



Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Сопротивление материалов и теория упругости»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ПРИМЕРЫ и ЗАДАЧИ

Минск 2008

Кафедра «Сопроотивление материалов и теория упругости»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

(примеры и задачи)

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Республики Беларусь
по образованию в области строительства и архитектуры
в качестве учебно-методического пособия
для студентов строительных специальностей*

Авторы:

*М.К. Балыкин, В.А. Пенькевич, И.А. Голубев,
П.В. Шишлаков, С.И. Зиневич, А.Е. Кончиц, М.В. Югова*

Рецензенты:

Я.Н. Ковалев, Л.Р. Мытько

Балыкин, М.К.

С 64 Сопроотивление материалов (примеры и задачи): учебно-методическое пособие для студентов строительных специальностей / М.К. Балыкин [и др.]. – Минск: БНТУ, 2008. – 365 с.

ISBN 978-985-479-857-8.

Учебно-методическое пособие состоит из разделов о простых и сложных видах сопроотивлений, неразрезных балках, продольном изгибе и динамическом действии нагрузки.

По каждой теме (разделу) приведены краткие (справочные) сведения из теории курса, решения характерных задач и задачи для аудиторного и самостоятельного решения в нескольких вариантах.

Ко всем задачам даны ответы.

Пособие предназначено для студентов строительных специальностей дневного и заочного отделений.

УДК 620.1 (076.1)

ББК 30.121я7

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении курса «Сопротивление материалов» важное значение имеет практическое применение выводов теории. В этой связи программой курса предусматривается определенное число часов практических занятий, на которых студенты знакомятся с приемами расчета элементов конструкций. Приобретенные при этом знания и навыки в значительной степени облегчат усвоение последующих специальных дисциплин.

У студентов, изучающих курс «Сопротивление материалов», наибольшие трудности возникают при решении задач. А число учебных часов, отведенных планами для практических занятий, часто недостаточно. К тому же число студентов заочной формы обучения еще достаточно велико.

Чтобы помочь студентам овладеть методикой и приобрести навыки в решении задач, коллектив кафедры «Сопротивление материалов и теория упругости» БНТУ, исходя из многолетнего опыта работы, считает целесообразным создание настоящего учебно-методического пособия в помощь к практическим занятиям.

Пособие предназначено для студентов строительных специальностей как дневной, так и заочной формы обучения и предусматривается в двух частях. В первой части рассматриваются простые виды сопротивлений, во второй – сложные, а так же устойчивость и динамические воздействия.

Предусматривается, что студенты, прежде чем приступить к решению задачи, должны восстановить в памяти теоретические выкладки. Поэтому по каждой теме курса помещены краткие (справочные) сведения из теории, приведены необходимые положения, формулы и расчетные условия, которые помогут лучше понять и осмыслить методику решения задач.

В издании по каждой теме курса приведены подробные решения 4-5 характерных задач, а так же условия и данные еще такого же количества задач, предназначенных для аудиторного или самостоятельного решения. К каждому условию задачи дается несколько схем конструкций с различными цифровыми данными, что увеличивает вариантность. По некоторым разделам курса включены задачи повышенной сложности. К каждой задаче приведены ответы (числовые значения искомых параметров).

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Назначение курса

Инженерные конструкции любой сложности состоят из простых элементов (стержень, пластина, оболочка и др.), которые, воспринимая эксплуатационную нагрузку (внешние силы), деформируются, вызывая у материала его сопротивление этой деформации.

В курсе «Сопротивление материалов» рассматривается расчет отдельных элементов конструкций. Расчет конструкций в целом изучается в специальных курсах (строительная механика, металлические и железобетонные конструкции).

Элементы конструкций рассчитываются на прочность, жесткость и устойчивость.

Прочность – способность элемента конструкции воспринимать нагрузку не разрушаясь.

Жесткость – способность элемента конструкции оказывать сопротивление деформации, допуская ее в определенных пределах.

Устойчивость – способность элемента конструкции сохранять под нагрузкой первоначальную форму равновесия.

Конструкционные материалы

Реальные конструкционные материалы под воздействием нагрузки деформируются, т.е. изменяют свои размеры и форму. Деформации могут быть упругими и пластическими. Упругие деформации исчезают после снятия нагрузки, пластические сохраняются.

В инженерных конструкциях применяются в основном две группы материалов:

- пластичные, у которых разрушение происходит при значительной остаточной деформации (сталь, медь, дюралюминий);
- хрупкие, у которых разрушение происходит при очень незначительной деформации (чугун, бетон, кирпич).

Пластичные материалы сопротивляются растяжению и сжатию одинаково, а хрупкие – различно (лучше сжатию).

Гипотезы и допущения

В теории курса при выводе расчетных формул применяется ряд гипотез и допущений.

Основные из них:

- материал принимается сплошным, однородным и изотропным (свойства в любой точке и направлении считаются одинаковыми);
- материал принимается идеально упругим;
- материал до определенной степени нагружения деформируется линейно, т.е. следует закону Гука;
- деформации элемента конструкции весьма малы по сравнению с размерами самого элемента;
- до приложения внешних сил в материале отсутствуют напряжения;
- часто используется принцип независимости (сложения) действия сил.

Расчетная схема

Для проведения инженерного расчета реальная конструкция разделяется на ряд простых элементов, для которых путем схематизации геометрических, нагрузочных и взаимодействующих факторов составляются расчетные схемы – упрощенное изображение элемента конструкции.

При этом учитываются наиболее существенные факторы, влияющие на надежность этого элемента, а все менее существенные отбрасываются.

Для одного и того же реального элемента может быть составлено несколько расчетных схем. Окончательно принимается та схема, которая обеспечит более полное приближение к реальному элементу и требуемую по техническим нормам, надежность.

Для составления расчетной схемы элемент конструкции изображается его осевой линией (продольной осью), проходящей через центры тяжести поперечных сечений. Все действующие на элемент внешние силы приводятся к этой оси по правилу механики.

На расчетной схеме намечается система трех взаимно перпендикулярных осей координат: Z – вдоль продольной оси, X , Y – поперек продольной оси (рис. 1, а, б). Начало координатных осей располагается обычно в крайней левой точке расчетной схемы.

Каждый элемент конструкции (стержень, балка, колонна) соединяется с другим элементом или грунтовым основанием при помощи опорных устройств. Опоры подразделяются на шарнирно-подвижные, шарнирно-неподвижные, заделки (рис. 1, а, б).

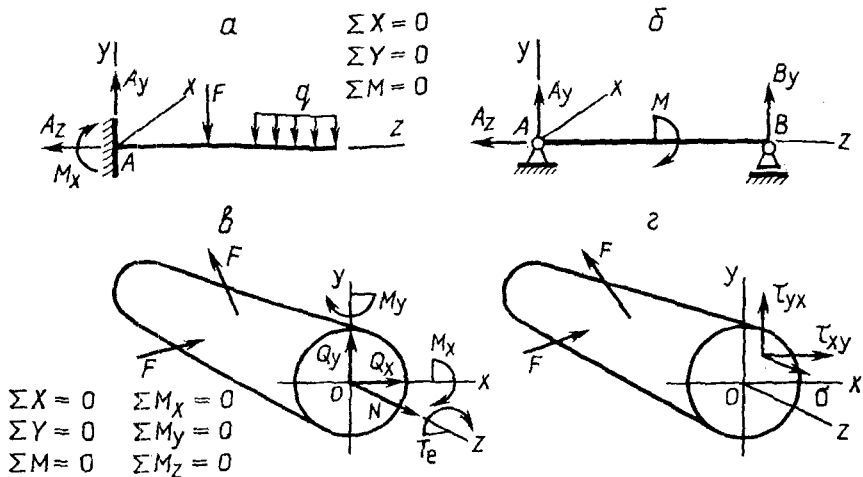


Рис. 1

Внешние силы

Элементы конструкций испытывают воздействие внешних сил, которые делятся на активные (нагрузки) и реактивные (реакции опор). Среди нагрузок различают: сосредоточенные F , M , T_e (считаются приложенными в точке элемента или конкретном сечении) и распределенные q (по длине или площади элемента) (см. рис. 1, а, б).

Опорные реакции плоской системы определяются из трех условий равновесия (статики): $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M = 0$ (см. рис. 1, а, б).

Внутренние силы

В результате действия внешних сил в элементе конструкции возникают внутренние силы (усилия), которые сопротивляются действию внешних сил и обусловлены упругим взаимодействием частиц материала.

Внутренние силы привязываются к системе координатных осей стержня и подразделяются:

– на продольные N – действующие по продольной оси Z , т.е. перпендикулярно к поперечному сечению;

- поперечные Q_x и Q_y – действующие в плоскости поперечного сечения и направленные по соответствующим координатным осям;
- изгибающие моменты M_x и M_y (моменты пар сил) – действующие перпендикулярно плоскости поперечного сечения, относительно соответствующих координатных осей;
- крутящие моменты T (момент пары сил) – действующие в плоскости поперечного сечения, т.е. относительно продольной оси Z .

Все внутренние силовые факторы (усилия) показаны на рис. 1, в. Для определения внутренних сил используется метод сечений. Стержень в исследуемом сечении мысленно рассекается на две части. Одна часть стержня отбрасывается, а действие отброшенной части на оставленную (рассматриваемую) заменяется неизвестными внутренними силами.

Составляются уравнения равновесия между известными внешними силами, действующими по одну сторону от сечения, и неизвестными (искомыми) внутренними силами в этом сечении. Из этих уравнений (см. рис. 1, в) определяется значение внутренних сил.

Виды сопротивлений

В зависимости от того, какие внутренние силы возникают в поперечном сечении стержня, различают несколько видов сопротивлений.

Простые виды сопротивления стержня:

- растяжение-сжатие – когда в поперечном сечении возникает только продольная сила N ;
- сдвиг – когда в поперечном сечении возникает только поперечная сила Q_x или Q_y ;
- кручение – когда в поперечном сечении возникает только крутящий момент T ;
- чистый изгиб – когда в поперечном сечении возникает только изгибающий момент M ;
- поперечный изгиб – когда возникает поперечная сила Q и изгибающий момент M .

При сложных видах сопротивлений в поперечном сечении стержня одновременно возникают несколько внутренних силовых факторов. Различают: косой изгиб (M_x и M_y), изгиб с кручением (M_x и T), изгиб с растяжением-сжатием (N , M_x , M_y) и др.

Напряжения

Величина внутренних сил, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения, называется напряжением.

Различают нормальные σ и касательные τ напряжения. Нормальные напряжения действуют перпендикулярно поперечному сечению и являются функцией $\sigma = f(N, M)$, а касательные – в плоскости поперечного сечения и являются функцией $\tau = f(Q, T)$ (см. рис. 1, з).

Деформации

Образование внутренних сил в теле (элементе конструкции) сопровождается появлением упругих деформаций. При этом изменяются размеры и форма тела, а точки его перемещаются в пространстве. Различают линейные перемещения (по прямой линии) $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ – для точек и угловые δ_{zy} – для линий, сечений (рис. 2, а).

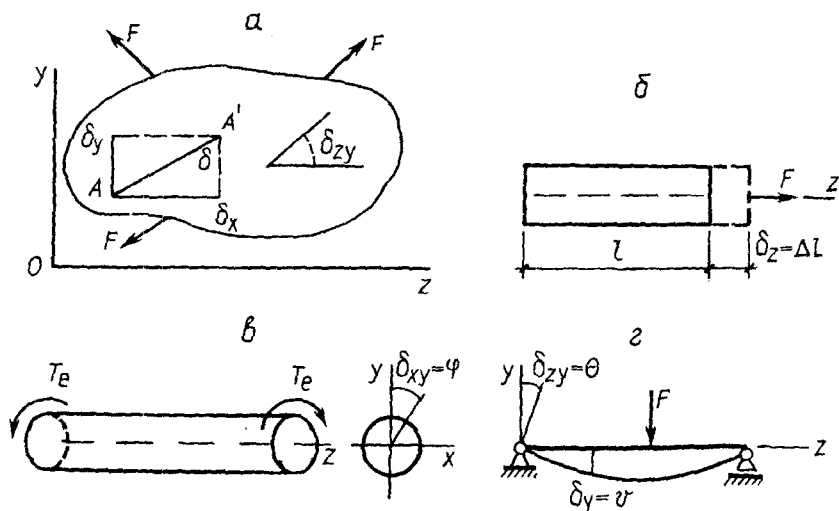


Рис. 2

В конкретных видах сопротивлений перемещения приобретают определенные обозначения и названия. При растяжении-сжатии

$\delta_z = \Delta l$ – продольная деформация (см. рис. 2, б); при кручении $\delta_{xy} = \varphi$ – угол закручивания (см. рис. 2, в); при изгибе $\delta_y = v$ – прогиб, а $\delta_{zy} = \theta$ – угол поворота сечения (см. рис. 2, г).

В упругой стадии деформации все перемещения в элементе конструкции происходят совместно, т.е. соседние точки сечения не перемещаются произвольно друг относительно друга.

Методы расчета на прочность и жесткость

В расчетной практике используется несколько методов расчета на прочность. Наиболее распространены два из них.

Расчет деталей машин и механизмов ведется по методу допускаемых напряжений, а в строительном проектировании – по методу предельных состояний.

По методу допускаемых напряжений условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}} \quad \text{или} \quad \tau_{\max} \leq \tau_{\text{adm}},$$

где $\sigma_{\max}(\tau_{\max})$ – максимальные напряжения в элементе конструкции;
 $\sigma_{\text{adm}}(\tau_{\text{adm}})$ – допускаемые напряжения для материала элемента.

Максимальные напряжения определяются от нормативной нагрузки, т.е. нагрузки установленной нормами проектирования.

Допускаемые напряжения устанавливаются по результатам испытания материала с учетом общего коэффициента запаса прочности, учитывающего ряд факторов влияющих на его прочность.

По методу предельных состояний условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq R \quad \text{или} \quad \tau_{\max} \leq R_s,$$

где $R(R_s)$ – расчетные сопротивления для материала элемента.

Максимальные напряжения определяются от расчетной нагрузки, учитывающей возможность отклонения ее от нормативной.

Расчетные сопротивления также устанавливаются по результатам испытания материала, но с использованием ряда частных коэффициентов, каждый из которых учитывает какой-либо один фактор, влияющий на его прочность.

Расчет по методу предельных состояний позволяет запроектировать элемент конструкций более рационально, т.е. с меньшими затратами материала.

Из условия прочности можно решить три типа задач:

1. Проверить прочность стержня, когда известна нагрузка, форма и размеры поперечного сечения, и род материала.
2. Определить размеры поперечного сечения стержня, если известна нагрузка, форма поперечного сечения и род материала.
3. Определить наибольшую допустимую нагрузку на стержень, если известны форма и размеры поперечного сечения, и род материала.

Расчет на жесткость элемента конструкции сводится к определению его максимальной деформации δ_{\max} под действием нормативной нагрузки и сравнении ее с допустимым значением δ_{adm} , установленным нормами проектирования.

Условие жесткости имеет вид

$$\delta_{\max} \leq \delta_{\text{adm}}.$$

Поскольку в курсе «Сопротивление материалов» рассматриваются принципы расчета на прочность и жесткость, а не конкретные конструкции, в настоящем пособии все нагрузки указываются в расчетных значениях, а расчеты выполняются по методу предельных состояний. Исключение составляют расчеты на изгиб с кручением, которые выполнены по методу допускаемых напряжений.

Виды напряженного состояния материала

В общем случае действия внешних сил на тело (элемент конструкции) по граням элементарно малого прямоугольного параллелепипеда, выделенного в любом направлении вокруг любой точки его (тела), действует совокупность нормальных σ и касательных τ напряжений, обуславливающих напряженное состояние в этой точке (рис. 3, а).

Поворачивая параллелепипед вокруг точки тела можно найти такое его положение, при котором касательные напряжения по его граням исчезнут, а нормальные (в определенном количестве) сохранятся (рис. 3, б).

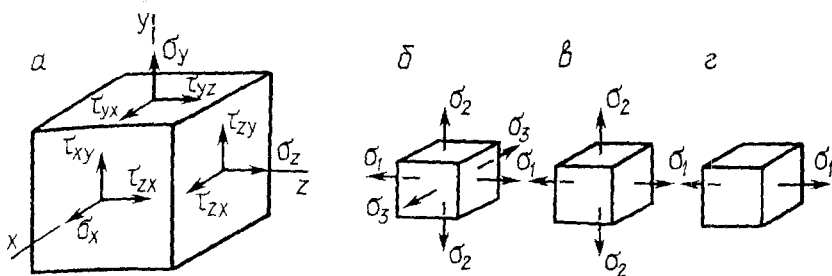


Рис. 3

Площадки, по которым отсутствуют касательные напряжения, называются главными, а действующие по ним нормальные напряжения – главными нормальными и обозначаются $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

По совокупности главных напряжений различают три вида напряженного состояния материала: объемное, когда все три главных напряжения отличны от нуля (см. рис. 3, б), плоское, когда два главных напряжения отличны от нуля (см. рис. 3, в), и линейное, когда отлично от нуля лишь одно главное напряжение (см. рис. 3, г).

Принципы составления условия прочности элемента конструкции для линейного и сложного (плоского и объемного) напряженного состояния различны.

В случае линейного напряженного состояния максимальное нормальное напряжение σ_{\max} (σ_1 или σ_3) сравнивается с соответствующим расчетным сопротивлением R , которое сравнительно легко устанавливается при испытании материала на растяжение (сжатие).

Условие прочности при линейном напряженном состоянии имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq R.$$

Для случаев сложного напряженного состояния критерии прочности экспериментально не установлены из-за очень большого объема и сложности испытаний.

В настоящее время задача составления условия прочности при сложном напряженном состоянии решается с помощью теорий прочности, каждая из которых основана на определенной гипотезе, объясняющей причину разрушения материала.

При оценке прочности материала в случае сложного напряженного состояния вводится понятие расчетного напряжения σ_{des} , которое определяется по принятой теории прочности, и сравнивается с расчетным сопротивлением материала R :

$$\sigma_{des} \leq R.$$

Для пластичных материалов используется третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений) и четвертая энергетическая (теория удельной потенциальной энергии формоизменения).

В частном случае плоского напряженного состояния – чистом сдвиге, когда в поперечном сечении стержня возникают только касательные напряжения, условие прочности используется в виде

$$\tau_{max} \leq R_s,$$

где R_s – расчетное сопротивление материала сдвигу.

Раздел 1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Элемент конструкции (стержень) подвергается деформации растяжения или сжатия, когда внешние силы (сосредоточенные F и распределенные q) действуют на этот элемент по его центральной оси Z . (рис. 1.1, а). Такое растяжение-сжатие называется центральным (осевым).

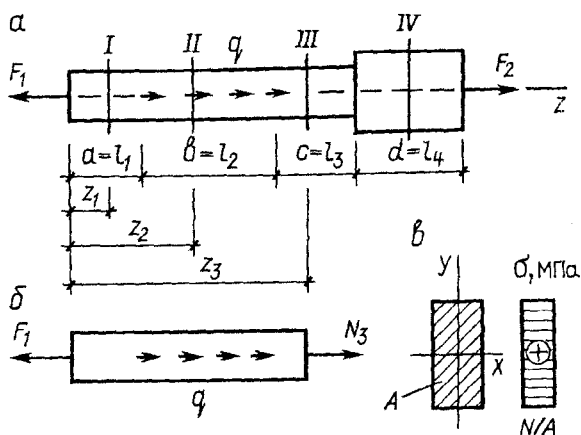


Рис. 1.1

Действующая на элемент конструкции система сил должна находиться в равновесии $\sum Z = 0$.

При растяжении длина стержня (участка) в продольном направлении увеличивается (деформация обозначается знаком «плюс»), а при сжатии – уменьшается (знак «минус»).

Внутренние силы

При центральном растяжении-сжатии в поперечном сечении стержня возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила N . Для определения ее на стержне, исходя из вида нагрузки и ее расположения, выделяются расчетные участки: между точками приложения сосредоточенных сил F и в пределах распределенной нагрузки q . Изменение размеров поперечного сечения также является границей расчетных участков (см. рис. 1.1, а).

В пределах каждого участка намечаются сечения (I, II...i) и отмечаются их положения в системе координатных осей ($Z_1, Z_2...Z_i$).

Для определения продольной силы N используется метод сечений. Стержень в исследуемом сечении мысленно рассекается на две части. Одна из частей его «отбрасывается». Поскольку весь стержень находится в равновесии, то и рассматриваемая часть его см. рис. 1.1, б) под действием известных внешних сил (F, q) и неизвестной внутренней N также должна находиться в равновесии, т.е. удовлетворять условию $\Sigma Z = 0$.

Составить выражения для определения продольной силы N можно двумя приемами.

Первый прием. На рисунке для каждого участка показывается отсеченная часть стержня и составляется уравнение равновесия этой части с использованием правила знаков для сил, принятое в курсе теоретической механики.

Так для сечения III (см. рис. 1.1, б) уравнение равновесия имеет вид $\Sigma Z = N_3 + ql_2 - F_1 = 0$, откуда $N_3 = -ql_2 + F_1$.

Второй прием. На рисунке для всех участков отсеченная часть стержня не показывается. Выражения для определения продольной силы составляются по следующему правилу: продольная сила N в сечении стержня численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, $-N = \Sigma F_i$. При определении N можно рассматривать любую часть «рассеченного» стержня.

Правило знаков для сил связано с учетом характера вызываемой ими деформации стержня (растяжение или сжатие).

Если внешняя сила (F, q) направлена от рассматриваемого сечения стержня (стремится растянуть рассматриваемую часть его), то в этом сечении возникает положительная продольная сила ($+N$), и если направлена к сечению (стремится сжать), то в сечении возникает отрицательная продольная сила ($-N$).

Изложенное правило знаков иллюстрируется на рис. 1.2.

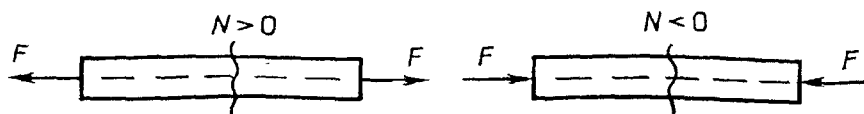


Рис. 1.2

Полученный в результате вычислений знак при N укажет на характер деформации участка стержня от суммарного действия сил: «плюс» означает, что участок стержня растянут, «минус» – что участок сжат.

Так для сечения III (рис. 1.1, б) выражение для продольной силы будет:

$N_3 = -ql_2 + F_1$ (сила q направлена к сечению, сила F_1 – от сечения), что соответствует первому приему.

Второй прием составления выражений для N сокращает объем вычислений и является общим для всех видов сопротивлений.

По вычисленным на участках стержня значениям N строится эпюра продольных сил (см. примеры); из которой выбирается максимальное значение продольной силы (N_{\max}) для проведения расчета стержня на прочность.

Напряжения. Условие прочности

Считается, что при центральном растяжении-сжатии все продольные волокна стержня деформируются одинаково и что поперечные сечения плоские и перпендикулярные продольной оси до деформации сохраняют свое состояние после деформации (гипотеза плоских сечений).

Продольная сила N связана с нормальным напряжением σ , которое распределяется по поперечному сечению равномерно, и определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (1.1)$$

где N – продольная сила в сечении стержня;

A – площадь поперечного сечения стержня.

График, показывающий изменение напряжения по высоте сечения стержня, называется эпюрой напряжений (эп. σ) (см. рис. 1.1, в).

При растяжении-сжатии стержня материал его в любой точке находится в условии линейного напряженного состояния. Поэтому проверка прочности ведется по максимальному нормальному напряжению (σ_{\max}) и условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq R. \quad (1.2)$$

где N_{\max} – продольная сила в наиболее нагруженном стержне (участке);
 R – расчетное сопротивление материала стержня растяжению-сжатию.

Для пластичных материалов (сталь) расчетные сопротивления при растяжении и сжатии одинаковы, для хрупких (чугун, бетон) – разные. (Опасным является растягивающее напряжение.)

Деформации. Условие жесткости

Возникновение продольной силы N в сечении стержня сопровождается продольной деформацией его: удлинением при растяжении и укорочением при сжатии.

Абсолютная продольная деформация Δl от сосредоточенных сил F определяется по формуле Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \quad (1.3)$$

где N – продольная сила в стержне (на участке);

l – длина стержня (участка);

A – площадь поперечного сечения стержня (участка);

E – модуль продольной упругости (модуль Юнга) материала стержня.

Абсолютная продольная деформация Δl от равномерно распределенной нагрузки q (действующей на данном участке стержня) определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{ql^2}{2EA}. \quad (1.4)$$

Абсолютная продольная деформация Δl от собственного веса стержня определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E}, \quad (1.5)$$

где γ – вес единицы объема материала стержня.

Вычислив деформации на участках стержня, можно найти перемещения характерных сечений его и построить эпюру перемещений (см. примеры).

Относительная продольная деформация ε стержня (или участка его) определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (1.6)$$

где Δl – абсолютная продольная деформация стержня (участка);
 l – длина стержня (участка).

Условие жесткости при растяжении-сжатии имеет вид

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\Delta l}{l} \leq \varepsilon_{\text{adm}}, \quad (1.7)$$

где ε_{adm} – предельно допустимая относительная продольная деформация.

Закон Гука при растяжении-сжатии (из формулы (1.3)), выражающий зависимость между напряжением и деформацией, имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (1.8)$$

Модуль продольной упругости E характеризует способность материала сопротивляться деформациям растяжения-сжатия в зависимости от его свойств.

1.1. Статически определимые системы

Статически определимыми являются системы, усилия в элементах которых можно определить при помощи одних лишь уравнений равновесия (статики).

Для плоской системы их три:

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma M = 0.$$

Пример 1.1

Стальная полоса прямоугольного поперечного сечения нагружена системой расчетных сил F (рис. 1.3, а)

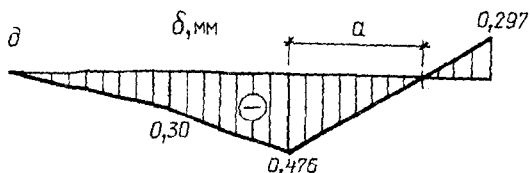
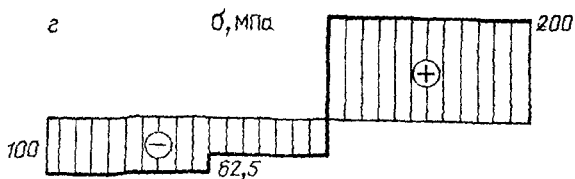
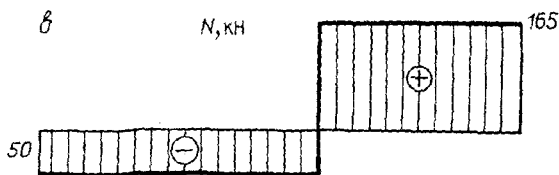
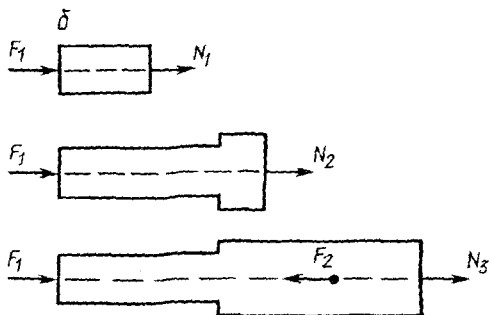
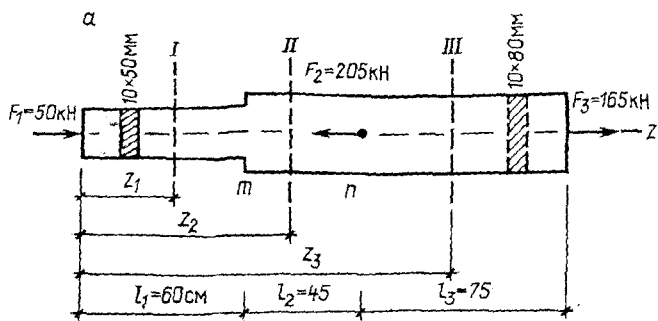


Рис. 1.3

Проверить прочность и жесткость полосы.

Для стали: расчетное сопротивление $R = 210$ МПа, модуль продольной упругости $E = 200$ ГПа, допустимая относительная продольная деформация $\varepsilon_{adm} = 1,05 \cdot 10^{-3}$.

Решение

Нагрузка F , действующая по продольной оси полосы, вызывает в ней деформацию растяжения-сжатия.

На рассматриваемой полосе выделяются три расчетных участка, в пределах которых намечаются сечения I...III. Длинам участков l придается индекс номера участка.

Проверим, выполняется ли условие равновесия элемента конструкции:

$$\Sigma Z = F_1 - F_2 + F_3 = 50 - 215 + 165 = 0 - \text{выполняется.}$$

Для определения продольных сил N на участках элемента воспользуемся первым приемом. Для этого нужно составить расчетные схемы для всех «отсеченных» участков элемента, начиная, например, с левого конца (см. рис. 1.3, б) и записать для них условия равновесия.

Рекомендуется искомые продольные силы N направлять от рассматриваемого сечения.

Участок I.

$$0 \leq z_1 \leq 0,6 \text{ м, } \Sigma Z = N_1 + F_1 = 0,$$

откуда $N_1 = -F_1 = -50$ кН (сжатие).

Участок II.

$$0,6 \leq z_2 \leq 1,05 \text{ м, } \Sigma Z = N_2 + F_1 = 0,$$

откуда $N_2 = -F_1 = -50$ кН (сжатие).

Участок III.

$$1,05 \leq z_3 \leq 1,8 \text{ м, } \Sigma Z = N_3 + F_1 - F_2 = 0,$$

откуда $N_3 = -F_1 + F_2 = -50 \text{ кН} + 215 \text{ кН} = 165 \text{ кН}$ (растяжение).

По полученным значениям N в выбранном масштабе строится эпюра продольных сил – эп. N (см. рис. 1.3, в). Положительные значения N откладываются вверх от линии эпюры, а отрицательные – вниз.

Заметим, что в пределах расчетных участков $N = \text{const}$. В сечении, где приложена сосредоточенная сила F , на эпюре N имеется «скачек» на величину этой силы. Из эпюры N следует, что наиболее нагруженным является третий участок — $N_3 = N_{\text{max}}$.

Нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях на расчетных участках элемента, определяются по формуле (1.1).

Сечение I.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-50 \cdot 10^3}{10 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = -0,1 \cdot 10^9 \text{ Па} = -100 \text{ МПа.}$$

Сечение II.

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-50 \cdot 10^3}{10 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = -0,0625 \cdot 10^9 \text{ Па} = -62,5 \text{ МПа.}$$

Сечение III.

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{165 \cdot 10^3}{10 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = 0,206 \cdot 10^9 \text{ Па} = 206 \text{ МПа.}$$

Замечание. Значения нагрузки и геометрические размеры элемента конструкции могут быть заданы в любых соответствующих мерах (Н, кН, МН, мм, см, м). В формулы напряжений и деформаций они должны подставляться в ньютонах и метрах.

По полученным значениям σ строится эпюра нормальных напряжений (см. рис. 1.3, з). Правило построения такое же, как и для эпюры N . В пределах расчетных участков $\sigma = \text{const}$, т.к. $N = \text{const}$ и $A = \text{const}$. В сечении, где приложены сосредоточенные силы F , а также где изменяются размеры поперечного сечения, на эпюре σ наблюдается «скачек». Из эпюры σ следует, что наиболее напряженным является третий участок — $\sigma_3 = \sigma_{\text{max}}$.

Проверка прочности выполняется по условию (1.2). Наибольшее нормальное напряжение возникает на третьем расчетном участке.

Так как $\sigma_{\text{max}} = 200 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}$, прочность элемента по нормальным напряжениям обеспечена.

Значения абсолютной продольной деформации на участках элемента вычисляются по формуле (1.3).

Участок I.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = -\frac{50 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = -0,03 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -0,3 \text{ мм.}$$

Участок II.

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = -\frac{50 \cdot 10^3 \cdot 45 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = -0,0141 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -0,141 \text{ мм.}$$

Участок III.

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{165 \cdot 10^3 \cdot 75 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = 0,0773 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 0,773 \text{ мм.}$$

Значения относительной продольной деформации на участках элемента вычисляются по формуле (1.6).

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{-0,3}{600} = -0,50 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{-0,141}{450} = -0,313 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{0,773}{750} = 1,031 \cdot 10^{-3}.$$

Условие жесткости элемента конструкции выполняется, т.к.

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_3 = 1,031 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{\text{adm}} = 1,05 \cdot 10^{-3}.$$

Перемещения характерных сечений ($0 \dots k$, где изменяется A или N) вычисляются исходя из значений деформаций отдельных

участков элемента. Крайнее левое сечение примем за относительно неподвижное — $\delta_0 = 0$. Перемещения других сечений находятся последовательным добавлением к предыдущему перемещению деформаций последующих участков.

$$\delta_0 = 0.$$

$$\delta_m = \delta_0 + \Delta l_1 = -0,30 \text{ мм.}$$

$$\delta_n = \delta_m + \Delta l_2 = -0,30 - 0,176 = -0,476 \text{ мм.}$$

$$\delta_k = \delta_n + \Delta l_3 = -0,476 + 0,773 = 0,297 \text{ мм.}$$

Эпюра перемещений δ показана на рис. 1.3, δ .

На третьем участке эпюра δ пересекает ось — определим положение сечения u , в котором перемещение равно нулю.

$$\Delta u = \Delta n + \frac{N_3 a}{EA_3} = -0,476 \cdot 10^{-3} + \frac{165 \cdot 10^3 \cdot a}{200 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = 0,$$

откуда $a = 0,462 \text{ м} = 46,2 \text{ см}$.

Из эпюры δ следует, что наибольшее перемещение претерпевает сечение n ($\delta_n = 0,476 \text{ мм}$) в сторону крайнего левого (0). Перемещение правого концевого сечения (к) по отношению к крайнему левому (0) составляет $\delta_k = 0,297 \text{ мм}$ и направлено в положительном направлении оси Z .

Пример 1.2

Бетонная колонна квадратного поперечного сечения нагружена расчетной системой сил: сосредоточенных F и равномерно распределенных q (рис. 1.4).

Определить размеры поперечных сечений, постоянных для каждого расчетного участка колонны, и перемещение свободного сечения ее.

Для материала колонны: расчетное сопротивление на сжатие $R_c = 4 \text{ МПа}$, модуль продольной упругости $E = 15 \text{ ГПа}$.

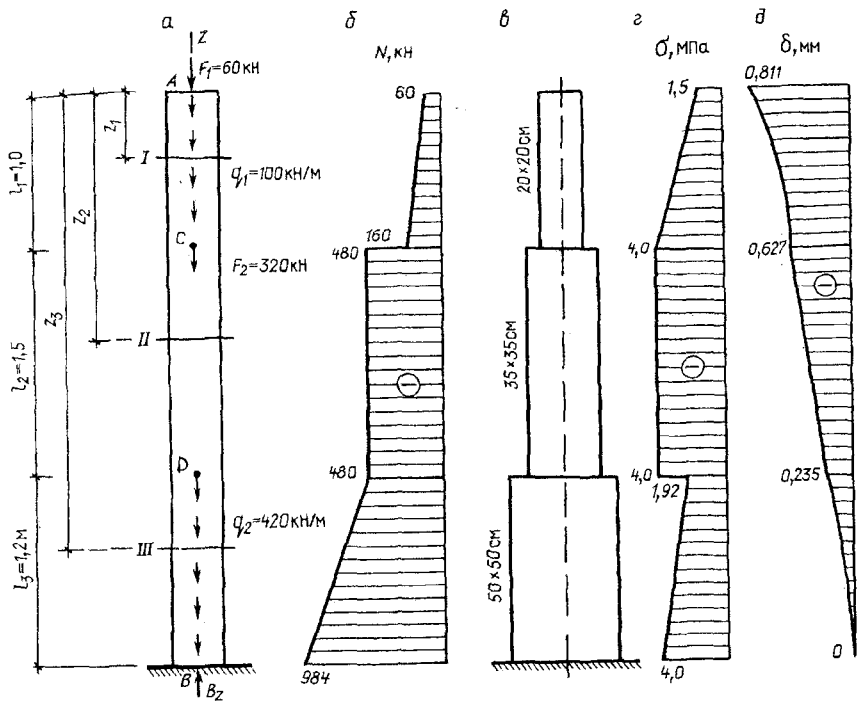


Рис. 1.4

Решение

Поскольку нагрузка действует по продольной оси Z колонны, последняя подвергается деформации сжатия.

На рассматриваемой колонне исходя из характера нагрузки выделяются три расчетных участка, в пределах которых намечаются сечения I...III.

