1 \text{ кН.}$$

Если идти справа (рис. 4.6, б):

$$Q_2 = -R_B = -1 \text{ кН.}$$

3. Нахождение изгибающих моментов. Балка разбивается на два участка. В пределах первого участка

$$M_1 = -R_A \cdot z_1, \quad 0 \leq z_1 \leq 2;$$

при $z_1 = 0$ $M_1 = 0;$

при $z_1 = 2$ м $M_1 = -2 \cdot 1 = -2$ кН·м.

На втором участке проводим сечение на расстоянии z_2 от правой опоры.

$$M_2 = R_B \cdot z_2, \quad 0 \leq z_2 \leq 2;$$

при $z_2 = 0$ $M_2 = 0;$

при $z_2 = 2$ м $M_2 = 1 \cdot 2 = 2$ кН·м.

Строим эпюру M (рис. 4.6, в).

Наибольшее значение момента в поперечном сечении балки по абсолютной величине $M_{\max} = 2$ кН·м. Скачок на эпюре моментов на величину 4 кН·м соответствует внешнему моменту.

Пример 4.4. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, показанной на рис. 4.7, а.

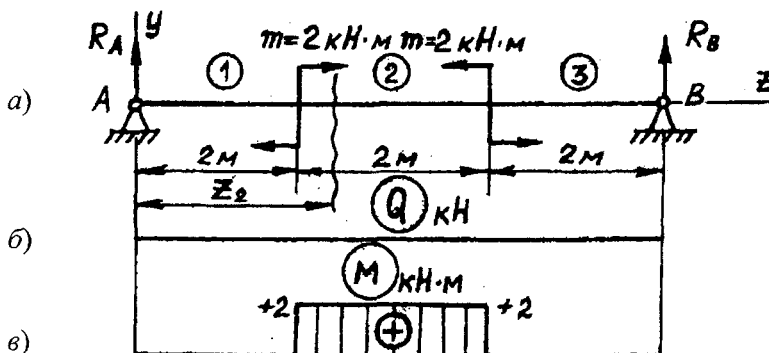


Рис. 4.7

Решение.

1. Нахождение опорных реакций. Внешние нагрузки уравновешивают друг друга, поэтому $R_A = R_B = 0$.

2. Эпюра поперечных сил изображается прямой, совпадающей с осью балки, т. е. Q_y на всей длине балки равна нулю: $Q_y = 0$ (рис. 4.7, б).

3. Построение эпюры изгибающих моментов. Крайние участки имеют нулевое значение моментов, так как $R_A = R_B = 0$. На среднем участке значение момента постоянно: $M_2 = 2$ кН·м (рис. 4.7, в).

Пример 4.5. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, показанной на рис. 4.8, а.

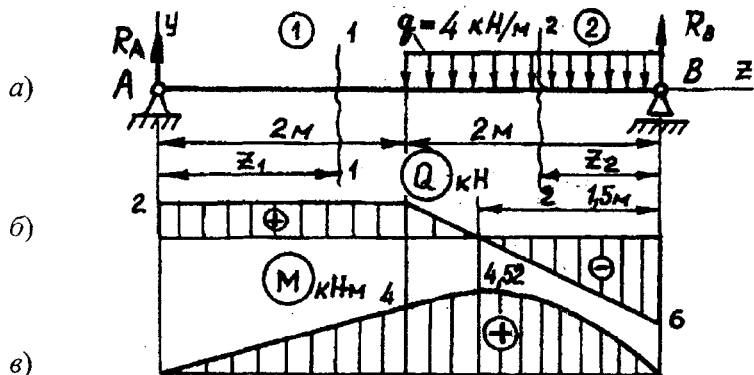


Рис. 4.8

Решение.

1. Нахождение опорных реакций.

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3 = 0; \quad R_B = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0; \quad R_A = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проверка: $\sum Y = 0; \quad 6 + 2 - 4 \cdot 2 = 0.$

2. Определение поперечных сил.

$$Q_1 = R_A = 2 \text{ кН}; \quad Q_2 = -R_B + q \cdot z_2; \quad 0 \leq z_2 \leq 2;$$

при $z_2 = 0 \quad Q_2 = -R_B = -6 \text{ кН};$

при $z_2 = 2 \quad Q_2 = -6 + 4 \cdot 2 = 2 \text{ кН}.$

Определим также величину z_2 , при которой поперечная сила принимает нулевое значение. Поперечная сила принимает нулевое значение в пределах второго участка. Приравняв Q_2 нулю, найдём значение z_2 :

$$Q_2 = R_B + q \cdot z_2 = 0; \quad z_2 = 1,5 \text{ м}.$$

3. Определение изгибающих моментов.

$$M_1 = R_A \cdot z_1, \quad 0 \leq z_1 \leq 2;$$

$$\begin{aligned} \text{при } z_1 = 0 & \quad M_1 = 0; \\ \text{при } z_1 = 2 \text{ м} & \quad M_1 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \end{aligned}$$

$$M_2 = R_B \cdot z_2 - q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2}, \quad 0 \leq z_2 \leq 2;$$

$$\begin{aligned} \text{при } z_2 = 0 & \quad M_2 = 0; \\ \text{при } z_2 = 2 & \quad M_2 = 6 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Изгибающий момент на этом участке изменяется по закону квадратичной параболы. При построении эпюр моментов на сжатых волокнах выпуклость параболы направляется навстречу интенсивности. При нулевом значении поперечной силы необходимо находить значение момента в этом сечении, т. е. при

$$z_2 = 1,5 \text{ м} \quad M_2 = 6 \cdot 1,5 - 4 \cdot 1,5 \cdot \frac{1,5}{2} = 4,52 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Это сечение при $z_2 = 1,5$ м является наиболее опасным:

$$M_{\max} = 4,52 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Пример 4.6. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, заделанной одним концом и нагруженной согласно рис. 4.9, а.

Решение. В балках с заделкой рациональнее не определять опорные реакции, а проводить сечения, начиная от свободного конца балки, т. е. выберем начало координат в точке С.

1. Определение поперечных сил.

Поперечная сила в сечении 1–1

$$Q = q \cdot z_1, \quad 0 \leq z_1 \leq 2;$$

$$\begin{aligned} \text{при } z_1 = 0 & \quad Q_1 = 0; \\ \text{при } z_1 = 2 \text{ м} & \quad Q_1 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН}. \end{aligned}$$

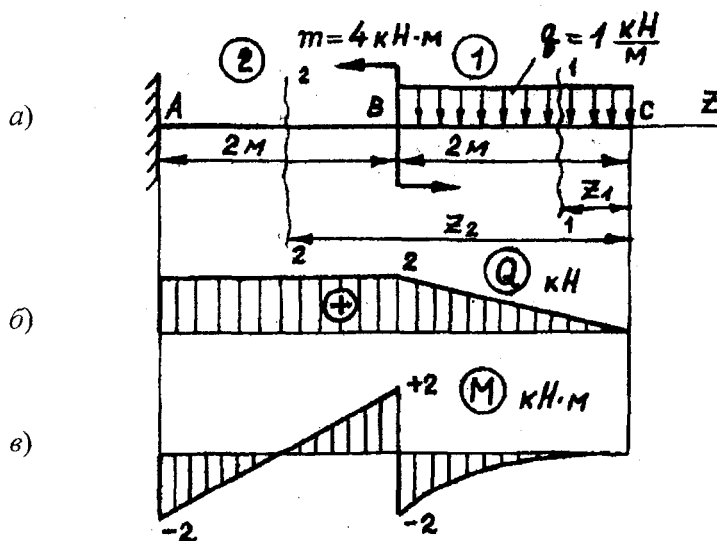


Рис. 4.9

Второй участок:

$$Q_2 = q \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН.}$$

Распределенная нагрузка действует на длине 2 м.

По данным значениям строим эпюру.

2. Определение изгибающих моментов:

$$M_1 = -q \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2}, \quad 0 \leq z_1 \leq 2;$$

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_1 = 0;$$

$$\text{при } z_1 = 2 \text{ м} \quad M_1 = -1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = -2 \text{ кН·м.}$$

Выпуклость параболы направляем навстречу действию распределенной нагрузки. Можно найти промежуточное значение момента при $z_1 = 1,5 \text{ м}$, тогда

$$M_1 = -1 \cdot 1,5 \cdot 1,5 / 2 = -1,125 \text{ кН·м.}$$

На втором участке

$$M_2 = -q \cdot 2 \cdot (z_2 - 1) + m, \quad 2 \leq z_2 \leq 4;$$

при $z_2 = 2$ м $M_2 = 2$ кН·м;

при $z_2 = 4$ м $M_2 = -2$ кН·м.

По данным значениям строим эпюру моментов (рис. 4.9, в).

Наибольшее значение момента в поперечном сечении балки по абсолютной величине равно 2 кН·м. Опасным может быть сечение в точке *B* или же сечение в точке *A*.

В ы в о д ы

Для эпюры поперечных сил:

1. На участках, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой, эпюра – наклонная прямая; наклон этой прямой к оси балки зависит от интенсивности нагрузки.

2. На участках, свободных от распределенной нагрузки, эпюра – прямая, параллельная оси балки.

3. В сечениях балки, где приложены сосредоточенные силы, на эпюре поперечных сил имеются скачки, равные величинам приложенных сил.

4. В сечениях, где приложены сосредоточенные пары сил, значение поперечной силы не изменяется.

Для эпюры изгибающих моментов:

1. На участках, несущих равномерно распределенную нагрузку, эпюра моментов – квадратичная парабола. Выпуклость параболы направлена навстречу нагрузке.

2. На участках, свободных от равномерно распределенной нагрузки, эпюра моментов – прямая линия.

Под сосредоточенными силами на эпюре получаются изломы, т. е. для нескольких смежных участков эпюра изгибающих моментов – ломаная линия.

