

3299



Министерство образования
Республики Беларусь

**БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

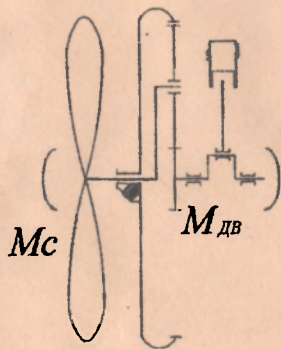
**Кафедра «Детали машин, подъемно-транспортные
машины и механизмы»**

**В.Д. Василёнок
Н.Н. Розанова
И.М. Комяк**

**ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МАШИН
И ПРИБОРОВ**

Учебно-методическое пособие по решению задач

Часть 2



Минск 2008

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Детали машин, подъемно-транспортные
машины и механизмы»

В.Д. Василёнок
Н.Н. Розанова
И.М. Комяк

ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МАШИН И ПРИБОРОВ

Учебно-методическое пособие по решению задач

В 2 частях

Часть 2

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ, МАШИН И ПРИБОРОВ

Под редакцией д-ра техн. наук, профессора А.Т. Скойбеды

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Республики Беларусь по образованию
в области машиностроительного оборудования и технологий
для студентов немашиностроительных специальностей учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования*

Минск 2008

620.1

0-75

УДК 621.01(076.2)(075.8)

ББК 34.41я7

В19

Рецензенты:
профессор БГУиР В.М. Сурин;
доцент А.Н. Шинкевич

Василёнок, В.Д.

В 19 Основы проектирования машин и приборов: учебно-методическое пособие по решению задач. В 2 ч. Ч. 2. Теория механизмов, машин и приборов / В.Д. Василёнок, Н.Н. Розанова, И.М. Комяк; под ред. А.Т. Скойбеды. – Минск: БНТУ, 2008. – 48 с.

ISBN 978-985-479-716-8 (Ч. 2).

Пособие содержит основные теоретические предпосылки, необходимые для решения некоторых задач по разделу «Теория механизмов, машин и приборов» дисциплин «Прикладная механика», «Основы проектирования машин». В издание включены подробные решения типовых задач. Оно предназначено для студентов заочного факультета, выполняющих домашние контрольные работы по дисциплинам «Основы проектирования машин и приборов», «Прикладная механика» и «Механика», а также рекомендуется студентам дневных отделений, изучающих дисциплины «Прикладная механика», «Механика» и «Основы проектирования машин».

Часть 1 «Механика материалов», авторы Н.Н. Розанова, И.М. Комяк, В.И. Шпилевский, В.Д. Василёнок, издана в БНТУ в 2008 г.

УДК 621.01.(076.2)(075.8)

ББК 34.41я7

ISBN 978-985-479-716-8 (Ч. 2)
ISBN 978-985-479-717-5

© Василёнок В.Д., Розанова Н.Н.,
Комяк И.М., 2008
© БНТУ, 2008

1. КИНЕМАТИКА ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

1.1. Кинематика зубчатых механизмов с неподвижными осями

Основным кинематическим параметром зубчатого механизма является передаточное отношение.

Передаточным отношением i_{12} называется отношение угловой скорости звена 1 (ω_1) к угловой скорости звена 2 (ω_2) (рис. 1.1):

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

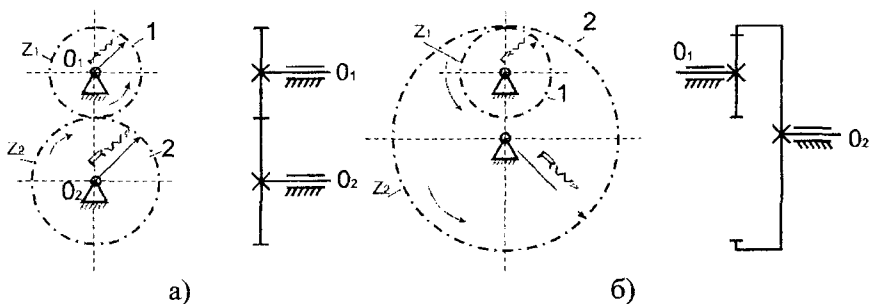


Рис. 1.1

Очевидно, что $i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ или $i_{21} = \frac{1}{i_{12}}$.

Если $\omega_1 = \text{const}$ и $\omega_2 = \text{const}$,

$$\text{то } i_{12} = \frac{n_1}{n_2} \text{ и } i_{21} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 и n_2 – частота вращения, мин^{-1} звена 1 и звена 2.

Для механизмов с параллельными осями передаточное отношение считается положительным при одинаковом направлении угловых скоростей и отрицательным – при противоположном.

Для цилиндрической передачи знак «плюс» соответствует внутреннему зацеплению (см. рис. 1.1, б), а «минус» – внешнему (см. рис. 1.1, а).

Передаточное отношение можно представить в виде

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_{\omega_2}}{r_{\omega_1}} \pm \frac{z_2}{z_1}$$

Многоступенчатый зубчатый механизм можно образовать последовательным соединением колес (рис. 1.2), при котором вращение от ведущего вала O_1 передается ведомому валу O_4 через промежуточные валы O_2 и O_3 , на каждом из которых помещено по два колеса: 2 и 2', 3 и 3'. Колеса 2 и 2' жестко соединены с валом O_2 и имеют общую угловую скорость ω_2 ; аналогично колеса 3 и 3' также жестко соединены с валом O_3 и имеют общую угловую скорость ω_3 .

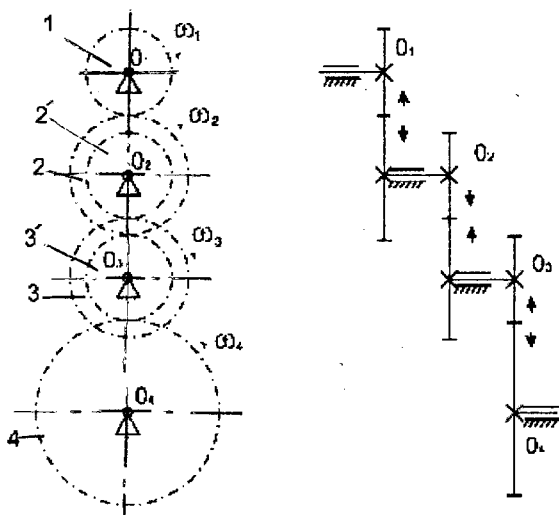


Рис. 1.2. Последовательное соединение колес

На одной проекции (см. рис. 1.2) направление угловых скоростей показано круговыми стрелками, а на второй – прямыми.

При последовательном ступенчатом соединении колес передаточное отношение равно произведению передаточных отношений промежуточных зацеплений:

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2'}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3'}\right) = -\frac{z_1 z_3 z_4}{z_1 z_2' z_3'}$$

В данном случае имеем трехступенчатую передачу.
В общем случае передаточное отношение

$$i_{1n} = (-1)^k \frac{z_2 z_3 z_4 \dots z_n}{z_1 z_2' z_3' \dots z_{(n-1)}}, \quad (1.1)$$

где k – число внешних зацеплений.

При простом последовательном соединении зубчатых колес (рис. 1.3) величина общего передаточного отношения не зависит от количества промежуточных (паразитных) колес:

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1}$$

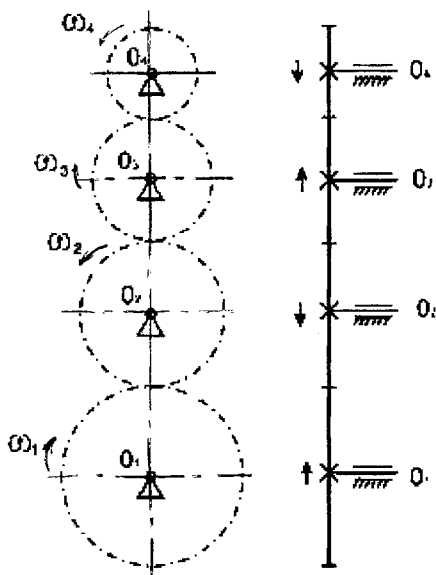


Рис.1.3. Последовательное соединение зубчатых колес

В общем случае

$$i_{1k} = (-1)^k \frac{z_k}{z_1}, \quad (1.2)$$

где k – число внешних зацеплений.

«Паразитные» колеса могут изменить знак передаточного отношения, например, при внешнем зацеплении (см. рис. 1.3) каждое четное колесо (2 и 4) вращается в сторону, противоположную вращению входного колеса 1, а каждое нечетное колесо 3 – в сторону вращения входного колеса 1.

На рис. 1.4 показано последовательное соединение, состоящее из трех колес: 1, «паразитное» 2 и выходное 3 с внутренним зацеплением. Передаточное отношение

$$i_{13} = -\frac{z_3}{z_1} = -\frac{\omega_1}{\omega_3}.$$

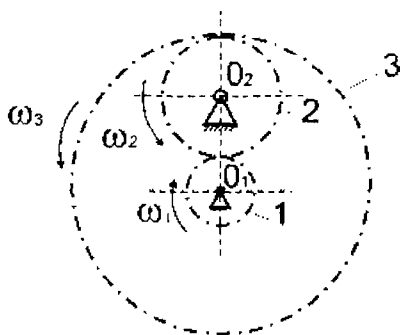


Рис. 1.4. Последовательное соединение трех колес

Передаточное отношение червячной передачи равно отношению числа зубьев колеса к числу витков червяка:

$$i_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

где n_1 и n_2 – частота вращения червяка и колеса мин^{-1} ;

z_2 – число зубьев червячного колеса;

z_1 – число витков червяка.

Механизм, изображенный на рис. 1.5, состоит из пары цилиндрических колес 1 и 2, пары конических колес 2, 3 и червячной пары 3 и 4, где звено 3 – червяк, а 4 – червячное колесо. Общее передаточное отношение для этого механизма

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2'} \cdot \frac{z_4}{z_3'}$$

где z_4 – число зубьев червячного колеса, а z_3 – число витков червяка.