Длинам участков l придается индекс номера участка.

Колонна в своем основании имеет опору, в которой возникает только одна реакция B_z . Уравнение равновесия можно составить также одно — $\Sigma Z = 0$, из которого определится реакция B_z .

$$\begin{aligned} \Sigma Z &= B_z - F_1 - q_1 l_1 - F_2 - q_2 l_3 = \\ &= B_z - 60 - 100 \cdot 1 - 320 - 420 \cdot 1,2 = 0, \end{aligned}$$

откуда $B_z = 984$ кН.

Рассматриваемая система является статически определимой.

Для определения продольной силы на участках колонны воспользуемся вторым приемом, без показа «отсеченных» частей, но используя вышеизложенное правило: $N = \Sigma F_i$.

Участок I.

$$0 \leq z_1 \leq 1,0 \text{ м} \quad N_1 = -F_1 - q_1 z_1,$$

при $z_1 = 0 \quad N_1 = -60 \text{ кН},$

$z_1 = 1,0 \text{ м} \quad N_1 = -160 \text{ кН}.$

Участок II.

$$1 \leq z_2 \leq 2,5 \text{ м}, \quad N_2 = -F_1 - q_1 l_1 - F_2 = -60 - 100 \cdot 1 - 320 = -480 \text{ кН}$$

Участок III.

$$2,5 \leq z_3 \leq 3,7 \text{ м}, \quad N_3 = -F_1 - q_1 l_1 - F_2 - q_2 (z_3 - (l_1 + l_2))$$

при $z_3 = 2,5 \text{ м} \quad N_3 = -480 \text{ кН},$

$z_3 = 3,7 \text{ м} \quad N_3 = -984 \text{ кН}.$

Контроль правильности вычислений N таков: при $Z = 3,7 \text{ м}$ по модулю $N_3 = R_B = 984 \text{ кН}.$

Примечание. Для вычисления N можно было сечения назначать со стороны опоры.

По полученным значениям N строится эпюра продольных сил — эп. N (рис. 1.4, б). Отрицательные значения N обычно откладываются влево от оси эпюры.

На участке колонны, где распределенная нагрузка $q = 0$, $N = \text{const}$, а на участке, где $q \neq 0$, $N \neq \text{const}$ (прямая наклонная).

В сечениях, где приложена сосредоточенная сила F , на эпюре N имеется «скачок» на величину этой силы.

Размеры поперечных сечений на каждом участке колонны определим из условия прочности по нормальным напряжениям (1.2):

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq R_c.$$

На I участке

$$A_1 = \frac{N_{1,\max}}{R_c} = \frac{160 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^6} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 400 \text{ см}^2,$$

сторона сечения $a_1 = \sqrt{A_1} = \sqrt{400} = 20 \text{ см}$.

На II участке

$$A_2 = \frac{N_{2,\max}}{R_c} = \frac{480 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^6} = 120 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 1200 \text{ см}^2,$$

сторона сечения $a_2 = \sqrt{A_2} = \sqrt{1200} = 34,6 \text{ см}$. Принимаем $a_2 = 35 \text{ см}$.

На III участке

$$A_3 = \frac{N_{3,\max}}{R_c} = \frac{984 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^6} = 246 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 2460 \text{ см}^2,$$

сторона сечения $a_3 = \sqrt{A_3} = \sqrt{2460} = 49,6 \text{ см}$. Принимаем $a_3 = 50 \text{ см}$.

На рис. 1.4, б показана схема запроектированной колонны.

Для построения эпюры напряжений необходимо вычислить значения σ в характерных сечениях колонны.

В сечении A

$$\sigma_A = \frac{N_A}{A_1} = -\frac{60 \cdot 10^3}{20 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = -0,15 \cdot 10^{-7} \text{ Па} = -1,5 \text{ МПа}.$$

В сечении C

$$\sigma_C = \frac{N_C}{A_1} = -\frac{160 \cdot 10^3}{20 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = -0,4 \cdot 10^{-7} \text{ Па} = -4,0 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_C = \frac{N_C}{A_2} = -\frac{480 \cdot 10^3}{35 \cdot 35 \cdot 10^{-4}} = -0,392 \cdot 10^{-7} \text{ Па} = -3,92 \text{ МПа}.$$

В сечении D

$$\sigma_D = \frac{N_D}{A_2} = -\frac{480 \cdot 10^3}{35 \cdot 35 \cdot 10^{-4}} = -0,392 \cdot 10^{-7} \text{ Па} = -3,92 \text{ МПа}.$$

$$D\sigma_D = \frac{N_D}{A_3} = -\frac{480 \cdot 10^3}{50 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = -0,192 \cdot 10^{-7} \text{ Па} = -1,92 \text{ МПа.}$$

В сечении B

$$\sigma_B = \frac{N_B}{A_3} = -\frac{984 \cdot 10^3}{50 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = -0,394 \cdot 10^{-7} \text{ Па} = -3,94 \text{ МПа.}$$

По полученным значениям σ строится эпюра напряжений (эп. σ), показанная на рис. 1,4, г.

Объясните «скачек» на эпюре напряжений в сечении D .

Значения абсолютных продольных деформаций на участках колонны вычислим, используя формулы (1.3) и (1.4).

Обратите внимание, что на первом участке колонны продольная сила N складывается из сосредоточенной F_1 и равномерно распределенной q . Поэтому на первом участке

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= -\frac{F_1 l_1}{EA_1} - \frac{q_1 l_1^2}{2EA_1} = -\frac{60 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{15 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 10^{-2}} - \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1,0^2}{2 \cdot 15 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = \\ &= -0,010 \cdot 10^{-2} - 0,0083 \cdot 10^{-2} = 0,0183 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 0,183 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Распределенная нагрузка q_1 для второго участка колонны действует как сосредоточенная. Поэтому на втором участке

$$\Delta l_2 = -\frac{N_2 l_2}{EA_2} = -\frac{480 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{15 \cdot 10^9 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 10^{-4}} = -0,0392 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -0,392 \text{ мм.}$$

На третьем участке

$$\begin{aligned} \Delta l_3 &= -\frac{N_{3,\min} \cdot l_3}{EA_3} - \frac{q_2 \cdot l_3^2}{2EA_3} = \\ &= -\frac{480 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{15 \cdot 10^9 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} - \frac{420 \cdot 10^3 \cdot 1,2^2}{2 \cdot 15 \cdot 10^9 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = \\ &= -0,0154 \cdot 10^{-2} - 0,00806 \cdot 10^{-2} = -0,0235 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -0,235 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Для определения деформации участков колонны можно использовать эпюру напряжений. Особенно это удобно на участках с распределенной нагрузкой.

Деформация

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{\sigma l}{E} = \frac{\omega}{E},$$

где ω — площадь эпюры напряжений.

Так, для участка 1 (где эпюра напряжений является трапецией)

$$\Delta l_1 = \frac{\omega_1}{E} = -\frac{1}{15 \cdot 10^9} \left(\frac{1,5 + 4}{2} \cdot 1,0 \right) \cdot 10^6 = 0,183 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,183 \text{ мм},$$

что соответствует первому вычислению.

Перемещения граничных сечений колонны определяются исходя из значений деформаций Δl его участков.

Для проведения расчета на колонне выбирается сечение, перемещение которого известно — это опора, где перемещение равно нулю ($\delta_B = 0$).

Перемещения остальных граничных сечений вычисляются последовательным добавлением к начальному перемещению деформаций последующих участков колонны.

$$\delta_B = 0.$$

$$\delta_D = \delta_B + \Delta l_3 = 0 - 0,235 = -0,235 \text{ мм.}$$

$$\delta_C = \delta_D + \Delta l_2 = -0,235 - 0,392 = -0,627 \text{ мм.}$$

$$\delta_A = \delta_C + \Delta l_1 = -0,627 - 0,183 = -0,811 \text{ мм.}$$

По вычисленным значениям δ строится эпюра перемещений (эп. δ), приведенная на рис. 1.4, δ .

Обратите внимание, что на участке колонны, где $q \neq 0$, перемещение наращивается по закону параболы.

Из эпюры перемещений следует, что перемещение свободного сечения составляет $\delta = 0,811$ мм. Это же число определяет и полную деформацию колонны.

Пример 1.3

Определить размеры поперечных сечений стержней металлодеревянной фермы. Стержни 1 и 2 – деревянные, квадратного поперечного сечения; стержень 3 – стальной, из двух равнополочных уголков (рис. 1.5, а).

Расчетные сопротивления: для стали $R = 210$ МПа, для древесины $R_c = 13$ МПа.

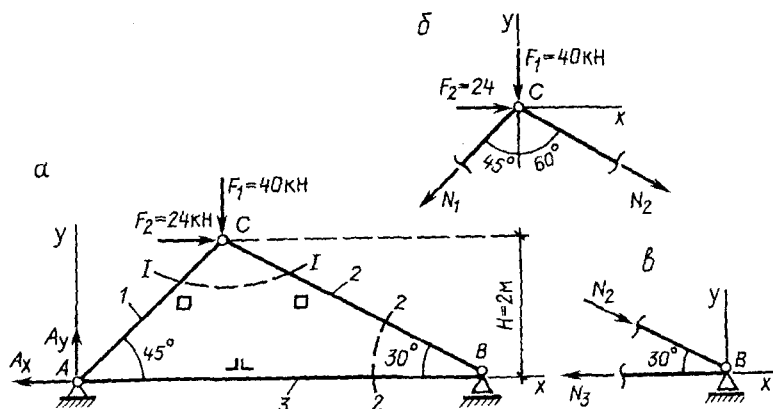


Рис. 1.5

Решение

Нагрузка F через стержни 1 и 2 передается на опоры A и B , где возникают три реакции (A_x , A_y , B_y), которые могут быть определены из уравнений равновесия ($\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum M = 0$).

Значит, эта система является статически определимой.

Поскольку стержни фермы соединяются между собой при помощи шарниров, действующая нагрузка может вызвать в них только продольные силы N , т.е. они подвергаются деформации растяжения-сжатия.

Рассматриваемая система относится к случаю, когда внутренние силы в стержнях ее можно определить без нахождения опорных реакций.

Для определения усилий в стержнях фермы используется метод сечений, по которому ферма «разрезается» на две части, так чтобы одновременно отсекалось не более трех стержней.

Первое сечение проведем, как показано на рис. 1.5, б, и составим уравнения равновесия для узла С.

Искомые усилия N_1 , N_2 направим от сечения (считаем растягивающими).

$$\Sigma X = N_2 \cos 30^\circ - N_1 \cos 45^\circ + 24 = 0;$$

$$\Sigma Y = -N_2 \cos 60^\circ - N_1 \cos 45^\circ - 40 = 0.$$

Решив уравнения получим: $N_1 = -33,1$ кН, $N_2 = -174,9$ кН, стержни 1 и 2 сжаты.

Второе сечение проведем, как показано на рис. 1.5, в. Искомое усилие N_3 направим от сечения, а найденное N_2 к сечению, т.к. стержень 2 сжат.

Уравнение равновесия узла В.

$$\Sigma X = -N_3 + N_2 \cos 30^\circ = 0,$$

откуда $N_3 = 174,9 \cdot 0,866 = 151,5$ кН.

Стержень 3 испытывает деформацию растяжения.

Из условия прочности (1.2) определим значения площадей поперечных сечений стержней фермы.

Для первого стержня

$$A_1 = \frac{N_1}{R_c} = \frac{33,1 \cdot 10^3}{13 \cdot 10^6} = 2,55 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 25,5 \text{ см}^2,$$

сторона сечения $a_1 = \sqrt{A} = \sqrt{25,5} = 5,05$ см.

Для второго стержня

$$A_2 = \frac{N_2}{R_c} = \frac{174,9 \cdot 10^3}{13 \cdot 10^6} = 13,45 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 134,5 \text{ см}^2,$$

сторона сечения $a_2 = \sqrt{134,5} = 11,6$ см.

Конструктивно принимаем $a_1 = a_2 = 12$ см.

Для третьего стержня

$$A_3 = \frac{N_3}{R} = \frac{151,5 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,721 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 7,21 \text{ см}^2.$$

Для одного уголка $A_3' = \frac{7,21}{2} = 3,61 \text{ см}^2$. Из таблицы сортамента равнополочных уголков принимаем два уголка $40 \times 40 \times 5 \text{ мм}$ с площадью поперечного сечения $A_3 = 3,79 \cdot 2 = 7,58 \text{ см}^2$.

Пример 1.4

Конструкция, состоящая из двух стальных стержней, нагружена расчетной нагрузкой $F = 86 \text{ кН}$. Диаметры стержней: $d_1 = 1,8 \text{ см}$, $d_2 = 2,0 \text{ см}$ (рис. 1.6, а).

Определить напряжения в стержнях и перемещения узла С.

Для стали $E = 200 \text{ ГПа}$.

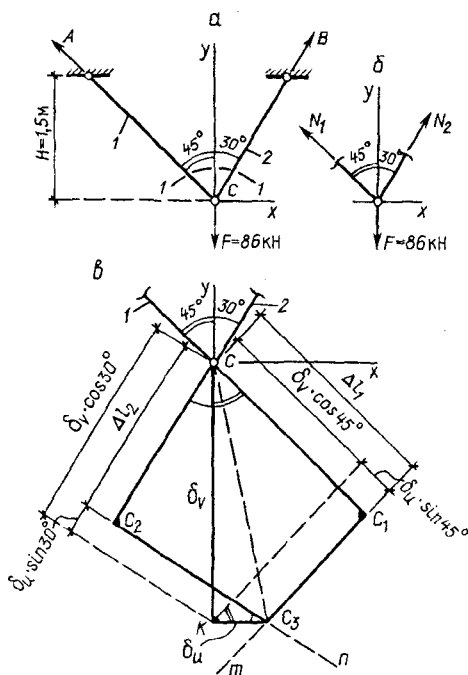


Рис. 1.6

Решение

Площади поперечных сечений стержней:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 1,8^2}{4} = 2,543 \text{ см}^2, \quad A_2 = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} = 3,14 \text{ см}^2.$$

Длины стержней:

$$l_1 = \frac{H}{\cos 45^\circ} = \frac{1,5}{0,707} = 2,122 \text{ м}, \quad l_2 = \frac{H}{\cos 30^\circ} = \frac{1,5}{0,866} = 1,732 \text{ м},$$

Нагрузка F , приложенная к узлу C , через стержни 1 и 2 передается на опоры, в которых возникают реакции A и B , направленные вдоль продольных осей стержней (рис. 1.6, а).

Двум неизвестным реакциям соответствуют два уравнения равновесия ($\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$) – значит, система является статически определимой.

В стержнях системы, соединенных между собой шарниром, могут возникнуть только продольные силы N , вызывающие растяжение их.

Для определения продольных сил N проведем сечение 1-1, выделив узел C , и составим уравнения равновесия его (рис. 1.6, б).

$$\Sigma X = N_2 \sin 30^\circ - N_1 \sin 45^\circ = 0 \quad \text{или} \quad 0,5N_2 - 0,707N_1 = 0,$$

$$\Sigma Y = N_2 \cos 30^\circ + N_1 \cos 45^\circ - F = 0 \quad \text{или} \quad 0,866N_2 + 0,707N_1 - 86 = 0.$$

Решив уравнения, получим

$$N_1 = 44,5 \text{ кН}, \quad N_2 = 62,9 \text{ кН} - \text{оба стержня растянуты.}$$

Нормальные напряжения в стержнях

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{44,5 \cdot 10^3}{2,543 \cdot 10^{-4}} = 17,5 \cdot 10^7 \text{ Па} = 175 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{62,9 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10^{-4}} = 20,0 \cdot 10^7 \text{ Па} = 200 \text{ МПа}.$$

Абсолютные продольные деформации (удлинения) стержней.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{44,5 \cdot 10^3 \cdot 2,122 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9 \cdot 2,543 \cdot 10^{-4}} = 0,1857 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,857 \text{ мм},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{62,9 \cdot 10^3 \cdot 1,732}{200 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}} = 0,1735 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,735 \text{ мм}.$$

Для построения схемы перемещения стержни 1 и 2 в узле C следует мысленно разъединить и, отложив по их направлениям отрезки, изображающие деформации (Δl_1 и Δl_2), получим точки C_1 и C_2 .

Стержни системы в результате нагружения должны перемещаться совместно, не разъединяясь. Поэтому концы стержней (т. C_1 и C_2) нужно свести вместе.

В связи с тем, что деформации стержней малы по сравнению с их длиной, можно допустить, что концы стержней (т. C_1 и C_2) перемещаются относительно своих опор (т. A и B) не по дуге окружности с радиусом $l_i + \Delta l_i$, а по перпендикуляру к направлению стержней.

Тогда из точек C_1 и C_2 проводим перпендикуляры $C_1 m$ и $C_2 n$ к направлению соответствующих стержней. Пересечение перпендикуляров дает точку C_3 – новое положение узла C . Стержни системы повернутся вокруг своих шарнирных опор на некоторый угол (на рис. 1.6 не показан).

На рис. 1.6, в отмечены вертикальное δ_v и горизонтальное δ_u перемещения узла C . Уравнения совместности перемещений получим, выразив названные перемещения через деформации стержней. Для этого спроектируем перемещения δ_v и δ_u на направление стержней.

$$CC_1 = \Delta l_1 = \delta_v \cos \alpha_1 + \delta_u \sin \alpha_1 \quad \text{или} \quad 0,707\delta_v + 0,707\delta_u = 1,857,$$

$$CC_2 = \Delta l_2 = \delta_v \cos \alpha_2 + \delta_u \sin \alpha_2 \quad \text{или} \quad 0,866\delta_v - 0,500\delta_u = 1,735.$$

Решив уравнения, получим $\delta_v = 2,232$ мм, $\delta_u = 0,395$ мм.

Полное перемещение узла C находим как геометрическую сумму составляющих перемещений

$$\delta_c = \sqrt{\delta_v^2 + \delta_u^2} = \sqrt{2,232^2 + 0,395^2} = 2,267 \text{ мм}.$$

Пример 1.5

Абсолютно жесткий (недеформирующийся) элемент P укреплен к шарнирно-неподвижной опоре A и поддерживается стержнем 1.

Определить наибольшую допустимую нагрузку F и перемещение т. C (рис. 1.7, а).

Стержень 1 – стальной, швеллер № 10.

Для стали: $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.

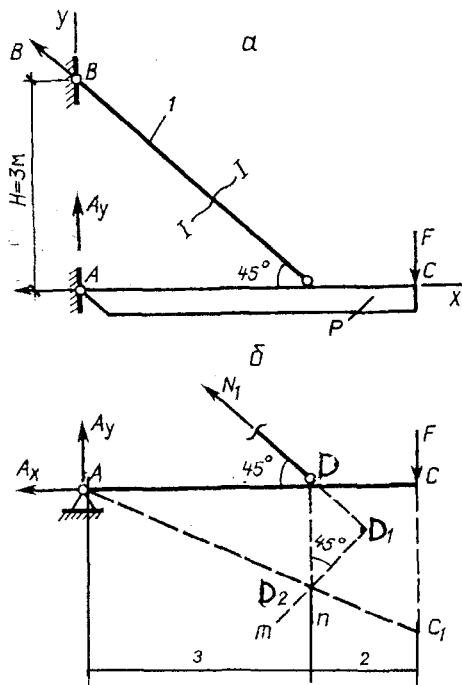


Рис. 1.7

Решение

Нагрузка F через элемент P и стержень передается на опоры, где возникают три реакции (A_x , A_y и B – направленная по продольной оси стержня), которые могут быть определены из уравнений равновесия ($\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M = 0$). Следовательно, рассматриваемая система является статически определимой.

По таблице сортамента площадь сечения швеллера № 10 (стержень 1) составляет $A_1 = 10,9 \text{ см}^2$. Длина стержня $l_1 = 3/0,707 = 4,24 \text{ м}$.

Так как стержень 1 соединяется с элементом P при помощи шарнира, в нем возникает только продольная сила N , т.е. он подвергается деформации растяжения-сжатия.

Для определения продольной силы N система «рассекается» по стержню 1 и составляются уравнения равновесия для рассматриваемой части системы (рис. 1.7, б). Опорные реакции A_x и A_y для условия задачи интереса не представляют. Рациональным уравнением равновесия будет

$$\Sigma M_A = -N_1 \sin \alpha \cdot 3 + F \cdot 5 = 0,$$

откуда $N_1 = \frac{5F}{\sin \alpha \cdot 3}$ (стержень растянут).

Максимально допустимая продольная сила в стержне 1 из формулы (1.2)

$$N_{1,adm} = A_1 R = 10,9 \cdot 10^{-4} \cdot 210 \cdot 10^6 = 2289 \cdot 10^2 \text{ Н} = 228,9 \text{ кН.}$$

Наибольшая допустимая нагрузка на конструкцию (из уравнения равновесия)

$$F = \frac{N_{1,adm} \cos \alpha \cdot 3}{5} = \frac{2289 \cdot 0,707 \cdot 3}{5} = 97,1 \text{ кН.}$$

Абсолютная продольная деформация стержня 1 по формуле (1.3)

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{228,9 \cdot 10^3 \cdot 4,24}{200 \cdot 10^9 \cdot 10,9 \cdot 10^{-4}} = 0,445 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4,45 \text{ мм.}$$

Абсолютно жесткий элемент P под действием нагрузки F , вследствие деформации стержня 1, повернется вокруг шарнира A на некоторый угол.

Чтобы построить схему перемещений (рис. 1.7, б) следует стержень 1 мысленно отсоединить от элемента P в т. D и по направлению его отложить отрезок, изображающий деформацию (удлинение) Δl_1 , — получим т. D_1 .

Поскольку элементы системы должны перемещаться совместно, нужно свести конец продеформированного стержня 1 (т. D_1) с точкой D элемента P .

Вследствие малых упругих деформаций можно допустить, что т. D_1 перемещается по перпендикуляру к продольной оси стержня, т.е. по D_1m . Дочка D элемента P по той же причине переместится по перпендикуляру к его продольной оси, т.е. по Dn .

Точка пересечения траекторий перемещений (D_1m и Dn) дает т. D_2 – положение узла D в продеформированном состоянии системы.

Из подобия треугольников ADD_2 и ACC_1 составляется зависимость между перемещением δ_c и деформацией Δl_1 .

$$\frac{\Delta l_1}{3 \cdot \sin \alpha} = \frac{\Delta c}{5},$$

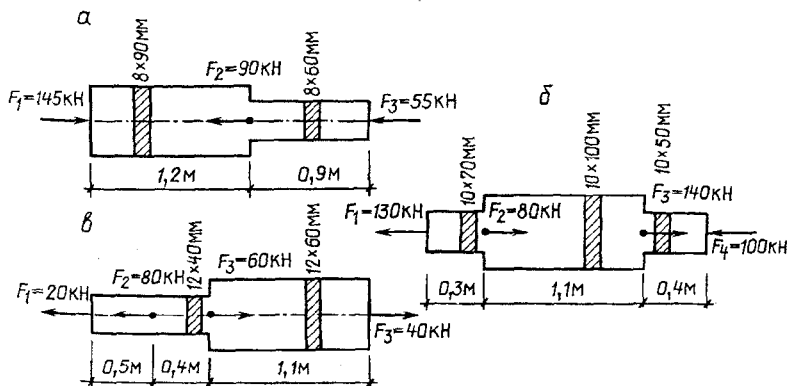
откуда перемещение т. C (вниз, по вертикали) будет равно

$$\delta_c = \frac{5 \cdot 4,45}{0,707 \cdot 3} = 10,5 \text{ мм.}$$

Задачи для аудиторного и самостоятельного решения

Задача 1.1

Проверить прочность и жесткость стальной полосы, если $R = 210 \text{ МПа}$, $E = 200 \text{ ГПа}$, $\varepsilon_{adm} = 1,05 \cdot 10^{-3}$.



Отвeты:

А. $\sigma_{\max} = 190 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}$; $\varepsilon_{\max} = 0,95 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{\text{adm}}$.

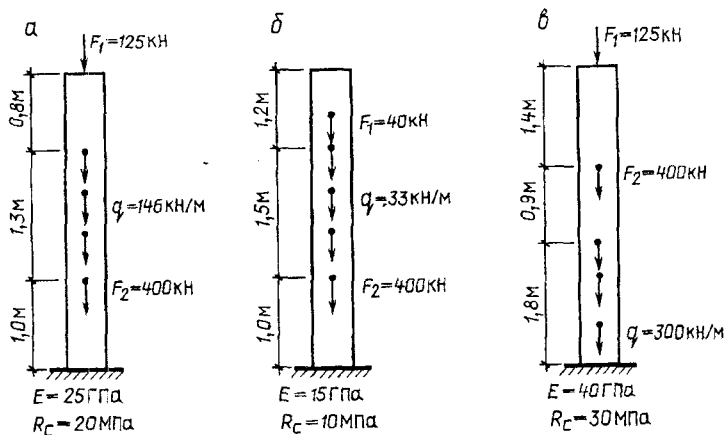
Б. $\sigma_{\max} = 200 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}$; $\varepsilon_{\max} = 0,93 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{\text{adm}}$.

В. $\sigma_{\max} = 208 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}$; $\varepsilon_{\max} = 0,278 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{\text{adm}}$.

Задача 1.2

Определить размеры квадратного поперечного сечения для каждого расчетного участка бетонной колонны и перемещения свободного сечения ее.

Для материала колонны R_c и E указаны на рисунках.



Отвeты:

А. 60x60 см; 40 × 40 см; 25x25см, $\delta_{\max} = 0,215 \text{ мм}$.

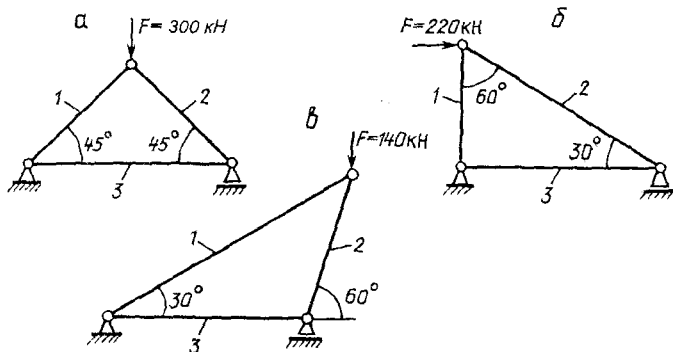
Б. 45x45 см; 30 × 30 см; 20x20 см, $\delta_{\max} = 0,126 \text{ мм}$.

В. 55x55 см; 35 × 35 см; 20x20 см, $\delta_{\max} = 0,264 \text{ мм}$.

Задача 1.3

Определить размеры поперечных сечений стержневой системы. Стержни 1 и 2 – деревянные, квадратного поперечного сечения; стержень 3 – стальной из двух равнополочных уголков.

Для стали $R = 210 \text{ МПа}$, для древесины $R_c = 13 \text{ МПа}$.



Отвeты:

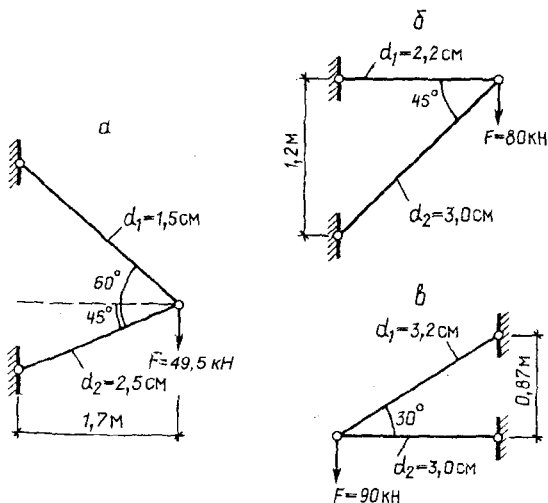
А. Сторона сечения $a_1 = a_2 = 13$ см, уголок $40 \times 40 \times 5$ мм.

Б. Сторона сечения $a_1 = a_2 = 16$ см, уголок $50 \times 50 \times 5$ мм.

В. Сторона сечения $a_1 = a_2 = 14$ см, уголок $50 \times 50 \times 3$ мм.

Задача 1.4

Для конструкции, состоящей из двух стальных стержней круглого поперечного сечения, определить напряжения в стержнях и полное перемещение узла С. Для стали $E = 200$ ГПа.



Отвeты:

А. $\sigma_1 = 205$ МПа, $\sigma_2 = -52,2$ МПа, $\delta_c = 3,50$ мм.

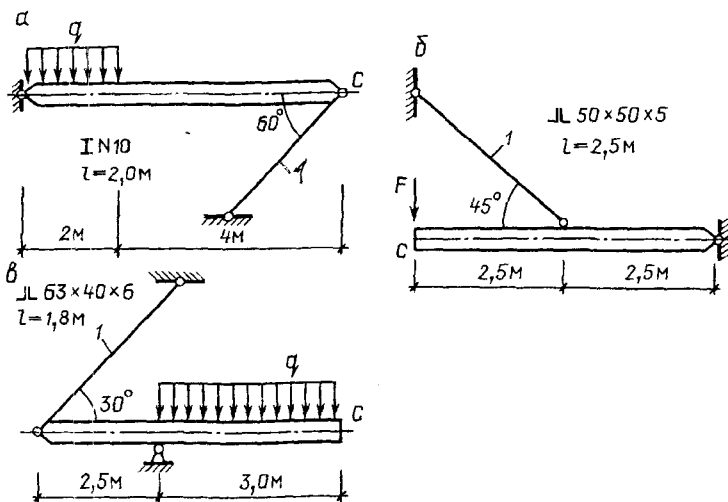
Б. $\sigma_1 = 211$ МПа, $\sigma_2 = -160$ МПа, $\delta_c = 3,74$ мм.

В. $\sigma_1 = 187$ МПа, $\sigma_2 = -184$ МПа, $\delta_c = 5,79$ мм.

Задача 1.5

Определить наибольшую допустимую нагрузку (F или q) на конструкцию, считая элемент P абсолютно жестким (не деформирующимся), и перемещения т. C .

Стержень 1 – стальной из прокатных элементов (вид и номер указан на рисунках).



Отвeты:

А. $q_{\max} = 655$ кН/м, $\delta_c = 0,242$ мм.

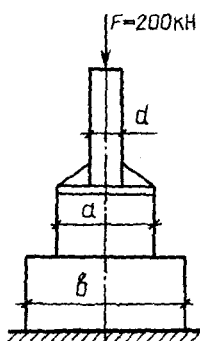
Б. $F_{\max} = 71,3$ кН, $\delta_c = 7,44$ мм.

В. $q_{\max} = 68,8$ кН/м, $\delta_c = 4,54$ мм.

Задача 1.6

Расчетная нагрузка $P = 200$ кН передается на грунтовое основание через чугунную колонну диаметром d , квадратную подошву со стороны a и нижнее квадратное основание со стороны b . Определить размеры сечений элементов конструкций.

Расчетные сопротивления на сжатие: для чугуна $R = 50$ МПа, для кладки основания $R = 1,0$ МПа, для грунта $R = 0,25$ МПа.

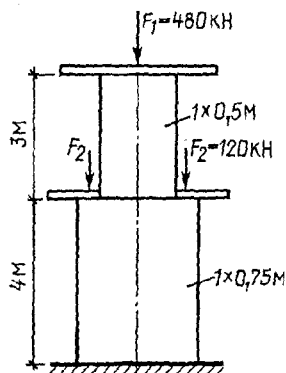


Ответ: $d = 7,2$ см, $a \approx 45$ см, $b \approx 90$ см.

Задача 1.7

Ступенчатый кирпичный столб поддерживает перекрытие двух этажей. Определить наибольшее нормальное напряжение в столбе и укорочение его с учетом собственного веса.

Для кирпичной кладки $\rho = 2000$ кг/м³, $E = 4,0$ ГПа.



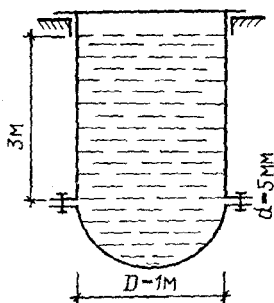
Ответ: $\sigma_{\max} = 1,08$ МПа, $\Delta l = 1,78$ мм.

Задача 1.8

Определить количество болтов диаметром $d = 5$ мм, необходимых для прикрепления дна к баку, заполненному жидкостью с плотностью $\rho = 1000$ кг/м³.

Расчетное сопротивление для материала болта $R = 210$ МПа.

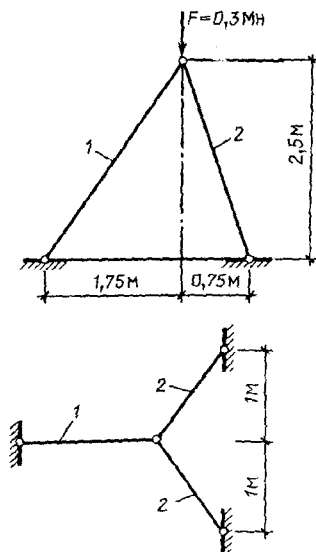
Примечание. Объем полушара $v = \frac{\pi d^3}{12}$; болты работают на растяжение.



Ответ: $n = 7$.

Задача 1.9

К трем деревянным стержням круглого поперечного сечения приложена расчетная нагрузка $F = 0,3$ МН. Определить диаметры стержней, если расчетное сопротивление для древесины $R_c = 4,0$ МПа.

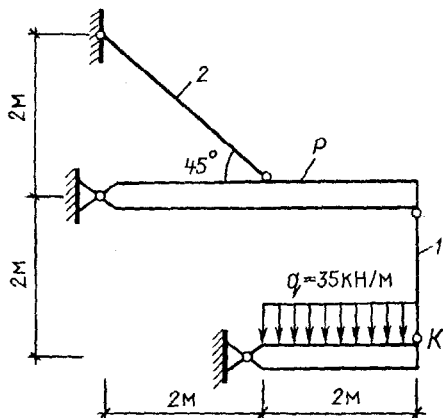


Ответ: $d_1 = 25$ см, $d_2 = 24$ см.

Задача 1.10

Абсолютно жесткий элемент P укреплен на шарнирно-неподвижной опоре и двух стальных стержнях диаметром $d = 2,5$ см.

Определить напряжения в стержнях и перемещение точки K , если $E = 200$ ГПа.



Ответ: $\sigma_1 = 71,3$ МПа, $\sigma_2 = 203$ МПа, $\delta_K = 8,77$ мм.

1.2. Статически неопределимые системы

Статически неопределимыми являются системы, внутренние силы в элементах которых невозможно определить при помощи одних лишь уравнений равновесия (статики).

Степень статической неопределимости определяется разностью между числом неизвестных (внутренних сил или реакций опор) и числом независимых уравнений равновесия.

Для раскрытия статической неопределимости, т.е. определения внутренних сил в элементах системы, к уравнениям равновесия нужно составить столько дополнительных уравнений, сколько раз система статически неопределима.

Существует несколько методов раскрытия статической неопределимости. Наиболее простой – метод сравнения перемещений (деформаций), построенный на принципе совместности перемещений.

Принцип совместности перемещений означает, что элементы системы в результате действия нагрузки должны перемещаться совместно, без разрушений, разъединений, смещений друг относительно друга.

Чтобы составить уравнение совместности перемещений необходимо представить систему в деформированном состоянии и установить геометрическую зависимость между деформациями ее стержней.

Совместное решение уравнений равновесия с уравнениями перемещений позволяет раскрыть статическую неопределимость.

Следует заметить, что в статически определимых системах искомые внутренние силы в стержнях предварительно направлялись произвольно. В статически неопределимых многостержневых системах искомые внутренние силы в стержнях нужно направлять в соответствии с предполагаемой деформацией стержня. Так, если стержень удлиняется – внутренняя сила в нем направляется от сечения, если укорачивается – к сечению. Для установления характера деформации стержня нужно рассмотреть систему в деформированном состоянии (см. примеры). Деформированное и напряженное состояние должны соответствовать друг другу.

Пример 1.6

Абсолютно жесткий элемент P , нагружаемый расчетной нагрузкой $q = 300$ кН/м, опирается на три одинаковые бетонные колонны длиной 3 м и сечением 30×30 см (рис. 1.8).

Для материала колонны $R_c = 9$ МПа, $E = 15$ ГПа.

Требуется определить нормальные напряжения в колоннах при плотной установке элемента P и при наличии зазора $\Delta = 1$ мм.

Решение

Нагрузка q , приложенная к элементу P , передается через колонны на опоры, где, исходя из направления нагрузки, возникают по одной вертикально направленной реакции A , B , и C (см. рис. 1.8, а).

Можно составить только два независимых уравнений равновесия: $\sum U = 0$ и $\sum M = 0$ (относительно какой-либо одной точки). Трем неизвестным реакциям соответствуют два уравнения равновесия. Значит, эта система является один раз статически неопределимой ($3 - 2 = 1$).