3. В сечении балки, где приложена сосредоточенная пара сил, на эпюре изгибающих моментов имеется скачок, равный величине момента приложенной пары сил.

4. На участках, где поперечная сила равна нулю, балка испытывает чистый изгиб и эпюра изгибающих моментов – прямая, параллельная оси балки.

5. Изгибающий момент получает максимальное значение в одном из сечений балки, где изменяется знак поперечной силы.

4.3.2. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов по характерным точкам

На основании существующей зависимости M и Q между собой и внешней нагрузкой можно обходиться без составления уравнений изгибающих моментов и поперечных сил для каждого участка балки. Достаточно вычислить ординаты эпюр для характерных сечений и соединить их линиями. Характерными являются сечения балки, где приложены сосредоточенные силы и моменты (включая опорные сечения), а также сечения, ограничивающие участки с равномерно распределенной нагрузкой. Для определения максимальных значений изгибающих моментов дополнительно вычисляют моменты в сечениях, где поперечные силы равны нулю.

Последовательность действий при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов по характерным точкам

1. Определить опорные реакции. Произвести проверку.
2. Разделить балку на участки.
3. Определить характер эпюры поперечных сил на каждом участке.
4. Вычислить поперечные силы в характерных сечениях и построить эпюру.
5. Определить характер эпюры изгибающих моментов на каждом участке.
6. Вычислить изгибающие моменты в характерных сечениях и построить эпюру.

Пример 4.7. Построить эпюры Q и M для консольной балки (рис. 4.10, а).

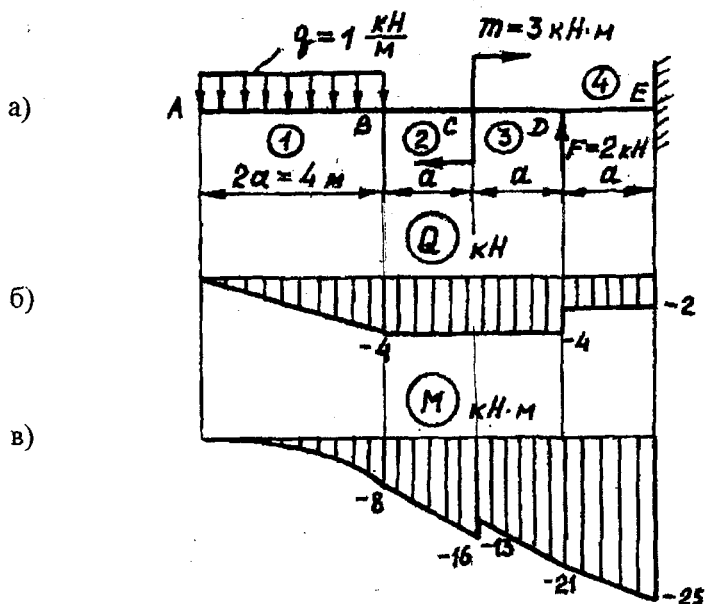


Рис. 4.10

Решение. Строим эпюры, начиная от свободного конца балки, что позволяет не определять опорные реакции в заделке. Характерными являются точки A, B, C, D, E .

1. Вычисляем значения поперечных сил в сечениях, соответствующих указанным точкам.

В сечении A $Q_A = 0$, так как здесь к балке не приложена сосредоточенная сила. На участке 1 Q меняется по линейному закону. Для построения этой части эпюры надо знать два значения Q , одно из них известно. Определяем Q в сечении B как сумму сил, приложенных к балке слева от этого сечения:

$$Q_B = -q \cdot 2a = -1 \cdot 4 = -4 \text{ кН.}$$

На участках 2 и 3 распределенная нагрузка отсутствует, следовательно, сохраняется то же значение поперечной силы:

$$Q_2 = Q_3 = Q_B.$$

Наличие сосредоточенной пары сил на эпюре Q не отражается. В сечении D на эпюре Q имеется скачок вверх на величину приложенной силы, и правее этого сечения

$$Q_4 = -q \cdot 2a + F = -1 \cdot 4 + 2 = -2 \text{ кН.}$$

Строим эпюру поперечных сил (рис. 4.10, б).

2. Определение изгибающих моментов.

На свободном конце балки $M_A = 0$, так как сосредоточенной пары сил в сечении A нет. На участке 1 момент изменяется по квадратичному закону. Эпюра обращена выпуклостью навстречу нагрузке.

В сечении B

$$M_B = -q \cdot 2a \cdot a = -2q \cdot a^2 = -2 \cdot 1 \cdot 4 = -8 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

На участке 2 момент изменяется по линейному закону ($Q_2 = \text{const}$). Находим момент в сечении, бесконечно близко (слева) к точке C :

$$M_C^{\text{лев}} = -q \cdot 2a \cdot 2a = -4q \cdot a^2 = -4 \cdot 1 \cdot 4 = -16 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

В сечении C на эпюре M скачок вверх соответствует величине момента приложенной пары. Бесконечно близко справа от сечения C изгибающий момент равен алгебраической сумме момента от распределенной нагрузки и момента m пары сил:

$$M_C^{\text{прав}} = -q \cdot 2a \cdot 2a + m = -1 \cdot 4 \cdot 4 + 3 = -13 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

На участке 3 момент изменяется по линейному закону. В сечении D имеем

$$M_D = -q \cdot 2a \cdot 3a + m = -1 \cdot 4 \cdot 6 + 3 = -21 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

На участке 4 момент в сечении E определяется выражением

$$M_E = -q \cdot 2a \cdot 4a + m + F \cdot a = -1 \cdot 4 \cdot 8 + 3 + 2 \cdot 2 = -25 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Под сосредоточенной силой на эпюре моментов должен быть излом. По найденным значениям строим эпюру M (рис. 4.10, в).

Пример 4.8. Построить эпюры Q и M для двухопорной балки (рис. 4.11, а).

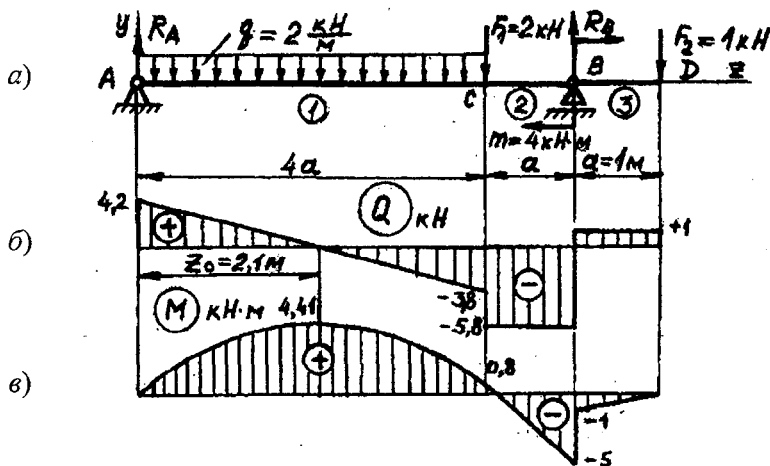


Рис. 4.11

Решение.

1. Определение опорных реакций.

$$\sum M_A = 0; \quad -q \cdot 4a \cdot 2a - F_1 \cdot 4a - m - F_2 \cdot 6a + R_B \cdot 5a = 0;$$

$$-2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 1 - 4 - 1 \cdot 6 \cdot 1 + R_B \cdot 5 = 0;$$

$$R_B = 6,8 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 5a + q \cdot 4a \cdot 3a + F_1 \cdot a - m - F_2 \cdot a = 0;$$

$$-R_A \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 2 - 4 - 1 = 0;$$

$$R_A = 4,2 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0; \quad 6,8 + 4,2 - 2 \cdot 4 - 2 - 1 = 0; \quad 0 = 0.$$

2. Строим эпюру поперечных сил.

На участке 1 Q изменяется по линейному закону. Для построения эпюры на этом участке надо найти еще одно значение Q в сечении, взятом бесконечно близко слева от точки С:

$$Q_C^{\text{лев}} = 4,2 - q \cdot 4a = 4,2 - 2 \cdot 4 = -3,8 \text{ кН.}$$

В этом месте на эпюре Q получается скачок на величину $F_1 = 2 \text{ кН}$, и далее правее этого сечения Q сохраняет постоянное значение до опоры B :

$$Q_C^{\text{прав}} = Q_2 = -3,8 - 2 = -5,8 \text{ кН.}$$

В сечении B имеется скачок вверх на величину $R_B = 6,8 \text{ кН}$, и на участке 3 поперечная сила остается постоянной:

$$Q_3 = -5,8 + 6,8 = 1 \text{ кН.}$$

По полученным данным строим эпюру Q (рис. 4.11, б).

3. Строим эпюру изгибающих моментов.

В сечении A $M_A = 0$.

На участке 1 изгибающий момент изменяется по квадратичному закону. В сечении, где эпюра Q проходит через ноль, эпюра M (парабола) имеет максимум. Найдем абсциссу z_0 сечения, в которой $Q = 0$.

$$Q_1 = 4,2 - q \cdot z_0 = 0; \quad z_0 = 4,2 / 2 = 2,1 \text{ м;}$$

$$M_{\text{max}} = R_A \cdot z_0 - q \cdot z_0 \cdot z_0 / 2 = 4,2 \cdot 2,1 - 2 \cdot 2,1^2 / 2 = 4,41 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Определим изгибающий момент в сечении C :

$$M_C = R_A \cdot 4a - q \cdot 4a \cdot 2a = 4,2 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0,8 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

По трем найденным значениям M на участке 1 приближенно строим параболу.

Оставшуюся часть эпюры удобнее строить начиная с правого конца балки, $M_D = 0$.