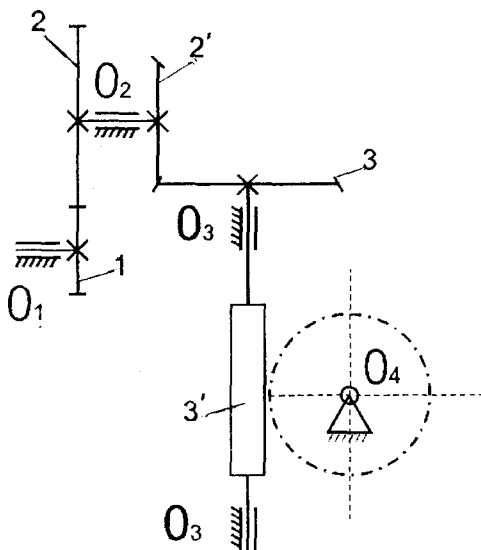


Рис. 1.5. Пример механизма с различными видами передач

Знак для общего передаточного отношения можно поставить лишь для того случая, когда входной и выходной валы вращаются относительно осей, параллельных друг другу.

1.2. Кинематика механизмов с подвижными осями

Зубчатая передача, у которой геометрическая ось хотя бы одного из колес подвижна, называется планетарной. Различные планетарные механизмы можно представить в виде трех типов передач.

1. Простые планетарные передачи, обладающие одной степенью подвижности, у которых одно из основных звеньев закреплено неподвижно (рис. 1.6, закреплено звено 3). Такие механизмы служат для последовательной передачи потока мощности.

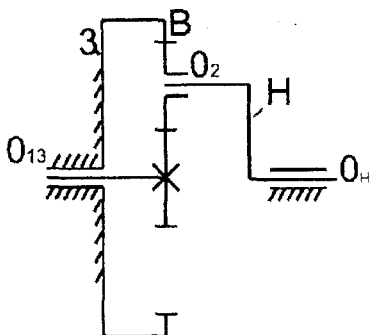


Рис. 1.6. Планетарный механизм

2. Дифференциальные передачи, обладающие двумя степенями подвижности, у которых все основные звенья подвижны (рис. 1.7). Эти передачи позволяют суммировать два или несколько потоков мощности, поступающих от независимых источников, либо распределять их по независимым потребителям.

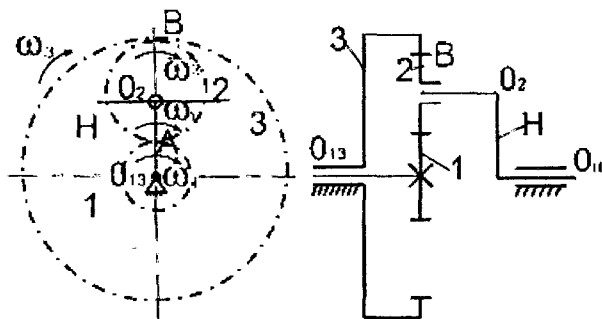


Рис. 1.7. Дифференциальная передача

3. Замкнутые дифференциальные передачи, получаемые из дифференциальных передач путем замыкания двух основных звеньев (центрального колеса и водила) простой передачей, состоящей из колес 1, 2, 3 (рис. 1. 8). Такие передачи позволяют получить большие передаточные отношения при малых габаритах.

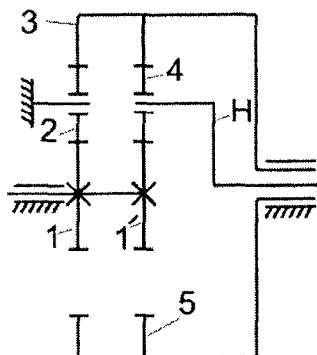


Рис. 1.8. Планетарный механизм

Рассмотрим механизм, изображенный на рис 1.7. Определим число степеней подвижности. Если $n = 4$ – число звеньев, $p_5 = 4$ и $p_4 = 2$ – число кинематических пар 5-го и 4-го класса:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2,$$

т.е. определенность в движении звеньев у этого механизма будет в том случае, если законы движения будут заданы по двум звеньям.

Основными звеньями механизмов с подвижными осями являются водило (H) и соосные с ним колеса (1 и 3). В данном случае все основные звенья подвижные. Оба эти признака ($W > 1$ и подвижные основные звенья) определяют *дифференциальный механизм*.

Определим степень подвижности для механизма, изображенного на рис. 1.6:

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

У этого механизма колесо 3 (основное звено) неподвижно и $W = 1$. Оба признака определяют *планетарный механизм*. В механизмах

замкнутых дифференциалов все основные звенья подвижные, но число степеней подвижности равно единице ($W = 1$). Таким образом, только по совокупности двух признаков механизмы с подвижными осями можно отнести к тому или иному типу.

Формулы (1.1), (1.2) для определения передаточного отношения планетарных и дифференциальных механизмов использовать нельзя, т.к. сателлит участвует в сложном движении, состоящем из вращения вокруг оси O_2 и вращения вместе с водилом H вокруг оси O_H (см. рис. 1.6, 1.7).

Для вывода зависимостей, связывающих угловые скорости механизмов, имеющих подвижные оси, воспользуемся методом обращения движения.

Допустим, что в действительном движении звенья механизма (см. рис. 1.7) имеют угловые скорости ω_1 , ω_2 , ω_3 и ω_H . Сообщим всем звеньям скорость, равную угловой скорости водила, но противоположно ей направленную, т.е. минус ω_H . В этом случае угловые скорости звеньев будут соответственно:

$$\begin{aligned}\omega_1^H &= \omega_1 - \omega_H, & \omega_2^H &= \omega_2 - \omega_H, \\ \omega_3^H &= \omega_3 - \omega_H, & \omega_H^H &= \omega_H - \omega_H = 0.\end{aligned}$$

Так как водило H стало неподвижным ($\omega_H^H = 0$), то мы получили «обращенный механизм» с неподвижными осями. Для этого механизма справедлива зависимость

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H},$$

где i_{13}^H – передаточное отношение «обращенного механизма», которое можно определить через числа зубьев колес:

$$i_{13}^H = -\frac{z_3}{z_1}.$$

В правую часть предыдущей зависимости подставим значение относительных скоростей:

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}. \quad (1.3)$$

Полученное уравнение называется *формулой Виллиса для дифференциальных механизмов*. Левая часть, как показано выше, может быть выражена через числа зубьев колес. Определенность в решении правой части будет иметь место, когда будут известны скорости двух ведущих звеньев. Установим, какой вид имеет формула Виллиса для планетарного механизма, изображенного на рис. 1.6. У этого механизма колесо 3 жестко соединено со стойкой (заторможено), т.е. $\omega_3 = 0$.

Таким образом, имеем

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{0 - \omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1H}.$$

Откуда
$$i_{1H} = 1 - i_{13}^H. \quad (1.4)$$

Полученную зависимость называют *формулой Виллиса для планетарных механизмов*, а передаточное отношение i_{1H} — *планетарным передаточным отношением*.

Как и для дифференциальных механизмов, i_{13}^H определяется через числа зубьев колес. В общем случае

$$i_{kH} = 1 - i_{kl}^H,$$

где i_{kl}^H — передаточное отношение от звена k к звену l (l — соответствует неподвижному центральному колесу).

Достоинством планетарных механизмов является возможность получения больших передаточных отношений при малых габаритах.

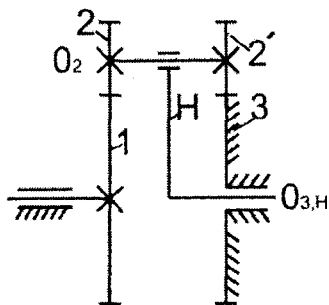


Рис. 1.9. Планетарный механизм

Пример 1.1. Определить передаточное отношение i_{H1} планетарного механизма (рис. 1.9), если $z_1 = 100$, $z_2 = 99$, $z'_2 = 100$, $z_3 = 101$.

Решение

Это одноступенчатый планетарный редуктор. Используя формулу (1.4), запишем:

$$i_{H1} = \frac{1}{i_{1H}} = \frac{1}{1 - i_{13}^H} = \frac{1}{1 - \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z'_2}} = \frac{1}{1 - \frac{99 \cdot 101}{100 \cdot 100}} = 10000.$$

Пример 1.2. В зубчатой передаче, показанной на рис. 1.10, входное коническое колесо 1 в данный момент имеет угловую скорость $\omega_1 = 340 \text{ с}^{-1}$ и постоянное угловое ускорение $\epsilon_1 = 285 \text{ с}^{-2}$, направленное по движению. $z_1 = z_2 = 18$; $z_2 = z_4 = 18$; $z_3 = z_5 = 30$; $z'_3 = z'_5 = 22$; $z_4 = z_6 = 70$.

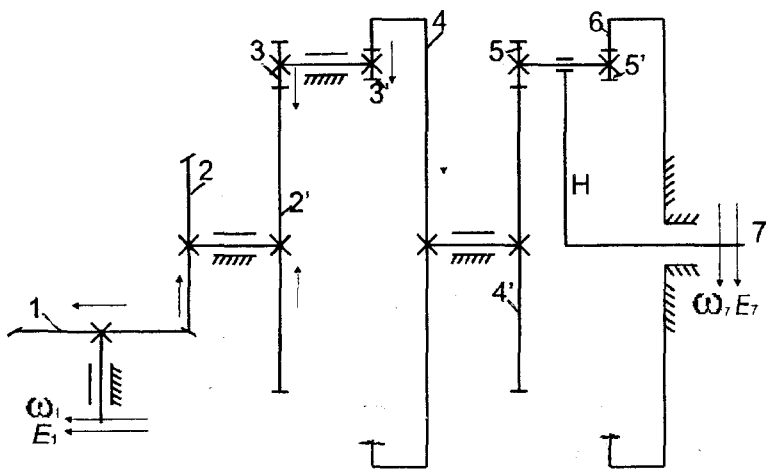


Рис. 1.10. Одноступенчатый планетарный редуктор

Принять средний модуль конического колеса $m_m = 2$ мм, ширину колеса $b = 20$ мм, плотность $\rho = 8000$ кг/м³, смещение центра масс (точка A , рис. 1.11) $e = 2$ мм.