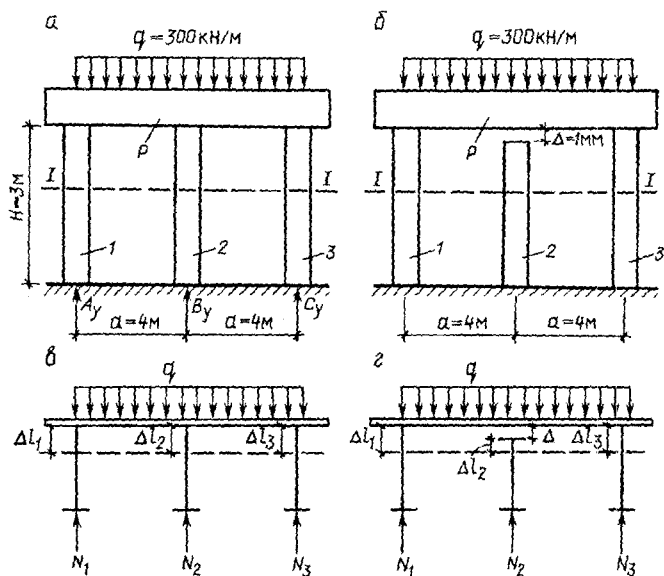


Рис. 1.8

Соединение элемента P с колоннами можно уподобить шарнирам. Поэтому в колоннах возникнут только продольные силы N . Для определения их колонны мысленно рассекаем сечением I-I и рассматриваем верхнюю часть системы. Предположим, что все три колонны будут сжаты – продольные силы в них N_1, N_2, N_3 направлены к сечениям (рис. 1.8, в).

Уравнения равновесия:

$$\sum Y = N_1 + N_2 + N_3 - q \cdot 2a = 0,$$

$$\sum M_c = N_1 \cdot a - N_3 \cdot a = 0.$$

Решив уравнения, получим

$$2N_1 + N_2 = 2a \cdot q. \quad (1.9)$$

Вследствие симметрии нагрузки и геометрии системы, а так же равенства $N_1 = N_3$, все три колонны продеформируются (укоротятся) одинаково (см. рис. 1.8, г).

Геометрическая связь между деформациями колонн такова:

$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3$ – уравнение совместимости перемещений

Выразив деформации Δl через продольные силы N (по формуле Гука), получим

$$\frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{N_3 l_3}{EA_3} \quad \text{или} \quad N_1 = N_2 = N_3. \quad (1.10)$$

Из уравнений (1.9) и (1.10) получим

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{2 \cdot q \cdot a}{3} = \frac{2 \cdot 300 \cdot 10^3 \cdot 4}{3} = 800 \cdot 10^3 \text{ Н} = 800 \text{ кН.}$$

Нормальные напряжения в колоннах (при отсутствии зазора Δ)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{N}{A} = \frac{800 \cdot 10^3}{30 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} = 0,889 \cdot 10^7 = 8,89 \text{ МПа} < R_c.$$

Рассмотрим случай, когда между элементом P и средней колонной образовался зазор Δ (следствие неточности изготовления элементов системы или погрешности монтажа) (см. рис. 1.8, б).

В начальный момент нагружения будут деформироваться крайние колонны. Когда зазор Δ будет перекрыт, начнет деформироваться и средняя колонна. Причем элемент P останется горизонтальным.

Уравнение совместимости перемещений в этом случае имеет вид

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \Delta l_2 + \Delta.$$

Выразив деформации по формуле Гука, получим

$$\frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{N_2 l_2}{EA_2} + \Delta \quad \text{или} \quad N_1 = N_3 = N_2 + EA\Delta, \quad (1.11)$$

Решив совместно уравнения (1.9) и (1.11), получим

$$N_1 = N_3 = 912 \text{ кН}, \quad N_2 = 577 \text{ кН.}$$

Напряжения в колоннах: $\sigma_1 = \sigma_3 = 10,1$ МПа, $\sigma_2 = 6,19$ МПа.

Таким образом, неточность изготовления или установки (монтажа) элементов статически неопределимых систем приводит к изменению запроектированных напряжений в них.

В данном примере крайние колонны перенапряжены

$\sigma_1 = \sigma_3 = 10,1$ МПа $>$ $R_c = 9,0$ МПа, средняя значительно не до-напряжена.

Примечание. Во время монтажа конструкций зазор Δ должен быть заделан.

Пример 1.7

Абсолютно жесткий элемент P , нагруженный расчетной нагрузкой $F = 136$ кН, подвешен на трех стальных стержнях одинаковой длины и площади поперечного сечения (рис. 1.9).

Определить диаметр стержней, если $R = 210$ МПа.

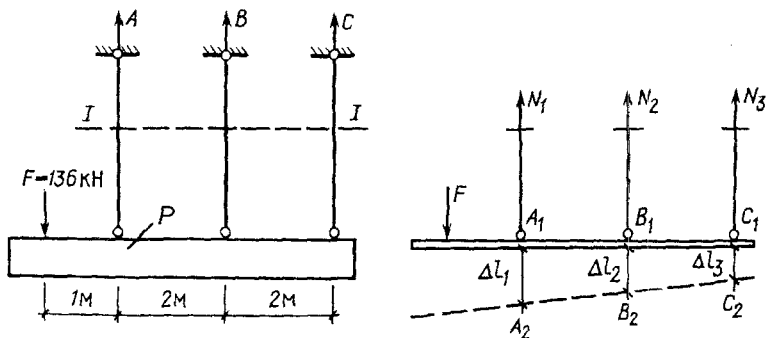


Рис. 1.9

Решение

Поскольку стержни системы соединяются с элементом P и опорами при помощи шарниров, в опорах возникает по одной реакции, направленной по продольной оси стержня (рис. 1.9, а), а в самих стержнях возникают только продольные силы N .

Трем неизвестным реакциям (A , B и C) соответствуют только два уравнения равновесия – система один раз статически неопределима.

Для определения внутренних сил N в стержнях сечением $I-I$ выделим нижнюю часть системы (см. рис. 1.9, б).

Предполагаем, что все три стержня будут растянуты, и поэтому искомые N направляем от сечений стержней.

Исходя из точки приложения силы F можно предположить, что стержни растянутся на разную величину и ось элемента P опустится вниз и несколько наклонится (см. рис. 1.9, б).

Рациональные уравнения равновесия:

$$\sum M_{A_1} = -N_2 \cdot 2 - N_3 \cdot 4 - F \cdot 1 = 0, \quad (1.12)$$

$$\sum M_{C_1} = N_1 \cdot 4 + N_2 \cdot 2 - F \cdot 5 = 0. \quad (1.13)$$

Дополнительное уравнение – уравнение совместности перемещений – получим рассматривая трапецию $A_1A_2C_1C_2$ с целью связать между собой деформации Δl стержней.

$$\frac{\Delta l_1 - \Delta l_3}{4} = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_3}{2} \quad \text{или} \quad \Delta l_1 - 2 \cdot \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.$$

Выразив деформации Δl через продольные силы N , получим

$$\frac{N_1 l}{EA} - \frac{N_2 l}{EA} + \frac{N_3 l}{EA} = 0 \quad \text{или} \quad N_1 - 2 \cdot N_2 + N_3 = 0. \quad (1.14)$$

Решив совместно уравнения (1.12), (1.13) и (1.14), получим

$$N_1 = 147,3 \text{ кН}, \quad N_2 = 45,4 \text{ кН}, \quad N_3 = -56,7 \text{ кН}.$$

Проверим полученные значения произвольных сил

$$\sum y = 147,3 + 45,4 - 56,7 - 136 = 0.$$

Предположительный характер деформации подтвердился лишь для стержней 1 и 2, стержень 3 оказался сжатым.

Примечание. У читателя не должно возникнуть сомнения в результате решения, т.к. показанные на рис. 1.9, б деформированное и напряженное состояния соответствуют друг другу (стержни показаны удлиняющимися, N направлены от стержня).

Площадь поперечного сечения и диаметр наиболее нагруженного стержня (первого) определим из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$A_1 = \frac{N_1}{R} = \frac{147 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,701 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 7,01 \text{ см}^2,$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{7,01 \cdot 4}{3,14}} = 2,988 \approx 3,0 \text{ см.}$$

Поскольку по условию задачи сечения всех трех стержней должны быть одинаковыми, принимаем диаметр $d = 3,0$ см с площадью сечения $A = 7,065 \text{ см}^2$.

Нормальные напряжения в стержнях будут

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{147 \cdot 10^3}{7,065 \cdot 10^{-4}} = 20,81 \cdot 10^7 \text{ Па} = 208,1 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_2 = 64,3 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = -80,3 \text{ МПа.}$$

Анализируя значения нормальных напряжений в стержнях, может возникнуть мысль об уменьшении диаметров сечений у стержней 2 и 3, т.к. они довольно сильно недонапряжены. Такая мысль будет ошибочной.

Особенность статически неопределимых систем такова, что при подборе размеров поперечного сечения стержней необходимо предварительно задаться их соотношением и выполнить это условие при расчете. В данном примере $A_1 = A_2 = A_3$. Если уменьшить d_2 и d_3 – увеличится напряжение в первом стержне, что приводит к его перенапряжению и, возможно, к разрушению.

Пример 1.8

Абсолютно жесткий элемент P закреплен в шарнирно-неподвижной опоре и поддерживается двумя стальными стержнями, выполненными из сдвоенных равнополочных уголков (рис. 1.10, а).

Определить наибольшую допустимую нагрузку на систему.

Стержень 1 – длина $l_1 = 2,5$ м, уголок $50 \times 50 \times 5$ мм, стержень 2 – длина $l_2 = 1,5$ м, уголок $70 \times 70 \times 6$ мм.

Для стали $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.

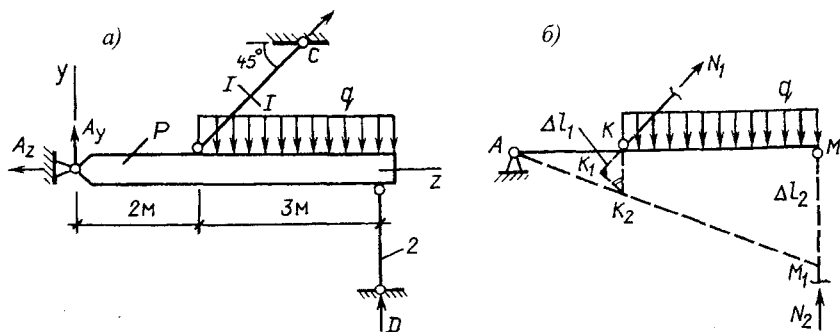


Рис. 1.10

Решение

Из таблицы сортамента прокатных уголков выписываем значения площади сечения стержней – $A_1 = 4,8 \cdot 2 = 9,6 \text{ см}^2$, $A_2 = 8,15 \cdot 2 = 16,3 \text{ см}^2$.

Система имеет четыре опорные реакции (см. рис. 1.10, а) и является один раз статически неопределимой ($4 - 3 = 1$).

Рассмотрим нижнюю отсеченную часть системы. Поскольку стержни 1 и 2 соединяются с элементом P при помощи шарниров, в них образуются только продольные силы N .

Исходя из характера закрепления элемента P , направления нагрузки и расположения стержней можно предположить, что элемент P повернется вокруг шарнира A на некоторый угол. При этом стержень 1 удлинится, а стержень 2 укоротится. Соответственно этому показываются направления продольных сил в стержне: N_1 от сечения, N_2 к сечению.

Рациональным уравнением равновесия является:

$$\sum M_A = -N_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 - N_2 \cdot 5 + q \cdot 3 \cdot \left(2 + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\text{или} \quad -1,414 \cdot N_1 - 5 \cdot N_2 + 10,5 \cdot q = 0. \quad (1.15)$$

Чтобы построить диаграмму перемещений, следует стержни 1 и 2 мысленно отсоединить от элемента P и отложить по направлению этих стержней отрезки, изображающие их деформации: Δl_1 – удлинение, Δl_2 – укорочение. Получим точки K_1 и M_1 .

Из точки K_1 проведем перпендикуляр к продольной оси стержня 1. Поскольку элементы системы должны перемещаться совместно, конец деформированного стержня 1 нужно свести с узлом K элемента P . Для этого из точки K проводим перпендикуляр к продольной оси элемента P . Пересечение двух названных перпендикуляров дадут точку K_2 – новое положение узла K .

Так как элемент P абсолютно жесткий, ось его повернувшись вокруг шарнира A пройдет через точку K_2 и отсечет на оси стержня 2 отрезок Δl_2 (см. рис. 1.10, б).

Чтобы составить дополнительное уравнение, нужно из подобия треугольников AKK_2 и AMM_1 связать между собой деформации стержней Δl_1 и Δl_2 .

$$\frac{\Delta l_1}{2 \sin 45^\circ} = \frac{\Delta l_2}{5} \quad \text{или} \quad 5\Delta l_1 = 1,41\Delta l_2.$$

Выразив деформации через продольные силы, получим

$$50 \frac{N_1 l_1}{EA_1} = 1,41 \frac{N_2 l_2}{EA_2} \quad \text{или} \quad 1,30N_1 - 0,130N_2 = 0. \quad (1.16)$$

Из уравнений (1.15) и (1.16) получим

$$N_1 = 0,206q, \quad N_2 = 2,0420q.$$

Допустимую нагрузку q найдем из условия прочности стержней. Из условия прочности 1 стержня

$$N_1 \leq RA_1 = 210 \cdot 10^6 \cdot 9,6 \cdot 10^{-4} = 2016 \cdot 10^2 \text{ Н} = 201,6 \text{ кН},$$

а нагрузка

$$q = \frac{N_1}{0,206} = \frac{201,6}{0,206} = 979 \text{ кН/м}.$$

Из условия прочности второго стержня

$$N_2 \leq R \cdot A_2 = 210 \cdot 10^6 \cdot 16,3 \cdot 10^{-4} = 342,3 \text{ кН,}$$

нагрузка $q = \frac{342,3}{2,042} = 167,6 \text{ кН/м.}$

Принимаем за максимально допустимую нагрузку на систему меньшее значение $q - q_{adm} = 167,6 \text{ кН/м.}$

При этой нагрузке продольные силы в стержнях будут

$$N_1 = 0,397 \cdot 172,4 = 68,4 \text{ кН, } N_2 = 342,4 \text{ кН, а напряжения } \sigma_1 = 71,3 \text{ МПа, } \sigma_2 = 210 \text{ МПа.}$$

Как видно из расчета, стержень 1 недонапряжен, что является особенностью статически неопределимых систем, у которых наиболее напряжен лишь один стержень.

Достичь равной прочности стержней у статически неопределимых систем довольно сложно, т.к. приходится изменять жесткость стержней, т.е. подбирать длину l и площадь сечения A (при одном и том же материале) для достижения прочности.

Пример 1.9

Система, состоящая из трех стальных стержней одинакового поперечного сечения и длины, нагружена расчетной нагрузкой $F = 140 \text{ кН}$ (рис. 1.11, а).

Площадь поперечного сечения стержней $A = 5 \text{ см}^2$, длина стержней 1,5 м.

Определить напряжения в стержнях и перемещение узла K .

Для стали $R = 210 \text{ МПа}$, $E = 200 \text{ ГПа}$.

Решение

Система является один раз статически неопределимой (реакций – 3, уравнений равновесия – 2) (см. рис. 1.11, а).

Вследствие шарнирного соединения стержней в узле K в них возникают только продольные силы N .

Предполагаем, что все три стержня будут растянуты (продольные силы N направлены от сечений (см. рис. 1.11, в) и все три стержня удлинятся.

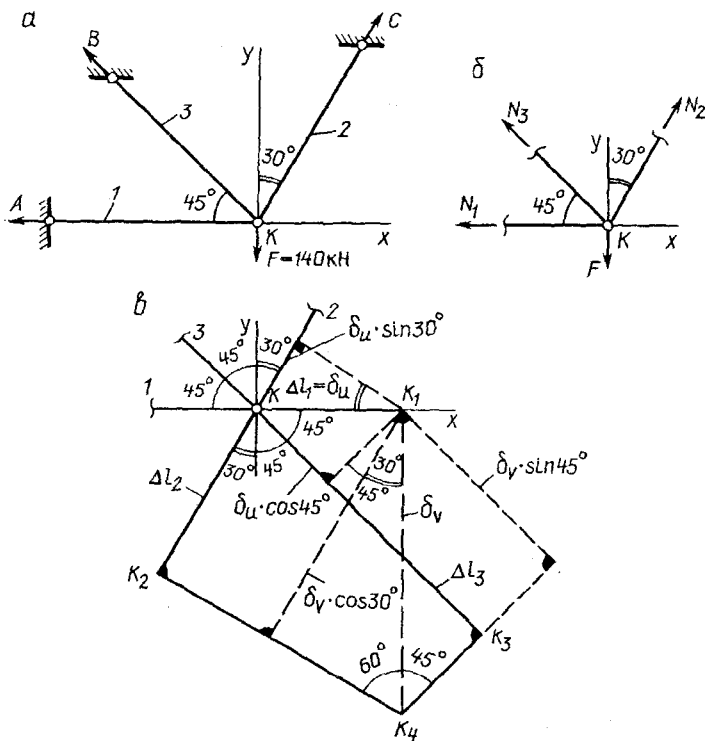


Рис. 1.11

Уравнения равновесия:

$$\sum X = -N_1 - N_3 \cdot \cos 45^\circ + N_2 \cdot \sin 30^\circ = 0, \quad (1.17)$$

$$\sum Y = N_3 \cdot \sin 45^\circ + N_2 \cdot \cos 30^\circ - F = 0. \quad (1.18)$$

Для получения уравнения перемещений необходимо составить схему перемещений системы (см. рис. 1.11, б). По направлению стержней, отложив отрезки, характеризующие их деформации (удлинения Δl_1 , Δl_2 , Δl_3), получим точки K_1 , K_2 , K_3 . Из этих точек проведем перпендикуляры к направлению стержней, пересечение которых дадут точку K_4 – новое положение узла K, которое характеризуется горизонтальным δ_u и вертикальным δ_v перемещениями.

Чтобы связать названные перемещения узла K с деформациями стержней, нужно спроектировать δ_u и δ_v поочередно на направление стержней.

Проекция перемещений на направление первого стержня

$$\Delta l_1 = \delta_u.$$

Проекция на второй стержень $\Delta l_2 = \delta_v \cdot \cos 30^\circ - \delta_u \cdot \sin 30^\circ$.

Проекция на третий стержень $\Delta l_3 = \delta_v \cdot \cos 45^\circ + \delta_u \cdot \sin 45^\circ$.

Подставив значения тригонометрических функций углов и решив совместно составленные выражения получим:

$$1,225 \cdot \Delta l_3 - 1,366 \cdot \Delta l_1 - \Delta l_2 = 0 \quad (1.19)$$

– уравнение перемещений системы.

Примечание. При составлении уравнения перемещений для системы состоящей из стержней сходящихся в одном узле можно воспользоваться следующей зависимостью (записана для случая трех стержней).

$$\Delta l_3 \cdot \sin(\alpha_{31} + \alpha_{32}) = \Delta l_1 \cdot \sin \alpha_{32} + \Delta l_2 \cdot \sin \alpha_{31},$$

где 1, 2 – индексы крайних стержней, 3 – индекс среднего стержня;

α_{31}, α_{32} – углы между соответствующими стержнями.

Для данного примера

$$\Delta l_3 \cdot \sin 120^\circ = \Delta l_1 \cdot \sin 75^\circ + \Delta l_2 \cdot \sin 45^\circ.$$

Подставив значения тригонометрических функций углов, получим

$$0,866 \cdot \Delta l_3 = 0,966 \cdot \Delta l_1 + 0,707 \cdot \Delta l_2,$$

$$\text{или } \Delta l_2 = 1,225 \cdot \Delta l_3 - 1,366 \cdot \Delta l_1,$$

что соответствует уравнению (1.19), полученному ранее.

Выразив в уравнении (1.19) деформации стержней через продольные силы, получим

$$\frac{N_2 l}{EA} = 1,225 \frac{N_3 l}{EA} - 1,366 \frac{N_1 l}{EA} \quad \text{или } N_2 = 1,225 \cdot N_3 - 1,366 \cdot N_1 = 0. \quad (1.20)$$

Совместное решение уравнений (1.17), (1.18) и (1.20) дает значения искомых продольных сил в стержнях:

$$N_1 = -4,37 \text{ кН},$$

$$N_2 = 99,4 \text{ кН},$$

$$N_3 = 76,3 \text{ кН}.$$

Расчет показал, что предположение о том, что стержень 1 будет растянут ошибочно – в действительности он сжат. Никаких пересчетов делать не надо, т.к. предварительное направление N_1 и характер деформации стержня с о в п а д а л и (плюс – плюс).

Вычислим нормальные напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{4,31 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = -0,862 \cdot 10^7 \text{ Па} = -8,62 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = 199 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = 153 \text{ МПа}.$$

Анализ полученных значений напряжений показывает, что наиболее напряжен второй стержень.

Замечание. В системах, подобных рассмотренной, при условии равенства жесткостей стержней наиболее напряжен стержень, который менее всего отклонен от направления действующей силы (в примере стержень 2).

Вычислим деформации стержней системы:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = -\frac{4,31 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{200 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = -0,00647 \cdot 10^1 \text{ м} = -0,65 \text{ мм},$$

$$\Delta l_2 = 14,9 \text{ мм},$$

$$\Delta l_3 = 11,5 \text{ мм}.$$

Для определения вертикальной δ_v и горизонтальной δ_u перемещений узла K , подставив значения деформаций стержней в уравнение перемещений, получим

$$\Delta l_1 = \delta_u = -0,65 \text{ мм},$$

$$\Delta l_2 = \delta_v \cdot 0,866 - \delta_u \cdot 0,5 = 14,9 \text{ мм},$$

$$\Delta l_3 = \delta_u \cdot 0,707 + \delta_v \cdot 0,707 = 11,5 \text{ мм},$$

откуда $\delta_u = -0,65 \text{ мм}$, $\delta_v = 17,6 \text{ мм}$.

Полное перемещение узла K

$$\delta = \sqrt{\delta_u^2 + \delta_v^2} = \sqrt{(0,65)^2 + (17,6)^2} = 17,61 \text{ мм.}$$

Пример 1.10

Стальной стержень круглого поперечного сечения, жестко заземленный обоими концами к неподвижным опорам, нагружен системой расчетных сил F (рис. 1.12, *a*).

Определить минимально необходимый диаметр стержня, если $R = 210 \text{ МПа}$, $E = 200 \text{ ГПа}$.

Проверить прочность стержня, если между нижним концом его и опорой будет зазор $\Delta = 1,5 \text{ мм}$.

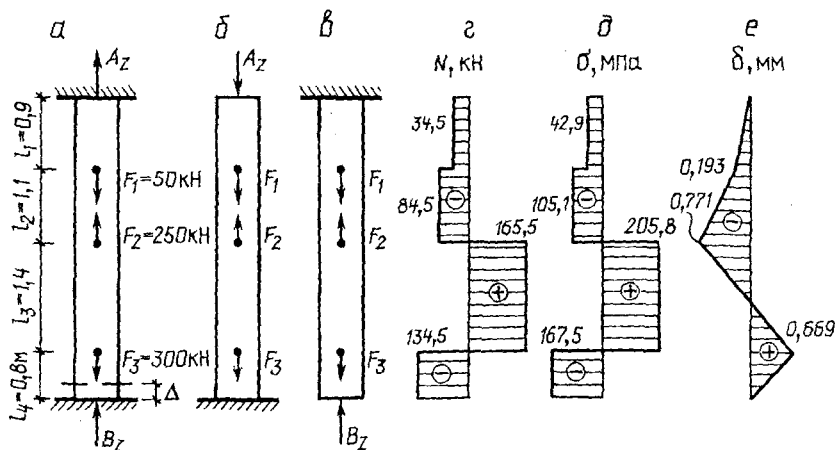


Рис. 1.12

Решение

Нагрузка F , действующая по продольной оси стержня, вызывает в опорах только по одной реакции (A_z и B_z) по линии действия сил. Сам стержень подвергается деформации растяжения-сжатия с образованием в сечениях его продольных сил N .

Неизвестные реакции направляются произвольно.

Для данного стержня можно составить только одно уравнение равновесия $\sum Z = A_z - F_1 + F_2 - F_3 + B_z = 0$, из которого две неизвестные

величины не могут быть определены. Значит, рассматриваемый стержень является статически неопределимым.

Для проведения расчета стержень делится на расчетные участки с граничными сечениями, в которых приложены внешние силы (активные и реактивные). В примере – четыре расчетных участка, в пределах которых намечаются сечения I...IV. Заданным длинам l участков придается номер расчетного участка ($l_1...l_4$).

Для раскрытия статической неопределимости к уравнению равновесия необходимо составить одно дополнительное уравнение исходя из принципа совместности перемещений его участков.

Для проведения расчета выбирается т.н. основная (статически определимая) система, которая получается из статически неопределимой, путем удаления одной связи (здесь опоры). Основная система загружается заданной нагрузкой и неизвестной реакцией удаленной опоры. Один из вариантов основной системы показан на рис. 1.12, б, где удалена верхняя опора.

Смысл совместности перемещений в этом примере заключается в том, что в основной системе вследствие деформации расчетных участков стержня от действия нагрузки F и неизвестной реакции A_z перемещение сечения A (δ_a) должно быть равно нулю (в случае отсутствия зазора Δ).

Уравнение перемещения в общем виде – $\delta_A = \sum \Delta l_i = 0$. Выразив деформации Δl на участках стержня через продольные силы N по закону Гука ($\Delta l = \frac{Nl}{EA}$) и учтя, что на участках стержня $EA = \text{const}$, получим

$$\delta_A = \frac{1}{EA} [A_z(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) - F_1(l_2 + l_3 + l_4) + F_2(l_3 + l_4) - F_3l_4] = 0$$

или $4,2 \cdot A_z - 50 \cdot 3,3 + 250 \cdot 2,2 - 300 \cdot 0,8 = 0$,
откуда $A_z = -34,5$ кН.

Полученный в результате вычислений знак «минус» при A_z означает, что эта реакция имеет противоположное направление. Направление A_z (см. рис. 1.12, б) исправлено на действительное.

Для определения реакции B_z рассмотрим основную систему, изображенную на рис. 1.12, в.

$$\delta_B = \sum \Delta l_i = 0,$$

$$\delta_B = \frac{1}{EA} [-B_z(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + F_1 l_1 - F_2(l_1 + l_2) + F_3(l_1 + l_2 + l_3)] = 0$$

или $-4,2 \cdot B_z + 50 \cdot 0,9 - 250 \cdot 2,0 + 300 \cdot 3,4 = 0$,

откуда $B_z = 134,5$ кН.

Направление реакции R_B на рис. 12, в показано правильно.

По уравнению равновесия проверим правильность определения опорных реакций:

$\sum Z = -34,5 - 50 + 250 - 300 + 134,5 = 0$ — реакции определены правильно.

Определим продольные силы N на участках стержня, используя второй прием, по которому $N_i = \sum F_i$, и правило знаков, описанное выше (от сечения плюс, к сечению минус).

Рассматриваем «отсеченную» верхнюю часть стержня.

$$N_1 = -A_z = -34,5 \text{ кН},$$

$$N_2 = -A_z - F_1 = -34,5 - 50 = -84,5 \text{ кН},$$

$$N_3 = -A_z - F_1 + F_2 = -34,5 - 50 + 250 = 165,5 \text{ кН},$$

$$N_4 = -A_z - F_1 + F_2 - F_3 = -34,5 - 50 + 250 - 300 = -134,5 \text{ кН}.$$

По этим данным строится эпюра продольных сил (рис. 1.12, з).

Диаметр стержня определяем из условия прочности по нормальным напряжениям.

Площадь поперечного сечения стержня:

$$A = \frac{N_{\max}}{R} = \frac{165,5 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,788 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 7,88 \text{ см}^2,$$

а диаметр его

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 7,88}{3,14}} = 3,17 \text{ см}.$$

Принимаем по стандарту диаметр стержня $d = 3,2$ см с площадью сечения $A = 8,04$ см².

Нормальные напряжения на участках стержня равны

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{34,5 \cdot 10^3}{8,04 \cdot 10^{-4}} = -4,29 \cdot 10^7 \text{ Па} = -42,9 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_2 = -105,1 \text{ МПа, } \sigma_3 = 205,8 \text{ МПа, } \sigma_4 = -167,3 \text{ МПа.}$$

Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 1.12, д.

Для построения эпюры перемещений необходимо вычислить деформации на каждом расчетном участке стержня:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = -\frac{34,5 \cdot 10^3 \cdot 0,9}{200 \cdot 10^9 \cdot 8,04 \cdot 10^{-4}} = -0,0193 \cdot 10^1 \text{ м} = -0,193 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_2 = -0,578 \text{ мм, } \Delta l_3 = 1,44 \text{ мм, } \Delta l_4 = -0,669 \text{ мм.}$$

Перемещения граничных сечений:

$$\delta_A = 0,$$

$$\delta_C = \Delta l_1 = -0,193 \text{ мм,}$$

$$\delta_D = \delta_C + \Delta l_2 = -0,193 - 0,578 = -0,771 \text{ мм,}$$

$$\delta_K = \delta_D + \Delta l_3 = -0,771 + 1,44 = 0,669 \text{ мм,}$$

$$\delta_B = \delta_K + \Delta l_4 = 0,669 - 0,669 = 0.$$

Эпюры перемещений показаны на рис. 1.12, е.

Проверим прочность стержня, если между нижним концом и опорой имеется зазор $\Delta = 1,5$ мм. Зазор может образоваться вследствие неточности изготовления или при установке опоры.

Рассмотрим два варианта:

1) если вследствие деформации зазор Δ не будет перекрыт, стержень окажется укрепленным только на одной верхней опоре (кстати, система будет статически определимой). Наиболее нагруженным будет третий участок – $N_3 = 300$ кН, $\sigma_3 = 373$ МПа $> R$;

2) если вследствие деформации зазор Δ будет перекрыт, стержень окажется укрепленным с двух концов.

Уравнение перемещения:

$$\delta_B = \frac{1}{EA} [-B_z(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + F_1 l_1 - F_2(l_1 + l_2) + F_3(l_1 + l_2 + l_3)] = \Delta.$$

После подстановки значений параметров ($\Delta = 1,5 \cdot 10^{-3}$) получим – опорная реакция $B_z \approx 77,1$ кН.

В наиболее нагруженном третьем участке

$$N_3 = -B_z + F_3 = -77,1 + 300 = 222,9 \text{ кН},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{222,9 \cdot 10^3}{8,04 \cdot 10^{-4}} = 277 \text{ МПа} > R,$$

т.е. напряжение превышает расчетное сопротивление.

Таким образом, в статически неопределимых системах неточность изготовления элементов ее приводит к изменению проектных напряжений в элементах (участках) системы, что может привести к недопустимым перенапряжениям.

Пример 1.11

Бетонная труба со свободно вставленным стальным стержнем заделана в абсолютно жесткие опоры (рис. 1.13, а).

Определить напряжения в элементах конструкции, если стальной стержень перед закреплением в правой опоре был растянут на величину $\Delta = 0,5$ мм (рис. 1.13, б).

Для стали $E_{ст} = 200$ ГПа, для бетона $E_б = 20$ ГПа.

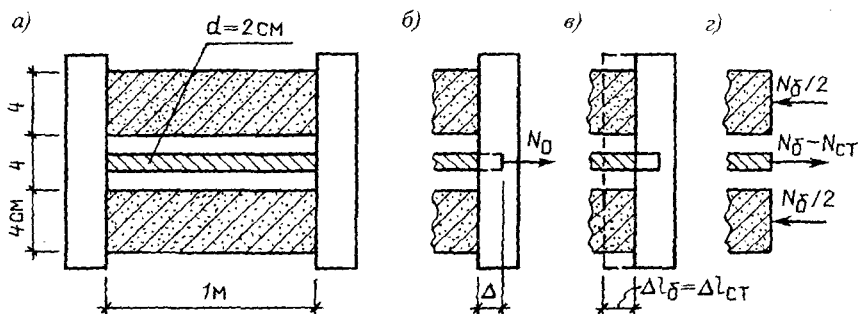


Рис. 1.13

Решение

Площади поперечных сечений:
стального стержня

$$A_{\text{ст}} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} = 3,14 \text{ см}^2,$$

бетонной трубы

$$A_{\text{б}} = \frac{3,14 \cdot (12^2 - 4^2)}{4} = 100,5 \text{ см}^2.$$

Определим предварительное усилие N_0 , необходимое для создания деформации стального стержня на $\Delta = 0,5$ мм (из формулы Гука):

$$N_0 = \frac{\Delta \cdot E \cdot A}{l} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}}{1} = 31,4 \text{ кН}.$$

После закрепления продеформированного стального стержня в правой опоре усилие N_0 снимается. За счет сил упругости стального стержня, которые образовались в нем при растяжении, бетонная труба продеформируется (укоротится) на величину $\Delta l_{\text{б}}$. при этом стальной стержень останется удлиненным на величину $\Delta l_{\text{ст}}$ (рис. 1.13, в).

Исходя из принципа совместности деформаций должно выполняться условие $\Delta l_{\text{б}} = \Delta l_{\text{ст}}$.

Выразив деформации Δl через продольные усилия N , получим

$$\frac{N_{\text{б}} l_{\text{б}}}{E_{\text{б}} A_{\text{б}}} = \frac{N_{\text{ст}} l_{\text{ст}}}{E_{\text{ст}} A_{\text{ст}}} \quad \text{или} \quad N_{\text{б}} = 3,20 \cdot N_{\text{ст}}. \quad (1.21)$$

Уравнение равновесия (по рис. 1.13, з):

$$\sum Z = N_0 - N_{\text{ст}} - N_{\text{б}} = 0. \quad (1.22)$$

Из уравнений (1.21) и (1.22) усилия в элементах конструкций $N_{\text{б}} = 23,9$ кН, $N_{\text{ст}} = 7,48$ кН.

Напряжения:
в стальном стержне

$$\sigma_{ст} = \frac{7,48 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10^{-4}} = 23,8 \text{ МПа (растяжение),}$$

в бетонной трубе

$$\sigma_{б} = \frac{23,9 \cdot 10^3}{100,5 \cdot 10^{-4}} = 2,38 \text{ МПа (сжатие),}$$

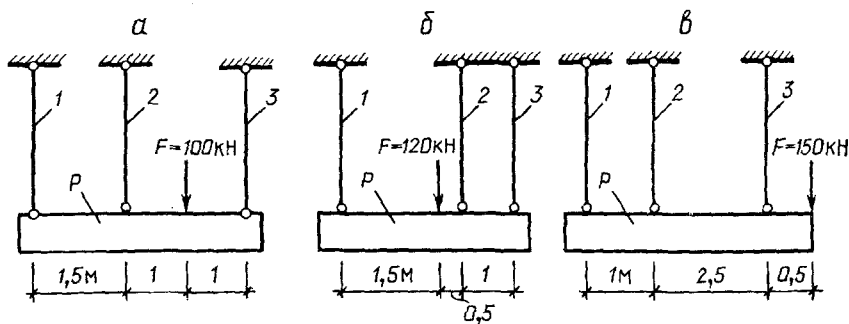
Задачи для аудиторного и самостоятельного решения

Задача 1.11

Система, состоящая из абсолютно жесткого элемента P и трех стальных стержней, нагружена расчетной нагрузкой F .

Стержни имеют одинаковые длины и площади поперечного сечения.

Определить диаметр стержней, если $R = 210$ МПа.



Ответы:

А. По расчету $d = 1,88$ см; принимаем по сортаменту $d = 2,0$ см.

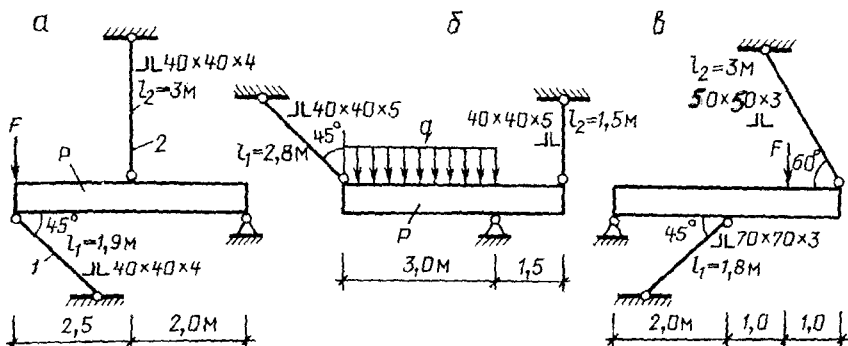
Б. По расчету $d = 1,69$ см; принимаем по сортаменту $d = 1,8$ см.