На участке 3 изгибающий момент изменяется по линейному закону. В сечении, расположенном справа от опоры B :

$$M_B^{\text{прав}} = -F \cdot a = -1 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

В сечении B на эпюре M получается скачок на величину $m = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$, причем если эпюра строится начиная справа, скачок получается вниз, так как момент изгибает правую оставшуюся часть балки выпуклостью вверх. В сечении, бесконечно близком к B и лежащем слева от него:

$$M_B^{\text{лев}} = -1 - 4 = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Соединяем прямой точки эпоры на границах участка 2 (рис. 4.11, в). Параболический и прямолинейный участки эпоры M на границе участков 1 и 2 не имеют плавного сопряжения.

Задачи для самостоятельного решения

Построить эпоры Q и M для следующих балок (рис. 4.12).

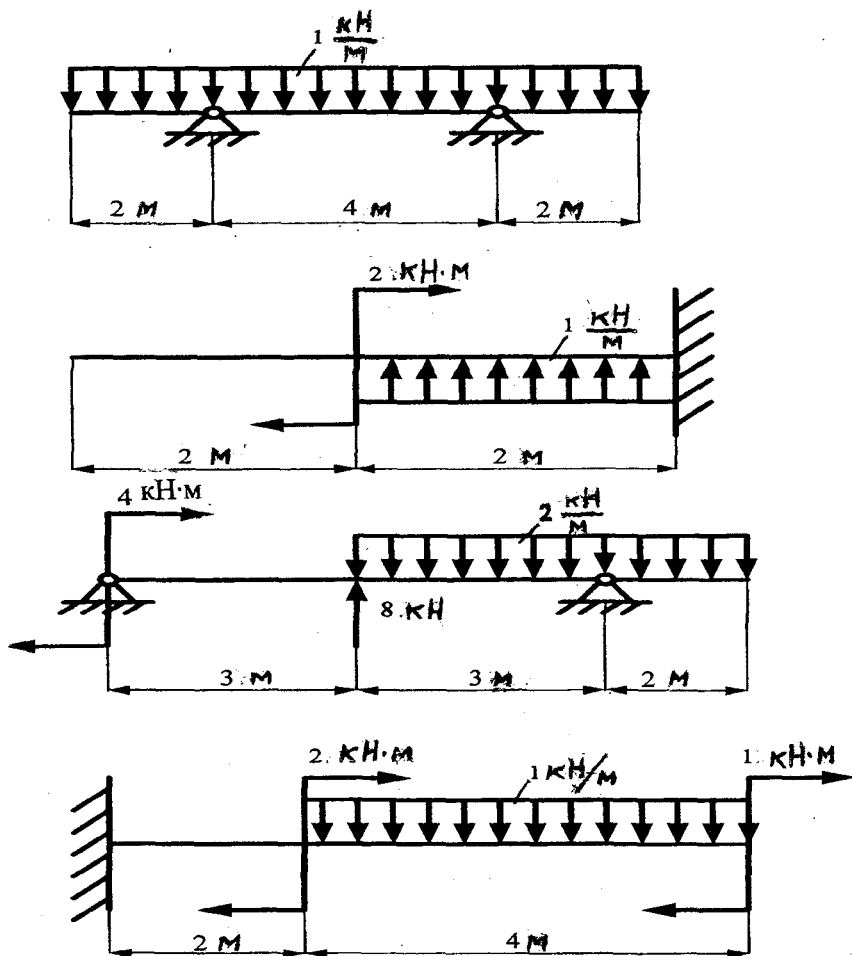


Рис. 4.12

4.4. Нормальные напряжения при изгибе. Расчет балок на прочность

Для оценки прочности балок в подавляющем большинстве случаев решающую роль играют нормальные напряжения σ , которые в произвольной точке поперечного сечения могут быть определены по формуле

$$\sigma = \frac{M}{I_x} \cdot y,$$

где M – изгибающий момент в рассматриваемом сечении;

I_x – момент инерции сечения относительно нейтральной оси;

y – расстояние от нейтральной оси до точки, в которой определяется напряжение.

Наибольшие нормальные напряжения возникают в точках, максимально удаленных от нейтральной оси:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_x} \cdot y_{\max} = \frac{M}{\frac{I_x}{y_{\max}}} = \frac{M}{W_x},$$

где $W_{\max} = \frac{I_x}{y_{\max}}$ – осевой момент сопротивления или момент сопротивления изгибу.

При изгибе так же, как и при других видах деформации, встречаются три вида задач расчета на прочность:

1. Проверочный расчет

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

2. Подбор сечения балки

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

Момент сопротивления W_x зависит от формы и размеров сечения балки; задаваясь формой сечения (прямоугольник, круг, двутавр и т.п.), можно найти требуемые размеры сечения.

3. Определение наибольшего допустимого изгибающего момента

$$[M_{\max}] = [\sigma] \cdot W_x.$$

Если поперечное сечение балки несимметрично относительно нейтральной оси, а балка изготовлена из материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, расчет на прочность надо вести по наиболее удаленным волокнам независимо от того, возникают в них растягивающие или сжимающие напряжения.

Когда материал балки различно сопротивляется растяжению и сжатию, вместо одного уравнения условия прочности надо составить два. Одно – для растянутых волокон:

$$\sigma_p = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma_p],$$

а другое – для сжатых:

$$|\sigma_c| = \left| \frac{M_{\max}}{W_x} \right| \leq [\sigma_c].$$

Касательные напряжения при изгибе определяются по формуле

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S'_x}{I_x \cdot b},$$

где Q_y – поперечная сила в рассматриваемом поперечном сечении балки;

S'_x – статический момент относительно нейтральной оси части площади поперечного сечения, лежащей выше (или ниже) уровня y , на котором определяется напряжение;

b – ширина поперечного сечения на расстоянии y от нейтральной оси.

Максимальное касательное напряжение в прямоугольном сечении

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{A}$$

Максимальное напряжение в круглом сечении

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{\max}}{A}$$

Проверка прочности балки по касательным напряжениям производится по условию

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_0}{I_x \cdot b_0} \leq [\tau],$$

где S_0 – статический момент части сечения, лежащей выше нейтральной оси;

b_0 – ширина сечения на нейтральной оси;

$[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение.

Пример 4.9. Проверить прочность балки по нормальным напряжениям, если $[\sigma] = 160$ МПа (рис. 4.13).

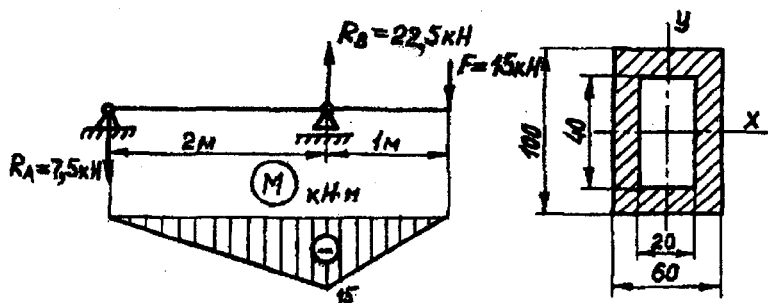


Рис. 4.13

Для заданной балки строим эпюру изгибающих моментов. Опасное сечение проходит через правую опору.

Вычислим момент инерции и момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси:

$$I_x = \frac{60 \cdot 100^3}{12} - \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 49 \cdot 10^5 \text{ мм}^4;$$

$$W_x = \frac{I_x}{\frac{h}{2}} = \frac{49 \cdot 10^5}{50} = 98 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Нельзя вычислять момент сопротивления как разность моментов сопротивления наружного и внутреннего прямоугольников.

Наибольшие нормальные напряжения в опасном сечении

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{15 \cdot 10^6}{98 \cdot 10^3} = 153 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Пример 4.10. Вычислить коэффициент запаса прочности для опасной точки балки, если предел текучести ее материала $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ (рис. 4.14).

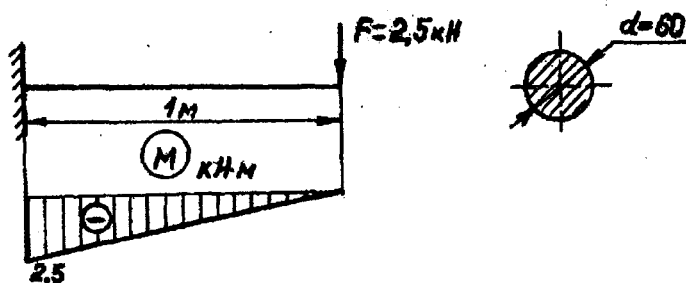


Рис. 4.14

Решение. Для пластичного материала коэффициент запаса прочности определяется как отношение предела текучести к максимальному напряжению, т.е.

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}}$$

Наибольшие нормальные напряжения в сечении заделки

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{2,5 \cdot 10^6}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{2,5 \cdot 10^6}{\frac{3,14 \cdot 60^3}{32}} = 121 \text{ МПа.}$$

$$n_T = \frac{240}{121} = 1,9.$$

Пример 4.11. 1. Подобрать сечение стальной балки в трех вариантах (рис. 4.15):

а) прокатный двутавр;

б) прямоугольник с отношением сторон $\frac{h}{b} = \frac{4}{3}$;

в) круг.

2. Определить отношения весов балок прямоугольного и круглого сечения к весу балки двутаврового сечения, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

3. Проверить подобранные в трех вариантах сечения балки по касательным напряжениям, $[\tau] = 96 \text{ МПа}$.