Определить:

- 1) передаточное отношение между входным и выходным звеньями и направление вращения;
- 2) угловую скорость и угловое ускорение выходного звена, их направление показать на схеме передачи;
- 3) время, в течение которого угловая скорость увеличивается в 2 раза;
- 4) величину и направление силы инерции и момента пары сил инерции звена I в начале и в конце найденного в предшествующем пункте промежутка времени, сравнить силу инерции с силой тяжести и показать чертежом направления вращения, ускорения и инерционных нагрузок;
- 5) общий коэффициент полезного действия передачи.

Р е ш е н и е

1. Определение передаточного отношения механизма.

$$i_{17} = i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_7} = \frac{\omega_1}{\omega_H}.$$

Выделим из механизма ступень с неподвижными осями, состоящую из колес $z_1, z_2, z_2', z_3, z_3', z_4$, и планетарную ступень, состоящую из колес z_4, z_5, z_5', z_6 и водила H (7):

а) для ступени с неподвижными осями $i_{14} = i_{12} \cdot i_{2'3'} \cdot i_{3'4}$. Оси колес 1 и 4 непараллельны, поэтому знак передаточного отношения не определяем, а покажем направления вращения колес неподвижной ступени в соответствии с правилом стрелок:

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2'} \cdot \frac{z_4}{z_3'} = \frac{18 \cdot 30 \cdot 70}{18 \cdot 18 \cdot 22} = 5,303;$$

б) чтобы определить передаточное отношение планетарной ступени, используем формулу Виллиса.

Остановим водило $H(7)$, используя зависимость (1.3), получим

$$i_{4'6}^H = \frac{\omega_{4'} - \omega_H}{\omega_6 - \omega_H} = \frac{z_5}{z_{4'}} \cdot \frac{z_6}{z_{5'}} = \frac{30 \cdot 70}{18 \cdot 22} = 5,303.$$

Колесо 6 неподвижно ($\omega_6 = 0$); используя зависимость (1.4), получим

$$i_{4'H} = 1 - i_{4'6}^H = 1 + 5,303 = 6,303;$$

в) передаточное отношение всего механизма

$$i_{17} = i_{1H} = i_{14} \cdot i_{4'H} = 5,303 \cdot 6,303 = 33,43.$$

Передаточное отношение планетарной ступени $i_{4'H} > 0$. Следовательно, водило $H(7)$ вращается в ту же сторону, что и колесо 4 .

Покажем направление угловой скорости ω_7 и углового ускорения ε_7 на чертеже стрелками.

Поскольку $\varepsilon > 0$ – вращение ускоренное.

2. Угловая скорость и угловое ускорение ведомого звена 7 по модулю:

$$|\omega_7| = \frac{\omega_1}{|i_{17}|} = \frac{340}{33,43} = 10,17 \text{ с}^{-1};$$

$$|\varepsilon_7| = \frac{\varepsilon_1}{|i_{17}|} = \frac{285}{33,43} = 8,53 \text{ с}^{-2}.$$

3. Определение времени, в течение которого угловая скорость увеличится вдвое:

$$\omega'_1 = \omega_1 + \varepsilon \cdot t'.$$

Для ускоренного вращения $\omega'_1 = \omega_1 + \varepsilon_1 \cdot t'$.

Отсюда

$$t' = \frac{\omega'_1 - \omega_1}{\varepsilon_1} = \frac{2\omega_1 - \omega_1}{\varepsilon_1} = \frac{\omega_1}{\varepsilon_1} = \frac{340}{285} = 1,19 \text{ с.}$$

4. Для расчета момента инерции J_{O_1} коническое колесо со средним модулем $m_m = 2 \text{ мм}$, $z_1 = 18$ заменим цилиндром с диаметром, равным среднему делительному диаметру r :

$$d_{m_1} = m_m z_1 = 2 \cdot 18 = 36 \text{ мм} = 0,036 \text{ м.}$$

С учетом сказанного масса определяется по формуле

$$m_1 = \rho v = \rho \frac{\pi d_{m_1}^2}{4} b_1 = 8000 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,036^2}{4} \cdot 0,02 = 0,163 \text{ кг,}$$

где ρ – плотность,

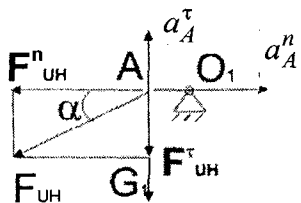
$$\rho = 8000 \text{ кг/м}^3 \text{ (по условию);}$$

$$J_{O_1} = \frac{1}{2} m_1 r_{m_1}^2 = \frac{1}{2} 0,163 \cdot \left(\frac{0,036}{2} \right)^2 = 2,64 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Вес колеса

$$G_1 = m_1 g = 0,163 \cdot 9,8 = 1,6 \text{ Н.}$$

Смещение центра масс (точки A) (рис. 1.11)



$$e = 2 \text{ мм} = 0,002 \text{ м.}$$

Нормальная составляющая силы инерции

$$F_{uH}^n = -m_1 a_A^{-n}.$$

Рис. 1.11. Смещение центра масс

Нормальное ускорение точки A

$$a_A^n = \omega_1^2 e = 340^2 \cdot 0,002 = 231,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

$$F_{uH}^n = 0,163 \cdot 231,2 = 37,7 \text{ Н}.$$

Касательное ускорение точки A и касательная составляющая силы инерции

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 e = 258 \cdot 0,002 = 0,57 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

$$\bar{F}_{uH}^\tau = m_1 a_A^\tau = 0,163 \cdot 0,57 = 0,093 \text{ Н}.$$

Определим полное ускорение точки A , силу инерции и направление силы инерции:

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{(231,2)^2 + (0,57)^2} = 231,2 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$F_{\text{ин}} = \sqrt{(F_{\text{ин}}^n)^2 + (F_{\text{ин}}^\tau)^2} = \sqrt{37,7^2 + 0,093^2} = 37,7 \text{ Н};$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{F_{\text{ин}}^\tau}{F_{\text{ин}}^n} = \frac{0,093}{37,7} = 2,46 \cdot 10^{-3}; \quad \alpha = 8'.$$

В практических расчетах составляющей $F_{\text{ин}}^n$ как малой величиной можно пренебречь и считать, что $F_{\text{ин}}^t = F_{\text{ин}}^n = 37,7 \text{ Н}$.

Сравним силу тяжести и силу инерции:

$$\frac{F_{\text{ин}}}{G} = \frac{37,7}{1,6} = 23,6.$$

Силой веса по сравнению с силой инерции при практических расчетах также можно пренебречь.

Момент сил инерции

$$M_{и} = J_{01}\epsilon = 2,64 \cdot 10^{-5} \cdot 285 = 0,00752 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Покажем направление всех векторных величин на чертеже.

5. Определение общего КПД механизма $\eta = \eta_k \cdot \eta_{ц}^2 \cdot \eta_{пл}$.

Здесь $\eta_k = 0,95$ – КПД конической пары с учетом потерь в подшипниках;

$\eta_{ц} = 0,96$ – КПД цилиндрической пары (2 пары по условию);

$\eta_{пл} = 0,96$ – КПД планетарной передачи.

$$\eta = 0,95 \cdot 0,96^2 \cdot 0,96 = 0,84.$$

Пример 1.3.

Схема замкнутого дифференциального механизма дана на рис. 1.12. Определить передаточное отношение.

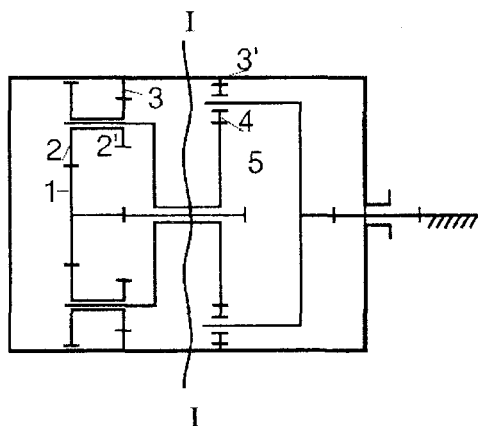


Рис. 1.12. Замкнутый дифференциальный механизм

Числовые данные:

$$Z_1 = 13;$$

$$Z_2 = 30;$$

$$\omega_1 = 180 \text{ с}^{-1}.$$

Решение

Определяем недостающие числа зубьев колес:

а) $Z_2' = Z_5 = Z_1 = 13;$

б) $Z_4 = Z_2 = 30.$

Числа зубьев Z_3 и Z_3' колес 3 и 3' находим из условий соосности:

$$Z_3 = Z_1 + Z_2 + Z_2' = 13 + 30 + 13 = 56.$$

$$Z_3' = Z_5 + 2 \cdot Z_4 = 13 + 2 \cdot 30 = 73.$$

Замкнуто-дифференциальный механизм разделим плоскостью I-I на дифференциальную ступень 1, 2, 2', 3, H и замыкающую цепь 5, 4, 3'. При этом угловая скорость водила H равна угловой скорости колеса 5, т.е. $\omega_5 = \omega_H$, а также равны угловые скорости колес 3 и 3' и барабана, т.е. $\omega_3 = \omega_{3'}$.