В. По расчету $d = 3,17$ см; принимаем по сортаменту $d = 3,2$ см.

Задача 1.12

Определить наибольшую допустимую нагрузку на систему, состоящую из абсолютно жесткого элемента P и двух стальных стержней, выполненных из сдвоенных равнополочных уголков.

Для стали $R = 210 \text{ МПа}$, $E = 200 \text{ ГПа}$.



Ответы:

А. $N_{\max} = N_1 = 1,132 F$; $F_{\text{adm}} = 87,2 \text{ кН}$.

Б. $N_{\max} = N_2 = 1,447 q$; $q_{\text{adm}} = 110 \text{ кН/м}$.

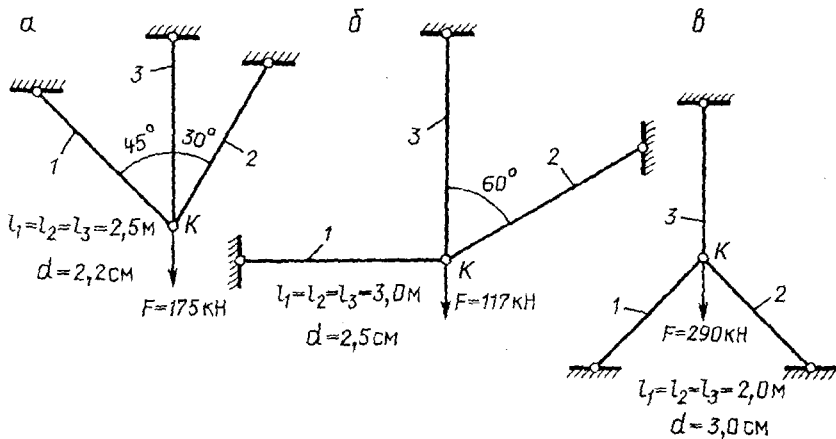
В. $N_{\max} = N_3 = 0,678 F$; $F_{\text{adm}} = 183,3 \text{ кН}$.

Задача 1.13

Система, состоящая из трех стальных стержней одинакового поперечного сечения и длины, нагружена расчетной нагрузкой F .

Определить напряжения в стержнях и перемещения узла K .

Для стали $R = 210 \text{ МПа}$, $E = 200 \text{ ГПа}$.



Ответы:

А. Напряжения: $\sigma_1 = 132$ МПа, $\sigma_2 = 187$ МПа, $\sigma_3 = 205$ МПа.

Перемещения: $\delta_v = 2,57$ мм, $\delta_u = 0,24$ мм, $\delta = 2,58$ мм.

Б. Напряжения: $\sigma_1 = 59,6$ МПа, $\sigma_2 = 69,6$ МПа, $\sigma_3 = 209$ МПа.

Перемещения: $\delta_v = 3,13$ мм, $\delta_u = 0,776$ мм, $\delta = 3,22$ мм.

В. Напряжения: $\sigma_1 = \sigma_2 = 145$ МПа, $\sigma_3 = 205$ МПа.

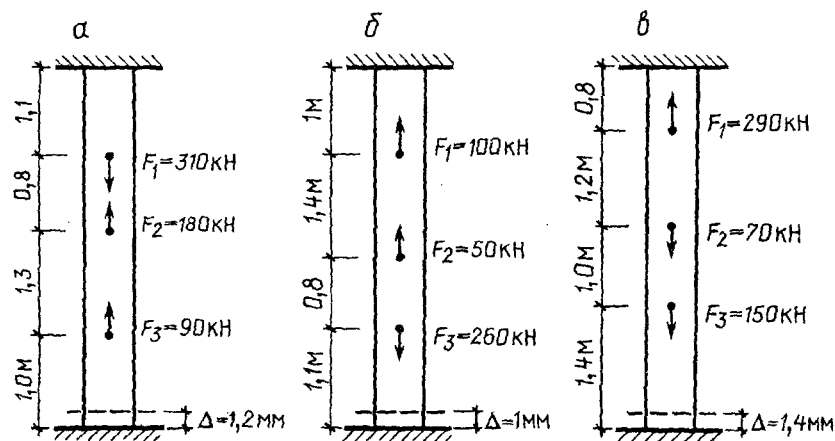
Перемещения: $\delta_v = 2,43$ мм, $\delta_u = 0$, $\delta = 2,43$ мм.

Задача 1.14

Определить минимально необходимый диаметр стального стержня, жестко заземленного обоими концами и нагруженного системой расчетных сил F .

Проверить прочность стержня, если между нижним концом его и опорой будет зазор Δ .

Для стали $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.



Ответы:

А. По расчету: $d = 3,49$ см, принимаем $d = 3,6$ см, $\sigma_{\max} = 197$ МПа.

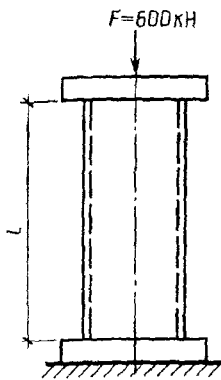
При наличии зазора $\sigma_{\max} = 264$ МПа $> R$.

Б. По расчету: $d = 2,94$ см, принимаем $d = 3,0$ см, $\sigma_{\max} = 201$ МПа.

При наличии зазора $\sigma_{\max} = 214$ МПа $> R$.

В. По расчету: $d = 3,03$ см, принимаем $d = 3,0$ см, $\sigma_{\max} = 214$ МПа (перенапряжение $< 5\%$).

При наличии зазора $\sigma_{\max} = 260$ МПа $> R$.



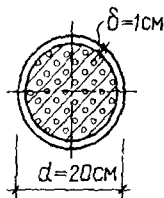
Задача 1.15

Короткая стальная труба, заполненная бетоном, находится под действием сжимающей силы F , которая передается трубе через абсолютно жесткую плиту.

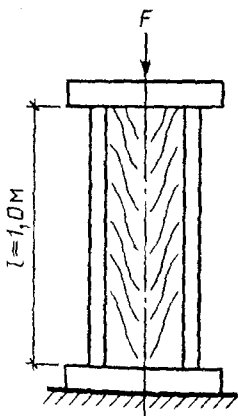
Проверить прочность трубы и бетона.

Для стали: $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.

Для бетона: $R_c = 20$ МПа, $E = 30$ ГПа.



Ответ: в трубе $\sigma = 61,3$ МПа $< R$, в бетоне $\sigma = 9,2$ МПа $< R_c$.



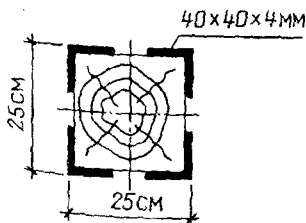
Задача 1.16

Деревянная стойка, усиленная четырьмя стальными уголками, сжимается силой F через абсолютно жесткую плиту.

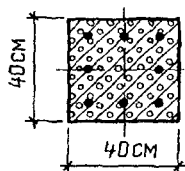
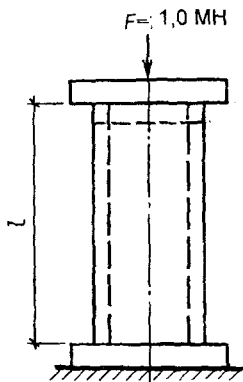
Определить наибольшую допустимую нагрузку F .

Для стали: $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.

Для древесины: $R_c = 4,0$ МПа, $E = 10$ ГПа.



Ответ: $F_{adm} = 349$ кН ($\sigma_{стали} = 80$ МПа, $\sigma_{дер} = 4,0$ МПа).



Задача 1.17

Короткая железобетонная стойка сечением 40×40 см, армированная восемью стальными стержнями диаметром $d = 2,5$ см, сжимается центрально приложенной силой $F = 1,0$ МН.

Определить напряжение в арматуре и бетоне.

Для стали: $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.

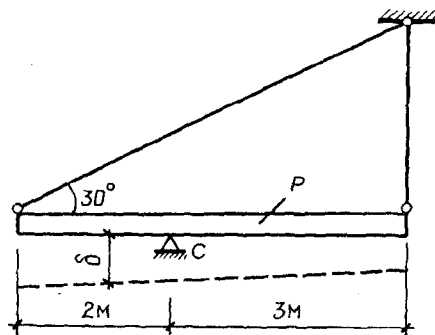
Для бетона: $R_c = 5,0$ МПа, $E = 20$ ГПа.

Ответ: $\sigma_{\text{стали}} = 50,2$ МПа, $\sigma_{\text{бет}} = 5,01$ МПа.

Задача 1.18

Конструкция, состоящая из абсолютно жесткого элемента P , укрепленного на опоре C , и двух стальных стержнях, выполненных из двух прокатных равнополочных уголков номер $50 \times 50 \times 5$ мм.

Определить напряжения в стержнях вследствие осадки опоры C на $\delta = 0,2$ см.



Ответ: $\sigma_1 = 55$ МПа, $\sigma_2 = 18,3$ МПа.

Раздел 2. СДВИГ

Деформация сдвига наблюдается в тех случаях, когда внешние силы, действующие на стержень, пытаются сдвинуть одну часть его по отношению к другой (рис. 2.1).

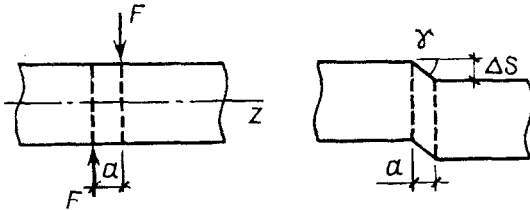


Рис. 2.1

Происходит это, когда на стержень действуют перпендикулярно продольной оси Z две равные сосредоточенные силы F на очень близком расстоянии a друг от друга, направленные в противоположные стороны.

Деформации сдвига (среза) подвергаются в основном соединительные элементы конструкций: заклепки, болты, швы электросварки, врубки, шпонки. Деформация их носит сложный характер.

При сдвиге в поперечном сечении стержня возникает поперечная сила Q и часто изгибающий момент M . В большинстве случаев определяющее значение имеет поперечная сила, а изгибающим моментом можно пренебречь, т.е. считать сдвиг чистым. Определяется поперечная сила Q методом сечений.

Поперечная сила приводит к образованию касательных напряжений τ , которые, принято считать, распределяются по площади сдвига (среза) равномерно и определяются по формуле

$$\tau = \frac{Q}{A} \quad (2.1)$$

где Q – поперечная сила в сечении сдвига,

A – площадь поперечного сечения в зоне сдвига.

В зоне чистого сдвига материал элемента находится в условии плоского напряженного состояния. Но поскольку в зоне сдвига возникают только касательные напряжения, условие прочности используется в виде

$$\tau_{\max} \leq R_s, \quad (2.2)$$

где R_s – расчетное сопротивление материалов сдвигу.

В зоне сдвига наблюдаются следующие деформации: ΔS – абсолютный сдвиг и $\gamma = \Delta S/a$ – относительный сдвиг (см. рис. 2.1).

Закон Гука при сдвиге выражается формулой

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (2.3)$$

где G – модуль упругости материала при сдвиге (модуль второго рода).

2.1. Расчет заклепочных соединений

В реальных условиях соединений заклепки рассчитываются на срез по касательным напряжениям, а контактирующиеся элементы (заклепки, соединяемые части) еще и на смятие по нормальным напряжениям (рис. 2.2).

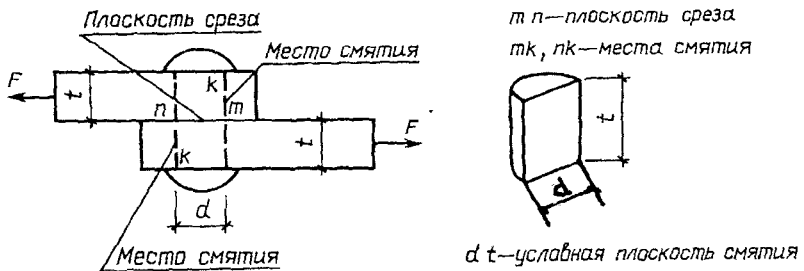


Рис. 2.2

Принято считать, что при статической нагрузке заклепки вдоль линии действия внешних сил нагружены одинаково.

Различают заклепочные соединения одно- и многосрезные (см. примеры).

Условие прочности на срез имеет вид

$$\tau = \frac{Q}{\sum A_s} = \frac{Q}{A_s \cdot n \cdot n_s} \leq R_s, \quad (2.4)$$

где Q – поперечная (срезающая) сила в заклепочном соединении ($Q = f(F)$),

A_s – площадь поперечного сечения одной заклепки,

n – число заклепок в соединении,

n_s – число срезов в одной заклепке,

R_s – расчетное сопротивление материала заклепки срезу.

В местах контакта заклепки с соединительными элементами возникают усилия смятия, приводящие к образованию по площади контакта нормальных напряжений σ_p . Считается, что эти напряжения распределяются по условной площади сечения ($d \cdot t$) равномерно.

Условие прочности на смятие имеет вид

$$\sigma_p = \frac{N}{\sum A_p} = \frac{N}{d \cdot n \cdot \sum t} \leq R_p, \quad (2.5)$$

где N – сминающая сила ($N = f(F)$),

$\sum A_p$ – суммарная площадь сопротивления сжатию,

d – диаметр заклепки,

n – число заклепок в соединении,

$\sum t$ – наименьшая суммарная толщина элементов соединения, сминающихся в одном направлении,

R_p – расчетное сопротивление материала сжатию.

Количество заклепок в соединении определяется из условий прочности на срез (2.4) и смятие (2.5). В расчет принимается большее их количество.

При соединении элементов внахлестку, принятое количество заклепок размещается в зоне накладки одного элемента на другой. В случае соединения элементов встык с накладкой (накладками) – размещаются на половине накладки (см. примеры).

Поскольку площадь поперечного сечения соединяемых элементов конструкции уменьшена (ослаблена) отверстиями под заклепки, требуется проверка прочности их на растяжение по нормальным напряжениям

$$\sigma = \frac{N}{A_{нт}} \leq R, \quad (2.6)$$

где N – продольная сила в соединяемых элементах,

$A_{нт}$ – площадь ослабленного сечения (нетто),

R – расчетное сопротивление материала соединяемых элементов на растяжение.

Ослабление сечения отверстиями под заклепки у прокатных профилей составляет $\approx 15\%$ ($A_{нт} \approx 0,85 A_{брутто}$).

Болтовые соединения рассчитываются аналогично заклепочным.

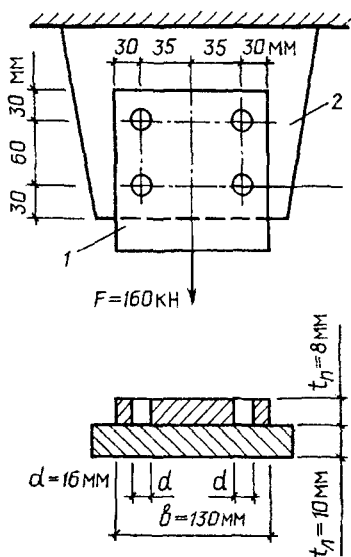


Рис. 2.3

В местах соприкосновения заклепок с соединяемыми элементами возникает деформация смятия.

Проверка прочности соединения выполняется по трем условиям: на срез, смятие и разрыв полосы по ослабленному сечению.

Проверка прочности на срез проводится по формуле (2.4):

$$\tau = \frac{Q}{A_s \cdot n \cdot n_s} = \frac{4F}{\pi d^2 \cdot n \cdot n_s} = \frac{4 \cdot 160 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 16^2 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 1} = 0,1995 \cdot 10^9 \text{ Па} = 199,5 \text{ МПа} < R_s = 200 \text{ МПа},$$

т.е. условие прочности на срез выполняется.

Заметим, что заклепок в соединении $n = 4$, число срезов в одной заклепке $n_s = 1$ и что нагрузка F передается на все четыре заклепки поровну ($Q = F/n$).

Пример 2.1

Стальная полоса (1) сечением 120×80 мм, с расчетной нагрузкой $F = 160$ кН, прикрепляется к фасонному листу (2) толщиной 10 мм заклепками диаметром $d = 16$ мм.

Проверить прочность заклепочного соединения.

Расчетные сопротивления: для соединяемых элементов – на растяжение $R = 210$ МПа, на смятие $R_p = 420$ МПа, для заклепок – на срез $R_s = 200$ МПа.

Решение

Нагрузка F , приложенная к присоединяемой полосе, через заклепки передается на фасонный лист. Полоса и лист подвергаются растяжению, а заклепки – срезу. В местах соприкосновения заклепок с соединяемыми элементами возникает деформация смятия.

Проверка прочности на смятие проводится по формуле (2.5):

$$\sigma_p = \frac{N}{d \cdot n \cdot \sum t} = \frac{F}{d \cdot n \cdot \sum t} = \frac{160 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 10^{-3}} = \\ = 0,313 \cdot 10^9 \text{ Па} = 313 \text{ МПа} < 420 \text{ МПа},$$

т.е. условие прочности на смятие выполняется.

Заметим, что в расчет принимается наименьшая толщина соединительных элементов, т.е. полосы ($t_n = 8$ мм).

Проверка прочности присоединяемой полосы проводится по формуле (2.6) в ослабленном сечении

$$\sigma = \frac{N}{A_{нт}} = \frac{F}{b \cdot t_{II} - 2dt_{II}} = \frac{160 \cdot 10^3}{130 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 16 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3}} = \\ = 0,205 \cdot 10^9 \text{ Па} = 205 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа},$$

т.е. условие прочности полосы на растяжение выполняется.

Заметим, что $b \cdot t_{II}$ – площадь поперечного сечения полосы брутто (без отверстий), а $d \cdot t_{II}$ – площадь сечения полосы под заклепкой.

Фасонный лист, к которому приклепана полоса, также рассчитывается на растяжение по ослабленному сечению. В данном примере прочность его обеспечена вследствие больших размеров поперечного сечения.

Таким образом, рассматриваемое заклепочное соединение отвечает всем требованиям прочности.

Пример 2.2

Нижний пояс фермы, выполненный из неравнополочных уголков, соединяется при помощи накладки и заклепок диаметром $d = 14$ мм.

Расчетная продольная сила (выявленная в процессе расчета фермы) составляет $N = 500$ кН. Подобрать номер уголков и размеры поперечного сечения накладки, а также определить необходимое количество заклепок, если $R = 210$ МПа, $R_p = 350$ МПа, $R_s = 190$ МПа.

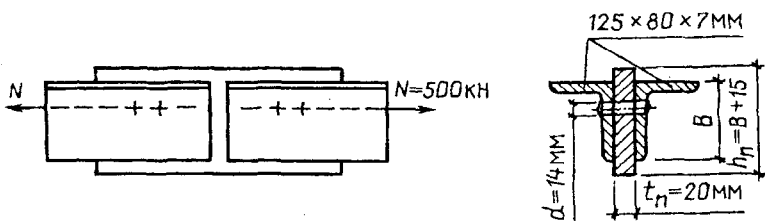


Рис. 2.4

Решение

Растягивающая продольная сила N в правой части фермы через правую группу заклепок передается накладке, а затем через левую группу заклепок уравнивается продольной силой в левой части пояса.

Соединяемые элементы (уголки) пояса фермы и соединительная накладка подвергаются растяжению, а заклепки – срезу и смятию.

Определим площадь поперечного сечения нижнего пояса фермы из условия прочности по нормальным напряжениям (2.6):

$$A_{\text{нт}} \approx 0,85 A_{\text{бр}} = \frac{N}{R};$$

$$A_{\text{бр}} = \frac{N}{0,85 R} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,85 \cdot 210 \cdot 10^6} = 28,0 \text{ см}^2.$$

Для одного уголка $A'_{\text{бр}} = 28,0 / 2 = 14,0 \text{ см}^2$.

Принимаем по сортаменту для неравнополочных уголков два уголка $125 \times 80 \times 7$ мм с площадью $A_{\text{бр}} = 2 \cdot 14,06 = 28,1 \text{ см}^2$.

Толщину накладки t_n можно определить из формулы (2.6) или воспользоваться значением $A_{\text{бр}}$ для уголков.

$A_n = A_{\text{бр}}^{\text{угол}}$. По условию задачи $h_n = B_{\text{уг}} + 15 \text{ мм} = 125 + 15 = 140 \text{ мм}$.

Тогда $A_n = h_n \cdot t_n = 14,0 \cdot t_n = 28,1 \text{ см}^2$, откуда $t_n = 2 \text{ см}$.

Определим количество заклепок из условия прочности на срез (2.4):

$$n \geq \frac{Q}{A_s \cdot n_s \cdot R_s} = \frac{4N}{\pi d^2 n_s R_s} = \frac{4 \cdot 500 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 14^2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 190 \cdot 10^6} = 0,00855 \cdot 10^3 = 8,55.$$

В рассматриваемом примере заклепки двухсрезные ($n_s = 2$).
 Определим количество заклепок из условия прочности на смятие (2.5):

$$n \geq \frac{N}{d \cdot \sum t \cdot R_p} = \frac{500 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 7 \cdot 10^{-3} \cdot 350 \cdot 10^6} = \\ = 0,00729 \cdot 10^3 = 7,29.$$

Заметим, что в одном направлении сминаются уголки, для которых $\sum t = 2 \cdot 7 = 14$ мм, а в другом – накладка, для которой $\sum t = 1 \cdot 20 = 20$ мм. В расчет идет меньшее значение $\sum t$ (как более слабое).

Из двух вычисленных значений n выбираем большее. Округлив число n до большего целого, получим $n = 9$.

Таким образом, на каждой половине накладки необходимо разместить по 9 заклепок.

Уточним несущую способность (N) рассмотренного заклепочно-соединения. Из условия прочности нижнего пояса фермы по формуле (2.6):

$$N = A_{нт} \cdot R = (A_{6p} - A_{отв}) \cdot R = \\ = (14,06 \cdot 10^{-4} \cdot 2 - 7 \cdot 10^{-3} \cdot 14 \cdot 10^{-3} \cdot 2) \cdot 210 \cdot 10^6 = 549 \text{ кН.}$$

Из условия прочности накладки по (2.6):

$$N = A_{нт} \cdot R = (140 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3} - 14 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-3}) \times \\ \times 210 \cdot 10^6 = 529 \text{ кН.}$$

Из условия прочности заклепок на срез по (2.4):

$$N = A_s \cdot n \cdot n_s R_s = \frac{\pi d^2}{4} \cdot n \cdot n_s \cdot R_s = \frac{3,14 \cdot 14^2 \cdot 10^{-6}}{4} \cdot 9 \cdot 2 \cdot 190 \cdot 10^6 = 526 \text{ кН.}$$

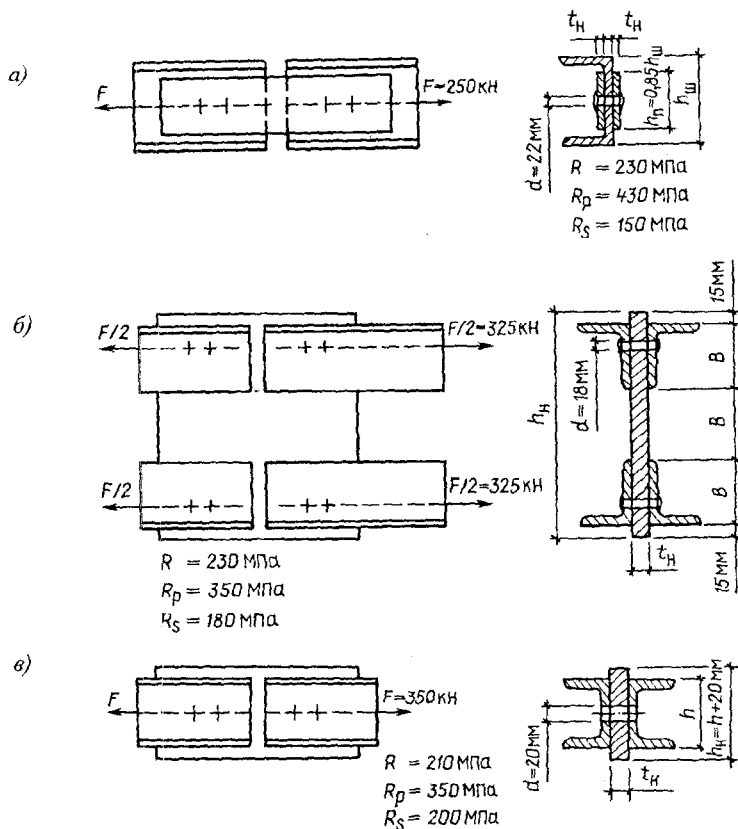
Из условия прочности заклепок на смятие по формуле (2.5):

$$N = d \cdot n \cdot \sum t_{\min} \cdot R_p = 14 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 7 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 350 \cdot 10^6 = 617 \text{ кН.}$$

Анализ полученных значений N показывает, что безопасная продольная сила, которую может воспринять заклепочное соединение, составляет $N = 526$ кН, т.е. пояс фермы имеет повышенный на 5,2 % запас прочности.

Задача 2.1

Заклепочное соединение должно безопасно воспринять нагрузку F .
 Определить номер прокатного профиля, размеры поперечного сечения накладки и количество заклепок.



Ответы:

А. I № 12, накладка $10 \times 0,7 \text{ см}$, $n = 6$ (с каждой стороны стыка).

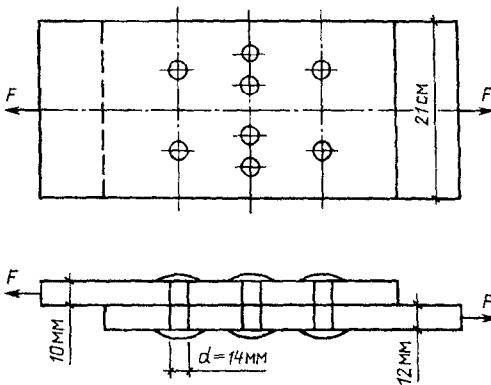
Б. L 75 \times 60 \times 7 мм, накладка $25,5 \times 1,3 \text{ см}$, $n = 8$.

В. 2I № 10, накладка $12 \times 1,8 \text{ см}$, $n = 6$.

Задача 2.2

Две стальные полосы соединены внахлестку заклепками диаметром $d = 14 \text{ мм}$.

Определить наибольшую допустимую нагрузку F , если $R = 210 \text{ МПа}$,
 $R_s = 140 \text{ МПа}$, $R_p = 250 \text{ МПа}$.



Ответ: $F = 172$ кН.

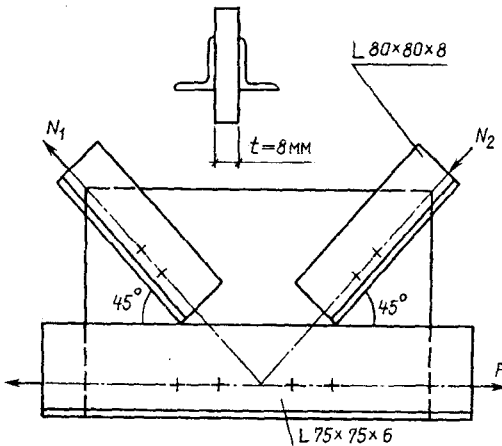
Задача 2.3

Раскосы стальной фермы, выполненные из уголков $80 \times 80 \times 8$ мм, присоединяются к нижнему поясу, выполненному из уголков $75 \times 75 \times 6$ мм с помощью косынки толщиной $t = 8$ мм. Усилия в раскосах равны $N_1 = -N_2 = 140$ кН.

Требуется определить необходимое количество заклепок диаметром $d = 17$ мм для присоединения:

- 1) раскосов к косынке;
- 2) косынки к нижнему поясу.

Расчетные сопротивления: $R_s = 100$ МПа, $R_p = 260$ МПа.



Ответ: $n_1 = 4$; $n_2 = 6$.

2.2. Расчет сварных соединений

В строительных конструкциях наиболее применимы сварные соединения внахлестку, которые выполняются угловыми (валиковыми) электрошвами. Швы, расположенные в направлении действующей силы, называются боковыми (фланговыми), а расположенные перпендикулярно к этому направлению – торцевыми (лобовыми) (рис. 2.5).

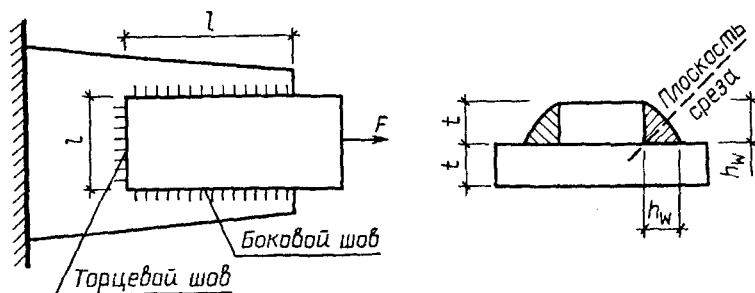


Рис. 2.5

Угловые швы (боковые и торцевые) работают в основном на срез. Образующиеся в них касательные напряжения считаются равномерно распределенными по площади среза.

Условие прочности на срез для угловых швов имеет вид

$$\tau_{\omega} = \frac{Q}{A_{\omega}} = \frac{Q}{\beta h_{\omega} l_{\omega}} \leq R_{\omega}, \quad (2.7)$$

где τ_{ω} – касательное напряжение в сечении шва;

Q – усилие среза ($Q = f(F)$);

A_{ω} – площадь среза шва;

β – коэффициент, зависящий от вида сварки ($\beta = 0,7 \dots 1,0$);

h_{ω} – толщина (катет) углового шва;

l_{ω} – суммарная расчетная длина швов;

R_{ω} – расчетное сопротивление материала шва срезу.

Проектная длина каждого участка шва увеличивается на 1 см против расчетной, в связи с неполным проваром его концов.

Длина отрезка шва должна быть в пределах $l_{\omega} = (4 \dots 60) h_{\omega}$.

Пример 2.3

Стальная полоса, нагруженная расчетной силой $F = 160$ кН (рис. 2.6), приварена угловыми швами к фасонному листу. Толщина шва $h_w = 8$ мм. Сварка выполнена ручным способом.

Проверить прочность полосы и сварных швов, если $R = 210$ МПа, $R_w = 150$ МПа.

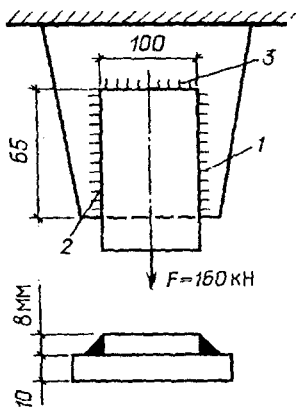


Рис. 2.6

Решение

Угловые швы (боковые 1, 2 и торцевой 3) подвергаются деформации сдвига. Присоединяемая полоса подвергается деформации растяжения.

Нормальные напряжения в полосе

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{160 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3}} = 0,200 \cdot 10^9 \text{ Па} = 200 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа},$$

т.е. прочность полосы обеспечена.

Касательные напряжения в угловых швах (по формуле 2.7)

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{Q}{A_w} = \frac{F}{A_w} = \frac{F}{\beta h_w l_w} = \frac{160 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 0,143 \cdot 10^9 \text{ Па} = 143 \text{ МПа} < R = 150 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

т.е. прочность угловых швов на срез обеспечена.

Замечания. Для ручной сварки коэффициент $\beta = 0,7$. При вычислении расчетной длины шва все отрезки его уменьшаются на 10 мм в связи с неполным проваром концов: $l_{\text{св}} = 2(65 - 10) + (100 - 10) = 200$ мм.

Пример 2.4

Стык двух неравнополочных уголков, перекрытый накладкой, растягивается силой $F = 245$ кН (рис. 2.7).

Определить из условия равнопрочности соединения номер уголков, размеры поперечного сечения накладки и длину фланговых швов для соединения уголков с накладкой, если $R = 210$ МПа, $R_{\text{св}} = 180$ МПа. Сварка ручная.

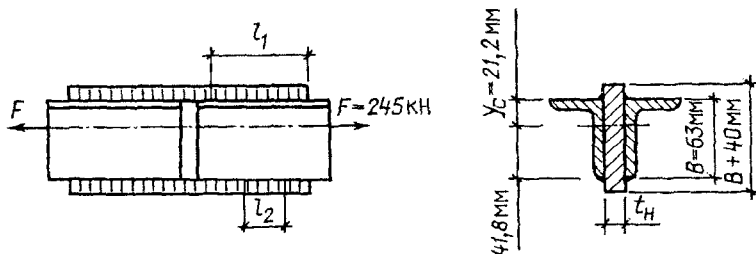


Рис. 2.7

Решение

Нагрузка F , действующая на уголки справа, через группу швов, расположенных по правую сторону от стыка, передается накладке, а затем, через группу швов левее стыка, передается на уголки и уравновешивается нагрузкой F , действующей слева.

При этом уголки и накладка подвергаются деформации растяжения, а швы – деформации среза.

Номер неравнополочных уголков определим из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq R,$$

откуда
$$A \geq \frac{F}{R} = \frac{245 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 1,17 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 11,7 \text{ см}^2.$$

Для одного уголка $A' = \frac{11,7}{2} = 5,85 \text{ см}^2$. Из таблицы сортамента принимаем два уголка 63/40/6 мм с площадью сечения $A = 5,9 \cdot 2 = 11,8 \text{ см}^2$. Для принятого уголка $B = 63 \text{ мм}$, $y_c = 2,12 \text{ см}$.

Толщину накладки определим из условия равнопрочности ее с уголками, приняв во внимание, что сторона ее $B_n = B + 40 = 63 + 40 = 103 \text{ мм}$.

$B_n \cdot t_n = A = 11,8 \text{ см}^2$, откуда $t_n = 11,8 / 10,3 = 1,146 \text{ см}$. Принимаем $t_n = 1,2 \text{ см}$.

Приняв толщину шва $n_w = 6 \text{ мм}$ (равную толщине уголка) и учтя, что сварка производится вручную, длину сварных швов определим из условия прочности их на срез (2.7):

$$l_w = \frac{Q}{A_w} = \frac{F}{\beta h_w R_w} = \frac{245 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 180 \cdot 10^6} = 0,324 \text{ м} = 32,4 \text{ см}.$$

Обратим внимание, что вычисленная длина швов должна быть расположена по одну сторону от стыка.

Так как в соединении два уголка, на один уголок длина шва будет $l'_w = 32,4 / 2 = 16,2 \text{ см}$, причем

$$l_1 + l_2 = 16,2 \text{ см}. \quad (2.8)$$

Поскольку линия действия силы F , проходящая по продольной оси уголка, находится на разных расстояниях от верхнего (1) и нижнего (2) швов, длина их должна быть обратно пропорциональна расстоянию до швов, т.е.

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{B - y_c}{y_c} = \frac{4,18}{2,12} = 1,97. \quad (2.9)$$

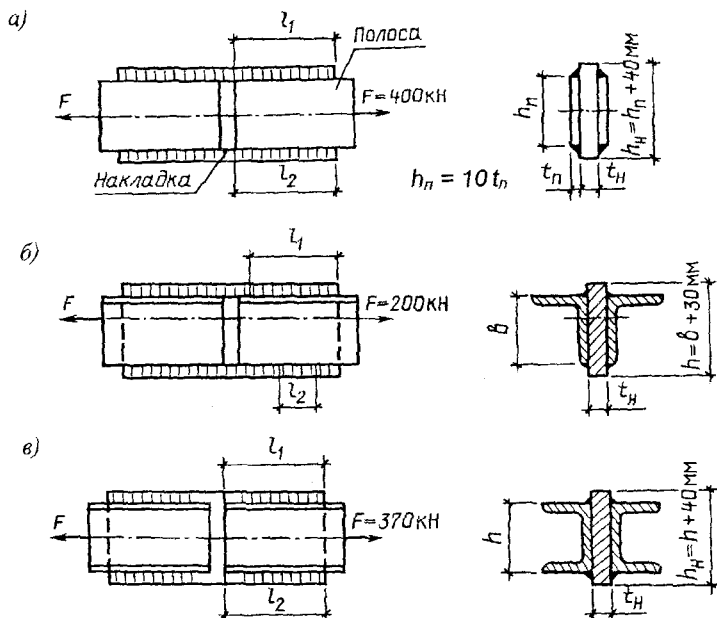
Решив совместно уравнения (2.8) и (2.9) получим $l_1 = 10,75 \text{ см}$; $l_2 = 5,45 \text{ см}$.

Проектную длину швов с учетом неполного провара концов их примем $l_1 = 12 \text{ см}$; $l_2 = 6,5 \text{ см}$.