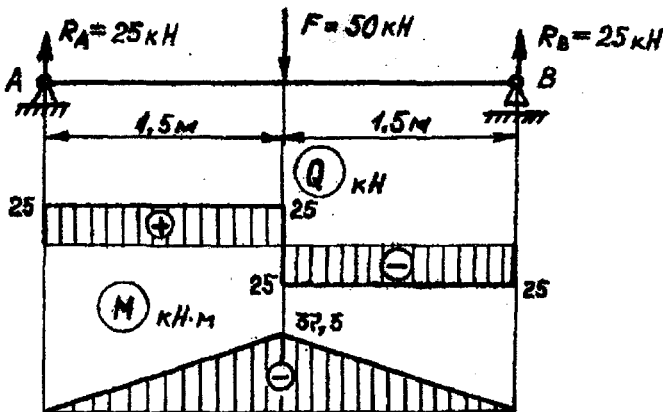


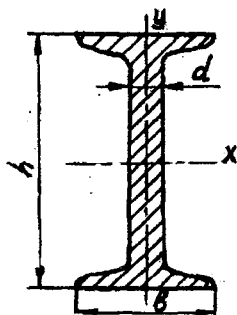
Рис. 4.15

Решение. Находим опорные реакции и строим эпюры Q и M .
Момент сопротивления

$$W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{37,5 \cdot 10^6}{160} = 234 \cdot 10^3 \text{ мм}^3 = 234 \text{ см}^3.$$

а) Прокатный двутавр.

Номер двутаврового сечения, имеющего момент, близкий к требуемому, определяем по таблице сортамента (ГОСТ 8239-89). Принимаем двутавр 20а, имеющий $W_x = 232 \text{ см}^3$ и $A_1 = 35,5 \text{ см}^2$.



$$\begin{aligned} I_x &= 2550 \text{ см}^4; \\ S_x &= 131 \text{ см}^3; \\ d &= 5,4 \text{ мм}; \\ b &= 110 \text{ мм}. \end{aligned}$$

б) Прямоугольное сечение:

$$\frac{h}{b} = \frac{4}{3}; \quad b = \frac{3}{4}h; \quad W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{3h \cdot h^2}{4 \cdot 6} = \frac{h^3}{8} = 234 \text{ см}^3;$$

$$h = \sqrt[3]{8 \cdot 234} = 12,3 \text{ см}; \quad b = \frac{3}{4} \cdot 12,3 = 9,2 \text{ см};$$

$$A_2 = 12,3 \cdot 9,2 = 113 \text{ см}^2.$$

в) Круг:

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = 234; \quad d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 234}{3,14}} = 13,4 \text{ см};$$

$$A_3 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 13,4^2}{4} = 141 \text{ см}^2.$$

Отношение весов (равно отношению площадей)

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{113}{35,5} = 3,18; \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{141}{35,5} = 3,97.$$

Следовательно, балка прямоугольного сечения тяжелее двутаврового в 3,18 раза, круглого – тяжелее двутаврового сечения в 3,97 раза.

Проверим касательные напряжения, $Q_{\max} = 25 \cdot 10^3$ Н.

а) Двутавровое сечение:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{I_x \cdot b} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 131 \cdot 10^3}{2550 \cdot 10^4 \cdot 5,4} = 23,8 \text{ МПа} < [\tau];$$

b – ширина сечения двутавра, где касательные напряжения имеют максимальное значение, т.е. на нейтральной оси, а это размер $d = 5,4$ мм.

б) Прямоугольное сечение:

$h = 123$ мм; $b = 92$ мм.

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{A_2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{25 \cdot 10^3}{123 \cdot 92} = 3,31 \text{ МПа}.$$

в) Круглое сечение:

$d = 13,4$ см = 134 мм.

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{\max}}{A_3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{25 \cdot 10^3}{\frac{3,14 \cdot 134^2}{4}} = 2,35 \text{ МПа}.$$

Пример 4.12. Для заданной деревянной балки (рис. 4.16):

1. Построить эпюры Q и M .
2. Проверить прочность балки по нормальным и касательным напряжениям, $[\sigma] = 11$ МПа, $[\tau] = 1,2$ МПа.
3. Определить нормальное и касательное напряжение для точки K сечения.

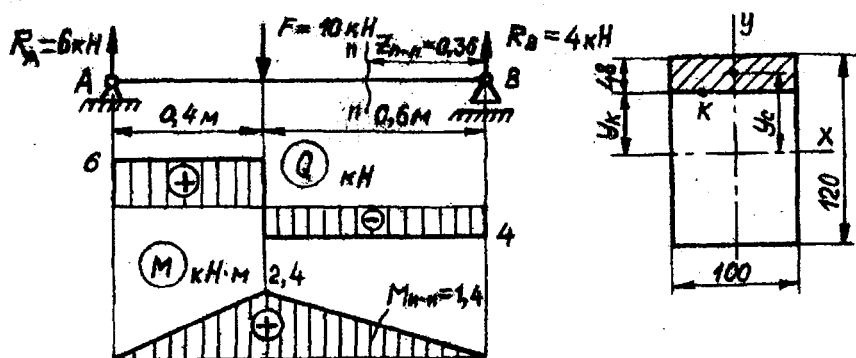


Рис. 4.16

Решение. Максимальный изгибающий момент

$$M_{\max} = 2,4 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Момент сопротивления

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{100 \cdot 200^2}{6} = 240 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Максимальное нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{2,4 \cdot 10^5}{240 \cdot 10^3} = 10 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6 \cdot 10^3}{100 \cdot 120} = 0,75 \text{ МПа} < [\tau].$$

Определяем нормальное напряжение в точке K сечения $n-n$, проведенного на расстоянии 0,36 м от правой опоры:

$$\sigma_K^{n-n} = \frac{M_x^{n-n}}{I_x} \cdot y_K;$$

$$M_x^{n-n} = 4 \cdot 0,36 = 1,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Расстояние от нейтральной оси до точки K

$$y_K = \frac{120}{2} - 48 = 12 \text{ мм}.$$

Момент инерции сечения и нормальное напряжение в точке K

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{100 \cdot 120^3}{12} = 1440 \cdot 10^4 \text{ мм}^4;$$

$$\sigma_K^{n-n} = \frac{1,4 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 12}{1440 \cdot 10^4} = 12 \text{ МПа}.$$

Касательные напряжения в точке K

$$\tau_K^{n-n} = \frac{Q_y^{n-n} \cdot S'_x}{b \cdot I_x},$$

$$Q_y^{n-n} = 4 \text{ кН}; \quad S'_x = A \cdot y_c = 100 \cdot 48 \cdot 36 = 172,8 \cdot 10^3 \text{ мм}^3;$$

$$b = 100 \text{ мм}.$$

$$\tau_K^{n-n} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 172,8 \cdot 10^3}{100 \cdot 1440 \cdot 10^4} = 0,48 \text{ МПа}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Двутавровая балка изготовлена из стали Ст 3, имеющей предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа. Проверить прочность балки, если заданный коэффициент запаса прочности $[n_T] = 1,5$ (рис. 4.17).

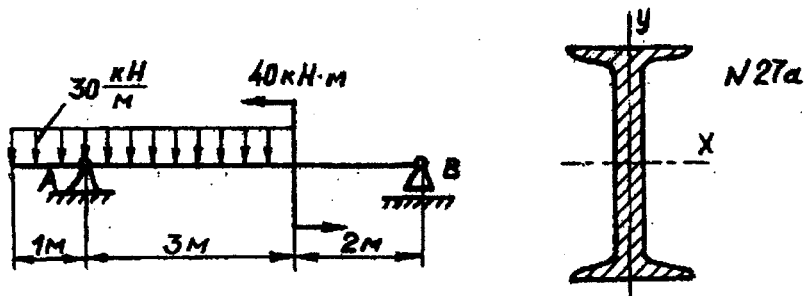


Рис. 4.17

2. Определить требуемые размеры поперечного сечения балки в двух вариантах, $[\sigma] = 160$ МПа (рис. 4.18).

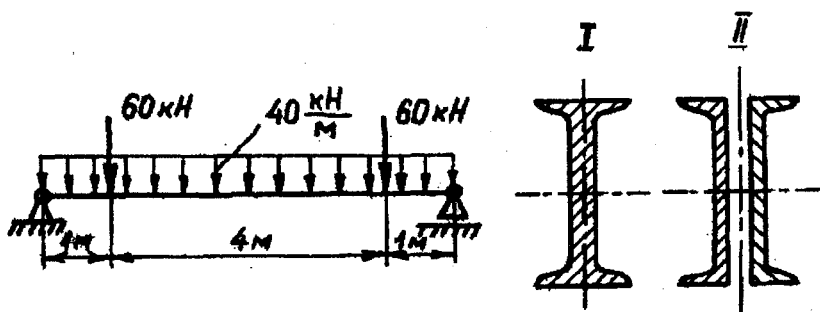


Рис. 4.18

5. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Сложное сопротивление создается при сочетании нескольких простых видов деформации: растяжения или сжатия, сдвига, кручения, изгиба. Задачи сложного сопротивления при достаточно жестком стержне решаются в соответствии с принципом независимости действия сил.

Изгиб с кручением

Изгиб с кручением представляет собой частный случай сложного сопротивления, когда внешние силы, действующие на стержень, вызывают в его поперечных сечениях крутящий момент $M_k = T_z$ относительно геометрической оси стержня z ; изгибающие моменты M_y и M_x относительно главных центральных осей инерции сечения y и x и поперечные силы Q_y и Q_x , направленные по этим осям (рис. 5.1).

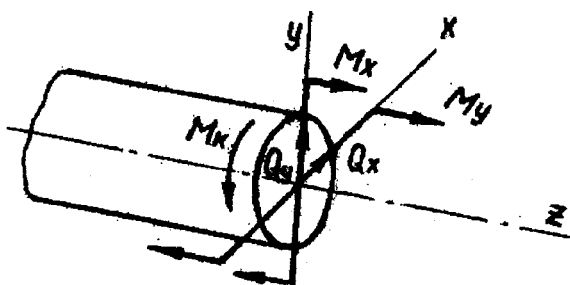


Рис. 5.1

Сочетание деформаций изгиба и кручения испытывает большинство валов.

При расчете валов будем учитывать только крутящий и изгибающий моменты, действующие в опасном поперечном сечении. Поперечные силы принимать во внимание не будем, так как соответствующие им касательные напряжения, как показывают расчеты, относительно невелики.