Для замыкающей цепи заменяем передаточное отношение:

$$u_{53'} = \frac{\omega_5}{\omega_{5'}} = (-1)^k \frac{Z_{3'}}{Z_5}, \quad (1.5)$$

где $k = 1$ – число внешних зацеплений,

$$\text{или } u_{53'} = (-1)^1 \frac{73}{13} = -5,62.$$

Для дифференциальной ступени запишем передаточное отношение в обратном движении от колеса 1 к колесу 3. Воспользуемся формулой Виллиса для дифференциальных механизмов:

$$u_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}, \quad (1.5)$$

$$\text{где } u_{13}^H = (-1)^k \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 Z_2'} = (-1)^1 \frac{30 \cdot 56}{13 \cdot 13} = -9,94.$$

В правой части уравнения (1.5) числитель и знаменатель разделим на ω_3 :

$$u_{13}^H = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_3} - \frac{\omega_H}{\omega_3}}{1 - \frac{\omega_H}{\omega_3}}.$$

Введем обозначения:

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = u_{31} \text{ — передаточное отношение от колеса } I \text{ к барабану;}$$

$$\frac{\omega_H}{\omega_3} = \frac{\omega_5}{\omega_{3'}} = u_{53'} \text{ — передаточное отношение замыкающей цепи;}$$

$$u_{13}^H = \frac{u_{13} - u_{53'}}{1 - u_{53'}},$$

тогда искомое передаточное отношение

$$u_{13} = u_{13}^H (1 - u_{53'}) + u_{53'}.$$

Подставим числовые значения:

$$u_{13} = -9,94(1 - (-5,62)) + (-5,62) = -71,423.$$

Знак (минус) указывает, что барабан и колесо I вращаются в противоположных направлениях.

Определяем угловую скорость барабана (колес $3, 3'$):

$$u_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} \Rightarrow \omega_3 = \frac{\omega_1}{u_{13}},$$

тогда

$$\omega_3 = \frac{180}{-71,423} = -2,52 \text{ с}^{-1}.$$

Вывод: 1) замкнуто-дифференциальный механизм является понижающей передачей (редуктором);

2) угловая скорость барабана равна $2,52 \text{ с}^{-1}$.

2. ДИНАМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ В ФОРМЕ ИНТЕГРАЛА ЭНЕРГИИ

2.1. Силы, действующие на звенья механизмов

Динамика механизмов изучает движение механизмов с учетом действующих на них сил.

Все внешние силы, действующие на звенья механизма, подразделяются на движущие силы и силы сопротивления. Последние подразделяются на силы полезных и вредных сопротивлений. Движущие силы – это такие силы, работа которых при движении механизма или мгновенная мощность положительна, т.е. $FV > 0$, где F – действующая сила, V – мгновенная скорость точки приложения силы.

Силы сопротивления – это такие силы, работа которых при движении механизма или мгновенная мощность отрицательна, т.е. $FV < 0$.

Силы *полезных* сопротивлений – это силы, для преодоления которых предназначен механизм, т.е. силы сопротивлений механизированного процесса.

Силы *вредных* сопротивлений представляют собой силы трения и их моменты в кинематических парах, сопротивления окружающей среды и т.д.

2.2. Уравнение движения механизма в форме интеграла энергии (уравнение кинетической энергии)

Движение механизма можно изучить, используя теорему изменения кинетической энергии. Согласно этой теореме изменение кинетической энергии всех движущихся звеньев механизма за любой промежуток времени равно сумме работ всех внешних сил, действующих на звенья механизма в течение того же промежутка времени. Эта теорема может быть представлена уравнением

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=0}^n T_i + \sum_{i=0}^n T_{i0}, \quad (2.1)$$

где n – число подвижных звеньев механизма;

A_i – работа внешних (по отношению к механизму) сил, действующих на звено i за рассматриваемый промежуток времени;

T_i – кинетическая энергия звена i в конце рассматриваемого промежутка времени;

T_{i0} – кинетическая энергия звена i в начале промежутка времени;

Уравнение (2.1) может быть получено из дифференциальных уравнений движений звеньев механизма путем их интегрирования, поэтому и получило название *уравнения движения механизма в форме интеграла энергии*.

Для удобства анализа уравнение (2.1) перепишем в виде

$$A = T - T_0,$$

где

$$A = \sum_{i=1}^n A_i, \quad T = \sum_{i=0}^n T_i, \quad T_0 = \sum_{i=0}^n T_{i0}.$$

В свою очередь, сумма работ всех внешних сил

$$A = A_{д.с} - A_{п.с} - A_{в.с} \pm A_{с.т},$$

где $A_{д.с}$ – работа движущих сил;

$A_{п.с}$ – работа сил полезных сопротивлений;

$A_{в.с}$ – работа сил вредных сопротивлений за счет трения в кинематических парах и сопротивления среды;

$A_{с.т}$ – работа сил тяжести подвижных звеньев механизма, которая в процессе движения механизма может быть как положительной, так и отрицательной.

Применим уравнение к различным режимам движения механизма. Рассмотрим уравнение движения (2.1), соответствующее периоду пуска механизма. В начале этого периода механизм находится в состоянии покоя и кинематическая энергия его звеньев равна нулю ($T_0 = 0$). В этом случае уравнение движения примет вид

$$A_{д.с} = A_{п.с} + A_{в.с} \pm A_{с.т}.$$

Следовательно, во время пуска работа движущих сил затрачивается на сообщение кинетической энергии всем подвижным звеньям механизма, а также на преодоление сил сопротивлений и сил тяжести. Для некоторых технологических машин для облегчения условий в момент пуска $A_{п.с} = 0$.

Установившееся движение механизма характеризуется тем, что $T - T_0 = 0$.

Различают два вида установившегося движения: установившееся равномерное и установившееся периодическое движение. В первом случае работа движущих сил ($A_{д.с}$) равна работе сил сопротивлений на перемещениях, соответствующих любому моменту времени. В этом режиме обычно работают механизмы с передаточным отношением $i = \text{const}$, у которых центры тяжести звеньев не совершают вертикальных перемещений, и поэтому $A_{с.т} = 0$, например: зубчатые механизмы редукторов, фрикционные механизмы и т.д. Уравнение движения, соответствующее этому режиму, можно записать следующим образом:

$$A_{д.с} = A_{п.с} + A_{в.с}. \quad (2.2)$$

Для этого режима уравнение работ можно заменить уравнением мощностей:

$$P_{д.с} = P_{п.с} + P_{в.с},$$

где $P_{д.с}$ — мощность движущих сил;

$P_{п.с}$ — мощность сил полезного сопротивления;

$P_{в.с}$ — мощность сил вредного сопротивления.

При установившемся периодическом движении уравнение (2.1) имеет вид

$$\Delta T = T - T_0 = A_{п.с} + A_{в.с} \pm A_{с.т}.$$

Изменение кинетической энергии в этом случае движения равно нулю ($\Delta T = 0$) только за определенный период движения, опреде-

ляемый или периодом изменения движущих сил, или периодом движения звеньев механизма.

Остановка механизма характеризуется тем, что в конце периода выбега все звенья будут находиться в состоянии покоя и их кинетическая энергия $T = 0$. Во время выбега механизм не выполняет своих производственных функций и $A_{п.с} = 0$. С учетом сказанного уравнение движения в период выбега примет вид

$$T_0 = A_{в.с} \pm A_{с.т}.$$

Следовательно, кинетическая энергия звеньев механизма расходуется на преодоление работы сил вредных сопротивлений и работы сил тяжести звеньев.

Между установившимся движением и режимом пуска и остановки в машинах наблюдается переходный режим, который характеризуется неустановившимся движением.

Для установившегося движения механизма может быть определен коэффициент полезного действия. Разделим обе части уравнения (2.2) на $A_{д.с}$, тогда получим

$$\frac{A_{п.с}}{A_{д.с}} + \frac{A_{в.с}}{A_{д.с}} = 1. \quad (2.3)$$

Отношение $\frac{A_{п.с}}{A_{д.с}} = \eta$ в уравнении (2.3) является коэффициентом полезного действия механизма (КПД).

$\frac{A_{в.с}}{A_{д.с}} = \psi$ – коэффициент потерь механизма.

Отсюда получим $\eta + \psi = 1$.

КПД изменяется в пределах $0 \leq \eta < 1$. Коэффициент потерь изменяется в пределах $0 < \psi \leq 1$.

Для установившегося равномерного движения коэффициент полезного действия и коэффициент потерь могут быть выражены через отношение мощностей:

$$\eta = \frac{P_{п.с}}{P_{д.с}};$$

$$\psi = \frac{P_{в.с}}{P_{д.с}}.$$

В некоторых случаях вычисление КПД удобно производить по формулам

$$\eta = \frac{P_{п.с}}{P_{п.с} + P_{в.с}};$$

$$\eta = \frac{P_{д.с} - P_{в.с}}{P_{д.с}};$$

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{P_{в.с}}{P_{д.с}}};$$

$$\eta = 1 - \frac{P_{в.с}}{P_{д.с}}.$$

Если в механизме будет иметь место равенство $P_{д.с} = P_{в.с}$, то коэффициент потерь $\psi = 1$, а следовательно, $\eta = 0$. Движение звеньев будет происходить, но никакой полезной работы механизм выполнять не будет. При вычислении коэффициента полезного действия η может оказаться, что $\eta < 0$. Это возможно (согласно (2.3)) в том случае, если $\psi > 1$, т.е. возможная мощность сил вредных сопротивлений $P_{в.с}$ механизма больше мощностей $P_{д.с}$ движущих сил:

$$P_{в.с} > P_{д.с}.$$

В этом случае движение механизма невозможно. Таким образом, отрицательное расчетное значение η служит формальным признаком наличия в механизме самоторможения.

Для механизмов с вращающимися звеньями и постоянным передаточным отношением сил мощности движущих $P_{д.с}$ и сил полезного сопротивления $P_{п.с}$ могут быть выражены через моменты соответствующих сил и угловые скорости звеньев. В этом случае получим

$$\eta = \frac{P_{п.с}}{P_{д.с}} = \frac{M_{п.с} \cdot \omega_{II}}{M_{д.с} \cdot \omega_I},$$

где ω_I и ω_{II} – угловые скорости соответственно ведущего и ведомого звеньев.