Задачи для аудиторного и самостоятельного решения

Задача 2.4

Определить равнопрочные размеры поперечного сечения (номер прокатного профиля) соединяемых элементов и накладки, а также длину фланговых швов (выполненных вручную), если $R = 210$ МПа, $R_w = 160$ МПа.



Ответы:

А. $h_w = 10$ мм, $h_n = 10$ см, $t_n = 1,0$ см, $h_n = 14$ см, $t_n = 1,4$ см, $l_1 = l_2 = 10$ см.

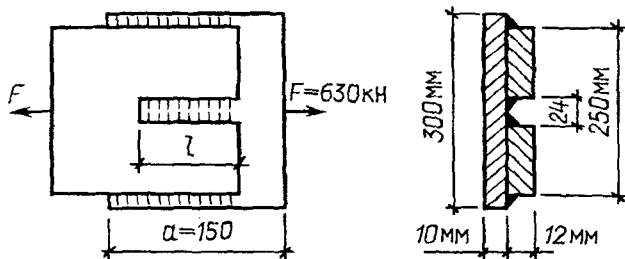
Б. $h_w = 5$ мм, уголок 50 / 50 / 5 мм, $h_n = 8$ см, $t_n = 1,2$ см, $l_1 = 14$ см, $l_2 = 6$ см.

В. $h_w = 6$ мм, двутавр № 8, $h_n = 12$ см, $t_n = 1,5$ см, $l_1 = l_2 = 15$ см.

Задача 2.5

При ограниченном перекрытии (а) соединяемых внахлестку двух полос для обеспечения прочности соединения в полосе толщиной 12 мм сделана прорезь шириной 24 мм для заполнения электрошвом.

Определить проектную длину прорези l , если $R_{\sigma} = 150$ МПа.
Сварка ручная.

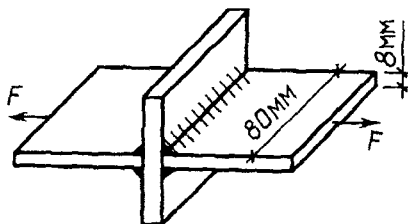


Ответ: $l = 12$ см.

Задача 2.6

Сварной стык стальной полосы осуществлен крестообразным соединением с помощью прокладки, приваренной к полосе четырьмя торцевыми швами, выполненными вручную. Катет шва $h_w = 10$ мм.

Определить значение касательного напряжения в сечении шва, если нормальное напряжение в сечении полосы составляет 150 МПа.



Ответ: $\tau_w = 98$ МПа.

2.3. Расчет врубок

Врубки, как способ соединения деревянных элементов конструкций, вследствие различной сопротивляемости древесины вдоль и поперек волокон, рассчитываются на скалывание (сдвиг) вдоль волокон и смятие вдоль и поперек волокон по площади соприкосновения соединяемых элементов (рис. 2.8).

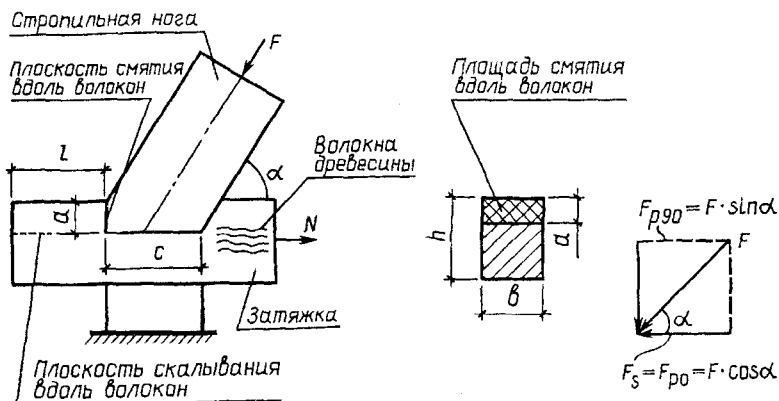


Рис. 2.8

Условие прочности врубки на скалывание вдоль волокон имеет вид

$$\tau_s = \frac{N_s}{A_s} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{b \cdot l} \leq R_s, \quad (2.10)$$

где τ_s – касательное напряжение в зоне скалывания;

N_s – усилие скалывания вдоль волокон;

A_s – площадь скалывания вдоль волокон;

b – ширина врубки;

l – длина зоны скалывания;

R_s – расчетное сопротивление древесины на скалывание (вдоль волокон).

Условие прочности врубки на смятие вдоль волокон имеет вид

$$\sigma_{p0} = \frac{N_{p0}}{A_{p0}} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{b \cdot a} \leq R_{p0}, \quad (2.11)$$

где σ_{p0} – нормальное напряжение по площади смятия (вдоль волокон);

N_{p0} – усилие смятия вдоль волокон;

F – сила, действующая на стропильную ногу;

A_{p0} – площадь смятия вдоль волокон;

b – ширина врубки;

a – глубина врубки;

R_{p90} – расчетное сопротивление древесины смятию вдоль волокон.

Условие прочности врубки на смятие поперек волокон имеет вид

$$\sigma_{p90} = \frac{N_{p90}}{A_{p90}} = \frac{F \cdot \sin \alpha}{c \cdot b} \leq R_{p90}, \quad (2.12)$$

где σ_{p90} – нормальное напряжение по площади смятия (поперек волокон);

N_{p90} – усилие смятия поперек волокон;

A_{p90} – площадь смятия поперек волокон;

c – длина врубки;

b – ширина врубки;

R_{p90} – расчетное сопротивление древесины смятию поперек волокон.

Соединение деревянных элементов конструкций при помощи шпонок, а также соединение на шип рассчитываются аналогично расчету врубок.

Пример 2.5

Соединение стропильной ноги (1) с затяжной (2) выполнено с помощью лобовой врубки. Усилие в стропильной ноге $F = 100$ кН (рис. 2.9).

Определить необходимые размеры соединения (a , c , l), если $h = 20$ см, $b = 15$ см.

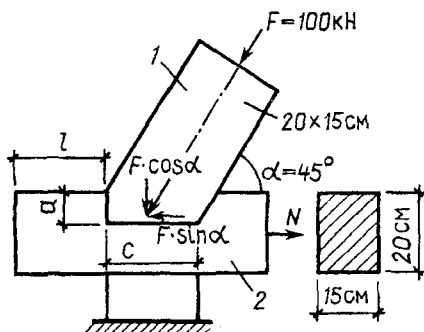


Рис. 2.9

Расчетные сопротивления для древесины: на растяжение и сжатие $R = 10$ МПа, на смятие вдоль волокон $R_{p0} = 12$ МПа, на смятие поперек волокон $R_{p90} = 3$ МПа, на скалывание вдоль волокон $R_s = 2,2$ МПа.

Решение

Сжимающее усилие в стропильной ноге F передается затяжке, вызывая в ней растягивающее усилие N и реакцию B в опоре.

В зоне врубки происходит деформация скалывания вдоль l , смятие поперек волокон по длине c и смятие вдоль волокон на участке a .

Длину выступающего конца затяжки l определяем из условия прочности на скалывание (2.10):

$$l \geq \frac{F \cdot \cos 45^0}{bR_s} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0,707}{15 \cdot 10^{-2} \cdot 2,2 \cdot 10^6} = 2,14 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 21,4 \text{ см},$$

принимаем $l = 22$ см.

Глубину врубки a определяем из условия прочности на смятие вдоль волокон (2.11):

$$a \geq \frac{F \cdot \cos 45^0}{b \cdot R_{p0}} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0,707}{15 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^6} = 0,393 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 3,93 \text{ см},$$

принимаем $a = 4,0$ см.

Заметим, что вычисленная глубина врубки укладывается в техническую норму $2 \text{ см} < a < \frac{h}{3} = \frac{20}{3} = 6,67 \text{ см}$.

Длину опирания c стропильной ноги определим из условия прочности на смятие поперек волокон (2.12):

$$c \geq \frac{F \cdot \sin 45^0}{b \cdot R_{p90}} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0,707}{15 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^6} = 1,57 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 15,7 \text{ см},$$

принимаем $c = 16$ см.

Заметим, что конструктивное значение c часто больше расчетного. В данном примере конструктивно (высота сечения ноги, значение угла α) $c = 22,5$ см.

Пример 2.6

Стык двух сосновых брусьев сечением $h = 18$ см и $b = 6$ см осуществлен при помощи зуба (рис. 2.10).

Определить необходимые размеры зуба (длину l и высоту a).

Расчетные сопротивления брусьев: на растяжение $R = 10$ МПа, на срез $R_s = 24$ МПа, на смятие $R_p = 14$ МПа.

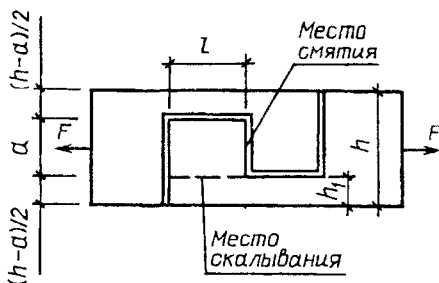


Рис. 2.10

Решение

Нагрузка F с правого бруса через зуб передается на левый брус. При этом брусья подвергаются растяжению. Опасное сечение (самое тонкое) указано на рис. 2.10. Зуб рассчитывается на скалывание и смятие вдоль волокон (зоны деформации показаны на рис. 2.10).

Высота ослабленного сечения бруса $h_1 = \frac{h-a}{2}$ и высота зуба «а» связаны между собой. Выразив F из условия прочности на растяжение и смятие, найдем значение высоты зуба a , а следовательно, и значение высоты ослабленного сечения бруса h_1 .

Из условия прочности на растяжение

$$F = R \cdot b \cdot \frac{h-a}{2} = 10 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{18 \cdot 10^{-2} - a}{2}. \quad (2.13)$$

Из условия прочности на смятие

$$F = R_{p0} \cdot b \cdot a = 14 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot a. \quad (2.14)$$

Из уравнений (2.13) и (2.14) $a = 4,74$ см, принимаем $a = 5$ см.

Высота ослабленного сечения бруса $h_1 = \frac{18-5}{2} = 6,5$ см.

Наибольшая допустимая нагрузка на соединение брусьев

$$F_{\text{adm}} = R \cdot b \cdot h_1 = 10 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot 6,5 \cdot 10^{-2} = 39 \text{ кН.}$$

Длину зуба l определим из условия прочности на скалывание (2.10):

$$l = \frac{F}{b \cdot R_s} = \frac{39 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-2} \cdot 2,4 \cdot 10^6} = 2,71 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 27,1 \text{ см,}$$

принимаем $l = 28 \text{ см.}$

Задача 2.7

Проверить прочность соединения деревянных брусьев при помощи лобовой врубки. Усилие в стропильной ноге $F = 50 \text{ кН.}$

Расчетные сопротивления: на скалывание вдоль волокон $R_s = 2,1 \text{ МПа,}$ на смятие вдоль волокон $R_{p0} = 14 \text{ МПа,}$ на смятие поперек волокон $R_{p90} = 3 \text{ МПа.}$

Данные к задаче: $h = 12 \text{ см, } b = 8 \text{ см, } c = 11 \text{ см, } a = 4 \text{ см, } l = 27 \text{ см, } \alpha = 30^\circ.$

Ответ: прочность врубки обеспечена.

$$\tau_s = 2,08 \text{ МПа} < R_s = 2,1 \text{ МПа;}$$

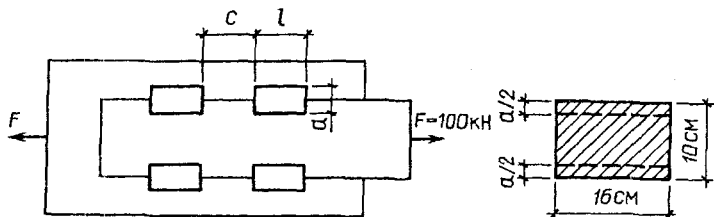
$$\sigma_{p0} = 13,4 \text{ МПа} < R_{p0} = 14,0 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{p90} = 2,4 \text{ МПа} < R_{p90} = 3,0 \text{ МПа.}$$

Задача 2.8

Два деревянных бруса соединяются при помощи шпонок.

Определить размеры шпонок, расстояние между ними и максимальное напряжение в брусьях, если $R = 10 \text{ МПа, } R_s = 2,4 \text{ МПа, } R_{p0} = 15 \text{ МПа, } R_{p90} = 3 \text{ МПа.}$

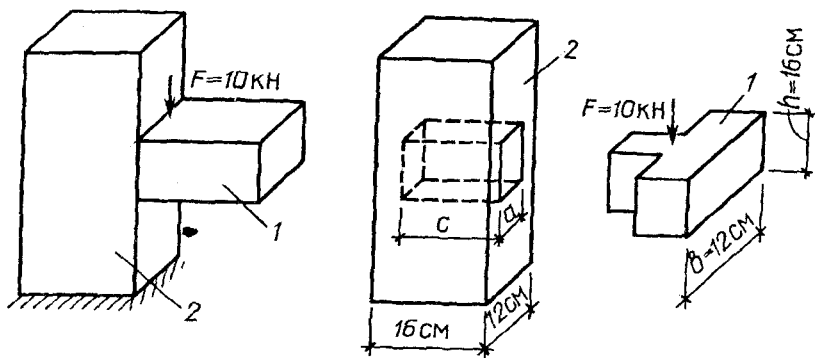


Ответ: $\sigma_{\text{max}} = 7,91 \text{ МПа, } l = c = 6,5 \text{ см, } a = 2,1 \text{ см.}$

Задача 2.9

Переключатель (1) соединяется со стойкой (2) при помощи шипа.

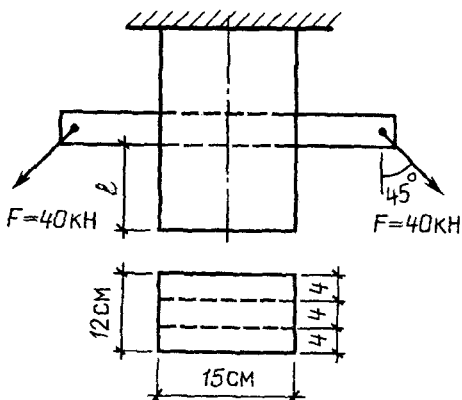
Определить размеры шипа при нагрузке $F = 10$ кН, если для древесины $R_s = 2,2$ МПа, $R_{p0} = 8$ МПа, $R_{p90} = 3$ МПа.



Ответ: принимаем $a = b/3 = 12/3 = 4$ см, $c = 9$ см.

Задача 2.10

Через деревянный брус пропущен штырь диаметром $d = 4$ см, несущий нагрузку F . Определить расстояние l , если $R_s = 2,3$ МПа, $R_{p0} = 10$ МПа.



Ответ: $l = 9$ см.

Раздел 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Плоское поперечное сечение любого стержня характеризуется рядом геометрических величин: площадью A ; координатами центра тяжести x_0, y_0 ; статическим моментом S ; осевыми моментами инерции J_x, J_y ; полярным моментом инерции J_p ; центробежным моментом инерции D_{xy} и др. Эти величины используются при расчетах элементов конструкций на прочность и жесткость.

Площадь поперечного сечения A характеризует сопротивляемость стержня растяжению и сжатию.

Осевые моменты инерции J_x и J_y характеризуют сопротивляемость изгибу, а полярный J_p – кручению, в зависимости от размеров и формы сечения.

Формулы для определения некоторых геометрических характеристик для простых фигур приведены на рис. 3.1.

Для прокатных профилей (двутавр, швеллер, уголок) данные о геометрических характеристиках приводятся в соответствующих сортаментах.

Для определения координат центра тяжести сложного сечения произвольно выбирается прямоугольная система вспомогательных осей $X_s O_s Y_s$. Сечение разделяется на простые фигуры, центры тяжести и площади которых легко определяются, отмечаются эти центры O_i , проводятся центральные оси $X_i Y_i$ и обозначаются расстояния x_i и y_i от центральной оси каждой простой фигуры до вспомогательных осей (рис. 3.2).

Координаты центра тяжести сложного сечения определяются по формулам:

$$x_0 = \frac{\sum S_{y_i}}{\sum A}, \quad y_0 = \frac{\sum S_{x_i}}{\sum A}, \quad (3.1)$$

где $\sum S$ – сумма статических моментов простых фигур относительно соответствующей вспомогательной оси.

$\sum A$ – суммарная площадь простых фигур.

	$A = h \cdot b; \quad x_0 = \frac{b}{2}; \quad y_0 = \frac{h}{2};$ $J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}.$
	$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}; \quad x_0 = y_0 = \frac{d}{2};$ $J_x = J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}.$
	$A = \frac{b \cdot h}{2}; \quad x_0 = \frac{b}{2}; \quad y_0 = \frac{h}{3};$ $J_x = \frac{b \cdot h^3}{36}; \quad J_y = \frac{h \cdot b^3}{48}.$
	$A = \frac{b \cdot h}{2}; \quad x_0 = \frac{b}{3}; \quad y_0 = \frac{h}{3};$ $J_x = \frac{b \cdot h^3}{36}; \quad J_y = \frac{h \cdot b^3}{36}.$
	$A = \frac{\pi \cdot d^2}{8}; \quad x_0 = \frac{d}{2}; \quad y_0 = 0,212d;$ $J_x = 0,00686d^4; \quad J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{128}.$
	$D_{xy} = \pm \sqrt{(J_x - J_{\min})(J_y - J_{\min})}.$

Рис. 3.1

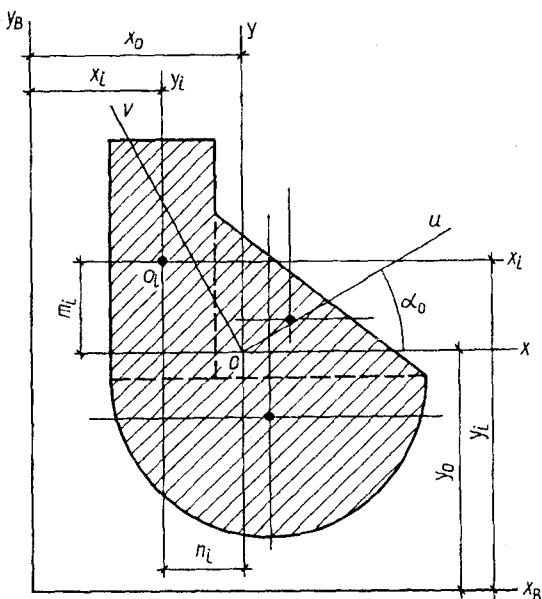


Рис. 3.2

Статические моменты площади сечения относительно вспомогательных осей равны произведению площади на расстояние ее центра тяжести до данной оси:

$$S_{xв} = \sum A_i \cdot y_i, \quad S_{yв} = \sum A_i \cdot x_i, \quad (3.2)$$

где x_i, y_i – координаты центра тяжести отдельных простых фигур в системе вспомогательных осей;

A_i – площади сечений этих отдельных фигур.

Статический момент площади фигуры может быть положительным, отрицательным или равным нулю, в зависимости от положения фигуры относительно рассматриваемой оси. Статический момент площади относительно центральной оси равен нулю.

Если фигура имеет ось симметрии, то центр тяжести ее лежит на этой оси. Если фигура имеет две оси симметрии, то центр тяжести ее совпадает с точкой пересечения этих осей.

Осевые и центробежные моменты инерции сложного сечения относительно его центральных осей X_0, Y_0 определяются

исходя из значений для простых фигур с учетом формулы перехода к параллельным осям (переход от центральной оси простой фигуры к центральной оси всего сечения):

$$J_{X_0} = \sum (J_{X_i} + A_i \cdot m_i^2), \quad J_{Y_0} = \sum (J_{Y_i} + A_i \cdot n_i^2), \quad (3.3)$$

$$D_{X_0Y_0} = \sum (D_{X_iY_i} + A_i \cdot n_i \cdot m_i), \quad (3.4)$$

где J_{X_i} , J_{Y_i} , $D_{X_iY_i}$ — моменты инерции простых фигур относительно собственных центральных осей;

m_i , n_i — расстояния между центральными осями простых фигур и центральными осями всего сечения (см. рис. 3.2).

Моменты инерции измеряются единицами длины в четвертой степени (мм^4 , см^4 , м^4). Осевые моменты инерции всегда положительны, а центробежный момент может быть положительным, отрицательным и равным нулю в зависимости от положения фигуры относительно координатных осей.

Центробежный момент инерции сечения относительно центральных осей, из которых хотя бы одна является осью симметрии, равен нулю.

Для неравнополочного и равнополочного уголков значение центробежного момента инерции, относительно центральных осей параллельных полкам, определяется по формуле

$$D_{xy} = \pm \sqrt{(J_x - J_{\min}) \cdot (J_y - J_{\min})}, \quad (3.5)$$

где J_{\min} — минимальный момент инерции сечения (приводится в сортаменте). В некоторых сортаментах приводятся готовые значения D_{xy} . Знак D_{xy} для уголка зависит от его положения в сечении. Рекомендуется пользоваться схемой, приведенной на рис. 3.1, где показаны возможные положения уголка в сечении и приведены знаки для D_{xy} .

Главные центральные оси

При повороте центральных взаимно перпендикулярных осей X_0Y_0 вокруг центра тяжести сечения (точки O) на угол α (см. рис. 3.2.) значения осевых и центробежного моментов инерции изменяются. При некотором положении этих осей центробежный момент инерции сечения станет равным нулю ($D_{xy} = 0$). Эти оси называются главными центральными и обозначаются буквами U и V . Положение их обусловлено углом α_0 , который определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2Dx_0y_0}{J_{x_0} - J_{y_0}}. \quad (3.6)$$

Угол α_0 отсчитывается от оси с большим моментом инерции (X_0 или Y_0). Положительное значение – против хода часовой стрелки.

Осевые моменты инерции сечения относительно главных центральных осей имеют экстремальные значения (максимальное J_u и минимальное J_v , и определяются по формуле

$$J_{u,v} = \frac{1}{2} \left[(J_{x_0} + J_{y_0}) \pm \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4D^2_{x_0y_0}} \right]. \quad (3.7)$$

В теории курса доказывается, что сумма осевых моментов инерции сечения при повороте осей относительно их центра тяжести не изменяется, т.е. $J_{x_0} + J_{y_0} = J_u + J_v$. Это положение может быть использовано для контроля правильности, вычисленной по формуле (3.7).

В сечении, имеющем одну ось симметрии, эта ось является одной из главных центральных осей. Если сечение имеет две оси симметрии, то они являются главными центральными осями.

Главные центральные моменты инерции, как имеющие экстремальные значения, характеризуют наибольшую и наименьшую жесткость (сопротивляемость) балки при изгибе. Они позволяют рационально расположить сечение балки по отношению к нагрузке.

Пример 3.1

Для заданного сечения определить значения главных центральных моментов инерции.

Данные к примеру: $h = 16$ см, $b = 12$ см, $d = 6$ см (рис. 3.3).

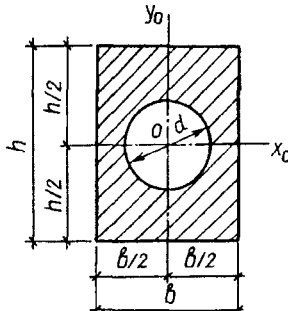


Рис. 3.3

Решение

Данное сечение представляет собой прямоугольник с круглым отверстием. Поскольку центры тяжести этих простых фигур совпадают, центр тяжести сечения расположен в точке O .

Проведенные на сечении оси X_0 и Y_0 являются осями симметрии.

Вычислим значения моментов инерции относительно центральных осей X_0 и Y_0 , используя формулы, приведенные на рис. 3.1, для фигур, из которых состоит сечение:

$$J_{x_0} = J_x^{\text{пр}} - J_x^{\text{кр}} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{12 \cdot 16^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 6^4}{64} = 4096 - 63,6 = 4032,4 \text{ см}^4.$$

$$J_{y_0} = J_y^{\text{пр}} - J_y^{\text{кр}} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{12 \cdot 12^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 6^4}{64} = 2304 - 63,6 = 2240,4 \text{ см}^4.$$

Поскольку оси X_0 и Y_0 сечения являются осями симметрии и проходят через центр тяжести, они являются главными центральными осями (U и V).

Исходя из значений J_{x_0} и J_{y_0} следует, что $J_u = J_{x_0} = 4032,4 \text{ см}^4$ (большее значение), а $J_v = J_{y_0} = 2240,4 \text{ см}^4$ (меньшее значение).

Следует отметить, что данное сечение имеет наибольшую сопротивляемость изгибу относительно оси X_0 , т.к. $J_u = J_{x_0} = J_{\text{max}}$ и наименьшую относительно оси Y_0 , т.к. $J_v = J_{y_0} = J_{\text{min}}$.

Пример 3.2

Для заданного сечения определить положение центра тяжести и значения главных центральных моментов инерции (рис. 3.4).

Данные к примеру: $h = 15 \text{ см}$, $b = 18 \text{ см}$, $d = 8 \text{ см}$.

Решение

Данное сложное сечение можно представить как сочетание прямоугольника (1), двух треугольников (3 и 4) и выемки в виде полукруга (2).

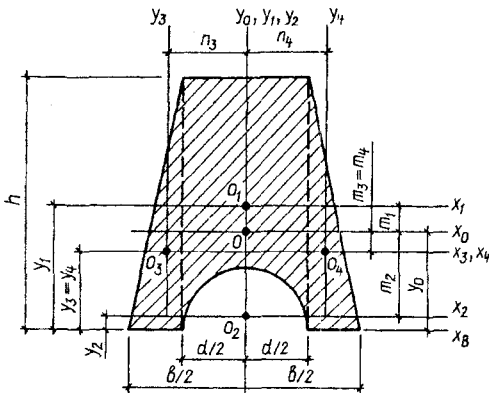


Рис. 3.4

На сечении отмечаются центры тяжести простых фигур ($0_1 \dots 0_4$) и проводятся их центральные оси ($X_1 \dots X_4$) и ($Y_1 \dots Y_4$).

Поскольку ось Y_0 сечения является осью симметрии – центр тяжести его лежит на этой оси. Для определения положения центра тяжести по оси Y_0 выбирается вспомогательная ось X_n , проведенная перпендикулярно оси y_0 и, для удобства вычислений, совпадающая с нижней стороной сечения. В качестве вспомогательной оси можно было принять и другую, параллельную проведенной (например, X_2 или X_1) или проведенную по верхней стороне сечения.

Вычисляем расстояние от центральных осей простых фигур до вспомогательной:

$$y_1 = \frac{h}{2} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ см}; \quad y_2 = 0,212d = 0,212 \cdot 8 = 1,70 \text{ см};$$

$$y_3 = y_4 = \frac{h}{3} = \frac{15}{3} = 5,0 \text{ см}.$$

Площадь рассматриваемого сечения:

$$\begin{aligned} A = A_1 - A_2 + A_3 + A_4 &= h \cdot d - \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot 2} + \frac{h \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right)}{2} \cdot 2 = 15 \cdot 8 - \frac{3,14 \cdot 8^2}{4 \cdot 2} + \\ &+ \frac{15 \cdot \left(\frac{18}{2} - \frac{8}{2}\right)}{2} \cdot 2 = 120 - 25,1 + 37,5 \cdot 2 = 169,9 \text{ см}^2 \end{aligned}$$

По формуле (3.2) статический момент площади сечения относительно вспомогательной оси:

$$\begin{aligned} S_{XB} = \sum(A_i \cdot y_i) &= A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 \cdot 2 = \\ &= 120 \cdot 7,5 - 25,1 \cdot 1,7 + 37,5 \cdot 5 \cdot 2 = 674 - 42,7 + 375 = 1006,3 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Ордината центра тяжести сечения (по формуле (3.1))

$$y_0 = \frac{\sum S_{XB}}{\sum A} = \frac{1006,3}{169,9} = 5,92 \text{ см}.$$

На сечении отмечается центр тяжести (точка O) и проводится центральная ось X_0 . Напомним, что другой центральной осью является ось Y_0 .

Вычисляем расстояния m, n между центральными осями простых фигур и всего сечения.

$$m_1 = \frac{h}{2} - y_0 = \frac{15}{2} - 5,92 = 1,58 \text{ см}; \quad m_2 = y_0 - y_2 = 5,92 - 1,70 = 4,22 \text{ см};$$

$$m_3 = m_4 = y_0 - \frac{h}{3} = 5,92 - \frac{15}{3} = 0,92 \text{ см}; \quad n_1 = 0; \quad n_2 = 0;$$

$$n_3 = n_4 = \frac{d}{2} + \frac{b}{2 \cdot 3} = \frac{8}{2} + \frac{18}{2 \cdot 3} = 7,0 \text{ см}.$$

Предварительно для каждой простой фигуры вычисляем значения осевых моментов инерции относительно собственных центральных осей X_i, Y_i .

Для первой фигуры (прямоугольник)

$$J_{x_1} = \frac{d \cdot h^3}{12} = \frac{8 \cdot 15^3}{12} = 2250 \text{ см}^4, \quad J_{y_1} = \frac{h \cdot d^3}{12} = \frac{15 \cdot 8^3}{12} = 640 \text{ см}^4.$$

Для второй фигуры (полукруг)

$$J_{x_2} = 0,00686 \cdot d^4 = 0,00686 \cdot 8^4 = 28,1 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_2} = \frac{\pi \cdot d^4}{128} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{128} = 100,5 \text{ см}^4.$$

Для третьей и четвертой фигур (треугольники)

$$J_{x_3} = J_{x_4} = \frac{\left(\frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right) \cdot h^3}{36} = \frac{\left(\frac{18}{2} - \frac{8}{2}\right) \cdot 15^3}{36} = 468,8 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_3} = J_{y_4} = \frac{h \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right)^3}{48} = \frac{15 \cdot \left(\frac{18}{2} - \frac{8}{2}\right)^3}{48} = 52,1 \text{ см}^4.$$

Определяем значения осевых моментов инерции заданного сечения относительно центральных осей X_0 Y_0 (по формуле (3.3)):

$$\begin{aligned} J_{X_0} &= \sum(J_{X_i} + A_i \cdot m_i^2) = J_{X_1} + A_1 \cdot m_1^2 - (J_{X_2} + A_2 \cdot m_2^2) + 2 \cdot (J_{X_3} + A_3 \cdot m_3^2) = \\ &= 2250 + 120 \cdot 1,58^2 - (28,1 + 42,7 \cdot 4,22^2) + 2 \cdot (468,8 + 37,5 \cdot 0,92^2) = \\ &= 2250 + 299,6 - 28,1 - 760,4 + 2 \cdot 500,5 = 2761,2 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{Y_0} &= \sum(J_{Y_i} + A_i \cdot n_i^2) = J_{Y_1} - J_{Y_2} + 2 \cdot (J_{Y_3} + A_3 \cdot n_3^2) = \\ &= 640 - 100,5 + 2 \cdot (52,1 + 37,5 \cdot 7^2) = 640 - 100,5 + 3779,2 = 4318,7 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Рассматриваемое сечение имеет ось симметрии – ось Y_0 . Значит, эта ось является одной из главных осей. Другая главная ось – X_0 , проходит через центр тяжести сечения и перпендикулярна первой.

Исходя из значений J_{X_0} и J_{Y_0} следует, что $J_u = J_{Y_0} = 4319 \text{ см}^4$, а $J_v = J_{X_0} = 2761 \text{ см}^4$.

Заметим, что данное сечение имеет наибольшую сопротивляемость изгибу относительно оси Y_0 и наименьшую – относительно оси X_0 .

Пример 3.3

Для сечения, составленного из двух швеллеров и листа, определить значения главных центральных моментов инерции (рис. 3.5).

Данные к примеру: швеллер № 20, лист сечением $15,2 \times 2 \text{ см}$.

Выписка из таблиц сортамента для швеллера № 20: $h = 20 \text{ см}$, $b = 7,6 \text{ см}$, $A = 23,4 \text{ см}^2$, $J_x = 1520 \text{ см}^4$, $J_y = 113 \text{ см}^4$, $x_c = 2,07 \text{ см}$.

Решение

На сечении отмечаются центры тяжести швеллеров (O_1, O_2), проводятся их центральные оси ($X_1 \dots X_3$) и ($Y_1 \dots Y_3$).

Центр тяжести сечения лежит на оси Y_0 , т.к. последняя является осью симметрии. Вспомогательная ось X_v проводится по нижней стороне сечения.

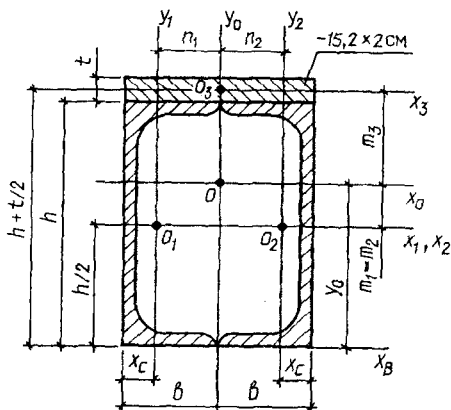


Рис. 3.5

Расстояние между соответствующими осями

$$y_1 = y_2 = \frac{h}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ см}; \quad y_3 = \frac{t}{2} + h = \frac{2}{2} + 20 = 21 \text{ см.}$$

Ордината центра тяжести

$$y_0 = \frac{\sum S_{x_{\text{в}}}}{\sum A} = \frac{\sum (A_i \cdot y_i)}{\sum A} = \frac{2 \cdot (23,4 \cdot 10) + 15,2 \cdot 2 \cdot 21}{2 \cdot 23,4 + 15,2 \cdot 2} = \frac{1106}{77,2} = 14,3 \text{ см.}$$

На сечении отмечается центр тяжести O и проводится центральная ось X_0 .

Вычисляем расстояния между осями n и m :

$$m_1 = m_2 = y_0 - \frac{h}{2} = 14,3 - \frac{20}{2} = 4,3 \text{ см,}$$

$$m_3 = \left(n + \frac{t}{2}\right) - y_0 = \left(20 + \frac{2}{2}\right) - 14,3 = 6,7 \text{ см,}$$

$$n_1 = n_2 = b - x_c = 7,6 - 2,07 = 5,53 \text{ см;} \quad n_3 = 0.$$

Значения осевых моментов инерции относительно центральных осей X_0 Y_0 :

$$J_{X_0} = \sum (J_{X_i} + A_i \cdot m_i^2) =$$

$$= 2 \cdot (1520 + 23,4 \cdot 4,3^2) + \frac{15,2 \cdot 2^3}{12} + 15,2 \cdot 6,7^2 = 5280 \text{ см}^4,$$

$$J_{Y_0} = \sum (J_{Y_i} + A_i \cdot n_i^2) = 2 \cdot (113 + 23,4 \cdot 5,53^2) + \frac{2 \cdot 15,2^3}{12} + 15,2 \cdot 0 = 1696 \text{ см}^4.$$

Так как оси X_0 Y_0 являются главными центральными осями сечения, значения J_{X_0} и J_{Y_0} являются главными центральными моментами инерции. Исходя из значений J_{X_0} и J_{Y_0} следует, что $J_u = J_{X_0} = 5280 \text{ см}^4$, а $J_v = J_{Y_0} = 1696 \text{ см}^4$. Данное сечение имеет наибольшую сопротивляемость изгибу относительно оси X_0 и наименьшую относительно оси Y_0 .

Пример 3.4

Для сечения, составленного из двух прокатных профилей (двутавра и неравнополочного уголка), определить положение центра тяжести и значения главных центральных моментов инерции (рис. 3.5).

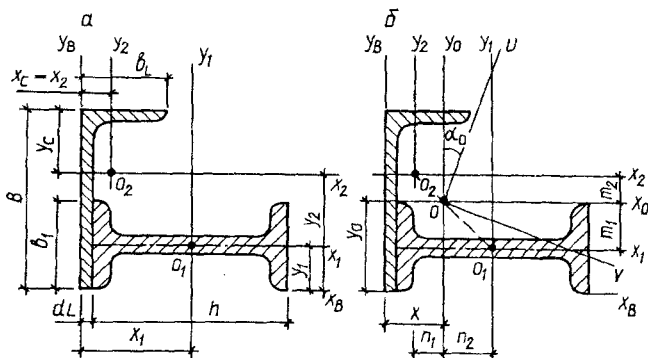


Рис. 3.6

Данные к примеру: двутавр №22, уголок №20/12,5/1,1.

Внимание! В рассматриваемом сечении двутавр расположен иначе, чем в таблице сортамента. Поэтому значения моментов инерции нужно записать с учетом его положения.