Максимальные нормальные и касательные напряжения у круглых валов вычисляют по формулам:

$$\sigma = \frac{M_{\text{н}}}{W}, \quad \tau = \frac{T_{\text{к}}}{W_p},$$

причем для круглых валов $W_p = 2W$.

При сочетании изгиба и кручения опасными будут точки поперечного сечения вала, наиболее удаленные от нейтральной оси.

Применив третью теорию прочности, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{к}}}{W_p}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{к}}}{2W}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + M_{\text{к}}^2}}{W}. \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в числителе, назовем эквивалентным моментом:

$$M_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M^2 + M_{\text{к}}^2},$$

тогда расчетная формула для круглых валов принимает вид

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W} \leq [\sigma].$$

По энергетической теории прочности, где $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$, получим

$$M_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M^2 + 0,75M_{\text{к}}^2}.$$

Пример 5.1. На вал посажены зубчатые колеса (рис. 5.2). Передаваемая мощность $P = 4$ кВт и угловая скорость $\omega = 50$ с⁻¹. Определить диаметр вала по эквивалентному моменту $M_{\text{ЭКВ}}$, приняв $[\sigma] = 60$ МПа. Силы в зацеплении вычислить по уравнениям:

$$F_{r_1} = F_{t_1} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}; \quad F_{\alpha_1} = F_{t_1} \cdot \operatorname{tg} \beta;$$

$$F_{r_2} = F_{t_2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}; \quad F_{\alpha_2} = F_{t_2} \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Принять $\alpha = 20^\circ$; $\beta = 8 \dots 15^\circ$.

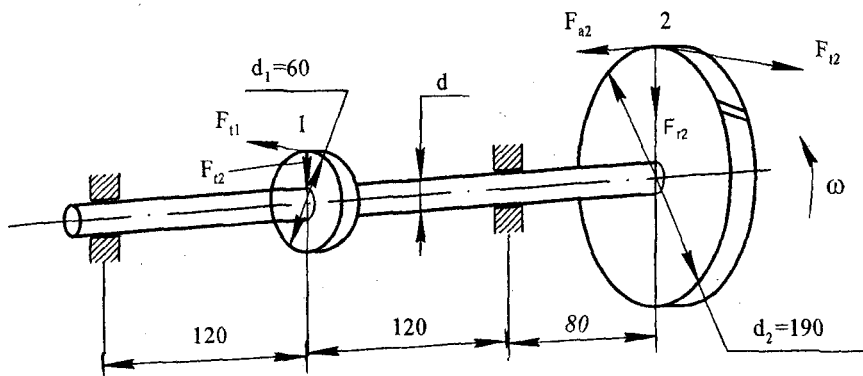


Рис. 5.2

Решение. 1. По данной мощности и угловой скорости определяем крутящий момент на валу:

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{4 \cdot 10^3}{50} = 80 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Вычисляем силы в зацеплении зубчатых колес.

1-е колесо.

Окружная сила

$$F_{t_1} = \frac{2T}{d_1} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 10^3}{60} = 2666 \text{ Н}.$$

Радиальная сила

$$F_{r_1} = F_{t_1} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} = 2666 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ = 970 \text{ Н.}$$

Первое колесо прямозубое; так как осевая сила отсутствует, значит, $\beta = 0$ и $\cos \beta = 1$.

2-е колесо.

Окружная сила

$$F_{t_2} = \frac{2T}{d_2} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 10^3}{190} = 842 \text{ Н.}$$

Радиальная сила

$$F_{r_2} = F_{t_2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} = 842 \cdot \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\cos 10^\circ} = 311 \text{ Н.}$$

Примем $\beta = 10^\circ$.

Осевая сила

$$F_{d_2} = F_{t_2} \operatorname{tg} \beta = 842 \cdot \operatorname{tg} 10^\circ = 148 \text{ Н.}$$

2. От реальной конструкции переходим к расчетной схеме, избрав данный вал в виде двухопорной балки, опоры – подшипники (рис. 5.3, а). Рассмотрим действие сил в горизонтальной и вертикальной плоскости.

Горизонтальная плоскость. Действуют окружные силы F_{t_1} и F_{t_2} . При переносе данных сил к балке будем иметь кручение на длине CD и изгиб по всей длине балки (рис. 5.3, б).

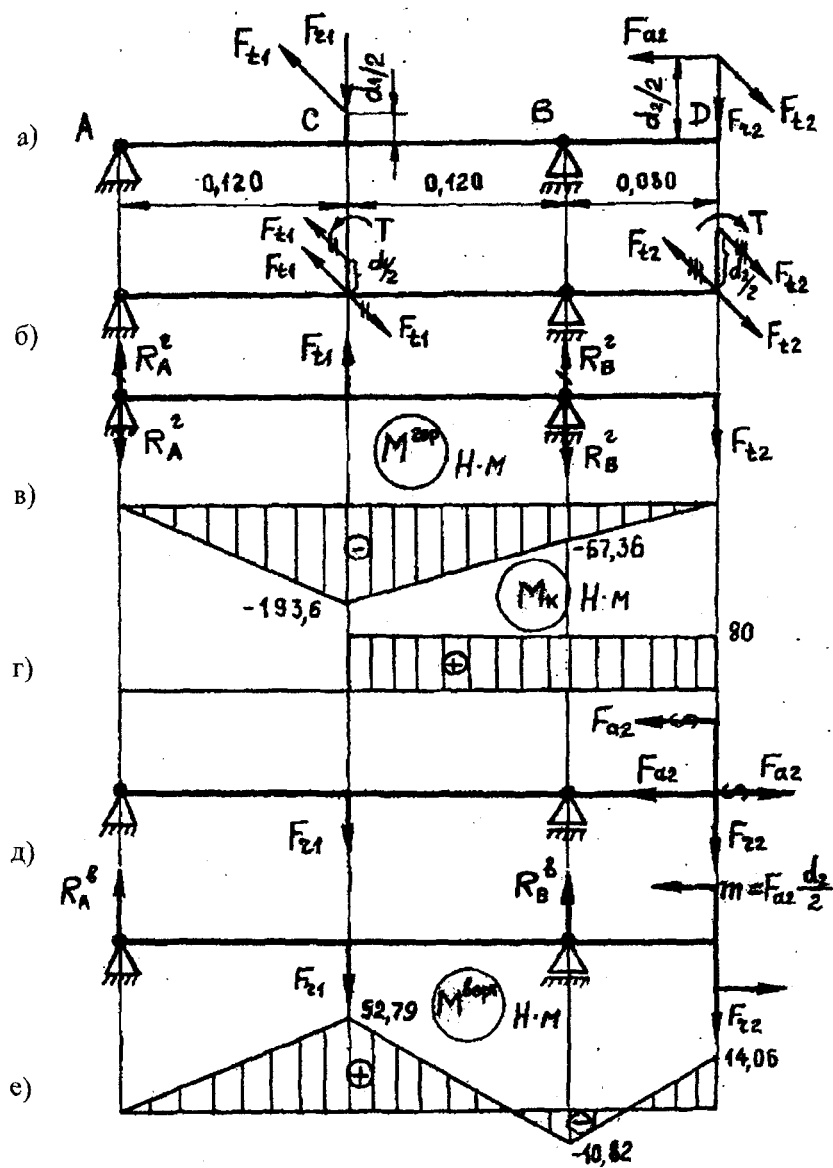


Рис 5.3

Реакции опор в горизонтальной плоскости:

$$\sum M_A = 0;$$

$$F_{t_1} \cdot 0,120 + R_B^r \cdot 0,240 - F_{t_2} \cdot 0,320 = 0;$$

$$R_B^r = \frac{842 \cdot 0,320 - 2666 \cdot 0,120}{0,240} = -210,4 \text{ Н.}$$

Реакция направлена вниз (знак минус).

$$\sum M_B = 0;$$

$$-R_A^r \cdot 0,24 - F_{t_1} \cdot 0,120 - F_{t_2} \cdot 0,080 = 0;$$

$$R_A^r = \frac{-2666 \cdot 0,120 - 842 \cdot 0,080}{0,240} = -1613,6 \text{ Н.}$$

Реакция направлена в противоположную сторону (знак минус).

Проверка: $\sum Y = 0; \quad R_A^r + F_{t_1} - R_B^r - F_{t_2} = 0;$

$$-1613,6 + 2666 - 210,4 - 842 = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 5.3, в).

$$M_A = 0; \quad M_C = -R_A^r \cdot 0,120 = -1613,6 \cdot 0,120 = -193,6 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

$$M_D = 0; \quad M_B = -F_{t_2} \cdot 0,080 = -842 \cdot 0,080 = -67,36 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Строим эпюру крутящих моментов (рис. 5.3, з).

Вертикальная плоскость. Действуют радиальные силы F_{r_1} и F_{r_2} и осевая сила F_{a_2} на втором колесе (ввиду того, что колесо косозубое) (рис. 5.3, д). При переносе осевой силы F_{a_2} к валу будем иметь изгибающий момент

$$m = F_{a_2} \cdot \frac{d_2}{2} = 148 \cdot \frac{0,190}{2} = 14,06 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Силой F_{a_2} , сжимающей вал, в данном расчете пренебрегаем.

Реакции опор в вертикальной плоскости:

$$\sum M_A = 0; \quad -F_{r_1} \cdot 0,120 + R_B^B \cdot 0,240 - F_{r_2} \cdot 0,320 + m = 0;$$

$$R_B^B = \frac{970 \cdot 0,120 + 311 \cdot 0,320 - 14,066}{0,240} = 841,083 \text{ Н}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A^B \cdot 0,240 + F_{r_1} \cdot 0,120 + m - F_{r_2} \cdot 0,080 = 0;$$

$$R_A^B = \frac{970 \cdot 0,120 + 14,06 - 311 \cdot 0,080}{0,240} = 439,917 \text{ Н}.$$

Проверка: $\sum Y = 0; \quad R_A^B + F_{r_1} - R_B^B - F_{r_2} = 0;$

$$439,917 - 970 + 841,083 - 311 = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов в вертикальной плоскости (рис. 5.3, е):

$$M_A = 0; \quad M_C = R_A^B \cdot 0,120 = 439,917 \cdot 0,120 = 52,79 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_D = m = 14,06 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_B = m - F_{r2} \cdot 0,080 = 14,06 - 311 \cdot 0,08 = -10,82 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Диаметр вала определяем в опасном сечении, т.е. там, где значения моментов максимальные.