С учетом того что $\frac{\omega_I}{\omega_{II}} = i_{II}$ – передаточное отношение механизма, получим

$$\eta = \frac{M_{п.с}}{M_{д.с} \cdot i_{II}}.$$

Пример 2.1.

Выходное звено механизма (рис. 2.1) совершает возвратно-поступательное движение и нагружено на рабочем ходе постоянной силой F_c полезного сопротивления. На холостом ходе, при обратном направлении движения выходного звена, полезное сопротивление отсутствует, но продолжают действовать вредные сопротивления.

Учитывая действия трения в кинематических парах, по коэффициенту полезного действия η механизма определить:

1) постоянный по величине движущий момент $M_{д.с}$, который нужно приложить к ведущему звену при установившемся движении с циклом, состоящим из рабочего и холостого ходов;

2) работы сил трения на рабочем и холостом ходах и значения приведенной к ведомому звену силы трения, считая, что вредное сопротивление постоянно на каждом из ходов, но на рабочем оно в три раза больше, чем на холостом;

3) изменения кинетической энергии механизма за время рабочего хода и за время холостого хода;

4) мощность, требуемую от привода при вращении ведущего звена со средней скоростью ω_1 , среднюю мощность полезного сопротивления и мощность сил трения.

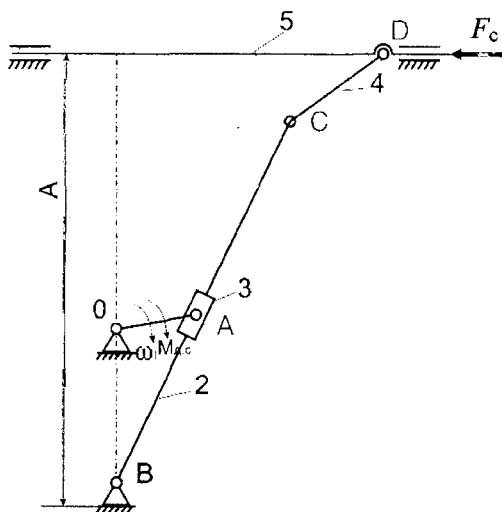


Рис. 2.1. Кулисный механизм

Исходные данные:

$OA = 100$ мм, $OB = 200$ мм; $BC = 360$ мм; $CD = 100$ мм; $a = 350$ мм;
 $F_c = 3000$ Н; $\eta = 0,62$; $\omega_1 = 10$ с⁻¹.

Решение

1. Определение движущего момента $M_{д.с}$, приложенного к входному звену 1. Для этого воспользуемся формулой

$$\frac{A_{п.с}}{A_{д.с}} = \eta, \quad (1.4)$$

где $A_{п.с} = F_c H$ – работа сил полезного сопротивления;

$A_{д.с} = M_{д.с} \cdot 2\pi$ – работа движущих сил за цикл (один оборот кривошипа);

H – ход выходного звена 5 за цикл (рис. 2.2). Из формулы (2.4) получим

$$\eta = \frac{F_c H}{M_{д.с} \cdot 2\pi}$$

или

$$M_{д.с} = \frac{F_c H}{2\pi\eta}. \quad (2.5)$$

Величина хода H определяется по рис. 2.2, из которого следует, что

$$H = D'D'' = C'C'',$$

В свою очередь, $\sin \alpha = \frac{OA'}{OB} = \frac{100}{200} = 0,5$.

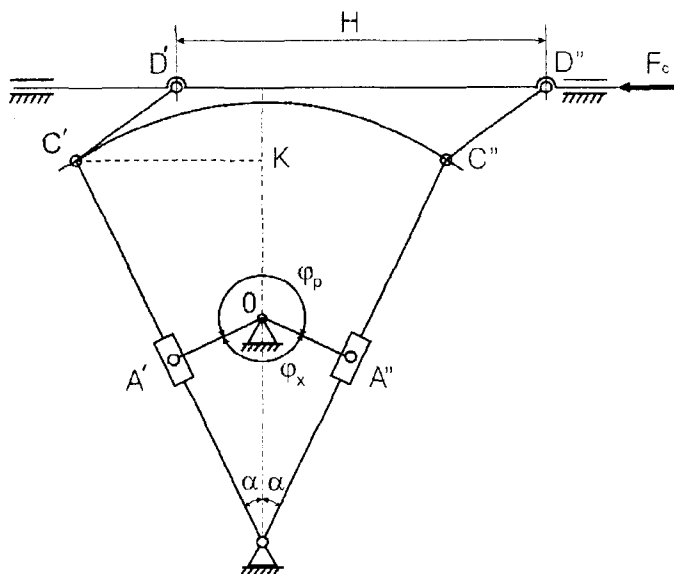


Рис. 2.2. Кулисный механизм

$$C'O = 2BC \sin \alpha ,$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{A'O}{OB}\right) = \arcsin 0,5 = 30^\circ, \quad \alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ .$$

Отсюда

$$H = 2BC \sin \alpha = 2 \cdot 360 \cdot 0,5 = 360 \text{ мм} = 0,36 \text{ м} .$$

Работа сил полезного сопротивления из формулы (2.5):

$$A_{\text{п.с}} = F_c H = 3000 \cdot 0,36 = 1080 \text{ Дж} .$$

$$M_{\text{д.с}} = \frac{F_c H}{2\pi\eta} = \frac{3000 \cdot 0,36}{2\pi \cdot 0,62} = 277 \text{ Н} \cdot \text{м} .$$

2. Работа сил трения за цикл:

$$A_{\text{тр}} = A_{\text{д.с}} - A_{\text{п.с}} ,$$

где
$$A_{\text{д.с}} = 2\pi \cdot M_{\text{д.с}} = \frac{A_{\text{п.с}}}{\eta} = \frac{1080}{0,62} = 1740 \text{ Дж} .$$

$$A_{\text{тр}} = A_{\text{д.с}} - A_{\text{п.с}} = 1740 - 1080 = 660 \text{ Дж} .$$

Эта работа состоит из работы силы трения на холостом $A_{\text{тр}}^{\text{ч}}$ и на рабочем ходе $A_{\text{тр}}^{\text{р}}$:

$$A_{\text{тр}} = A_{\text{тр}}^{\text{р}} + A_{\text{тр}}^{\text{ч}} .$$

По условию задачи $F_{\text{тр}}^{\text{р}} = 3F_{\text{тр}}^{\text{ч}}$, отсюда

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}^{\text{P}} H + F_{\text{тр}}^{\text{X}} H = (3F_{\text{тр}}^{\text{P}} + 3F_{\text{тр}}^{\text{X}}) H = 4F_{\text{тр}}^{\text{X}} H$$

или

$$F_{\text{тр}}^{\text{X}} = \frac{A_{\text{тр}}}{4H} = \frac{660}{4 \cdot 0,36} = 458 \text{ Н.}$$

Окончательно имеем

$$F_{\text{тр}}^{\text{P}} = 3F_{\text{тр}}^{\text{X}} = 3 \cdot 458 = 1374 \text{ Н.};$$

$$A_{\text{тр}}^{\text{P}} + F_{\text{тр}}^{\text{P}} H = 1374 \cdot 0,36 = 495 \text{ Дж.};$$

$$A_{\text{тр}}^{\text{X}} = A_{\text{тр}} - A_{\text{тр}}^{\text{P}} = 660 - 495 = 165 \text{ Дж.}$$

3. Определение изменения кинетической энергии ΔT механизма на рабочем и холостом ходах.

Предварительно определим рабочий ($\varphi_{\text{р}}$) и холостой ($\varphi_{\text{х}}$) углы поворота входного звена:

$$\varphi_{\text{х}} = 2\pi - 2\alpha - 180^\circ = 2 \cdot 180 - 2 \cdot 30 - 180 = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi;$$

$$\varphi_{\text{р}} = 2\pi - \varphi_{\text{х}} = 360 - 120 = 240^\circ = \frac{4}{3}\pi;$$

$$A_{\text{п.с}} = F_{\text{с}} H = 3000 \cdot 0,36 = 1080 \text{ Дж.};$$

а) изменение кинетической энергии ΔT за время рабочего хода

$$\begin{aligned} \Delta T^{\text{P}} &= A_{\text{д.с}}^{\text{P}} - A_{\text{п.с}} - A_{\text{тр}}^{\text{P}} = M_{\text{д.с}} \varphi_{\text{р}} - A_{\text{п.с}} - A_{\text{тр}}^{\text{P}} = \\ &= 277 \cdot \frac{4}{3}\pi - 1080 - 495 = -413 \text{ Дж.}; \end{aligned}$$

б) за время холостого хода ΔT :

$$\Delta T^x = A_{д.с}^x - A_{тр}^x = M_{д.с}\varphi_x - A_{тр}^x = 277 \cdot \frac{2}{3}\pi - 165 = 413 \text{ Дж}.$$

За цикл ΔT должно быть равно нулю. Проверим это условие:

$$\Delta T = \Delta T^x - \Delta T^p = 413 - 413 = 0.$$

4. Расчёт мощности привода $P_{д.с}$ на вращение ведущего звена:

$$P_{д.с} = M_{д.с}\omega_1 = 277 \cdot 10 = 2770 \text{ Вт}.$$

Средняя за оборот мощность сил полезного сопротивления

$$P_{п.с} = \frac{A_{д.с}}{T},$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{10} = 0,628 \text{ с}$ – время одного полного цикла (оборот кривошипа).

Средняя за оборот мощность сил трения

$$P_{т.р} = \frac{A_{т.р}}{T} = \frac{660}{0,628} = 1050 \text{ Вт} = 1,05 \text{ кВт}.$$

Пример 2.2.

Выходное звено механизма совершает возвратно-вращательное движение и нагружено на рабочем ходу моментом T_c полезного сопротивления. Определить движущий момент, работы сил трения на рабочем и холостом ходах, изменение кинетической энергии механизма и мощность, требуемую от привода.