Выписка из таблиц сортамента:

а) для двутавра №22:

$$h = 22 \text{ см}, b = 11 \text{ см}, d = 0,54 \text{ см}, A = 30,6 \text{ см}^2, J_X = 157 \text{ см}^4, \\ J_Y = 2550 \text{ см}^4.$$

б) для уголка №20/12,5/1,1:

$$B = 20 \text{ см}, b = 12,5 \text{ см}, A = 34,87 \text{ см}^2, J_X = 1449 \text{ см}^4, \\ J_Y = 446 \text{ см}^4, x_c = 2,79 \text{ см}, y_c = 6,5 \text{ см}, J_{XY} = D_{XY} = 465 \text{ см}^4.$$

Решение

Сечение не имеет осей симметрии. Для определения координат центра тяжести сечения выбираются вспомогательные оси $X_B Y_B$; отмечаются центры тяжести фигур (O_1, O_2) , составляющих сечение; проводятся их центральные оси, параллельные вспомогательным $(X_1 Y_1, X_2 Y_2)$, и вычисляются расстояния между ними и вспомогательными осями.

$$x_1 = \frac{h}{2} + d_2 = \frac{22}{2} + 1,1 = 12,1 \text{ см}; \quad y_1 = \frac{b}{2} = \frac{11}{2} = 5,5 \text{ см},$$

$$x_2 = x_c = 2,79 \text{ см}; \quad y_2 = B - y_c = 20 - 6,5 = 13,5 \text{ см}.$$

Координаты центра тяжести сечения:

$$y_0 = \frac{\sum S_{XB}}{\sum A} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{30,6 \cdot 5,5 + 34,87 \cdot 13,5}{30,6 + 34,87} = \frac{639}{65,5} = 9,76 \text{ см},$$

$$x_0 = \frac{\sum S_{YB}}{\sum A} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{30,6 \cdot 12,1 + 34,87 \cdot 2,79}{30,6 + 34,87} = \frac{467}{65,5} = 7,13 \text{ см}.$$

По значениям x_0 и y_0 на сечении отмечается центр тяжести (т.О). Заметим, что центр тяжести должен лежать на прямой, соединяющей точки O_1 и O_2 .

Далее проводятся центральные оси $X_0 Y_0$, параллельные вспомогательным, вычисляются расстояния n и m :

$$m_1 = y_0 - \frac{b}{2} = 9,76 - \frac{11}{2} = 4,26 \text{ см},$$

$$n_1 = -(x_1 - x_0) = -\left(\frac{h}{2} - x_0\right) = -\left(\frac{22}{2} - 7,13\right) = -4,37 \text{ см},$$

$$m_2 = -(y_2 - y_0) = -(13,5 - 9,76) = -3,74 \text{ см},$$

$$n_2 = x_0 - x_c = 7,16 - 2,79 = 4,34 \text{ см}.$$

Внимание! Знаки при m и n назначаются с учетом перехода от центральных осей X_i, Y_i фигур, составляющих сечение, к общим центральным осям X_0, Y_0 .

Вычисляем значение осевых и центробежных моментов инерции сечения относительно центральных осей X_0, Y_0 :

$$\begin{aligned} J_{X_0} &= \sum (J_{X_i} + A_i \cdot m_i^2) = J_{X_1} + A_1 \cdot m_1^2 + J_{X_2} + A_2 \cdot m_2^2 = \\ &= 157 + 30,6 \cdot 4,26^2 + 1449 + 34,87 \cdot 3,74^2 = 2648 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{Y_0} &= \sum (J_{y_i} + A_i \cdot n_i^2) = J_{y_1} + A_1 \cdot n_1^2 + J_{y_2} + A_2 \cdot n_2^2 = \\ &= 2550 + 30,6 \cdot 4,37^2 + 446 + 34,87 \cdot 4,34^2 = 4229 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{X_0Y_0} &= \sum (D_{X_iY_i} + A_i \cdot n_i \cdot m_i) = D_{X_1Y_1} + A_1 \cdot n_1 \cdot m_1 + D_{X_2Y_2} + A_2 \cdot n_2 \cdot m_2 = \\ &= 0 + 30,6 \cdot 4,26 \cdot (-4,37) + 465 + 34,87 \cdot (-3,74) \cdot 4,34 = \\ &= -570 + 465 - 566 = -671 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Внимание! Значение $D_{X_2Y_2}$ положительное (см. рис. 3.1).

Положение главных центральных осей сечения характеризуется углом α_0 , который определяется по формуле (3.6):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2D_{X_0Y_0}}{J_{X_0} - J_{Y_0}} = -\frac{2 \cdot (-671)}{(2648 - 4229)} = -\frac{1342}{1581} = -0,849,$$

$$2\alpha = -40,3^\circ, \quad \alpha = -20,15^\circ.$$

Угол α_0 отсчитывается от оси Y_0 (так как $J_{Y_0} > J_{X_0}$) по ходу часовой стрелки, поскольку численное значение угла отрицательное.

Определяем значения главных центральных моментов инерции сечения (по формуле (3.7)):

$$J_{u,v} = \frac{1}{2} \left[(J_{x_0} + J_{y_0}) \pm \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4D_{x_0y_0}^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(2648 + 4229) \pm \sqrt{(2448 - 4229)^2 + 4 \cdot (-671)^2} \right] = \frac{1}{2} [6877 \pm 2230],$$

отсюда максимальный момент инерции сечения $J_u = 4554 \text{ см}^4$, минимальный $J_v = 2324 \text{ см}^4$.

Проверяем правильность вычислений, выполненных по формуле (3.7):

$$J_{x_0} + J_{y_0} = 2648 + 4229 = 6877 \text{ см}^4,$$

$$J_u + J_v = 4554 + 2324 = 6878 \text{ см}^4.$$

Расхождение составляет 0,015 %, что допустимо.

Таким образом, рассмотренное сечение имеет наибольшую сопротивляемость изгибу относительно оси U и наименьшую – относительно оси V .

Задача 3.1

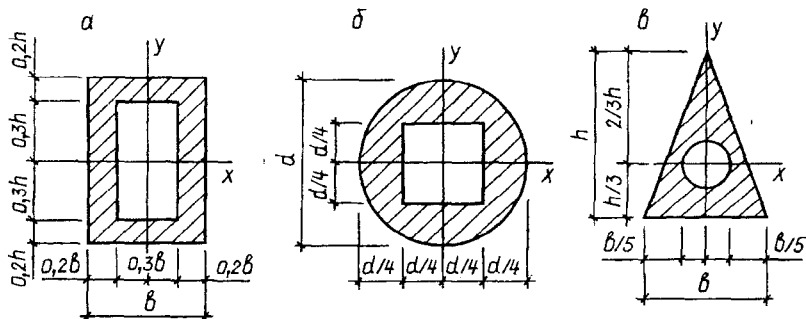
Для заданного сечения определить значения главных центральных моментов инерции.

Данные к вариантам задачи:

А. $h = 30 \text{ см}$, $b = 18 \text{ см}$.

Б. $d = 24 \text{ см}$.

В. $h = 27 \text{ см}$, $b = 20 \text{ см}$.



Ответы:

А. $J_u = 35250 \text{ см}^4$, $J_v = 12690 \text{ см}^4$.

Б. $J_u = J_v = 14550 \text{ см}^4$.

В. $J_u = 10730 \text{ см}^4$, $J_v = 4299 \text{ см}^4$.

Задача 3.2

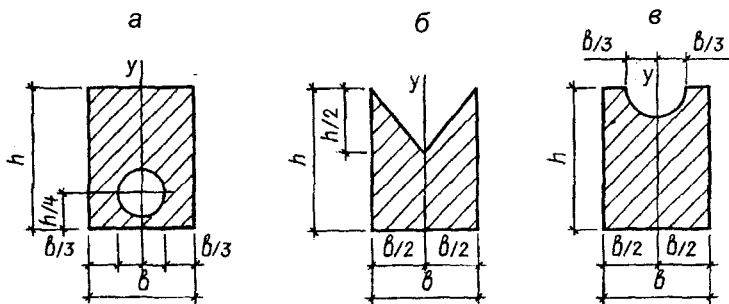
Для заданного сечения определить положение центра тяжести и значения главных центральных моментов инерции.

Данные к вариантам задачи:

А. $h = 24 \text{ см}$, $b = 16 \text{ см}$.

Б. $h = 30 \text{ см}$, $b = 20 \text{ см}$.

В. $h = 28 \text{ см}$, $b = 24 \text{ см}$.



Ответы:

А. $y_0 = 12,6 \text{ см}$, $J_u = 17310 \text{ см}^4$, $J_v = 7990 \text{ см}^4$.

Б. $y_0 = 9,44 \text{ см}$, $J_u = 25360 \text{ см}^4$, $J_v = 17500 \text{ см}^4$.

В. $y_0 = 12,95 \text{ см}$, $J_u = 34420 \text{ см}^4$, $J_v = 31750 \text{ см}^4$.

Задача 3.3

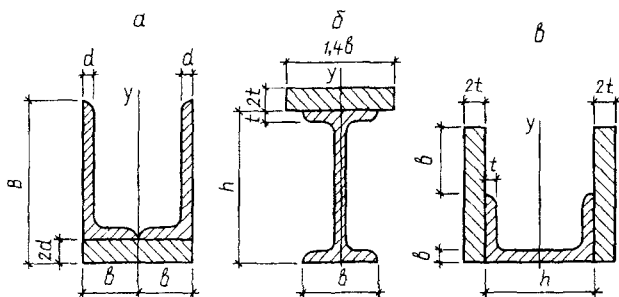
Для сечения, составленного из прокатного элемента и листа, определить положение центра тяжести и значения главных центральных моментов инерции.

Данные к вариантам задачи:

А. Неравнополочный уголок № 12,5 × 8 × 0,8 см.

Б. Двутавр № 20.

В. Швеллер № 18.



Отвeты:

А. $y_0 = 3,32$ см, $J_u = 1774$ см⁴, $J_v = 728$ см⁴.

Б. $y_0 = 15,1$ см, $J_u = 3317$ см⁴, $J_v = 499$ см⁴.

В. $y_0 = 5,49$ см, $J_u = 5860$ см⁴, $J_v = 800$ см⁴.

Задача 3.4

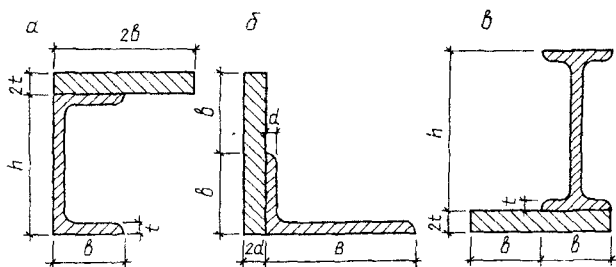
Для сечения, составленного из прокатного профиля и листа, определить положение центра тяжести и главных центральных осей, а также значение главных центральных моментов инерции.

Данные к вариантам задачи:

А – швеллер № 16.

Б – неравнополочный уголок № 10 × 6,3 × 1,0 см.

В – двутавр № 16.



Отвeты:

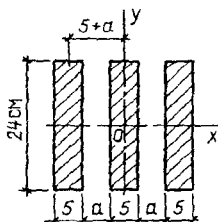
А. $x_0 = 4,30$ см, $y_0 = 12,8$ см, $\alpha_0 = -41,8^\circ$, $J_u = 1666$ см⁴, $J_v = 422$ см⁴.

Б. $x_0 = 2,67$ см, $y_0 = 4,5$ см, $\alpha_0 = 31,8^\circ$, $J_u = 748$ см⁴, $J_v = 194$ см⁴.

В. $x_0 = 9,90$ см, $y_0 = 4,68$ см, $\alpha_0 = -20^\circ$, $J_u = 1890$ см⁴, $J_v = 651$ см⁴.

Задача 3.5

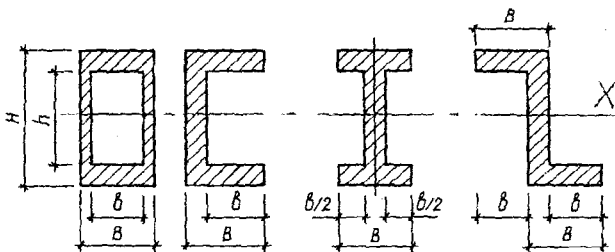
Определить расстояние a между элементами пакета, состоящего из досок размером 24×5 см, при условии равенства главных моментов инерции.



Ответы: $a = 3,3$ см.

Задача 3.6

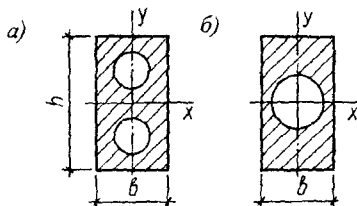
Будут ли равны между собой значения моментов инерции относительно центральной оси X для всех приведенных сечений?



Ответ: да, будут.

Задача 3.7

Будут ли равны между собой значения главных моментов инерции сечений a и b при условии равенства площадей отверстий?



Ответы: $I_{y(a)} = I_{y(b)}$, $I_{x(b)} > I_{x(a)}$.

Раздел 4. КРУЧЕНИЕ

Стержень подвергается деформации кручения при нагружении его парой сил F , лежащих в плоскости перпендикулярной продольной оси Z . Пара сил приводится к моменту $T_e = F \cdot a$, который называется скручивающим (внешним) моментом (рис. 4.1, а).

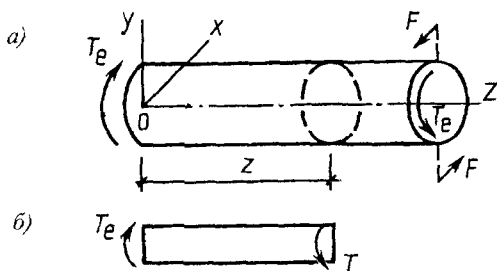


Рис. 4.1

Прямой стержень, работающий на кручение, называется валом. Нагрузка вала (скручивающие моменты) образуется от приводных шкивов и зубчатых колес, насаженных на вал, а также от двигателя.

Если вал находится в состоянии покоя или равномерного вращения, условие равновесия выражается уравнением $\sum T_{e(z)} = 0$.

Внутренние силы при кручении

В поперечных сечениях скручиваемого стержня возникают внутренние силы сопротивления — крутящие моменты T . Они определяются методом сечений, по которому стержень мысленно разделяется на две части и рассматривается равновесие любой из них (рис. 4.1, б).

Из условия равновесия вытекает, что крутящий момент T в сечении вала равен алгебраической сумме всех скручивающих моментов T_e , действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения (слева или справа): $T = \sum T_e^{\text{лев}} = \sum T_e^{\text{прав}}$.

Правило знаков для моментов таково: скручивающий момент T_e образует в поперечном сечении положительный крутящий момент ($T > 0$), если он (T_e) направлен по ходу часовой стрелки при взгляде со стороны сечения, и наоборот.

Изложенное правило знаков иллюстрируется на рис. 4.2.

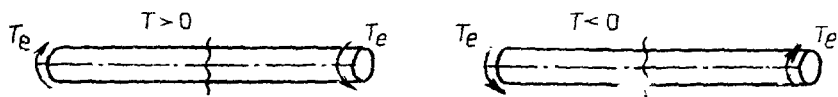


Рис. 4.2

Поскольку сопротивление кручению материалов в ту или другую сторону одинаково, можно применять и обратное правило знаков.

По вычисленным значениям T на расчетных участках вала (между сечениями, где приложены моменты) строится эпюра крутящих моментов.

4.1. Кручение стержней круглого поперечного сечения

Напряжения при кручении

При кручении стержня круглого поперечного сечения применима гипотеза плоских сечений – смежные сечения поворачиваются одно относительно другого, оставаясь плоскими при неизменном расстоянии между ними. Радиусы, проведенные в сечении до деформации, остаются прямыми и после деформации.

Элементы материала скручиваемого стержня испытывают деформацию чистого сдвига и сопровождаются касательными напряжениями τ .

Формула для определения касательного напряжения τ в любой точке скручиваемого стержня круглого поперечного сечения имеет вид

$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho, \quad (4.1)$$

где T – крутящий момент в рассматриваемом сечении стержня;

I_p – полярный момент инерции сечения стержня;

ρ – расстояние от рассматриваемой точки до центра тяжести сечения (радиус рассматриваемой точки сечения).

Касательные напряжения распределяются по поперечному сечению стержня не равномерно, нарастая от продольной оси Z к поверхности по линейному закону: в центре тяжести сечения $\tau = 0$, на контуре сечения, где $\rho = \rho_{\max} = r$ достигают максимального значения $\tau = \tau_{\max}$ (рис. 4.3).

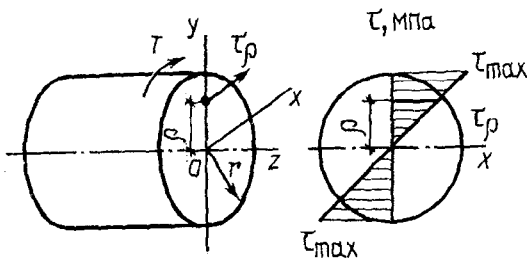


Рис. 4.3

Максимальные касательные напряжения в скручивающем стержне

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{I_p} r,$$

где r – радиус сечения стержня.

Отношение $\frac{I_p}{r} = W_p$ называется полярным моментом сопротивления, который характеризует сопротивляемость сечения деформации кручения в зависимости от размеров и его формы.

Поскольку в поперечном сечении скручиваемого стержня возникают только касательные напряжения, материал его находится в условиях чистого сдвига, как частный случай плоского напряженного состояния.

Если кручение стержня происходит от нагрузки в состоянии покоя (статическое действие), то условие прочности для пластичного материала используется в виде $\tau_{\max} \leq R_s$.

Расчет на прочность валов машин, где имеет место динамический характер нагрузки, необходимо вести по методу допускаемых напряжений: $\tau_{\max} \leq \tau_{\text{adm}}$, где τ_{adm} – допускаемое касательное напряжение. Для стержня круглого (сплошного и кольцевого) сечения условие прочности при кручении принимает вид

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq R_s, \quad (4.2)$$

где T_{\max} – максимальный крутящий момент в стержне,

W_p – полярный момент сопротивления сечения,

R_s – расчетное сопротивление материала стержня сдвигу.

Для круглого сплошного сечения

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}. \quad (4.3)$$

Для кольцевого сечения

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cdot (1 - c^4), \quad (4.4)$$

где d – диаметр сплошного (наружный диаметр кольцевого) сечения,
 c – отношение внутреннего диаметра (d_0) к наружному d в
кольцевом сечении ($c = \frac{d_0}{d}$).

Деформации при кручении

При кручении стержня круглого поперечного сечения его продольная ось остается прямой и не изменяет своей длины. Поперечные сечения, оставаясь плоскими и перпендикулярными к продольной оси, поворачиваются на некоторый угол φ . Продольные волокна приобретают винтообразное направление (рис. 4.4).

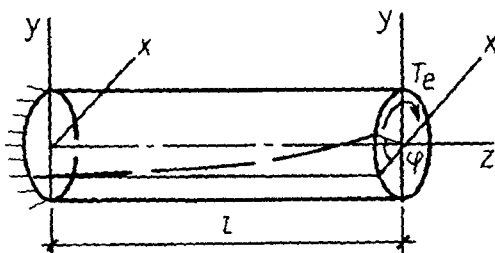


Рис. 4.4

Абсолютный угол закручивания (поворота сечения) определяется по формуле

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_p}, \quad (4.5)$$

где φ – угол закручивания (в радианах);

T – крутящий момент на участке стержня;

l – длина участка стержня;

G – модуль сдвига материала стержня;

I_p – полярный момент инерции.

Для сплошного круглого сечения $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$, для кольцевого –

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cdot (1 - c^4).$$

Вычислив значения φ на участках стержня, можно найти перемещения граничных сечений и построить эпюру перемещений (см. примеры).

Величина угла закручивания ограничивается определенными пределами, которые обычно задаются в относительных величинах.

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\theta = \frac{\varphi_{\max}}{l} \leq \theta_{\text{adm}} \quad \text{или} \quad \theta = \frac{T_{\max}}{G \cdot I_p} \leq \theta_{\text{adm}}, \quad (4.6)$$

где θ – относительный угол закручивания,

θ_{adm} – наибольший допустимый угол закручивания (радиан/метр).

Напомним, что $\varphi_{\text{град}} = \varphi_{\text{рад}} \frac{180^\circ}{\pi}$.

Из условий прочности и жесткости можно решить три типа задач: проверить прочность и жесткость стержня (вала), определить диаметр его и наибольшую допустимую нагрузку.

При определении диаметра стержня (вала) по названным условиям из двух найденных значений его принимается большее.

Примечание.

Значение скручивающего момента T_e , передаваемого двигателем на вал, определяется по формуле

$$T_e = 9550 \frac{P}{n} \text{ (Н·м)}, \quad (4.7)$$

где P – мощность двигателя, кВт;

n – частота вращения, об/мин.

4.2. Кручение стержней прямоугольного поперечного сечения

При кручении стержня прямоугольного поперечного сечения гипотеза плоских сечений на опыте не подтверждается – поперечные сечения искривляются (депланируются), от чего касательные напряжения распределяются по сечению по более сложному закону (рис. 4.5).

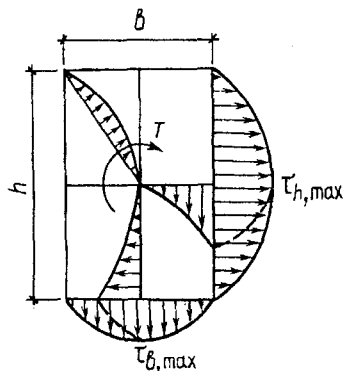


Рис. 4.5

Наибольшие касательные напряжения возникают посредине длинной стороны сечения и определяются по формуле

$$\tau_{h,\max} = \frac{T}{W_k}, \quad (4.8)$$

где $W_k = \alpha \cdot b^2 \cdot h$ – момент сопротивления при кручении;
 b и h – меньшая и большая стороны прямоугольного сечения,
 α – коэффициент, зависящий от отношения сторон прямоугольника (h/b), принимаемый по табл. 4.1.

Таблица 4.1

h/b	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
α	0,208	0,294	0,457	0,790	0,282
β	0,140	0,346	0,493	0,801	0,281
γ	1,000	0,859	0,795	0,753	0,745

По середине короткой стороны касательные напряжения составляют часть максимального по длинной стороне:

$$\tau_{b,\max} = \gamma \cdot \tau_{h,\max}, \quad (4.9)$$

где γ – коэффициент, зависящий от отношения h/b .

В угловых точках и в центре тяжести прямоугольного сечения касательные напряжения равны нулю.

Угол закручивания стержня прямоугольного сечения определяется по формуле

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_k}, \quad (4.10)$$

где $I_k = \beta \cdot b^3 \cdot h$ – момент инерции при кручении прямоугольного стержня;

β – коэффициент, зависящий от сторон прямоугольника.

Значения коэффициентов α , β , и γ для прямоугольного сечения приведены в табл. 4.1

Пример 4.1

Стальной стержень круглого поперечного сечения находится под действием скручивающей нагрузки (моментов T_e).

Определить диаметр стержня из условий прочности и жесткости.

Для материала стержня: $R_s = 120$ МПа, $G = 80$ ГПа, $\theta_{\text{adm}} = 0,04$ рад/м.

Решение

Как следует из условия примера, стержень подвергается деформации кручением.

На расчетной схеме (рис. 4.6) выбирается начало координат (крайнее левое сечение) и положительное направление продольной оси Z ; назначаются расчетные участки с границами в сечениях, где приложены скручивающие моменты T_e . Длинам участков придается индекс номера участка. В пределах расчетных участков намечаются поперечные сечения (I...III) и отмечается их положение в системе координатной оси ($z_1 \dots z_3$).

Исходя из характера нагрузки к стержню может быть применено только одно уравнение равновесия $\sum M_z = 0$, из которого определится значение момента $T_{e,0}$.

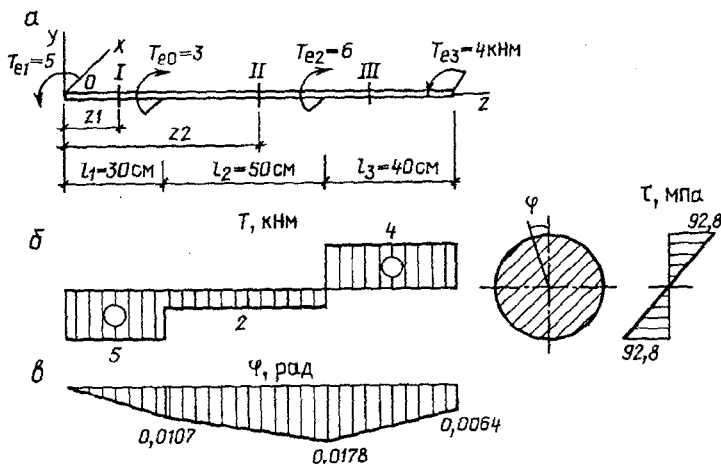


Рис. 4.6

Уравнение равновесия

$$\sum M_z = -T_{e,1} + T_{e,0} + T_{e,2} - T_{e,3} = -5 + T_{e,0} + 6 - 4 = 0,$$

откуда $T_{e,0} = 3$ кН·м.

Определим крутящие моменты T на участках стержня используя ранее описанный способ.

1) участок $0 \leq z_1 \leq 30$ см $T_1 = -T_{e,1} = -5$ кН·м;

2) участок $30 \leq z_2 \leq 80$ см $T_2 = -T_{e,1} + T_{e,0} = -5 + 3 = -2$ кН·м;

3) участок $80 \leq z_3 \leq 120$ см $T_3 = -T_{e,1} + T_{e,0} + T_{e,2} = -5 + 3 + 6 = 4$ кН·м.

Замечание. При сосредоточенной нагрузке значения крутящих моментов T не зависят от ординаты Z и, следовательно, являются постоянными в пределах расчетных участков ($T_i = \text{const}$).

По полученным значениям T в выбранном масштабе строится эпюра крутящих моментов (рис. 4.6, б). Из эпюры максимальный крутящий момент $T_{\max} = 5$ кН·м.

Определяем диаметр стержня из условия прочности по касательным напряжениям (4.2):

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} = \frac{16 \cdot T_{\max}}{\pi \cdot d^3} \leq R_s,$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T_{\max}}{\pi \cdot R_s}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 120 \cdot 10^6}} = 0,596 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 5,96 \text{ см}.$$

Диаметр стержня из условия жесткости (4.6):

$$\theta = \frac{T_{\max}}{G \cdot I_p} = \frac{32 \cdot T_{\max}}{G \cdot \pi \cdot d^4} \leq \theta_{\text{adm}},$$

откуда

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot T_{\max}}{G \cdot \pi \cdot \theta_{\text{adm}}}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 5 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,04}} = 0,632 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 6,32 \text{ см}.$$

Из двух значений d выбираем большее и, с учетом стандарта, принимаем $d = 6,5$ см.

Деформации (углы закручивания φ) на участке стержня определяются по формуле (4.5):

$$\varphi_1 = \frac{T_1 \cdot l_1}{G \cdot I_p} = \frac{32 \cdot T_1 \cdot l_1}{G \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{32 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-2}}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 6,5^4 \cdot 10^{-8}} = -0,0107 \text{ рад},$$

$$\varphi_2 = 0,00714 \text{ рад}, \quad \varphi_3 = 0,0114 \text{ рад}.$$

Полученные значения углов закручивания φ позволяют вычислить перемещения граничных сечений стержня и построить эпюру перемещений. Крайнее левое сечение O примем за относительно неподвижное – $\varphi_0 = 0$. Перемещение последующих граничных сечений будет равно алгебраической сумме углов закручивания участков, расположенных с начала отсчета:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_A = \varphi_0 + \varphi_1 = 0 - 0,0107 \text{ рад}.$$

$$\varphi_B = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 \text{ или } \varphi_B = \varphi_A + \varphi_2 = -0,0107 - 0,00714 = -0,0178 \text{ рад}.$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_3 = -0,0178 + 0,0114 = -0,00640 \text{ рад}.$$

Эпюра перемещений показана на рис. 4.6, в.

Наибольшее касательное напряжение будет на первом участке стержня, где T_{\max} .

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} = \frac{16 \cdot T_{\max}}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 6,5^3 \cdot 10^{-6}} = 0,0928 \cdot 10^9 \text{ Па} = 92,8 \text{ МПа}.$$

Эпюра распределения касательных напряжений по поперечному сечению и угол поворота приведены на рис. 4.6, з.

Анализ результатов вычислений.

На эпюре крутящих моментов в граничных сечениях имеются «скачки», равные значениям скручивающих моментов.

Наиболее нагружен первый участок стержня ($T_{1,\max}$). Здесь и наибольшие касательные напряжения $\tau_{\max} = 92,8 \text{ МПа} < R_s = 120 \text{ МПа}$.

Материал стержня значительно недонапряжен, т.к. диаметр стержня принят не по условию прочности, а по условию жесткости, которое оказалось более требовательным.

Наибольший относительный угол закручивания будет на третьем участке:

$$\theta_{\text{adm}} = \frac{\varphi_3}{l_3} = \frac{0,0114}{0,40} = 0,0285 \text{ рад/м}.$$

Из эпюры перемещений видно, что наибольшее перемещение претерпевает сечение B , в котором $\sum \varphi = 0,0178 \text{ рад}$.

Пример 4.2

Проверить прочность и жесткость стального стержня круглого поперечного сечения заземленного левым концом (рис. 4.7).

Диаметры участков: $d_1 = 5,2 \text{ см}$, $d_2 = 4,5 \text{ см}$.

Для материала стержня: $R_s = 120 \text{ МПа}$, $G = 80 \text{ ГПа}$, $\theta_{\text{adm}} = 0,07 \text{ рад/м}$.

Решение

Действующие на стержень скручивающие моменты вызывают в опоре реактивный момент T_A , для определения которого имеется одно уравнение равновесия $\sum M_z = 0$ (система статически определима). Искомый момент T_A направляется произвольно.

$$\sum M_z = -T_A - T_{e,1} + T_{e,2} = 0,$$

откуда $T_A = -5,3 + 2 = -3,3 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

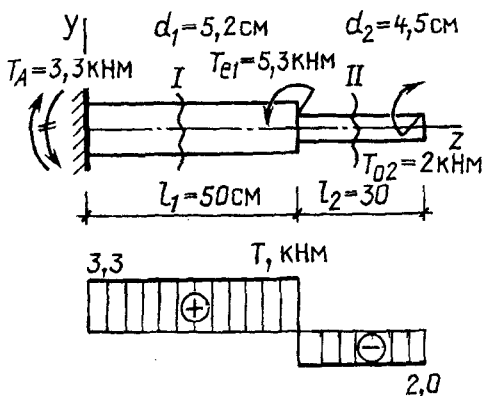


Рис. 4.7

Полученный знак «минус» при T_A означает, что действительное направление момента противоположное.

Стержень имеет два расчетных участка.

Крутящие моменты на участках стержня (рассматриваются сечения слева).

$$T_1 = T_A = 3,3 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad T_2 = T_A - T_{e,1} = 3,3 - 5,3 = -2,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Касательные напряжения на участках стержня (по формуле (4.2)):

$$\tau_1 = \frac{T_1}{W_p} = \frac{16 \cdot T_1}{\pi \cdot d_1^3} = \frac{16 \cdot 3,3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 5,2^3 \cdot 10^{-6}} = 120 \text{ МПа} = R_s,$$

$$\tau_2 = \frac{T_2}{W_p} = \frac{16 \cdot T_2}{\pi \cdot d_2^3} = \frac{16 \cdot 2,0 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 4,5^3 \cdot 10^{-6}} = 112 \text{ МПа} < R_s.$$

Относительные деформации на участках стержня (по формуле (4.6)):

$$\theta_1 = \frac{T_1}{G \cdot I_{p1}} = \frac{32 \cdot T_1}{G \cdot \pi \cdot d_1^4} = \frac{32 \cdot 3,3 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 5,2^4 \cdot 10^{-8}} = 0,0575 \text{ рад/м} < \theta_{adm},$$

$$\theta_2 = \frac{T_2}{G \cdot I_{p2}} = \frac{32 \cdot T_2}{G \cdot \pi \cdot d_2^4} = \frac{32 \cdot 2,0 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 4,5^4 \cdot 10^{-8}} = 0,0621 \text{ рад/м} < \theta_{adm}.$$

Прочность и жесткость стержня при данных диаметрах обеспечены.

Пример 4.3

Стержень круглого поперечного сечения с заземленными концами подвергается действию двух скручивающих моментов, соотношение которых равно $T_{e,1} / T_{e,2} = 2$.

Определить наибольшие допустимые значения скручивающих моментов и угол поворота сечения (τ , K) стержня, если $R_s = 120$ МПа, $G = 80$ ГПа (рис. 4.8).

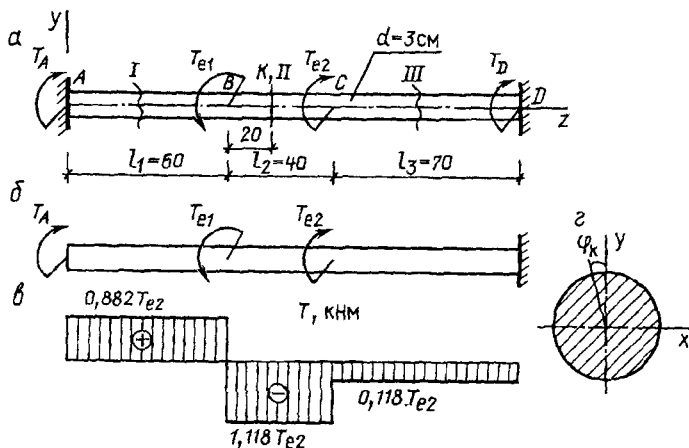


Рис. 4.8

Решение

Исходя из характера нагрузки на стержень в опорах его возникнет по одной реакции – реактивному моменту T (предварительно направляются произвольно) (см. рис. 4.8, а).

Уравнение равновесия можно составить только одно:

$\sum M_z = T_A - T_{e,1} + T_{e,2} + T_D = 0$ (1), у которого две неизвестные величины. Значит, рассматриваемый стержень является один раз статически неопределимым ($2 - 1 = 1$).

Для раскрытия статической неопределимости необходимо составить дополнительное уравнение исходя из принципа совместности перемещений.

Выбираем за основную (статически определимую) систему стержень с удаленной, например, левой опорой (см. рис. 4.7, б) загруженный заданными моментами $T_{e,1}$ и $T_{e,2}$ и неизвестным реактивным опорным T_A .

На опоре A (заделке) угол поворота в заданной системе (см. рис. 4.8, *а*) $\varphi_A = 0$. Чтобы основная система (см. рис. 4.8, *б*) была эквивалентна заданной, необходимо выдержать это условие и в основной системе — $\varphi_A = 0$. Это и есть дополнительное уравнение, выраженное в общем виде.

Применив метод независимости (сложения) действия сил и, исходя из принципа совместности деформации (углов поворота) участков стержня, раскроем дополнительное уравнение, используя формулу (4.5), и соотношение скручивающих моментов:

$$\varphi_A = \frac{T_A \cdot (l_1 + l_2 + l_3)}{G \cdot I_p} - \frac{T_{e1} \cdot (l_2 + l_3)}{G \cdot I_p} + \frac{T_{e2} \cdot l_3}{G \cdot I_p} = 0$$

$$\text{или} \quad 1,7 \cdot T_A - 1,1 \cdot T_{e1} + 0,7 \cdot T_{e2} = 0,$$

откуда

$$T_A = \frac{T_{e2} \cdot 1,1 - T_{e2} \cdot 0,7}{G \cdot I_p} = 0,882 T_{e2}.$$

Направление T_A было выбрано правильно (значение T_A положительное). Определением момента T_A статическая неопределимость раскрыта. Аналогичным образом можно определить реактивный момент T_D .

Определяем значения крутящих моментов на трех расчетных участках стержня:

$$T_1 = T_A = 0,882 \cdot T_{e2},$$

$$T_2 = T_A - T_{e1} = T_A - 2 \cdot T_{e2} = 0,882 \cdot T_{e2} - 2 \cdot T_{e2} = -1,118 \cdot T_{e2},$$

$$T_3 = T_A - 2 \cdot T_{e2} + T_{e2} = 0,882 \cdot T_{e2} - 2 \cdot T_{e2} + T_{e2} = -0,118 \cdot T_{e2}.$$

По значениям крутящих моментов, выраженных в долях от $-T_{e2}$, строим эпюру крутящих моментов (см. рис. 4.8, *в*).

Из эпюры следует, что $T_{\max} = T_{e2} = 1,118 \cdot T_{e2}$.