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{M^2 + M_k^2}.$$

Сечение C-C:

$$M = \sqrt{(M^{\text{гор}})^2 + (M^{\text{вер}})^2} = \sqrt{193,6^2 + 52,79^2} = 200,66 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{200,66^2 + 80^2} = 216 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Диаметр вала определяем из условия прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W} \leq [\sigma],$$

где $W = \frac{\pi d^3}{32}$.

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 216 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 60}} = 33,2 \text{ мм}.$$

Принимаем диаметр вала $d = 34 \text{ мм}$ (ГОСТ 6636-69).

Пример 5.2. Вал редуктора изготовлен из стали 35 ($\sigma_T = 310 \text{ МПа}$). Мощность на валу $P = 28 \text{ кВт}$, $n = 630 \text{ об/мин}$. Допускаемый коэффициент запаса прочности вала $[n] = 4$. Проверить прочность вала в сечении под серединой колеса, не учитывая влияния шпоночной канавки ($F_M = 50\sqrt{T}$) (рис. 5.4).

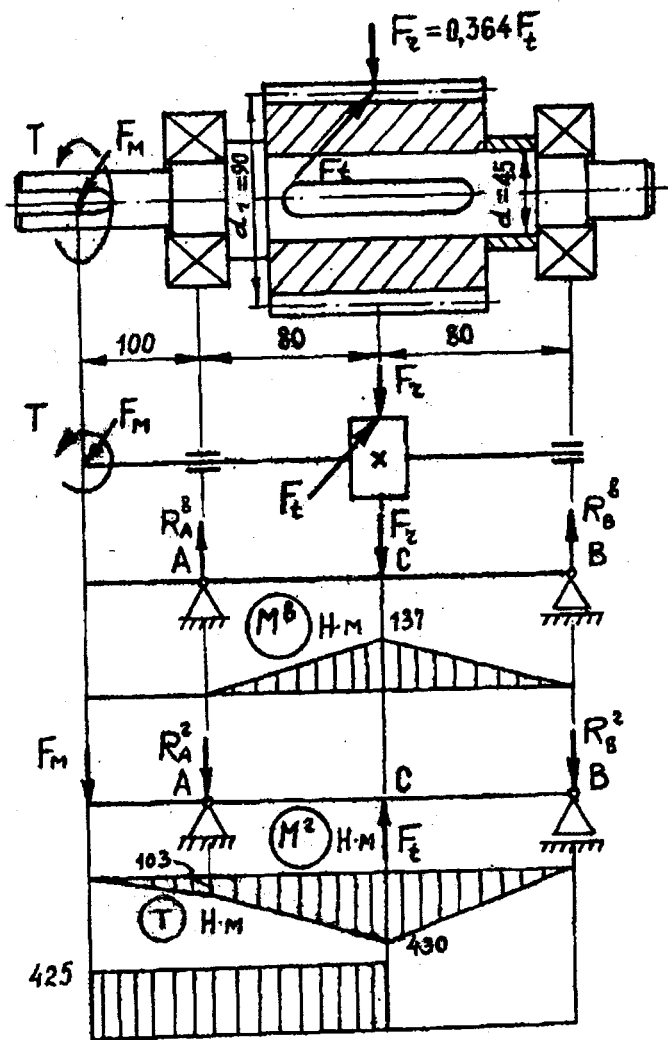


Рис. 5.4

Решение.

1. Крутящий момент на валу

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{28 \cdot 10^3}{66} = 425 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

где $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 630}{30} = 66 \text{ с}^{-1}$.

2. Усилия в зацеплении:

окружное

$$F_t = \frac{2 \cdot T}{d_1} = \frac{2 \cdot 425 \cdot 10^3}{90} = 9470 \text{ Н} = 9,47 \text{ кН};$$

радиальное

$$F_r = 0,364 F_t = 0,364 \cdot 9,47 = 3,44 \text{ кН};$$

усилие от муфты

$$F_M = 50\sqrt{T} = 50\sqrt{425} = 1030 \text{ Н} = 1,03 \text{ кН}.$$

3. Составляем расчетную схему вала.

Окружное усилие и усилие от муфты действуют в горизонтальной плоскости.

Опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \quad F_M \cdot 0,100 + F_t \cdot 0,08 - R_B^r \cdot 0,160 = 0;$$

$$R_B^r = \frac{1,03 \cdot 0,1 - 9,47 \cdot 0,08}{0,160} = -5,378 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad F_M \cdot 0,260 - F_t \cdot 0,08 - R_A^r \cdot 0,160 = 0;$$

$$R_A^r = \frac{1,03 \cdot 0,260 - 9,47 \cdot 0,08}{0,160} = -3,062 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum Y = 0; \quad -F_M - R_A^r + F_t - R_B^r = 0;$

$$-1,03 - 3,062 + 9,477 - 5,378 = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов в горизонтальной плоскости.

$$M_A = -F_M \cdot 0,100 = -1,03 \cdot 0,100 = -0,103 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = -R_B^r \cdot 0,08 = -5,378 \cdot 0,08 = 0,430 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В вертикальной плоскости действует радиальное усилие. Опорные реакции

$$R_A^B = R_B^B = \frac{F_r}{2} = \frac{3,44}{2} = 1,72 \text{ кН}.$$

Строим эпюру изгибающих моментов.

$$M_C = R_A^B \cdot 0,08 = 1,72 \cdot 0,08 = 0,137 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4. Эквивалентный момент в сечении под колесом

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{(M_C^B)^2 + (M_C^r)^2 + T^2} = \sqrt{0,430^2 + 0,137^2 + 0,425^2} = 0,620 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5. Эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W} = \frac{M_{\text{экв}}}{0,1d^3} = \frac{0,620 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 45^3} = 68 \text{ МПа}.$$

6. Коэффициент запаса

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{экв}}} = \frac{310}{68} = 4,55 > [n].$$

Задача. Вал зубчатого редуктора передает мощность $P = 14$ кВт при угловой скорости $\omega = 32 \text{ с}^{-1}$. Принимая $[\sigma] = 45 \text{ МПа}$, опре-

делить требуемые диаметры d_{B1} и d_{B2} вала под серединами зубчатых колес (рис. 5.5).

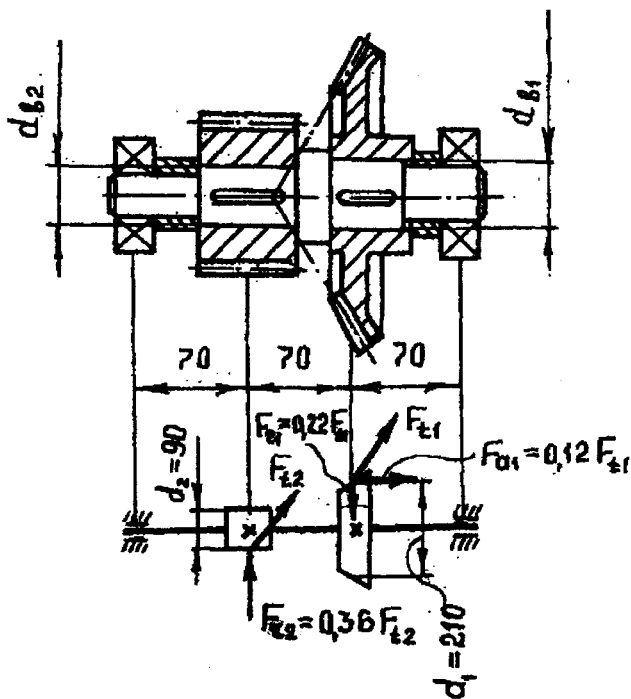


Рис. 5.5

6. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Если стержень сжимать все возрастающими силами, действующими по его оси, то при некотором значении силы прямолинейная форма равновесия стержня может оказаться неустойчивой, стержень начинает искривляться и возникает новая форма устойчивого равновесия – криволинейная. Естественно, что работоспособность детали при этом будет нарушена. Наибольшее значение центральной сжимающей осевой силы, до достижения которого прямолинейная форма равновесия стержня устойчива, называется критическим. Следовательно, для обеспечения работоспособности элементов конструкции, находящихся под действием сжимающей нагрузки, необходимо, чтобы допускаемая нагрузка была меньше критической, т.е.

$$[F] = \frac{F_{\text{кр}}}{[n_y]},$$

где $F_{\text{кр}}$ – критическая сила;

$[n_y]$ – заданный коэффициент запаса устойчивости.

Для стальных стержней $[n_y] = 1,8 \dots 3,0$.

Для стержней из чугуна $[n_y] = 5 \dots 5,5$.

Критическое значение сжимающей силы при потере устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня определяется по формуле Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu l)^2},$$

где I_{min} – минимальный осевой момент инерции поперечного сечения стержня.

μ – коэффициент приведения длины;

l – длина стержня.

Критическое напряжение, возникающее в поперечном сечении при критической нагрузке:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 A}$$

Ввиду того, что радиус инерции сечения $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$, отношение $\frac{\mu l}{i_{\min}} = \lambda$ называется *гибкостью стержня* и характеризует его способность сопротивляться искривлению в зависимости от размеров и способа закрепления концов.