Решение

1. Определение движущего момента T_d . Для вращательного движения используем следующую схему и данные:

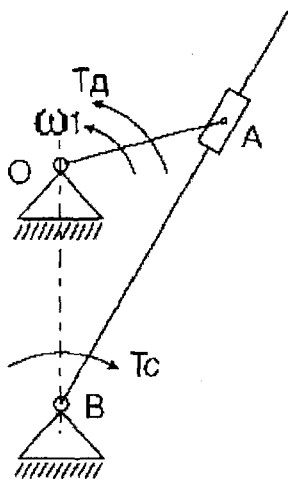


Рис. 2.3 Кулисный механизм

$$\begin{aligned} OA &= 180 \text{ мм}; \\ OB &= 200 \text{ мм}; \\ T_c &= 900 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ \eta &= 0,73; \\ \omega_1 &= 12 \text{ с}^{-1}; \\ \eta &= \frac{A_{\text{п.с}}}{A_d}; \\ A_d &= T_d \cdot 2\pi; \\ A_{\text{п.с}} &= T_{\text{п.с}} \cdot \pi. \\ \eta &= \frac{T_{\text{п.с}} \cdot \pi}{T_d \cdot 2\pi} = \frac{T_{\text{п.с}}}{T_d}, \end{aligned}$$

отсюда

$$T_d = \frac{T_{\text{п.с}}}{2\eta} = \frac{900}{2 \cdot 0,73}$$

2. Определение работы сил трения на рабочем и холостом ходах.

$$A_{\text{тр}} = A_d - A_{\text{п.с}}, \quad \text{т. к.} \quad A_d \cdot A_{\text{п.с}} - A_{\text{тр}} = 0;$$

$$A_{\text{тр}}^{\text{xx}} + A_{\text{тр}}^{\text{рх}} = A_{\text{тр}}; \quad A_{\text{тр}}^{\text{xx}} + 3A_{\text{тр}}^{\text{рх}} = A_{\text{тр}};$$

$$\begin{aligned} A_{\text{тр}}^{\text{xx}} &= \frac{A_{\text{тр}}}{4} = \frac{A_d - A_{\text{п.с}}}{4} = \frac{T_d \cdot 2\pi - T_{\text{п.с}} \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{4} (1232,8 - 900) = \\ &= \frac{\pi}{4} 332,8 = 83,2\pi = 281,25 \text{ Дж}, \end{aligned}$$

$$A_{\text{тр}}^{\text{рх}} = 3A_{\text{тр}}^{\text{хх}} = 3 \cdot 216,25 = 783,75 \text{ Дж}.$$

3. Определение изменения кинетической энергии механизма.

$$\Delta T = A_{\text{д}} - A_{\text{с}}.$$

За время рабочего хода

$$A_{\text{с}} = A_{\text{пс}} + A_{\text{тр}}^{\text{рх}};$$

$$\Delta T = T_{\text{д}} \cdot 2\pi - T_{\text{пс}} \cdot \pi - A_{\text{тр}}^{\text{рх}} = 616 \cdot 2\pi - 900\pi - 783,75 = 261,25 \text{ Дж}.$$

За время холостого хода

$$A_{\text{с}} = A_{\text{тр}}^{\text{хх}};$$

$$\Delta T = T_{\text{д}} \cdot 2\pi - T_{\text{пс}} \cdot \pi - A_{\text{тр}}^{\text{рх}} = 3871 - 261,25 = 3609,75 \text{ Дж}.$$

4. Мощность, требуемая от привода при вращении ведущего звена со средней скоростью ω_1 :

$$N = T_{\text{д}} \cdot \omega_1 = 616,4 \cdot 12 = 7396,8 \text{ Вт}.$$

Средняя (за целый оборот) мощность полезного сопротивления

$$N_{\text{пс}} = N_{\text{д}} \cdot \eta = T_{\text{д}} \cdot \omega \cdot \eta = N \cdot \eta = 7396,8 \cdot 0,73 = 5399,664 \text{ Вт}.$$

3. ДИНАМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Кроме уравнения движения механизма в форме интеграла энергии в некоторых случаях удобно применять уравнение движения механизма в форме дифференциального уравнения второго порядка.

3.1. Приведение сил, масс и моментов инерции звеньев в механизмах

В целях исследования работы механизма силы и моменты сил, приложенные к какому-либо звену механизма, могут быть приведены к любому другому звену, которое называют звеном приведения. Принцип приведения сил и пар сил основан на требовании равенства элементарных работ приводимой и приведенной сил или моментов сил.

Так как элементарная работа пропорциональна мгновенной мощности этих сил, то можно воспользоваться также равенством мгновенных мощностей.

В зависимости от характера движения звена приведения обычно определяют или приведенную силу (рис. 3.1), или приведенный момент (рис. 3.2).

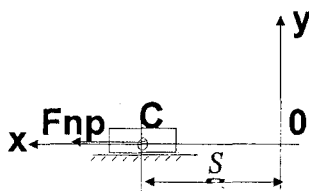


Рис. 3.1. Поступательное звено приведения

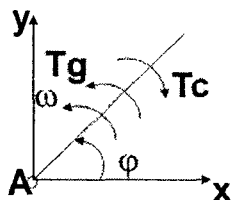


Рис. 3.2. Вращательное звено приведения

Исходя из определения, имеем

$$P_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n P_i, \quad (3.1)$$

где $P_{\text{пр}}$ – мощность приведенной силы или момента сил;
 P_i – мощность каждой из приводимых сил или моментов.

Для приведенной силы уравнение (3.1) в развернутом виде можно записать так:

$$F_{\text{пр}} V_{\text{пр}} \cos \alpha_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n (F_i V_i \cos \alpha_i \pm M_i \omega_i), \quad (3.2)$$

где α_i и $\alpha_{\text{пр}}$ – углы между векторами соответствующих сил и векторами скоростей перемещения звена в точках приложения сил;

$V_{\text{пр}}$ и V_i – скорости точек приложения соответствующих сил;

M_i и ω_i – соответственно момент, приложенный к i -му звену, и угловая скорость этого звена.

В уравнении (3.2) знак «плюс» принимается, если M_i и ω_i направлены в одну сторону, а «минус» – в противном случае.

Для приведенного момента уравнение (3.1) в развернутом виде можно записать так:

$$M_{\text{пр}} \omega_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \left(F_i \frac{V_i}{\omega_{\text{пр}}} \cos \alpha_i \pm M_i \frac{\omega_i}{\omega_{\text{пр}}} \right), \quad (3.3)$$

где $\omega_{\text{пр}}$ – угловая скорость звена приведения.

Из уравнений (3.2) и (3.3) могут быть найдены $F_{\text{пр}}$ и $M_{\text{пр}}$ по формулам

$$F_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \left(F_i \frac{V_i}{V_{\text{пр}}} \cos \alpha_i \pm M_i \frac{\omega_i}{V_{\text{пр}}} \right);$$

$$M_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \left(F_i \frac{V_i}{\omega_{\text{пр}}} \cos \alpha_i \pm M_i \frac{\omega_i}{\omega_{\text{пр}}} \right).$$

В числе приводимых сил и моментов могут быть силы и моменты сил трения.

Каждое звено механизма обладает некоторой массой и моментом инерции относительно оси, проходящей через центр массы. Эти массы и моменты инерции при динамических расчетах можно заменить

одной приведенной массой (или моментом инерции), связанной со звеном приведения, при этом необходимо, чтобы кинетическая энергия приводимых масс и моментов инерции была бы равна кинетической энергии приведенной массы (или момента инерции).

Кинетическая энергия любого механизма, совершающего плоское движение:

$$T_i = \frac{m_i V_i^2}{2} + \frac{J_i \omega_i^2}{2},$$

где первое слагаемое определяет кинетическую энергию звена при его поступательном движении со скоростью центра масс V_i и второй член – кинетическую энергию звена при его вращении со скоростью ω_i относительно мгновенной оси (J_i – момент инерции относительно центра массы).

Кинетическая энергия приведенной массы, связанной со звеном, совершающим поступательное движение, должна быть

$$T_{\text{пр}} = \frac{m_{\text{пр}} V_{\text{пр}}^2}{2} \quad (3.4)$$

и приведенного момента инерции, связанного со звеном приведения, совершающим вращательное движение:

$$T_{\text{пр}} = \frac{J_{\text{пр}} \omega_{\text{пр}}^2}{2}. \quad (3.5)$$

Исходя из определения, получим

$$T_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{m_i V_i^2}{2} + \frac{J_i \omega_i^2}{2} \right) \right]. \quad (3.6)$$

Подставляя в выражение (3.6) значение $T_{\text{пр}}$ из соотношений (3.4) и (3.5), получим

$$m_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{V_i}{V_{\text{пр}}} \right)^2 + J_i \left(\frac{\omega_i^2}{V_{\text{пр}}} \right) \right]$$

или

$$m_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{V_i}{\omega_{\text{пр}}} \right)^2 + J_i \left(\frac{\omega_i^2}{\omega_{\text{пр}}} \right) \right]. \quad (3.7)$$

Рассмотрим **п р и м е р** определения $M_{\text{пр}}$ и $J_{\text{пр}}$, приведенных к валу двигателя многоступенчатого редуктора (рис. 3.3), с учетом потерь на трение, если момент сопротивления на выходном валу равен M_c , КПД механизма η .