Из условия прочности (4.2) максимальный допустимый крутящий момент, который может воспринять стержень, будет равен

$$T_{\max} = R_s \cdot W_p = R_s \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 120 \cdot 10^6 \cdot \frac{3,14 \cdot 3^3 \cdot 10^{-6}}{16} = 636 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Нагрузочные (скручивающие) моменты на стержень и реактивный будут равны:

$$T_{\max} = 636 \text{ Н}\cdot\text{м} = 1,118 \cdot T_{e,2},$$

откуда $T_{e,2} = 569 \text{ Н}\cdot\text{м}$, а $T_{e,1} = 2 \cdot T_{e,2} = 2 \cdot 569 \text{ Н}\cdot\text{м} = 1138 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

$$T_A = 0,082 \cdot 569 \text{ Н}\cdot\text{м} = 502 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

На эпюре крутящих моментов (см. рис. 4.8, в) проставлены цифровые значения крутящих моментов на участках стержня.

Угол поворота среднего сечения (т. К) стержня определим, используя формулу (4.5):

$$\begin{aligned} \varphi_K &= \varphi(T_1) + \varphi(T_2) = \frac{T_1 \cdot l_1}{G \cdot I_p} - \frac{T_2 \cdot \frac{l_2}{2}}{G \cdot I_p} = \frac{32 \cdot T_1 \cdot l_1}{G \cdot \pi \cdot d^4} - \frac{T_2 \cdot \frac{l_2}{2}}{G \cdot \pi \cdot d^4} = \\ &= \frac{502 \cdot 60 \cdot 10^{-2} \cdot 32 - 636 \cdot 20 \cdot 10^{-2} \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 3^4 \cdot 10^{-8}} = -0,0274 \text{ рад} \end{aligned}$$

$$\text{или } \varphi_K = -0,0274 \cdot \frac{180}{3,14} = -1,57 \text{ град.}$$

Эпюра касательных напряжений и угол поворота сечения К показаны на рис. 4.8, г.

Пример 4.4

Стальной стержень кольцевого сечения скручивается моментом T_e .

Определить наибольшее допустимое значение момента из условий прочности и жесткости, если $R_s = 90 \text{ МПа}$, $G = 80 \text{ ГПа}$, $\theta_{\text{adm}} = 1,5 \text{ рад/м}$ (рис. 4.9).

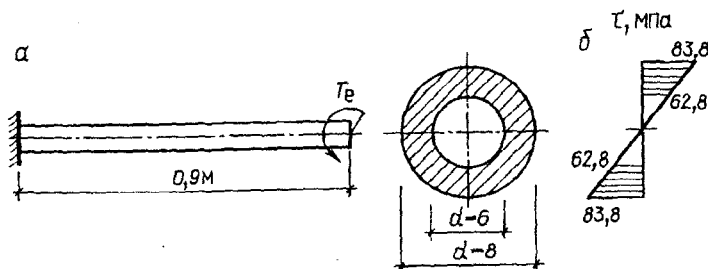


Рис. 4.9

Решение

Вычислим геометрические характеристики заданного сечения.

$$c = \frac{d_0}{d} = \frac{6}{8} = 0,75,$$

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cdot (1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 8^4 \cdot 10^{-8}}{32} \cdot (1 - 0,75^4) = 275 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cdot (1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 8^3 \cdot 10^{-6}}{16} \cdot (1 - 0,75^4) = 68,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Допустимый относительный угол закручивания $\theta_{adm} = 1,5 \cdot 3,14 / 180 = 0,0262$ рад/м.

Вычислим значение наибольшего скручивающего момента. Из условия прочности (4.2):

$T_{adm} = R_s \cdot W_p = 90 \cdot 10^6 \cdot 68,8 \cdot 10^{-6} = 6192 \text{ Н} \cdot \text{м} = 6,192 \text{ кН} \cdot \text{м}$ – из условия жесткости (4.6).

$$T_{adm} = \theta_{adm} \cdot G \cdot I_p = 0,0262 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 275 \cdot 10^{-8} = 5760 \text{ Н} \cdot \text{м} = 5,76 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В качестве допустимого скручивающего момента принимаем его меньшее значение – $T_{adm} = 5,76 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Касательные напряжения на наружных и внутренних волокнах стержня вычислим по формуле (4.1):

$$\tau_{нар} = \frac{T_{adm}}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{5,76 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{275 \cdot 10^{-8} \cdot 2} = 0,0838 \cdot 10^9 \text{ Па} = 83,8 \text{ МПа},$$

$$\tau_{вн} = \frac{T_{adm}}{I_p} \cdot \frac{d_0}{2} = \frac{5,76 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{275 \cdot 10^{-8} \cdot 2} = 0,0628 \cdot 10^9 \text{ Па} = 62,8 \text{ МПа}.$$

Эпюра касательных напряжений показана на рис. 4.9, б.

Пример 4.5

Стальной стержень прямоугольного поперечного сечения скручивается моментом $T = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Определить размер сторон прямоугольного сечения ($h/b = 2$, $R_s = 100$ МПа) и угол закручивания свободного конца стержня ($G = 80$ ГПа) (рис. 4.10).

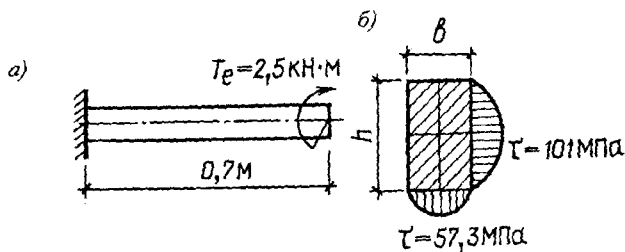


Рис. 4.10

Решение

Вычислим геометрические характеристики заданного сечения.

$$W_k = \alpha \cdot b^2 \cdot h = 0,457 \cdot b^2 \cdot 2b = 0,914 \cdot b^3 \text{ см}^3,$$

$$I_k = \beta \cdot b^2 \cdot h = 0,493 \cdot b^3 \cdot 2b = 0,986 \cdot b^4 \text{ см}^4.$$

Наибольшие касательные напряжения по длинной стороне сечения:

$$\tau_{n, \max} = R_s = 100 \text{ МПа}.$$

Из условия прочности (4.8):

$$W_k = \frac{T}{R_s} = \frac{T_e}{R_s} = \frac{2,5 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 0,025 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$\text{или } W_k = 0,025 \cdot 10^{-3} = 0,914 \cdot b^3,$$

откуда $b = 3,015 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,015 \text{ см}$.

Принимаем: $b = 3,0 \text{ см}$, $h = 2 \cdot b = 2 \cdot 3 = 6 \text{ см}$.

Вычислим наибольшие касательные напряжения по сторонам сечения.

По длинной стороне:

$$\tau_{h,\max} = \frac{T}{W_k} = \frac{2,5 \cdot 10^3}{0,914 \cdot 3^3 \cdot 10^{-6}} = 101 \cdot 10^9 \text{ Па} = 101 \text{ МПа} > R_s.$$

Перенапряжение составляет 1%, что допустимо.

По короткой стороне:

$$\tau_{b,\max} = \gamma \cdot \tau_{h,\max} = 0,753 \cdot 101 = 75,3 \text{ МПа}.$$

Эпюра касательных напряжений показана на рис. 4.10, б.

Абсолютный угол закручивания свободного конца стержня (по формуле (4.10)):

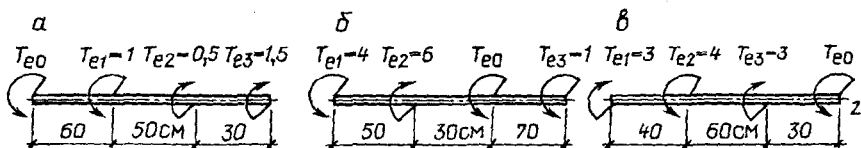
$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{T \cdot l}{G \cdot I_k} = \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{80 \cdot 10^9 \cdot 0,986 \cdot 3^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 0,000274 \cdot 10^2 \text{ рад} = 0,0271 \text{ рад} = 1,55 \text{ град}. \end{aligned}$$

Задачи для аудиторного и самостоятельного решения

Задача 4.1

Стальной стержень круглого поперечного сечения нагружен скручивающими моментами T_e .

Определить диаметр стержня из условия прочности и жесткости, если стали: $R_s = 120 \text{ МПа}$, $G = 80 \text{ ГПа}$, $\theta_{\text{adm}} = 0,04 \text{ град/м}$.



Ответы:

А. $d = 5,0 \text{ см}$; $\tau_{\max} = 81,5 \text{ МПа}$.

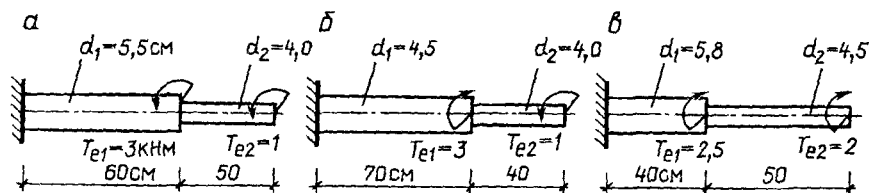
Б. $d = 6,0 \text{ см}$; $\tau_{\max} = 94,4 \text{ МПа}$.

В. $d = 5,8 \text{ см}$; $\tau_{\max} = 78,3 \text{ МПа}$.

Задача 4.2

Проверить прочность и жесткость стального стержня круглого поперечного сечения, заземленного одним концом.

Для материала стержня: $R_s = 120$ МПа, $G = 80$ ГПа, $\theta_{adm} = 0,07$ град/м.



Ответы:

А. $\tau_{max} = 123$ МПа > 120 МПа (2,5% допустимо), $\theta_{max} = 0,0557$ рад/м $< \theta_{adm}$.

Б. $\tau_{max} = 112$ МПа < 120 МПа, $\theta_{max} = 0,0621$ рад/м $< \theta_{adm}$.

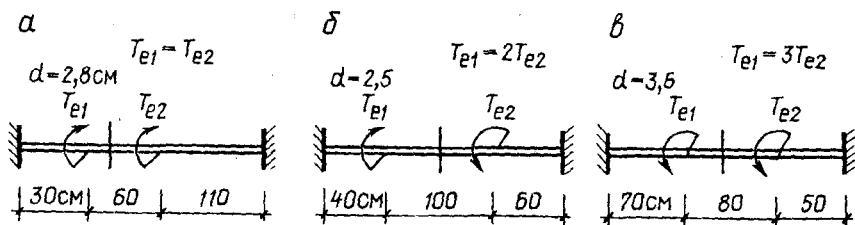
В. $\tau_{max} = 118$ МПа < 120 МПа, $\theta_{max} = 0,0621$ рад/м $< \theta_{adm}$.

Задача 4.3

Определить наибольшие допустимые значения скручивающих моментов и угол поворота среднего сечения стержня.

Соотношение моментов указано на схеме стержня.

Для материала стержня: $R_s = 120$ МПа, $G = 80$ ГПа.



Ответы:

А. $T_{e1} = T_{e2} = 369$ Н·м, $\varphi = 3,08$ град.

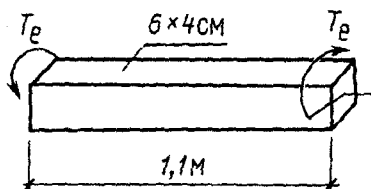
Б. $T_{e1} = 307$ Н·м, $T_{e2} = 614$ Н·м, $\varphi = 2,29$ град.

В. $T_{e1} = 1500$ Н·м, $T_{e2} = 500$ Н·м, $\varphi = 2,83$ град.

Задача 4.4

Стальной стержень прямоугольного поперечного сечения 6×4 см скручивается по торцам моментами T_e .

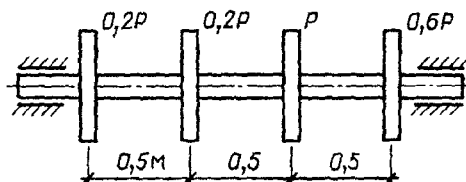
Определить значение наибольшего допустимого скручивающего момента из условий прочности и жесткости, если $R_s = 90$ МПа, $\theta_{adm} = 1,5$ град/м.



Ответ: $T_{el} = 2,53$ кН·м.

Задача 4.5

Определить из условий прочности и жесткости допустимое значение мощности P , передаваемой валом, если $[\tau] = 35$ МПа, $[\theta] = 0,9$ град/м.



Ответ: $[P] = 0,09$ кВт.

Задача 4.6

Вал диаметром 60 мм передает мощность 1,5 кВт.

Определить предельное число оборотов вала n , если $[\tau] = 60$ МПа.

Ответ: $n = 56,4$ об/мин.

Задача 4.7

Определить диаметр вала машины мощностью 300 кВт, если $[\tau] = 100$ МПа, $n = 200$ об/мин.

Ответ: $d = 90$ мм.

Задача 4.8

В процессе испытания двигателя установили, что вал диаметром $d = 60$ мм и длиной $l = 0,7$ м при частоте вращения $n = 2000$ об/мин закручивается на угол $\varphi = 0,03^\circ$.

Определить передаваемую валом мощность, если $G = 80$ ГПа.

Ответ: $P = 15,9$ кВт.

Задача 4.9

Стальной стержень кольцевого сечения ($d = 100$ мм, $d_0 = 80$ мм) длиной $l = 3$ м закручивается на угол $\varphi = 3^\circ$.

Вычислить наибольшее касательное напряжение, возникающее в стержне.

Ответ: $\tau_{\max} \approx 70$ МПа.

Раздел 5. ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

Деформация изгиба возникает при действии на стержень (балку системы внешних сил (F , q), перпендикулярных его продольной оси Z или пары сил, с моментом M , плоскость действия которой перпендикулярна этой оси. Изгиб будет плоским, если внешние силы лежат в одной плоскости P , которая является плоскостью симметрии поперечного сечения балки (рис. 5.1).

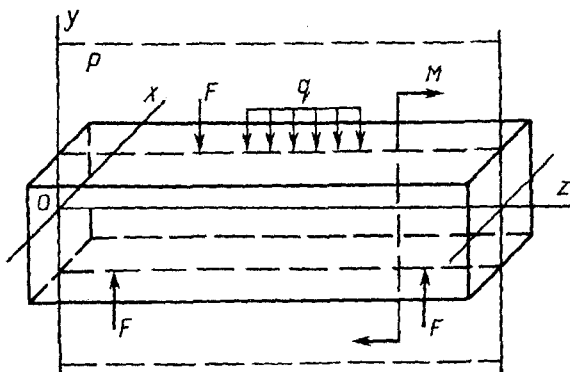


Рис. 5.1

При плоском изгибе ось балки искривляется по всей длине в одной плоскости.

При изучении изгиба используется обычная система координатных осей: ось Z совпадает с продольной осью балки, а оси X и Y располагаются в плоскостях поперечных сечений и совпадают с главными центральными осями инерции.

Плоский изгиб балки может происходить в плоскости YOZ (вертикальной) или XOZ (горизонтальной).

5.1. Внутренние силы. Эпюры

Балка как элемент конструкции соединяется с другими элементами при помощи устройств, называемых опорами. Различают три типа опор: шарнирно-неподвижную, шарнирно-подвижную и защемление (заделка). Опорные устройства препятствуют произвольному

перемещению балок от воздействия нагрузки, накладывая на балку определенное число связей (ограничений). В наложенных на балку связях возникают *реакции*, называемые опорными. Число опорных реакций равно числу наложенных связей.

Так, шарнирно-неподвижная опора A (рис. 5.2, a) имеет две связи – вертикальную и горизонтальную, дает две реакции A_Y и A_Z . Шарнирно-подвижная опора B имеет одну связь – дает одну реакцию B_Y . Защемление C имеет три связи – дает три реакции: C_Y , C_Z , M_C (см. рис. 5.2, b).

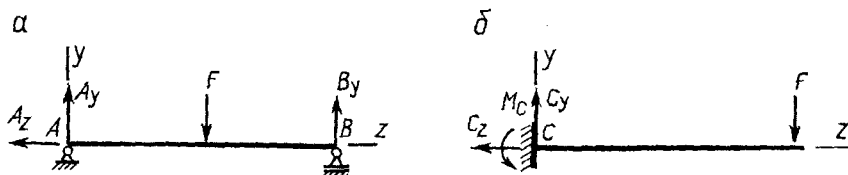


Рис. 5.2

Наименьшее число связей, обеспечивающих неподвижность балки по отношению к другим элементам конструкции в плоской системе сил, равно трем. Эти связи должны быть расположены рационально: не быть параллельными друг другу или пересекаться в одной точке.

Балка, под действием нагрузки и опорных реакций, должна находиться в равновесии. Поэтому для определения опорных реакций можно воспользоваться тремя условиями равновесия (для плоской системы сил): $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum M = 0$. Сумма моментов берется относительно любой точки, лежащей в плоскости действия сил.

Рекомендуется такой порядок определения опорных реакций: $\sum M_A = 0 \rightarrow B_Y$; $\sum M_B = 0 \rightarrow A_Y$; $\sum Z = 0 \rightarrow A_Z$ (при изгибе $A_Z = 0$). $\sum Y = 0$ – используется для проверки правильности определения A_Y и B_Y .

Балки, опорные реакции которых можно определить при помощи трех уравнений равновесия, называются статически определимыми. Такие балки рассматриваются в настоящем разделе.

В результате действия внешних сил (нагрузки) в поперечных сечениях балки возникают *внутренние силы (усилия)* – поперечная сила Q_Y и изгибающий момент M_X , которые определяются методом сечений.

Балка в исследуемом сечении мысленно рассекается на две части (рис. 5.3, а). Одна из частей балки «отбрасывается». Поскольку вся балка находится в равновесии, то и оставленная ее часть (см. рис. 5.3, б) под действием известных внешних сил (активной F и реактивной A_Y) и неизвестных внутренних (Q_Y и M_X) в исследуемом сечении также должна находиться в равновесии и удовлетворять условиям $\sum Y = 0$, $\sum M_{X(0)} = 0$ (момент относительно центра тяжести рассматриваемого сечения):

$$\sum Y = A_Y - q \cdot a - Q_Y = 0, \text{ откуда } Q_Y = A_Y - q \cdot a,$$

$$\sum M_{X(0)} = A_Y \cdot z - q \cdot a \cdot (z - a/2) + M - M_X = 0,$$

$$\text{откуда } M_X = A_Y \cdot z - q \cdot a \cdot (z - a/2) + M.$$

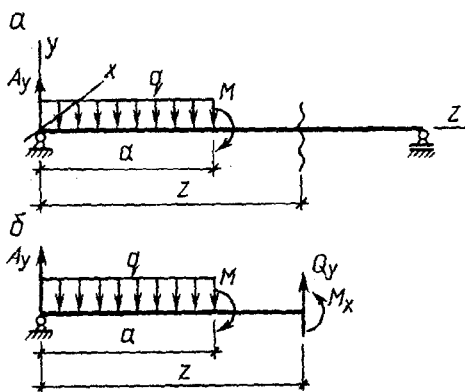


Рис. 5.3

Исходя из названных условий равновесия выработано правило определения поперечной силы Q_Y и изгибающего момента M_X в сечениях балки. При этом сами уравнения равновесия $\sum Y = 0$, $\sum M_X = 0$ не составляются, а сразу записываются выражения для Q_Y и M_X .

Правило таково – в рассматриваемом сечении балки:

поперечная сила Q_Y численно равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил (активных и реактивных), расположенных по одну сторону от этого сечения – $Q_Y = \sum(F_i)$;

изгибающий момент M_X численно равен алгебраической сумме моментов относительно центра тяжести сечения всех внешних сил, расположенных по одну сторону от этого сечения – $M_X = \sum(F_i \cdot z_i)$.

Для определения Q_Y и M_X можно рассматривать любую часть «рассеченной» балки.

Принято следующее правило знаков при вычислении Q_Y и M_X :

– если внешняя сила (активная или реактивная) стремится повернуть рассматриваемую часть балки относительно центра тяжести исследуемого сечения по часовой стрелке, то в этом сечении поперечная сила считается положительной, а если против часовой стрелки – отрицательной;

– если внешняя сила (F , M , q) изгибает рассматриваемую часть балки относительно исследуемого сечения выпуклостью вниз, то в этом сечении изгибающий момент считается положительным, если выпуклостью вверх – отрицательным.

Изложенное правило знаков иллюстрируется на рис. 5.4.

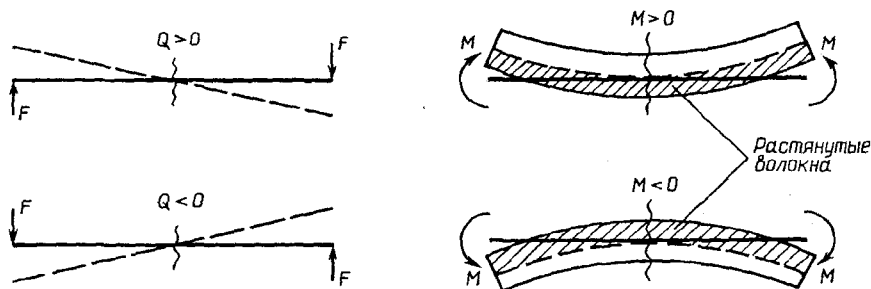


Рис. 5.4

Для проведения расчетов балки на прочность необходимо знать максимальные значения Q_Y и M_X . Для этого нужно выявить закон изменения этих величин по длине балки: $Q_Y = f(z)$, $M_X = f(z)$. Изменения Q_Y и M_X по длине балки удобно представлять графически в виде э п ю р (рис. 5.5).

Исходя из нагрузки, на балке выделяются расчетные участки: между точками приложения сосредоточенных нагрузок (F , M) и в пределах распределенной (q).

В пределах каждого расчетного участка намечаются сечения (I, II, i) и отмечаются их положения в системе координатных осей (z_1, z_2, \dots, z_i).

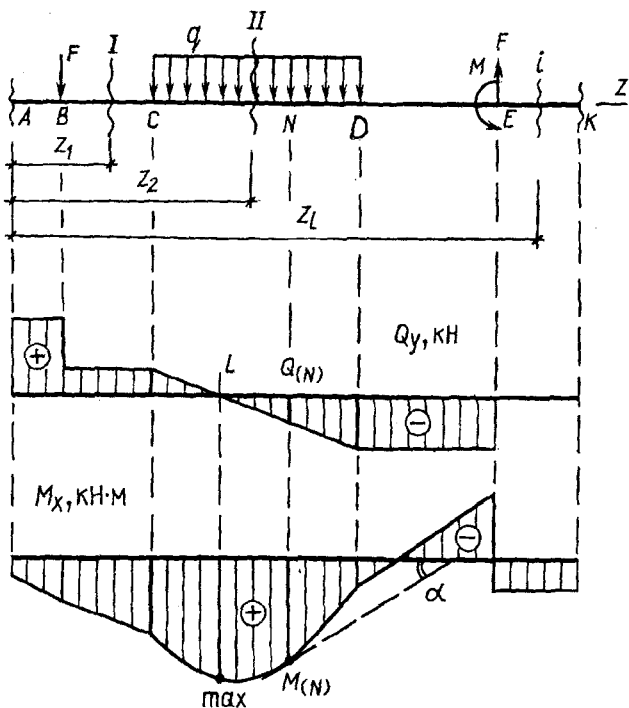


Рис. 5.5

Затем составляются выражения для определения Q_y и M_x на каждом расчетном участке балки по ранее изложенным правилам. По составленным уравнениям вычисляются значения Q_y и M_x в характерных сечениях каждого участка балки. По этим данным в выбранном масштабе строятся соответствующие эпюры (см. рис. 5.5).

Положительные ординаты Q_y откладываются вверх от оси эпюры, отрицательные — вниз. Эпюра изгибающих моментов в строительном проектировании строится со стороны *растянутых* волокон балки. Это значит, что положительные значения M_x откладываются *вниз* от оси эпюры, а отрицательные — *вверх*.

При построении эпюр Q_y и M_x и для проверки их правильности могут быть использованы дифференциальные зависимости между Q_y , M_x и q :

$$Q_{(z)} = \frac{dM_{(z)}}{dz}; \quad q = \frac{dQ_{(z)}}{dz} = \frac{d^2M_{(z)}}{dz^2}, \quad (5.1)$$

где индекс z при Q и M означает, что эти параметры являются функцией абсциссы z балки.

Из названных дифференциальных зависимостей вытекает ряд важных следствий (см. рис. 5.5):

1. Если на участке балки $q = 0$ (AB, BC, DE), то поперечная сила $Q_Y = \text{const}$, а изгибающий момент M_X изменяется по линейному закону.

2. Если на участке балки $q \neq 0$ (CD), то поперечная сила Q_Y изменяется по линейному закону, а изгибающий момент M_X – по закону параболы (выпуклостью в сторону направления нагрузки q).

3. Если на участке балки поперечная сила $Q_Y = 0$ (EK), то изгибающий момент $M_X = \text{const}$.

4. Если на участке балки поперечная сила $Q_Y > 0$ (AB, BC), то изгибающий момент M_X возрастает, и наоборот (уч. DE).

5. В сечении балки, где поперечная сила переходит через нуль ($Q = 0$), изгибающий момент имеет экстремальное значение (максимум или минимум) – сечение L .

6. В сечении балки, где приложена сосредоточенная сила F (сечение B, E), на эпюре Q_Y имеется «скачек» на величину этой силы, а на эпюре M_X – излом.

7. В сечении балки, где приложен сосредоточенный момент M (сечение E), на эпюре M_X имеется «скачек» на величину этого момента, а на эпюре Q_Y изменений нет.

8. Поперечная сила в данном сечении балки может рассматриваться как тангенс угла наклона касательной к эпюре M в точке соответствующей этому сечению (на рис. 5.5 точка N).

Из построенных эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для расчета на прочность выбираются максимальные значения Q_{\max} и M_{\max} .

Примеры и задачи на построение эпюр Q и M

Примечание. В связи с тем, что во всех примерах и задачах на плоский изгиб, приведенных в пособии, нагрузка действует только в одной (вертикальной) плоскости, индексы Y и Z при поперечной силе Q и изгибающем моменте M опускаются.

Пример 5.1

Для консольной балки построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 5.6).

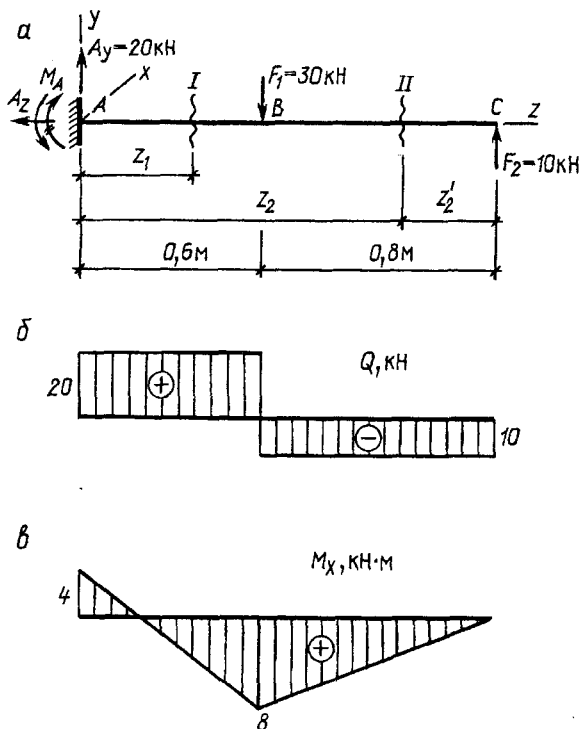


Рис. 5.6

Решение

На расчетной схеме балки размещается система координатных осей X, Y, Z с началом в крайнем левом сечении балки.

Действующая на балку нагрузка F_1 и F_2 передается на опору (защемление), где возникают три опорных реакции (A_y, A_z и M_A), которые предварительно направляются произвольно.

Для определения трех опорных реакций используются три уравнения равновесия ($\sum Y = 0, \sum X = 0, \sum M = 0$). Значит рассматриваемая система (балка) является статически определимой.

Рекомендуется следующий порядок определения опорных реакций, пригодный для всех схем балок: составляются уравнения моментов относительно крайних сечений балки (здесь точки A и C):

$\sum M_A = M_A + F_1 \cdot 0,6 - F_2(0,6 + 0,8) = M_A + 30 \cdot 0,6 - 10(0,6 + 0,8) = 0$, откуда $M_A = -4$ кН·м.

Знак минус при M_A указывает на то, что момент направлен в противоположную сторону. На схеме показывается действительное направление M_A , и далее знак минус не учитывается.

$\sum M_C = -M_A + A_Y(0,6 + 0,8) - F_1 \cdot 0,8 = -4 + A_Y \cdot 1,4 - 30 \cdot 0,8 = 0$, откуда $A_Y = 20$ кН (направление A_Y правильное).

Из уравнения $\sum Z = 0$ определяем реакцию A_Z . $\sum Z = A_Z = 0$.

Уравнение $\sum Y = 0$ используется для проверки правильности определения реакций.

$\sum Y = A_Y - F_1 + F_2 = 20 - 30 + 10 = 0$ — реакции определены верно.

Примечание. При плоском изгибе реакция опоры вдоль продольной оси балки всегда равна нулю. Поэтому в последующих задачах она не будет указываться.

Для определения Q и M на балке выделяются расчетные участки (здесь два), в пределах которых помечаются сечения I и II и отмечается их положение в системе координатных осей (z_1, z_2).

Составим выражения для определения поперечной силы Q и изгибающего момента M для каждого участка балки.

Участок 1. Рассматриваем левую от сечения часть балки (ход слева) $0 \leq z_1 \leq 0,6$ м. $Q = A_Y = 20$ кН = const, $M = -M_A + A_Y \cdot z_1$ — линейная зависимость.

При $z_1 = 0$ $M = -4$ кН·м; при $z_1 = 0,6$ м $M = -4 + 20 \cdot 0,6 = 8$ кН·м.

Проследим знаки слагаемых в составленных выражениях.

В выражении для Q реакция A_Y дает положительное слагаемое, так как пытается повернуть рассматриваемую часть балки относительно сечения I по ходу часовой стрелки.

В выражении для M опорный момент M_A дает отрицательное слагаемое, так как стремится изогнуть рассматриваемую часть балки относительно сечения I выпуклостью вверх, а реакция A_Y — положительное, так как стремится изогнуть балку выпуклостью вниз.

Участок 2. Рассматриваем левую от сечения часть балки (ход слева): $0,6 \leq z_2 \leq (0,6 + 0,8)$ м, $Q = A_Y - F_1 = 20 - 30 = -10$ кН = const, $M = -M_A + A_Y \cdot z_2 - F_1(z_2 - 0,6)$ — линейная зависимость.

При $z_2 = 0,6$ м $M = -4 + 20 \cdot 0,6 = 8$ кН·м;

при $z_2 = 1,4$ м $M = -4 + 20 \cdot 1,4 - 30 \cdot 0,8 = 0$.

О знаках слагаемых. Сила F_1 в выражении для Q дает отрицательное слагаемое, так как стремится повернуть рассматриваемую часть балки относительно сечения II против хода часовой стрелки, а в выражении для M также дает отрицательное слагаемое, так как стремится изогнуть балку выпуклостью вверх.

Заметим, что значения Q и M на концах балки согласуются с действующими здесь нагрузками (реакциями). Так, вычисленное значение Q в сечении C численно равно приложенной здесь силе F_2 , а вычисленное значение M численно равно приложенному здесь моменту M (в данном случае $M = 0$).

Для определения Q и M можно рассматривать и правую часть балки (с началом отсчета ординаты Z в сечении C).

Так, для второго участка (ход справа)

$0 \leq z'_2 \leq 0,8$ м, $Q = -F_2 = -10$ кН = const, $M = F_2 \cdot z'_2$ – линейная зависимость. При $z'_2 = 0$ $M = 0$; при $z'_2 = 0,8$ м $M = 10 \cdot 0,8 = 8$ кН·м.

Значения Q и M совпадают с ранее полученными.

Второй вариант составления выражений для Q и M (ход со стороны свободного конца) для консольной балки имеет преимущество в том, что не требуется определения опорных реакций. Но при этом контрольные значения (A_y , M_A) отсутствуют.

По полученным значениям Q и M в характерных сечениях балки в выбранном масштабе строится эпюра Q (рис. 5.6, б) и эпюра M (рис. 5.6, в). Положительные значения Q откладываются вверх от оси балки, а положительные значения M – вниз.

При таком направлении ординат M эпюра изгибающих моментов оказывается построенной со стороны *растянутых* волокон балки, что удобно в строительном проектировании.

Проанализируем характер эпюр Q и M на участках балки. На участках балки, где нет распределенной нагрузки ($q = 0$), эпюра Q – прямолинейна, параллельна оси балки, а эпюра M – прямолинейна, наклонна к оси балки.

В сечениях A, B и C, где действуют активные и реактивные сосредоточенные силы, на эпюре Q имеются скачки на величину этих сил.

Если смотреть со стороны крайнего *левого* сечения балки, то скачки на эпюре Q направлены в сторону действия сосредоточенной силы

(активной и реактивной). Так, сила F , направлена вниз – скачки на эпюре Q также вниз, а в сечении C – вверх.

В сечении балки (B), где приложена сосредоточенная сила F , на эпюре M имеется излом.

В сечении балки (A), где действует момент M_A , на эпюре M имеется скачок на величину этого момента, направленный вверх, так как M_A направлен против хода часовой стрелки.

Из эпюр Q и M следует, что на участке балки AD верхние волокна растянуты (ординаты M лежат сверху от оси эпюры), а нижние сжаты. На участке DC – нижние волокна растянуты, верхние сжаты.

Из построенных эпюр Q и M следует, что $Q_{\max} = 20$ кН, $M_{\max} = 8$ кН·м. Эти значения нужны для последующих расчетов.

Пример 5.2

Для двухопорной балки построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 5.7).

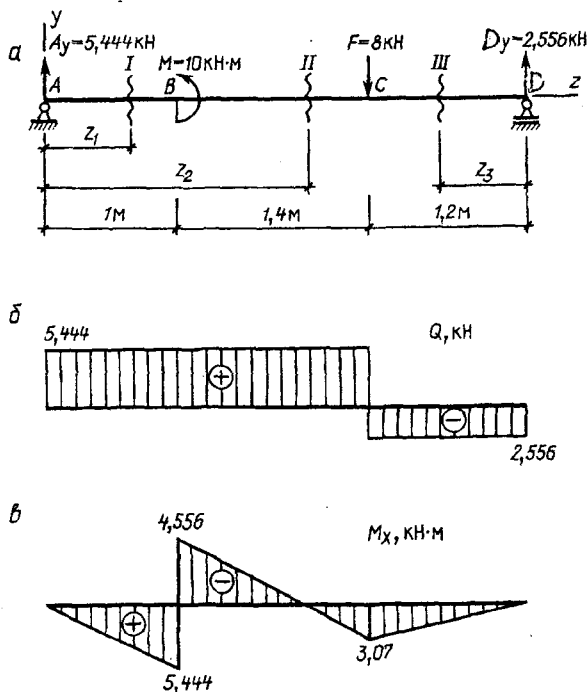


Рис. 5.7

Решение

Координатная ось Z совпадает с продольной осью балки, ось Y – ей перпендикулярна.

Действующая на балку нагрузка передается на опоры, где возникают опорные реакции A_Y и D_Y , которые определяются из уравнений равновесия.

Составим два уравнения моментов относительно опорных сечений, чтобы реакции можно было найти независимо друг от друга.

$$\sum M_A = -D_Y(1,0 + 1,4 + 1,2) + F(1,0 + 1,4) - M = -D_Y \cdot 3,6 + 8 \times 2,4 - 10 = 0, \text{ откуда } A_Y = 2,556 \text{ кН.}$$

$$\sum M_D = A_Y \cdot 3,6 - M - F \cdot 1,2 = A_Y \cdot 3,6 - 10 - 8 \cdot 1,2 = 0, \text{ откуда } A_Y = 5,444 \text{ кН.}$$

Знаки «плюс» у реакций A_Y и D_Y указывают на то, что их действительное направление совпадает с предполагаемым.

Проверим правильность вычисления реакций.

$$\sum Y = A_Y - F + D_Y = 2,556 - 8,0 + 5,444 = 0 - \text{реакции определены верно.}$$

На балке выделяются три расчетных участка. С целью сокращения объема вычислений для составления выражений для Q и M будем рассматривать часть сечений с левого, а часть с правого конца балки (см. рис. 5.7, а).