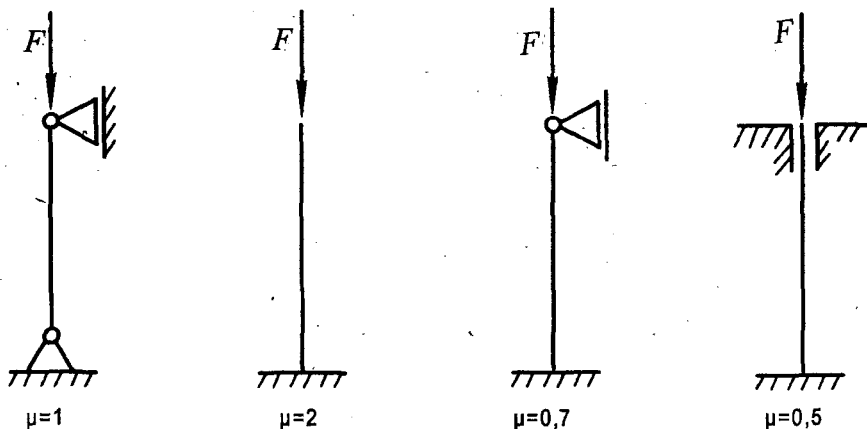


Рис. 6.1

Формула Эйлера основана на законе Гука и поэтому применима лишь при условии, что $\sigma_{кр} \leq \sigma_{\text{пц}}$.

Практически удобнее устанавливать применимость формулы Эйлера по выражению $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$, где $\lambda_{\text{пред}}$ — предельная гибкость, являющаяся постоянной величиной для заданного материала.

Ст 3	$\lambda_{\text{пред}} = 100;$
Сталь 45	$\lambda_{\text{пред}} = 85;$
Чугун	$\lambda_{\text{пред}} = 80.$

В случае неприменимости формулы Эйлера величину критического напряжения определяют по эмпирической формуле Ф.С. Ясинского:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda,$$

где a и b – коэффициенты, имеющие размерность напряжения и зависящие от материала.

Таблица 6.1

Значения коэффициентов a и b

Коэффициенты	a	b	$\lambda_{\text{пред}}$
Материал	МПа		
Сталь Ст 3	310	1,14	100
Сталь 20	328	1,15	96
Сталь 45	449	1,67	85
Дюралюминий Д16Т	406	1,83	53
Дерево (сосна)	29,3	0,194	110

В зависимости от постановки задачи (цели расчета) следует различать три вида расчетов на устойчивость:

1) проверочный расчет:

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} \geq [n_y],$$

где F – фактическое значение сжимающей силы.

2) определение допускаемой нагрузки:

$$[F] = \frac{F_{\text{кр}}}{[n_y]}.$$

Можно производить расчет, как на простое сжатие:

$$[F] = \varphi[\sigma_c]A,$$

где φ – коэффициент уменьшения допускаемого напряжения или коэффициент продольного изгиба. Величина φ определяется по табл. 6.2 в зависимости от материала и гибкости стержня;

$[\sigma_c]$ – допускаемое напряжение на сжатие;

A – площадь поперечного сечения.

3) проектный расчет – определение требуемых размеров поперечного сечения:

$$A \geq \frac{[F]}{\varphi[\sigma_c]}.$$

Таблица 6.2

Значение коэффициента φ

Гибкость	Сталь Ст 2, Ст 3, Ст 4	Сталь Ст 5	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,97	0,96	0,91	0,97
30	0,95	0,93	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,80	0,44	0,71
70	0,81	0,74	0,34	0,61
80	0,75	0,67	0,26	0,43
90	0,69	0,59	0,20	0,38
100	0,60	0,50	0,16	0,31
110	0,52	0,43	-	0,25
120	0,45	0,37	-	0,22
130	0,40	0,32	-	0,18
140	0,36	0,28	-	0,16
150	0,32	0,26	-	0,14
160	0,29	0,23	-	0,12
170	0,26	0,21	-	0,11
180	0,23	0,19	-	0,10
190	0,21	0,17	-	0,09
200	0,19	0,15	-	0,08

Пример 6.1. Для двутаврового поперечного сечения определить допускаемое значение сжимающей силы (рис. 6.2). Материал стойки – сталь Ст 3, $[n_y] = 2,0$. Выяснить, как изменится допускаемая нагрузка, если длину стойки уменьшить вдвое.

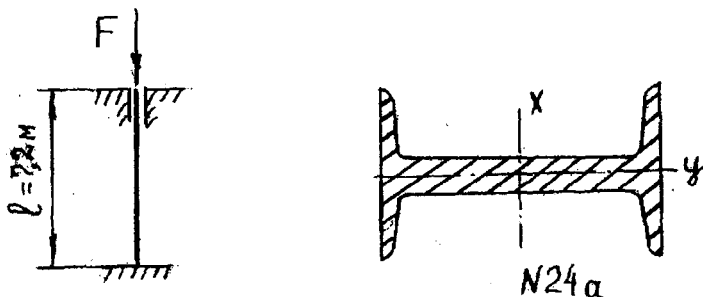


Рис. 6.2

Решение. Определим гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}; \quad \mu = 0,5; \quad i_{\min} = i_y = 2,63 \text{ см (ГОСТ 8329-72);}$$

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 7,2 \cdot 10^3}{26,3} = 137.$$

Для стали Ст 3 $\lambda_{\text{пред}} = 100$, следовательно $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$ и формула Эйлера применима.

Определим допускаемое значение сжимающей силы:

$$[F] = \frac{F_{\text{кр}}}{[n_y]} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{[n_y](\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 260 \cdot 10^4}{2(0,5 \cdot 7,2 \cdot 10^3)^2} =$$

$$= 198 \cdot 10^3 \text{ Н} = 198 \text{ кН},$$

где $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $I_{\min} = I_y = 260 \text{ см}^4$.

При уменьшении длины стойки вдвое критическая сила возрастет не в четыре раза, как можно было бы ожидать, исходя из формулы Эйлера, а меньше.

Гибкость укороченной стойки $\lambda_1 = 68,5$, т.е. меньше предельной, и формула Эйлера неприменима. Допускаемую нагрузку определяем, пользуясь эмпирической формулой для $\sigma_{кр}$:

$$[F]_1 = \frac{\sigma_{кр} A}{[n_y]} = \frac{(a - b\lambda_1) A}{[n_y]} = \frac{(310 - 1,14 \cdot 68,5) \cdot 37,5 \cdot 10^2}{2} =$$

$$= 453 \cdot 10^3 \text{ Н} = 453 \text{ кН.}$$

Таким образом, критическая сила возросла лишь в 2,29 раза. Использование формулы Эйлера в области ее неприменимости приводит к завышенному значению критической, а значит, и допускаемой нагрузки.

Пример 6.2. Найти критическую и допускаемую нагрузку для деревянной стойки круглого сечения высотой 6 м (рис. 6.3). Диаметр сечения 200 мм. Допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma_c] = 10 \text{ МПа}$, $E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

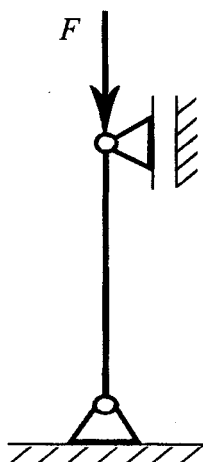


Рис. 6.3

Решение. Найдем минимальный радиус инерции:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4/64}{\pi d^2/4}} = \frac{d}{4} = \frac{200}{4} = 50 \text{ мм.}$$

Гибкость при $\mu = 1$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 10^3}{50} = 120 > \lambda_{\text{пред.}}$$

Критическую силу находим по формуле Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 3,14/64 \cdot 200^4}{6000^2} = 215 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Определим допускаемую силу:

$$[F] = [\sigma_c] \varphi A = 10 \cdot 0,22 \cdot \frac{3,14 \cdot 200^2}{4} = 69,1 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Для гибкости $\lambda = 120$ $\varphi = 0,22$ (см. табл. 6.2).

В рассматриваемом примере можно подсчитать также коэффициент запаса устойчивости:

$$[n_y] = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{215 \cdot 10^3}{69,1 \cdot 10^3} = 3,12.$$

Пример 6.3. Стойка квадратного сечения длиной $l = 1$ м с шарнирно закрепленными концами нагружена осевой силой $F = 40$ кН. Подобрать размеры сечения при осевом допускаемом напряжении на сжатие $[\sigma_c] = 160$ МПа (сталь Ст 3).

Решение. Для квадратного сечения со стороной a радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{12a^2}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = 0,29a.$$

Задаемся значением $\varphi = 0,5$, т.е. принимаем допускаемое напряжение при сжатии с учетом возможности продольного изгиба.

$$[\sigma_y] = 0,5[\sigma_c] = 0,5 \cdot 160 = 80 \text{ МПа.}$$

Необходимая площадь сечения

$$A \geq \frac{F}{[\sigma_y]} = \frac{40 \cdot 10^3}{80} = 5 \cdot 10^2 \text{ мм}^2.$$

Сторона сечения

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{5 \cdot 10^2} = 22,4 \text{ мм.}$$

Радиус инерции

$$i = 0,29 \cdot a = 0,29 \cdot 22,4 = 6,7 \text{ мм.}$$

При найденных размерах вычисляем гибкость:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 10^3}{6,7} = 150.$$

По табл. 6.2 для $\lambda = 150$ $\varphi = 0,32$.

Поэтому допускаемое напряжение

$$[\sigma_y] = [\sigma_c] \cdot \varphi = 0,32 \cdot 160 = 51,2 < 80 \text{ МПа.}$$

Следовательно, выбранное сечение мало, и его надо увеличить. Новое значение φ определяем как среднее арифметическое:

$$\varphi = \frac{0,5 + 0,32}{2} = 0,41,$$

тогда $[\sigma_y] = 0,41 \cdot 160 = 65,6$ МПа.