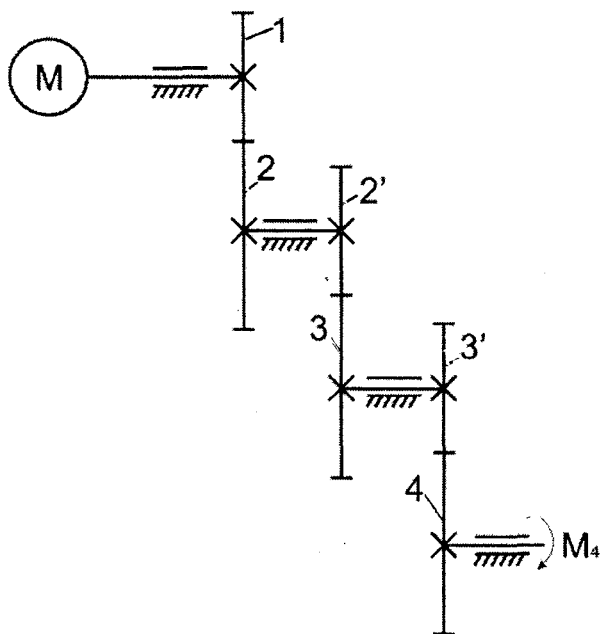


Рис. 3.3. Многоступенчатый редуктор

Решение

Приведенный момент определяется по формуле

$$M_{\text{пр}} = \frac{1}{\omega_{\text{пр}}} (M_4 \omega_4 + P_{\text{тр}}),$$

где $P_{\text{тр}}$ – мощность потерь сил трения:

$$P_{\text{тр}} = \frac{P_4 \psi}{1 - \psi}.$$

$$\psi_{\text{тр}} = \frac{P_{\text{тр}}}{P_{\text{тр}} + P_4} \text{ — коэффициент потерь на трение.}$$

Тогда

$$M_{\text{пр}} = \frac{1}{\omega_{\text{пр}}} \left(M_4 \omega_4 + M_4 \omega_4 \frac{\psi}{1 - \psi} \right) = M_4 \frac{\omega_4}{\omega_{\text{пр}}} \left(\frac{\psi}{1 - \psi} \right)$$

или

$$M_{\text{пр}} = M_4 \frac{\omega_4}{\omega_{\text{пр}} \eta}.$$

Рассмотрим определение приведенного к ведущему валу момента инерции для механизма, изображенного на рис. 3.3. Звенья (зубчатые колеса) совершают вращательное движение, поэтому по формуле (3.9) получим

$$J_{\text{пр}} = J_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_1} \right)^2 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + J_3 \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 + J'_3 \left(\frac{\omega'_3}{\omega_1} \right)^2 + J_4 \left(\frac{\omega_4}{\omega_1} \right)^2$$

или

$$J_{\text{пр}} = J_1 + (J_2 + J_2') \frac{1}{i_{12}^2} + (J_3 + J_3') \frac{1}{i_{13}^2} + J_4 \frac{1}{i_{14}^2}.$$

3.2. Дифференциальное уравнение движения звена приведения

Рассмотрим случай, когда звено приведения совершает вращательное движение. Изменение кинетической энергии всех звеньев механизма зависит от работы, производимой движущими силами и силами сопротивления:

$$T - T_0 = \int_0^{\varphi} (M_{\text{пр.д}} - M_{\text{пр.с}}) d\varphi, \quad (3.8)$$

где T_0 – кинетическая энергия всех звеньев в начале рассматриваемого периода движения;

T – текущее значение кинетической энергии;

$M_{\text{пр.д}}$ – приведенный к звену приведения момент движущих сил;

$M_{\text{пр.с}}$ – приведенный к звену приведения момент всех сил сопротивления;

φ – текущее значение угла поворота звена приведения.

Продифференцируем уравнение (3.8) по $d\varphi$:

$$\frac{dT}{d\varphi} - \frac{dT_0}{d\varphi} = M_{\text{пр.с}}, \quad (3.9)$$

здесь $\frac{dT_0}{d\varphi} = 0$, т.к. T_0 – фиксированное значение.

Принимая, что

$$T = T_{\text{пр}} = \frac{J_{\text{пр}}\omega^2}{2}, \quad (3.10)$$

где ω – угловая скорость звена приведения, из (3.9) с учетом (3.10) получим

$$\frac{dT}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{dJ_{\text{пр}}}{d\varphi} \omega^2 + J_{\text{пр}} \omega \frac{d\omega}{d\varphi};$$

учитывая, что

$$\frac{\omega d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon,$$

окончательно будем иметь

$$\frac{1}{2} \frac{dJ_{\text{пр}}}{d\varphi} \omega^2 + J_{\text{пр}} \varepsilon = M_{\text{пр.д}} - M_{\text{пр.с}}.$$

Если механизм содержит звенья, совершающие только вращательное движение, то

$$J_{\text{пр}} = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{dJ_{\text{пр}}}{d\varphi} = 0,$$

тогда

$$J_{\text{пр}} \varepsilon = M_{\text{пр.д}} - M_{\text{пр.с}}.$$

3.3. Пример

Вращающееся звено приведения механизма имеет приведенный момент инерции $J = 10 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. На режиме разбега от угловой скорости $\omega = 0$ до угловой скорости ω_y установившегося движения на него действует приведенный момент движущих сил

$$M_{\text{д}} = a - b\omega,$$

где $b = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{рад}$;

$a = 1000 \text{ Н}\cdot\text{м}$, и приведенный момент сил полезного сопротивления $M_{\text{с}} = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

На режиме выбега угловой скорости ω_y до $\omega = 0$ движущийся момент отключается и для уменьшения времени выбега вводится приведенный тормозной момент $M_{\text{т}} = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Требуется:

1) на основании дифференциального уравнения движения определить зависимость угловой скорости ω от времени t на режиме разбега и выбега;

2) определить аналитически угловую скорость ω_y установившегося движения;

3) определить время выбега t_p ;

4) построить графики угловой скорости $\omega(t)$ и углового ускорения $\varepsilon(t)$ звена приведения на режимах разбега (разгона) и выбега;

5) построить графики моментов M_d и M_c на общих осях координат и по ним графически определить ω_y ;

6) построить кривую мощности $P(\omega)$, развиваемой движущим моментом в зависимости от угловой скорости;

7) по графику $P(\omega)$ определить максимальную мощность P_{\max} , развиваемую движущим моментом, и соответствующую ей угловую скорость ω_p .

Р е ш е н и е

1. Определение зависимости угловой скорости ω от времени t на режиме разгона.

Составим дифференциальные уравнения движения в форме

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d - M_c, \quad (3.11)$$

где

$$M_d = a - b\omega = 1000 - \omega$$

или

$$M_c = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad J = 10 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = 1000 - \omega.$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{d\omega}{1000 - \omega} = \frac{dt}{J}. \quad (3.13)$$

Из уравнения (3.13) с учетом того, что на стадии разгона при $t = t_0 = 0$ $\omega = \omega_0 = 0$, получим

$$-\ln|\omega - 1000| + \ln(\omega_0 - 1000) = \frac{1}{J}(t - t_0)$$

или

$$\omega = \omega_y (1 - e^{-Jt}) = \omega_y (1 - e^{-0,1t}). \quad (3.14)$$

2. Определим зависимость угловой скорости от времени t на режиме работы выбега из дифференциального уравнения (3.11) с учетом того, что $M_d = 0$; $M_c = 0$, а действует тормоз с $M_T = 400$ Н·м:

$$J \frac{d\omega}{dt} = -M_T. \quad (3.15)$$

Из (3.15) получим

$$d\omega = \frac{M_T}{J} dt \quad \text{или} \quad \int_{\omega=\omega_y}^{\omega} d\omega = \int_{t=0}^t -\frac{M_T}{J} dt$$

$$\omega = \omega_y = -\frac{M_T}{J} t,$$

окончательно имеем

$$\omega = \omega_y = -\frac{M_T}{J} t = \omega_y - \frac{400}{10} t = \omega_y - 40t. \quad (3.16)$$

Скорость установившегося движения ω_y определяется из условия

$$M_d = M_c \quad \text{или} \quad 1000 - \omega_y = 200.$$

Отсюда

$$\omega_y = 1000 - 200 = 800 \text{ с}^{-1}.$$

С учетом этого из (3.14) и (3.16) окончательно получим:

а) на режиме разгона

$$\omega = \omega_y (1 - e^{-0,1t}) = 800 (1 - e^{-0,1t}); \quad (3.17)$$

б) на стадии выбега

$$\omega = \omega_y - 40t = 800 - 40t = 40(20 - t). \quad (3.18)$$

3. Определение времени выбега t_b .

Время t_b определяется из уравнения (3.16) при условии, что в конечный момент выбега $\omega = 0$, поэтому

$$0 = \omega_y - 40t \quad \text{или} \quad t = \frac{\omega_y}{40} = \frac{800}{40} = 20 \text{ с}.$$

4. Построение графиков угловой скорости $\omega(t)$ осуществляется по формулам (3.17) и (3.18). Результаты расчетов сведены в таблицу.

Угловые ускорения на режимах разгона и выбега определяются из (3.12) и (3.15).

а) на режиме разгона

$$\varepsilon(t) = \frac{800 - \omega}{J} = \frac{800 - \omega}{10} = 80 - 0,1\omega; \quad (3.19)$$

в) на стадии выбега

$$\varepsilon(t) = \frac{M_T}{J} = -\frac{400}{10} = -40 \text{ с}^{-2}. \quad (3.20)$$

Результаты расчетов по формулам (3.17) – (3.20) приведены в таблице (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Разгон

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$\omega(t)$	0	76,13	145,02	207,3	263,7	314,8	360,9	402,7
$\varepsilon(t)$	80	72,39	65,5	59,3	53,6	48,5	43,9	39,7

Окончание табл. 3.1

t	8	9	10	15	20	30	40	50
$\omega(t)$	440,5	474,7	505,7	621,5	691	760	785	794
$\varepsilon(t)$	35,9	32,5	29,4	17,8	10,9	4	1,5	0,6

Таблица 3.2

Выбег

t	0	1	2	3	4	5
$\omega(t)$	800	760	720	680	640	600
$\varepsilon(t)$	-40	-40	-40	-40	-40	-40

Окончание табл. 3.2

t	6	7	8	9	10	15	20
$\omega(t)$	560	520	480	440	400	200	0
$\varepsilon(t)$	-40	-40	-40	-40	-40	-40	-40

Графики $\omega(t)$ и $\varepsilon(t)$ представлены на рис. 3.4 и рис. 3.5.