При новом допускаемом напряжении

$$A = \frac{40 \cdot 10^3}{65,6} = 6,1 \cdot 10^2 \text{ мм}^2;$$

$$a = \sqrt{6,1 \cdot 10^2} = 24,7 \text{ мм},$$

тогда $i = 0,29 \cdot a = 0,29 \cdot 24,7 = 7,2$ мм;

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 10^3}{7,2} = 139.$$

По табл.6.2 для $\lambda = 139$ $\varphi = 0,36$.

Следовательно, $[\sigma_y] = 0,36 \cdot 160 = 58 < 65,6$ МПа.

Размеры сечения опять недостаточны.

Опять возьмем полусумму значений φ :

$$\varphi = \frac{0,41 + 0,36}{2} = 0,387.$$

Тогда $[\sigma_y] = 0,387 \cdot 160 = 62$ МПа;

$$A = \frac{40 \cdot 10^3}{62} = 6,5 \cdot 10^2 \text{ мм}^2;$$

$$a = \sqrt{6,5 \cdot 10^2} = 25,5 \text{ мм}; \quad i = 0,29 \cdot 25,5 = 7,4 \text{ мм},$$

поэтому $\lambda = \frac{1 \cdot 10^3}{7,4} = 135.$

По табл. 6.2 находим $\varphi = 0,38.$

Тогда

$$[\sigma_y] = 0,38[\sigma_c] = 0,38 \cdot 160 = 60,8 \text{ МПа}.$$

Это допускаемое напряжение близко к рабочему напряжению, возникающему в поперечном сечении стержня:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{40 \cdot 10^3}{6,5 \cdot 10^2} = 61,5 \text{ МПа}.$$

Следовательно, необходимо принять $a = 25,5 \text{ мм}.$

Пример 6.4. Определить из расчета на устойчивость требуемый диаметр винта домкрата грузоподъемностью $F = 50 \text{ кН}.$ Максимальная высота подъема груза $l = 900 \text{ мм}, [n_y] = 4,0.$ Материал винта сталь Ст 4 (рис. 6.4).

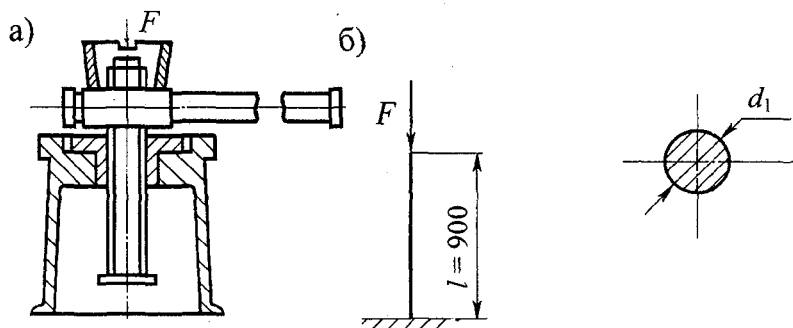


Рис. 6.4

Решение: Требуемый момент инерции поперечного сечения винта определяем, исходя из формулы Эйлера. Рассматриваем винт как стойку с нижним жестко зашпеленным и верхним свободным концом, т.е.

$$\mu = 2; \quad E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$

$$I_{\min} = I = \frac{F[n_y](\mu l)^2}{\pi^2 E} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 4(2 \cdot 900)^2}{3,14^2 \cdot 2,0 \cdot 10^5} = 32,8 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Определяем диаметр винта d_1 (расчет винтов принято вести по внутреннему диаметру резьбы).

$$I = \frac{\pi d^4}{64}, \quad d_1 = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot I}{\pi}} = \frac{64 \cdot 32,8 \cdot 10^4}{3,14} = 51 \text{ мм.}$$

Принимаем трапецеидальную резьбу с наружным диаметром $d = 60$ мм, имеющую $d_1 = 51$ мм и шаг $S = 8$ мм.

Расчет был выполнен на основе формулы Эйлера. Убедимся в допустимости ее применения (в начале расчета эта проверка невозможна, так как размеры сечения, а следовательно, и гибкость стержня неизвестны).

Радиус инерции сечения винта

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d_1^4}{64 \pi d_1^2 / 4}} = \frac{d_1}{4} = \frac{51}{4} = 12,75 \text{ мм.}$$

Гибкость винта $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \cdot 900}{12,75} = 141;$

$\lambda = 141 > \lambda_{\text{пред}} = 96$, следовательно, формула Эйлера применима.

Задача 6.1. Определить допустимую нагрузку для чугунной колонны длиной $l = 6$ м. Внешний диаметр сечения $D = 200$ мм; внутренний диаметр $d = 150$ мм; $E = 1,2 \cdot 10^5$ МПа; $[n_y] = 5$. Оба конца колонны шарнирно закреплены.

Задача 6.2. Подобрать сечение стойки. Сечение состоит из двух равнобоких уголков, сваренных между собой по длине (рис. 6.5). Допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma_c] = 160$ МПа (материал – сталь Ст 3).

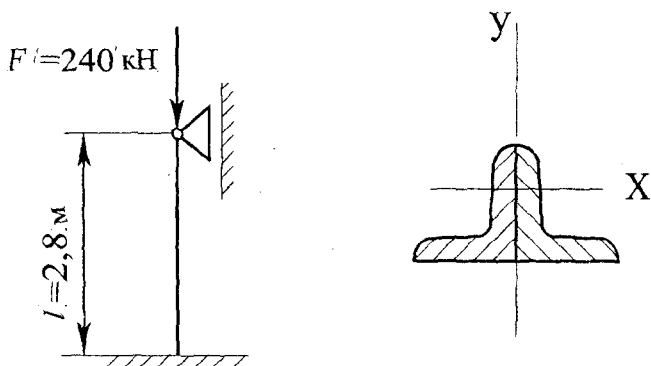


Рис. 6.5

Л и т е р а т у р а

1. Александров, А.В., Потапов, В.Д., Державин, Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высш. школа, 2003. – 560 с.
2. Биргер, И.А., Шорр, Б.Ф., Иосилевич, Г.Б. Расчет на прочность деталей машин: справочник. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.
3. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 607 с.
4. Иосилевич, Г.Б., Лебедев, П.А., Стреляев, В.С. Прикладная механика. – М.: Машиностроение, 1985. – 576 с.
5. Окопный, Ю.А., Радин, В.П., Чирков, В.П. Механика материалов и конструкций: учебник для вузов. – М.: Машиностроение, 2002. – 435 с.
6. Писаренко, Г.С., Яковлев, А.П., Матвеев, В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1988. – 735 с.
7. Прикладная механика / А.Т. Скойбеда [и др.]; под общ. ред. А.Т. Скойбеда. – Минск: Выш. школа, 1997. – 522 с.
8. Рудицын, М.Н., Артемов, П.Я., Любошиц, М.И. Справочное пособие по сопротивлению материалов / Под общ. ред. М.Н. Рудицына. – Минск: Выш. шк., 1970. – 630 с.
9. Сборник задач по сопротивлению материалов с теорией и примерами: учебное пособие для машиностроит. спец. вузов / Б.А. Антуфьев [и др.]; под ред. А.Г. Горшкова, Д.В. Тарлавского. – М.: Физматлит, 2003. – 626 с.
10. Сопротивление материалов: учебное пособие / Н.А. Костенко [и др.]; под ред. Н.А. Костенко. – М.: Высш. школа, 2004. – 430 с.
11. Тимошенко, С.П., Gere, Дж. Механика материалов. – СПб.: Лань, 2002. – 672 с.
12. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учебник для вузов. – 11-е изд., стереотип. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 589 с.

Оглавление

Введение.....	3
1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА.....	4
1.1. Продольные силы и нормальные напряжения в поперечных сечениях брусев.....	4
1.2. Продольная и поперечная деформация. Закон Гука.....	5
1.3. Расчеты на прочность.....	7
1.4. Статически неопределимые задачи на растяжение и сжатие.....	21
1.5. Основы теории напряженного состояния.....	31
1.6. Линейное напряженное состояние.....	31
1.7. Плоское напряженное состояние.....	32
2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ.....	37
2.1. Статические моменты плоских фигур. Центр тяжести.....	37
2.2. Моменты инерции плоских фигур.....	39
2.3. Главные оси и главные моменты инерции.....	43
2.4. Вычисление моментов инерции составных сечений, имеющих ось симметрии.....	44
2.5. Моменты сопротивления.....	53
3. КРУЧЕНИЕ.....	54
3.1. Общие сведения.....	54
3.2. Порядок построения эпюр крутящих моментов.....	54
3.3. Проверка правильности построения эпюры.....	56
3.4. Напряжения и деформации при кручении бруса круглого сечения.....	56
3.5. Расчеты на прочность и жесткость при кручении.....	57
4. ПРЯМОЙ ИЗГИБ.....	66
4.1. Основные понятия.....	66
4.2. Поперечные силы и изгибающие моменты.....	66
4.3. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.....	68
4.3.1. Методика решения задач на построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.....	68
4.3.2. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов по характерным точкам.....	79
4.4. Нормальные напряжения при изгибе. Расчет балок на прочность.....	85
5. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.....	95
Изгиб с кручением.....	95
6. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.....	107
Литература.....	119

Учебное издание

РОЗАНОВА Наталья Николаевна
КОМЯК Игорь Михайлович
ШПИЛЕВСКИЙ Виталий Иванович
ВАСИЛЕНКО Василий Дмитриевич

ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МАШИН И ПРИБОРОВ

Учебно-методическое пособие по решению задач

В 2 частях

Часть 1

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

Редактор Т.Н. Микулик
Компьютерная верстка Н.А. Школьниковой

Подписано в печать 12.01.2008.

Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 7,03. Уч.-изд. л. 5,50. Тираж 200. Заказ 461.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.

ЛИ 02330/0131627 от 01.04.2004.

220013, Минск, проспект Независимости, 65.