Далее строятся графики M_d и M_c и определение по ним ω_y .

Из графика (рис. 3.6) следует, что $\omega_y = 800 \text{ с}^{-1}$.

5. Построение кривой мощности $P(\omega)$, развиваемой движущим моментом M_d , в зависимости от угловой скорости.

Мощность рассчитывалась по формуле

$$P(\omega) = M_d(\omega) \cdot \omega(t). \quad (3.21)$$

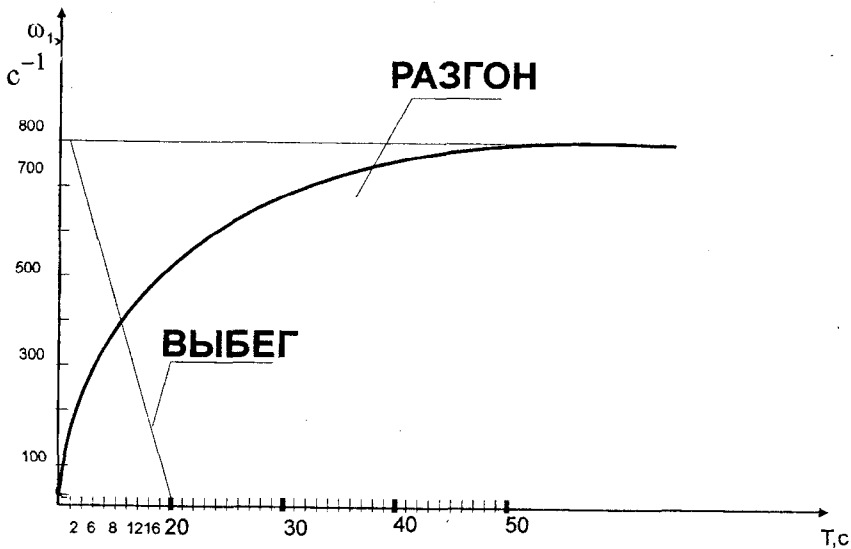


Рис. 3.4. График $\omega(t)$

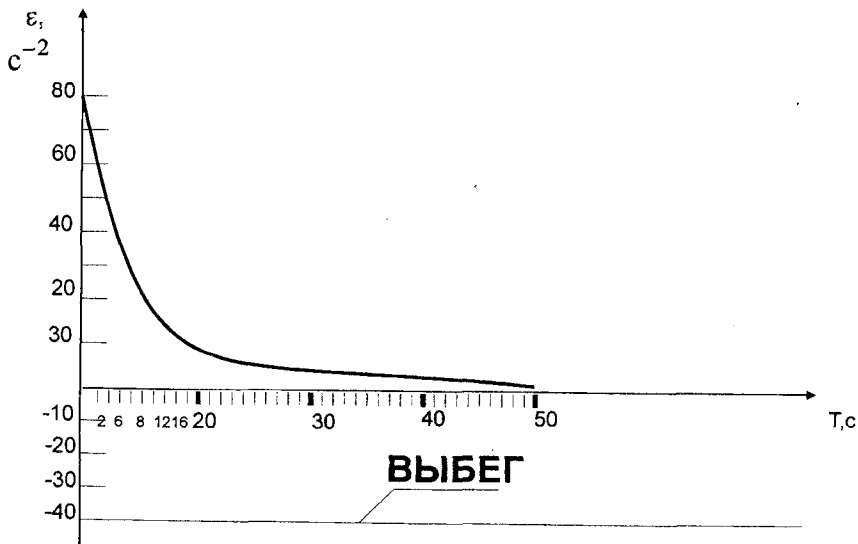


Рис. 3.5. График $\epsilon(t)$

На основании формул (3.11) и (3.21) и табл. 3.1 получим таблицу расчетных значений.

Таблица 3.3

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$M_d(\omega)$	1000	923,8	855	792,7	736,3	685,2	639,1	597,3
$P(\omega)$, кВт	0	70,33	123,9	164,3	194,2	215,7	230,6	240,6

Окончание табл. 3.3

t	8	9	10	15	20	30	40	50
$M_d(\omega)$	559,5	425,3	494,3	378,3	309	240	215	206
$P(\omega)$, кВт	246,5	249,4	250,0	235,1	213,5	182,4	168,8	163,6

6. Определение максимальной мощности P_{\max} , развиваемой движущим моментом, и соответствующей ей угловой скорости.

Из рис. 3.7 получим, что

$$P_{\max} = 256 \text{ кВт.}$$

Угловая скорость, соответствующая данной мощности, $\omega = 530 \text{ с}^{-1}$.

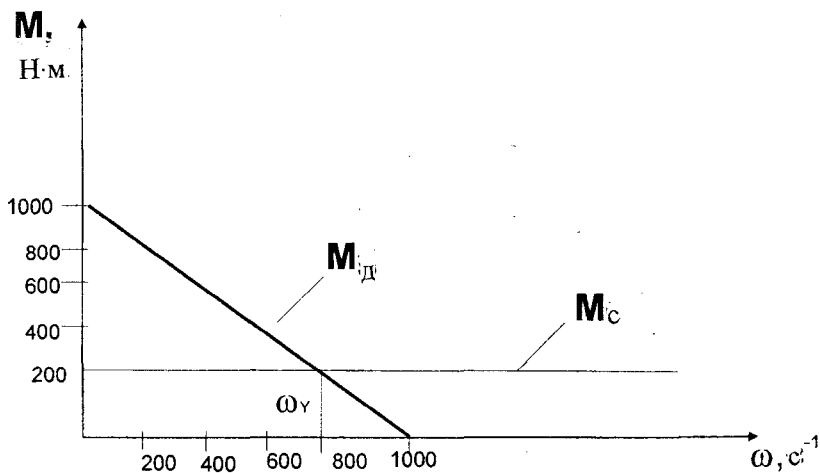


Рис. 3.6. График $M(\omega)$

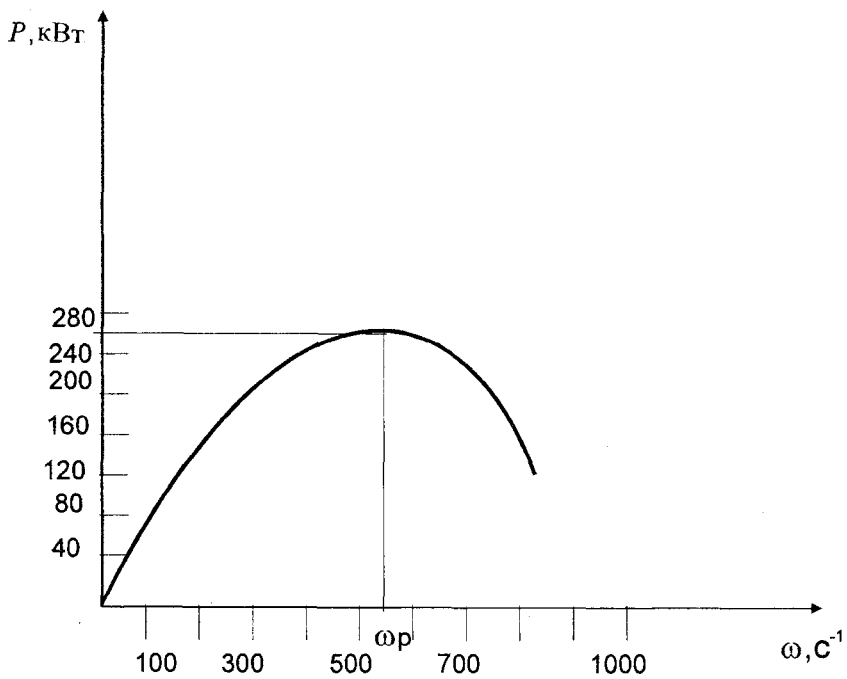


Рис. 3.7. График $P(\omega)$

Л и т е р а т у р а

1. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин. – М., 1975. – С. 639.
2. Прикладная механика / Под ред. В.М. Осецкого. – М., 1977. – С. 489.
3. Юдин, В.А., Петрокас, Л.В. Теория механизмов и машин. – М., 1977. – С. 527.
4. Артоболевский, И.И., Эдельштейн, Б.В. Сборник задач по теории механизмов и машин. – М., 1975. – С. 256.
5. Юдин, В.А., Барсов, Г.А., Чупин, Ю.Н. Сборник задач по теории механизмов и машин / Под ред. Л.В. Петрокаса. – М.: Высшая школа, 1982. – 216 с.

О г л а в л е н и е

1. КИНЕМАТИКА ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ.	3
1.1. Кинематика зубчатых механизмов с неподвижными осями.	3
1.2. Кинематика механизмов с подвижными осями.	8
2. ДИНАМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ В ФОРМЕ ИНТЕГРАЛА ЭНЕРГИИ.	20
2.1. Силы, действующие на звенья механизмов.	20
2.2. Уравнение движения механизма в форме интеграла энергии (уравнение кинетической энергии).	20
3. ДИНАМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ.	33
3.1. Приведение сил, масс и моментов инерции звеньев в механизмах.	33
3.2. Дифференциальное уравнение движения звена приведения.	38
3.3. Пример.	39
Л и т е р а т у р а	47

Учебное издание

ВАСИЛЁНОК Василий Дмитриевич
РОЗАНОВА Наталья Николаевна
КОМЯК Игорь Михайлович

ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МАШИН И ПРИБОРОВ

Учебно-методическое пособие по решению задач

В 2 частях

Часть 2

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ, МАШИН И ПРИБОРОВ

Редактор Т.Н. Микулик
Компьютерная верстка Н.А. Школьниковой

Подписано в печать 14.01.2008.

Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 2,85. Уч.-изд. л. 2,23. Тираж 200. Заказ 638.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.

ЛИ 02330/0131627 от 01.04.2004.

220013, Минск, проспект Независимости, 65.