Участок 1 – ход слева.

$$0 \leq z_1 \leq 1,0 \text{ м.}$$

$$Q = A_Y = 5,444 \text{ кН} = \text{const}, M = A_Y \cdot z_1 - \text{линейная зависимость.}$$

При $z_1 = 0$

$$M = 0; \text{ при } z_1 = 1,0 \text{ м } M = 5,444 \cdot 1 = 5,444 \text{ кН} \cdot \text{ м.}$$

Участок 2 – ход слева.

$$1,0 \leq z_2 \leq 2,4 \text{ м.}$$

$$Q = A_Y = 5,444 \text{ кН} = \text{const}, M = A_Y \cdot z_2, M - \text{линейная зависимость.}$$

При $z_2 = 1,0 \text{ м}$

$$M = 5,444 \cdot 1 - 10 = -4,556 \text{ кН} \cdot \text{ м}; \text{ при } z_2 = 2,4 \text{ м } M = 5,444 \cdot 2,4 - 10 = 3,07 \text{ кН} \cdot \text{ м.}$$

Участок 3 – ход справа.

$$0 \leq z_3 \leq 1,2 \text{ м.}$$

$$Q = -D_Y = -2,556 \text{ кН} = \text{const}, M = D_Y \cdot z_3 - \text{линейная зависимость.}$$

При $z_3 = 0$ $M = 0$;

$$\text{при } z_3 = 1,2 \text{ м } M = 2,556 \cdot 1,2 = 3,07 \text{ кН} \cdot \text{ м.}$$

По полученным значениям Q и M строятся соответствующие эпюры (см. рис. 5.7, б, в).

Анализ эпюры изгибающих моментов показывает, что в том сечении балки, где применен сосредоточенный момент M на эпюре образуется скачок на величину этого момента. Скачок направлен вверх, так как M направлен против хода часовой стрелки.

На участке AC балки поперечная сила $Q > 0$ – изгибающий момент возрастает, а на участке CD $Q < 0$ – изгибающий момент убывает.

В конечных шарнирных опорах балки (A, D) изгибающие моменты равны нулю.

Характер деформации волокон балки на ее участках установите самостоятельно.

Из построенных эпюр следует, что $Q_{\max} = 5,444$ кН, $M_{\max} = 5,444$ кН·м.

Пример 5.3

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для двухопорной балки с консолью (рис. 5.8).

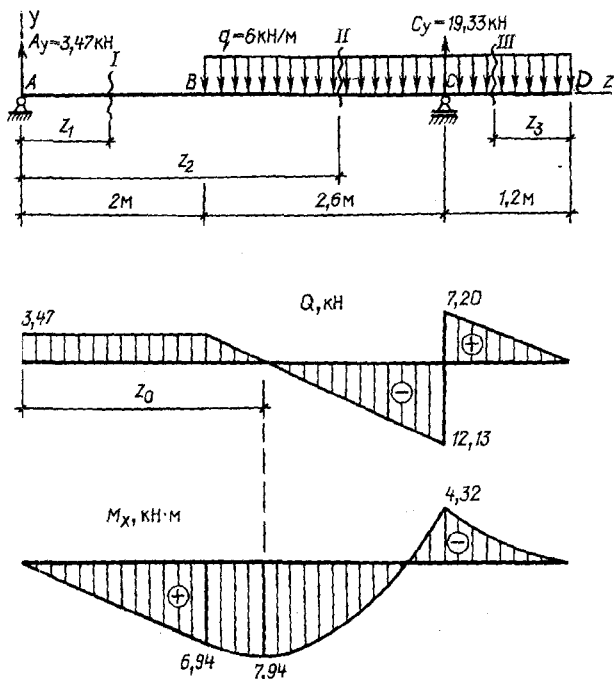


Рис. 5.8

Решение

Определяем опорные реакции.

$$\sum M_A = -C_Y \cdot 4,6 + q \cdot 2,6 \left(2 + \frac{2,6}{2} \right) + q \cdot 1,2 \left(4,6 + \frac{1,2}{2} \right) = 0,$$

откуда $C_Y = 19,33$ кН.

$$\sum M_C = A_Y \cdot 4,6 - q \cdot 2,6 \cdot \frac{2,6}{2} + q \cdot 1,2 \cdot \frac{1,2}{2} = 0,$$

откуда $A_Y = 3,47$ кН.

$\sum Y = 3,47 + 19,33 - 6(2,6 + 1,2) = 22,8 - 22,8 = 0$ – реакции определены верно (по направлению и значениям).

Балка имеет три расчетных участка.

Участок 1 – ход слева.

$$0 \leq z_1 \leq 2,0 \text{ м, } Q = A_Y = 3,47 \text{ кН, } M = A_Y \cdot z_1.$$

При $z_1 = 0$ $M = 0$; при $z_1 = 2,0$ м $M = 3,47 \cdot 2 = 6,94$ кН·м.

Участок 2 – ход слева.

$2 \leq z_2 \leq 4,6$ м. $Q = A_Y - q(z_2 - 2)$ – линейная зависимость.

$$M = A_Y \cdot z_2 - q(z_2 - 2) \frac{(z_2 - 2)}{2} \text{ – параболическая зависимость.}$$

При $z_2 = 2$ м $Q = 3,47$ кН, $M = 6,94$ кН·м; при $z_2 = 4,6$ м $Q = 12,13$ кН, $M = 4,32$ кН·м.

Участок 3 – ход справа.

$$0 \leq z_3 \leq 1,3 \text{ м,}$$

$$Q = q \cdot z_3 \text{ – линейная зависимость, } M = -q \cdot z_3 \cdot \frac{z_3}{2} \text{ – параболическая}$$

зависимость.

При $z_3 = 0$ $Q = 0$, $M = 0$; при $z_3 = 1,2$ м $Q = 7,2$ м, $M = 4,32$ кН·м.

На участке BC балки эпюра Q переходит через нуль ($Q = 0$). В этом сечении, определяемом абсциссой z_0 , изгибающий момент M имеет экстремальное значение.

Определим расстояние z_0 из выражения $Q = A_Y - q(z_0 - 2) = 0$, откуда $z_0 = 2,58$ м.

При $z = z_0 = 2,58$ м изгибающий момент

$$M_{\max} = A_Y \cdot z_0 - q(z_0 - 2) \frac{(z_0 - 2)}{2} =$$

$$= 3,47 \cdot 2,58 - 6(2,58 - 2) \frac{(2,58 - 2)}{2} = 7,94 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Заметим, что на участках балки, где действует распределенная нагрузка q , изгибающий момент изменяется по закону параболы. Линия эпюры изогнута в сторону направления нагрузки q .

Из построенных эпюр следует, что $Q_{\max} = 12,13 \text{ кН}$, $M_{\max} = 7,94 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Пример 5.4

Построить эпюры Q и M для двухпролетной балки с промежуточным шарниром (рис. 5.9).

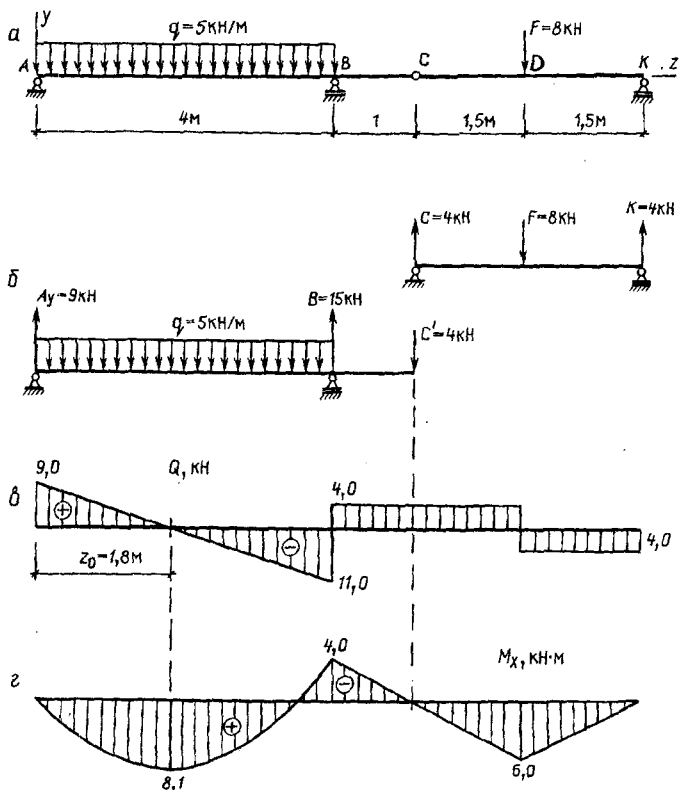


Рис. 5.9

Решение

Сложная (составная) балка AK состоит из двух частей: основной AC , покоящейся на шарнирных опорах A и B , и дополнительной, опирающейся левым концом на основную балку, а правым – на опору K .

Нагрузка q , действующая на основную балку, передается только на опоры A и B . Нагрузка F , действующая на дополнительную часть балки, передается на опору K , и через шарнир C на основную часть балки, а затем на опоры A и B .

Для ведения расчета сложную балку следует расчленить на основную и дополнительную части, проведя сечение через шарнир C (рис. 5.9, б).

Реакции в опорах балки определяются обычным образом, рассматривая отдельно каждую часть сложной балки, начиная с дополнительной.

Составляем уравнения равновесия для дополнительной части балки (CK):

$$\sum M_C = 8 \cdot 1,5 - K \cdot 3 = 0, \text{ откуда } K = 4,0 \text{ кН.}$$

$$\sum M_D = -8 \cdot 1,5 + C \cdot 3 = 0, \text{ откуда } C = 4,0 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = C - F + K = 4 - 8 + 4 = 0.$$

Составляем уравнения равновесия для основной части балки (AC). В сечении C основной части балки нужно приложить ту часть нагрузки F , которая с дополнительной части передается на основную. Эта часть нагрузки C' равна реакции C дополнительной части, т.е. $C' = C$. Направить ее следует по направлению силы F .

$$\sum M_A = q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + C'(4+1) - B \cdot 4 = 0, \text{ откуда } B = 15 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = -q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + C' \cdot 1 + A \cdot 4 = 0, \text{ откуда } A = 9 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = A - q \cdot 4 + B - C' = 9 - 5 \cdot 4 + 15 - 4 = 0.$$

Примечание. Для определения опорных реакций можно поступить иначе. Так как изгибающий момент в шарнире равен нулю (через шарнир момент не передается), то к обычным уравнениям равновесия можно добавить еще одно – сумма моментов относительно шарнира C от сил слева или справа от него равна нулю ($\sum M_C^{\text{лев}} = \sum M_C^{\text{прав}} = 0$).

В данном примере целесообразно:

- 1) $\sum M_C^{\text{прав}} = 0$ – определяется реакция K ;

2) $\sum M_B = 0$ – войдут неизвестные A и K . Совместное решение (1) и (2) дает значение реакции A ;

3) $\sum M_C^{\text{лев}} = 0$ – определяется реакция B .

Возможны и другие варианты уравнений моментов.

Эпюры Q и M строятся обычным путем отдельно для каждой части балки, а затем их нужно соединить.

После того, как изучены закономерности изменения Q и M на участках балки в зависимости от вида нагрузки, процедуру определения их можно несколько упростить. Выражения для Q и M на каждом участке балки в зависимости от z не составляются, а сразу вычисляются их значения для конкретных сечений (обычно это границы расчетных участков балки).

Как выявлено ранее, в сечении, где приложена сосредоточенная сила F , на эпюре Q образуется скачок на величину этой силы. Поэтому в таких сечениях вычисляются два значения Q на бесконечно малых расстояниях слева (л) и справа (п) от нее.

То же относится и к сосредоточенному моменту M .

Определяем внутренние силы (усилия) в характерных сечениях балки.

Ход слева.

Сечение A $Q = A_Y = 9 \text{ кН}, M = 0.$

Сечение B $Q^{\text{л}} = A_Y - q \cdot 4 = 9 - 5 \cdot 4 = -11 \text{ кН},$

$Q^{\text{п}} = A_Y - q \cdot 4 + B = 9 - 5 \cdot 4 + 15 = 4 \text{ кН},$

$M = +A_Y \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = +9 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 2 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Сечение C $Q = A_Y - q \cdot 4 + B = 9 - 5 \cdot 4 + 15 = 4 \text{ кН},$

$M = +A_Y \cdot (4 + 1) - q \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 1\right) + B \cdot 1 =$

$= +9 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 3 + 15 \cdot 1 = 0.$

Для остальной части балки целесообразен ход справа.

Сечение K $Q = -K = -4 \text{ кН}, M = 0.$

Сечение D $Q^{\text{л}} = -K = -4 \text{ кН},$

$Q^{\text{п}} = -K + F = -4 + 8 = 4 \text{ кН},$

$M = +K \cdot 1,5 = +4 \cdot 1,5 = +6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

$$\begin{aligned} \text{Сечение } C \quad Q &= -K + F = -4 + 8 = 4 \text{ кН}, \\ M &= +K(1,5 + 1,5) - F \cdot 1,5 = +4 \cdot 3 - 8 \cdot 1,5 = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что последние значения Q и M можно было не определять (уже найдены).

По вычисленным значениям Q и M строятся их эпюры (рис. 5.9, в, з).

На участке AB балки эпюра Q переходит через нуль. Определим это сечение N , в котором изгибающий момент имеет максимальное значение:

$$Q_N = A - q \cdot z_0 = 0,$$

откуда $z_0 = A/q = 9/5 = 1,8$ м.

При $z = z_0 = 1,8$ м

$$M_{\max} = +A_y \cdot z_0 - q \cdot z_0 \cdot \frac{z_0}{2} = +9 \cdot 1,8 - 5 \cdot 1,8 \cdot 0,9 = +8,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из построенных эпюр следует, что $Q_{\max} = 11$ кН, $M_{\max} = 8,1$ кН·м.

Примечание. Процедуру построения эпюры Q можно еще более упростить, применив графоаналитический прием, помня о закономерности изменения Q в зависимости от вида нагрузки.

Начинать построение удобно с крайнего *левого* сечения балки.

В сечении A – скачек на величину и направление реакции, т.е. вверх на 9 кН. На участке AB – прямая, наклонная по направлению нагрузки q , т.е. вниз на $5 \cdot 4 = 20$ кН. Получим точку с ординатой $9 - 20 = -11$ кН. От этой точки вверх на значение реакции $B = 15$ кН – получим точку с ординатой 4 кН. На участке BC и CD изменений нет – эпюра прямая, параллельная оси. В сечении D скачек вниз на $F = 8$ кН – получим ординату 4 кН. На участке DK изменений нет. В сечении K скачек вверх на значение реакции $K = 4$ кН. Построение всегда должно «замкнуться» на нуле.

Пример 5.5

Построить эпюры Q и M для составной балки, нагруженной сосредоточенным моментом M и сосредоточенной нагрузкой q , распределенной по закону треугольника, с максимальной ординатой $q = 6$ кН/м (рис. 5.10).

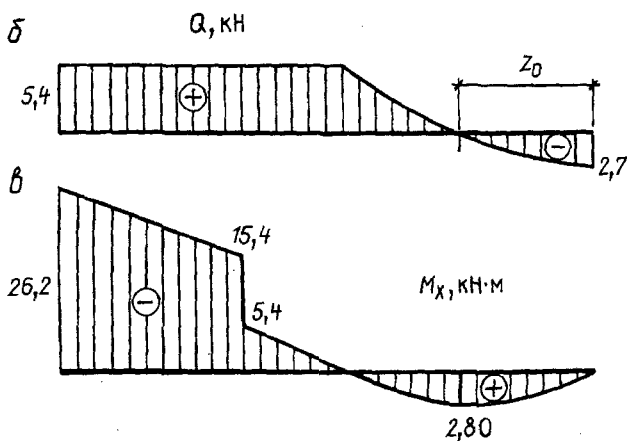
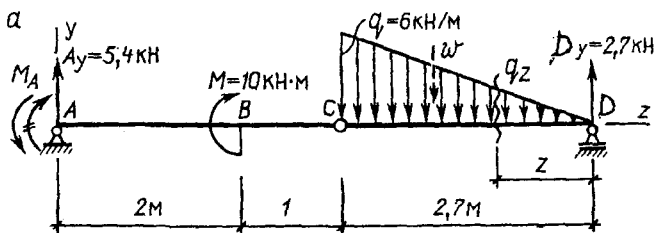


Рис. 5.10

Решение

В защемлении (сечение A) возникает вертикально направленная реакция A_y и момент M_A , а в шарнирной опоре D – реакция D_y .

Опорные реакции определяются из уравнения равновесия.

$$\sum M_C^{\text{пр}} = -D_y \cdot 2.7 + \frac{q \cdot 2.7}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2.7 = 0,$$

откуда $D_y = 7.29 / 2.7 = 2.7 \text{ kN}$.

Примечание. При определении реакции распределенная нагрузка была заменена равнодействующей, которая равна площади этой нагрузки (треугольника) $\omega = \frac{1}{2} q \cdot a$ и приложена в центре тяжести. Плечо равнодействующей относительно сечения C равно $\frac{1}{3} a$:

$$\sum M_A = M_A + M - D_Y \cdot 5,7 + \frac{q \cdot 2,7}{2} \left(2 + 1 + \frac{2,7}{3} \right) = 0,$$

откуда $M_A = -26,2$ кН·м.

$$\sum M_C^{\text{лсв}} = A_Y \cdot 3 - M_A + M = 0,$$

откуда $A_Y = 5,4$ кН.

Проверка: $\sum Y = 5,4 + 2,7 - \frac{6 \cdot 2,7}{2} = 8,1 - 8,1 = 0$ — реакции найдены верно.

Определяем внутренние силы (Q и M) в характерных сечениях балки.

Ход слева.

Сечение A $Q = A_Y = 5,4$ кН,
 $M = -M_A = -26,2$ кН·м.

Сечение B $Q = A_Y = 5,4$ кН,
 $M^{\text{лсв}} = -M_A + A_Y \cdot 2 = -26,2 + 5,4 \cdot 2 = -15,4$ кН·м,
 $M^{\text{пр}} = -M_A + A_Y \cdot 2 + M = -26,2 + 5,4 \cdot 2 + 10 = -5,4$ кН·м.

Сечение C $Q = A_Y = 5,4$ кН,
 $M = -M_A + A_Y \cdot 3 + M = -26,2 + 5,4 \cdot 3 + 10 = 0$.

Для участка балки CD , где нагрузка носит сложный характер, составим подробные выражения для Q и M .

Ход справа. $Q = -D_Y + \frac{q_z \cdot z}{2}$; $M = D_Y \cdot z - \frac{q_z z}{2} \cdot \frac{1}{3} z$.

Ординату распределенной нагрузки q_z найдем из подобия треугольников (нагрузочного и отсеченного)

$$\frac{q}{a} = \frac{q_z}{z}, \text{ откуда } q_z = \frac{q \cdot z}{a}.$$

С учетом ординаты нагрузки q_z получим:

$$Q = -D_Y + \frac{q \cdot z \cdot z}{a \cdot 2} = -D_Y + \frac{qz^2}{2a} - \text{поперечная сила изменяется по}$$

квадратной параболе, обращенной выпуклостью вниз.

$$M = D_Y \cdot z - \frac{q \cdot z \cdot z}{a \cdot 2} \cdot \frac{1}{3} z = D_Y \cdot z - \frac{qz^3}{6a} - \text{изгибающий момент изменяется по кубической параболе, выпуклостью вниз.}$$

меняется по кубической параболе, выпуклостью вниз.

Примечание. Чтобы установить направленность выпуклости эпюры, следует определить значения Q и M еще в одном сечении участка балки (лучше посередине).

Вычисляем значения Q и M на участке CD .

При $z = 0$ $Q = -D_Y = -2,7 \text{ кН}, M = 0.$

При $z = 2,7 \text{ м}$ $Q = -2,7 + \frac{6 \cdot 2,7^2}{2 \cdot 2,7} = 5,4 \text{ кН},$

$$M = 2,7 \cdot 2,7 - \frac{6 \cdot 2,7^3}{6 \cdot 2,7} = 0.$$

Эпюры Q и M показаны на рис. 5.10, б, в.

Для отыскания сечения, в котором $Q = 0$, нужно приравнять ее выражение нулю:

$$Q_{(z_0)} = -2,7 + \frac{6 \cdot z_0^2}{2 \cdot 2,7} = 0,$$

откуда $z_0 = 1,56 \text{ м}.$

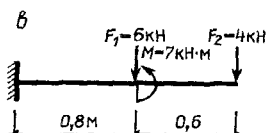
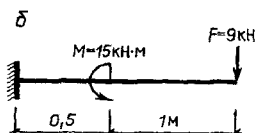
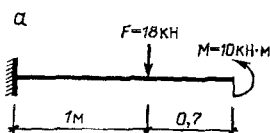
При $z = z_0 = 1,56 \text{ м}$ максимальный изгибающий момент на этом участке балки

$$M_{\max} = 2,7 \cdot 1,56 - \frac{6 \cdot 1,56^3}{6 \cdot 2,7} = 2,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из построенных эпюр внутренних сил следует, что $Q_{\max} = 5,4 \text{ кН}, M_{\max} = 26,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Задача 5.1

Для консольной балки построить эпюры Q и M .



Ответы:

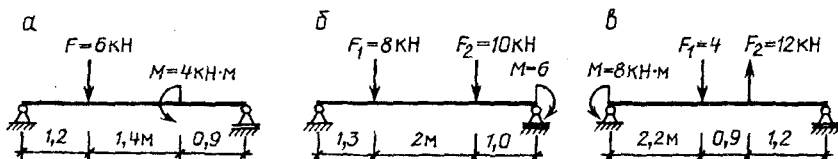
А. $Q_{\max} = 18 \text{ кН}$, $M_{\max} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Б. $Q_{\max} = 9 \text{ кН}$, $M_{\max} = 9 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

В. $Q_{\max} = 10 \text{ кН}$, $M_{\max} = 4,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Задача 5.2

Для двухопорной балки построить эпюры Q и M .



Ответы:

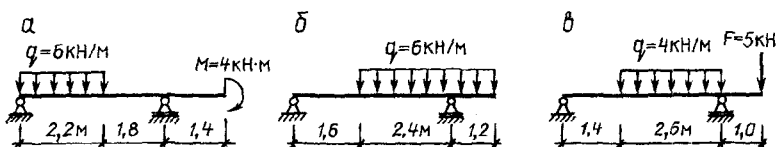
А. $Q_{\max} = 5,09 \text{ кН}$, $M_{\max} = 6,1 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Б. $Q_{\max} = 11,5 \text{ кН}$, $M_{\max} = 8,46 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

В. $Q_{\max} = 8,67 \text{ кН}$, $M_{\max} = 9,54 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Задача 5.3

Для двухопорной балки с консолью построить эпюры Q и M .



Ответы:

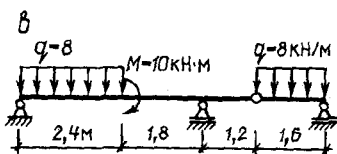
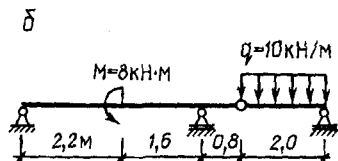
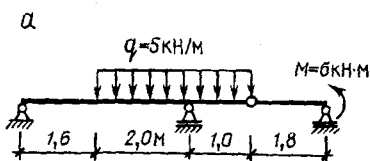
А. $Q_{\max} = 8,57 \text{ кН}$, $M_{\max} = 6,13 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Б. $Q_{\max} = 11,2 \text{ кН}$, $M_{\max} = 5,98 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

В. $Q_{\max} = 6,8 \text{ кН}$, $M_{\max} = 6,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Задача 5.4

Для двухпролетной балки с промежуточным шарниром построить эпюры Q и M .



Ответы:

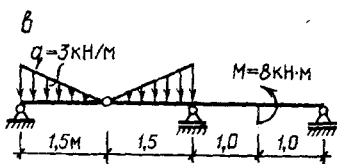
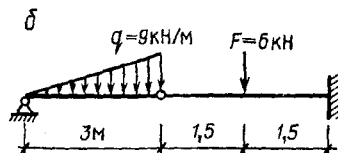
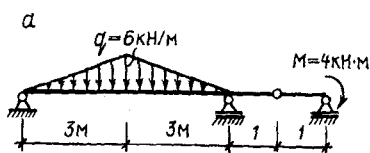
А. $Q_{\max} = 8,85 \text{ кН}$, $M_{\max} = 6,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Б. $Q_{\max} = 10,0 \text{ кН}$, $M_{\max} = 8,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

В. $Q_{\max} = 9,7 \text{ кН}$, $M_{\max} = 9,8 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Задача 5.5

Построить эпюры Q и M для составной балки, несущей распределенную и другую нагрузки.



Ответы:

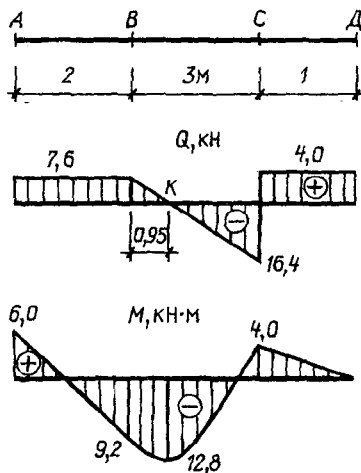
А. $Q_{\max} = 9,67 \text{ кН}$, $M_{\max} = 21,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Б. $Q_{\max} = 19,8 \text{ кН}$, $M_{\max} = 36,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

В. $Q_{\max} = 5,12 \text{ кН}$, $M_{\max} = 5,12 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Задача 5.6

По эпюрам Q и M установить вид нагрузки, ее значение и направление, а также вид опор балки.



Ответы:

Возможны четыре варианта опор.

В одном из вариантов:

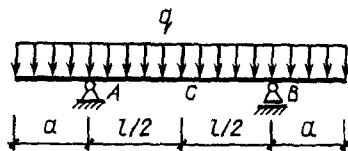
сечение $A - M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (против часовой стрелки),

участок $BC - q = 8 \text{ кН/м}$ (вниз),

сечение $D - F = 4 \text{ кН}$ (вниз).

Задача 5.7

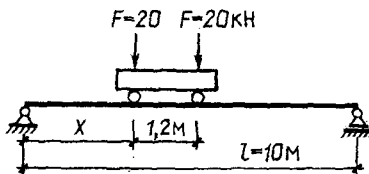
Для двухопорной балки с двумя консолями установить отношение l/a , при котором: 1) $M_C = 0$, 2) $M_A = M_B = -M_C$.



Ответы: 1) $l/a = 2$, 2) $l/a = 2\sqrt{2}$.

Задача 5.8

Двухосная тележка подъемного крана перемещается по двум подкрановым балкам. Найти положение тележки, при котором изгибающий момент в балке будет иметь наибольшее значение.



Ответы: $x = \frac{l}{2} - \frac{c}{4} = 4,7 \text{ м}, M_{\max} = 88,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

5.2. Напряжения при изгибе. Условия прочности

В общем случае нагружения балки в ее поперечном сечении возникают поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x – такой изгиб называется поперечным. В частном случае нагружения – только изгибающий момент M_x . Такой изгиб называется чистым.

При чистом изгибе принято считать, что поперечное сечение, плоское до деформации, остается плоским и после деформации (гипотеза плоских сечений). Предполагается, что отдельные волокна балки не давят друг на друга, но каждое из них претерпевает простое растяжение или сжатие.

При изгибе продольные волокна балки принимают криволинейное очертание. При этом они с выпуклой стороны удлиняются (растягиваются), а с вогнутой – укорачиваются (сжимаются) (см. рис. 5.4). Существует промежуточный слой волокон который не деформируется. Это нейтральный слой, совпадающий с центральной осью балки. В поперечном сечении он проходит через центр тяжести сечения, совпадает с главной центральной осью и называется нейтральной осью (Н.О.) или нулевой линией (Н.Л.). Нейтральная ось делит поперечное сечение балки на две части – растянутую и сжатую.

Поскольку волокна балки при чистом изгибе ($Q_y = 0, M_x \neq 0$) испытывают простое растяжение или сжатие, в них возникают нормальные напряжения σ , действующие перпендикулярно поперечному сечению (рис. 5.11, а).

Нормальные напряжения σ в любой точке поперечного сечения балки определяются по следующей формуле:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y, \quad (5.2)$$

где M_x – изгибающий момент в сечении балки,

I_x – момент инерции сечения относительно нейтральной оси,
 y – расстояние от рассматриваемой точки до нейтральной оси.

Напряжение σ зависит от величины y линейно. Поэтому эпюра нормальных напряжений – прямолинейна (рис. 5.11, в). Максимальные нормальные напряжения наблюдаются в точках наиболее удаленных от нейтральной оси.

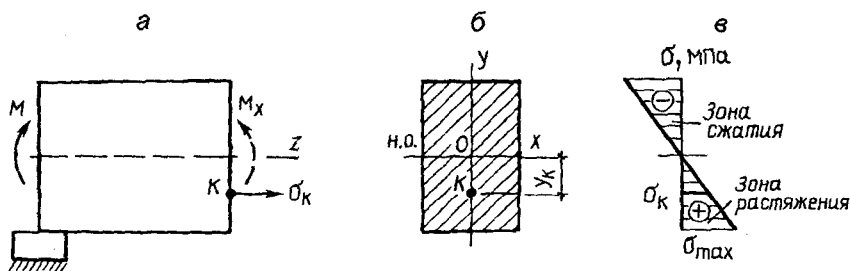


Рис. 5.11

Знак нормальных напряжений устанавливается по смыслу: « $+\sigma$ » – если точка расположена в растянутой зоне сечения и « $-\sigma$ » – если в сжатой. Характер деформации зоны сечения устанавливается по эпюре M_x .

При поперечном изгибе ($Q_y \neq 0$, $M_x \neq 0$) характер деформации волокон балки несколько изменяется: отдельные волокна сдвигаются относительно друг друга, отчего сечения слегка искривляются (y Н.О. больше, к краю сечения меньше), т.е. гипотеза плоских сечений нарушается.

Поскольку влияние указанных изменений на величину нормальных напряжений невелико, формула (5.2), полученная для случая чистого изгиба, используется и при поперечном.

Так как при поперечном изгибе волокна балки претерпевают сдвиг, в сечении ее возникают касательные напряжения τ , которые лежат в плоскости сечения (рис. 5.12, а) и в любой точке ее определяются по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b}, \quad (5.3)$$

где Q_y – поперечная сила в сечении балки,

S_x – статический момент части площади сечения, расположенной выше или ниже рассматриваемого слоя, относительно нейтральной оси,

b – ширина сечения на уровне точки, в которой определяются напряжения,

I_x – момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси.

Для произвольной точки K , расположенной на расстоянии y_K от нейтральной оси, статический момент равен $S_x = A' \cdot m'$ или $S_x = A'' \cdot m''$.

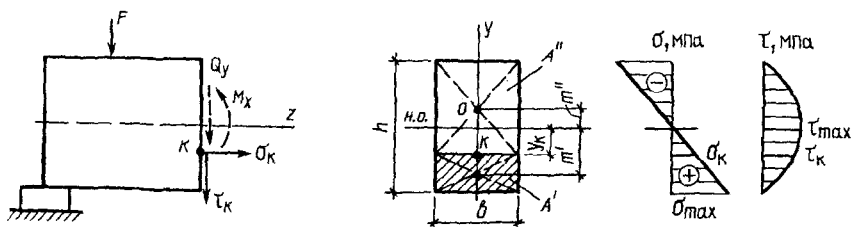


Рис. 5.12

Считается, что касательные напряжения τ распределяются по ширине сечения b равномерно. По высоте сечения h τ изменяются по закону параболы (рис. 5.12, в). Наибольшее касательное напряжение имеет место на нейтральной оси, проходящей через центр тяжести сечения. В крайних точках сечения $\tau = 0$, т.к. для этих точек $S_x = 0$.

Следует обратить внимание, что напряжение τ достигает максимума в тех точках сечения, где напряжение $\sigma = 0$, а напряжение σ достигает максимума в тех точках, где $\tau = 0$ (рис. 5.12).

Из теории курса известно, что материал балки в различных точках по высоте сечения находится в разных напряженных состояниях.

В крайних точках поперечного сечения $\tau = 0$, $\sigma = \sigma_{\max}$. Материал балки здесь находится в условиях линейного напряженного состояния (рис. 5.13, з) и условие прочности используется в виде: $\sigma_{\max} \leq R$.

На нейтральной оси поперечного сечения $\sigma = 0$, $\tau = \tau_{\min}$ – здесь чистый сдвиг (частный случай плоского напряженного состояния) и условие прочности используется в виде $\tau_{\max} \leq R_s$.

Во всех остальных точках поперечного сечения изгибаемого стержня, где $\sigma \neq 0$ и $\tau \neq 0$, имеет место общий случай плоского напряженного состояния (рис. 5.13, б) и проверку прочности следует вести по теориям прочности.

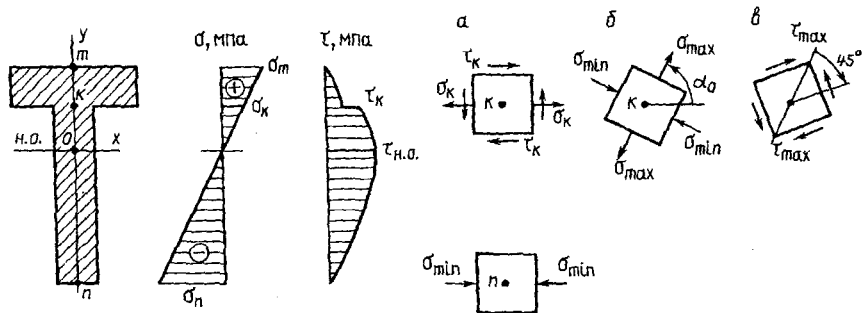


Рис. 5.13

Для большинства форм поперечного сечения балок проверка прочности проводится отдельно по нормальным σ и отдельно по касательным τ напряжениям.

Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x, \max}}{I_x} \cdot y_{\max} \leq R, \quad (5.4)$$

где $M_{x, \max}$ – максимальный изгибающий момент в балке,

I_x – момент инерции сечения относительно нейтральной оси,

y_{\max} – ордината точки сечения наиболее удаленной от нейтральной оси,

R – расчетное сопротивление материала балки растяжению (сжатию).

Для балок, поперечные сечения которых симметричны относительно нейтральной оси, условие прочности по нормальным напряжениям целесообразно использовать в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x, \max}}{W_x} \leq R, \quad (5.5)$$

где $W_{x, \max}$ – момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси.

Момент сопротивления сечения W_x характеризует сопротивляемость балки изгибу в зависимости от формы и размеров поперечного сечения.

Для прямоугольного сечения $W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$, для круглого $W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$.

Для прокатных профилей (двутавр, швеллер) значения W приведены в таблицах сортамента.

Отклонение максимального нормального напряжения от расчетного сопротивления не должно превышать $\pm 5\%$. При подборе сечений балок из прокатных профилей допускаются и более значительные отклонения в сторону уменьшения σ_{\max} .

Проверку прочности балок, изготовленных из хрупкого материала, ведут по растягивающим напряжениям, т.к. расчетное сопротивление растяжению меньше, чем сжатию ($R < R_s$). Однако следует проверять и сжимающие напряжения.

Условие прочности по касательным напряжениям имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y,\max} \cdot S_{x,\max}}{I_{x,\max} \cdot b} \leq R_s, \quad (5.6)$$

где $Q_{y,\max}$ – максимальная поперечная сила в балке;

$S_{x,\max}$ – статический момент относительно нейтральной оси части площади сечения, расположенной от нейтральной оси до края сечения;

b – ширина сечения у нейтрального слоя;

I_x – момент инерции сечения относительно нейтральной оси;

R_s – расчетное сопротивление материала балки сдвигу.

Касательные напряжения во всех точках прямоугольного поперечного сечения параллельны силе Q_y . В некоторых других формах сечения (круг, двутавр, швеллер) по контуру сечения и в крайних точках его направление τ несколько изменяется.

Поскольку максимальные касательные напряжения (по которым ведется проверка прочности) расположены на нейтральной оси, где τ параллельны Q , формула (5.6) применима практически для всех типов сечений.

Для отдельных форм сечения балок (двутавр, швеллер, тавр) и в отдельных случаях нагружения (короткая балка, большая нагрузка вблизи опор) возникает необходимость проверить прочность не в крайних точках сечения и не на нейтральной оси, а в некоторой промежуточной, например «К», где одновременно действуют и нормальные σ и касательные τ напряжения (см. рис. 5.13), т.е. произвести полную проверку прочности.

По граням прямоугольного элемента, выделенного вокруг т. K , действует система напряжений: по поперечным сечениям σ и τ , по продольным – только τ (по закону парности касательных напряжений) (см. рис. 5.13, *a*).

При некотором положении прямоугольного элемента (под углом α_0 к нейтральной оси) по его граням касательные напряжения станут равными нулю ($\tau = 0$), а нормальные σ достигнут экстремальных (максимальных или минимальных) значений (см. рис. 5.13, *b*), которые называются главными напряжениями и определяются по формуле

$$\sigma_{\frac{\min}{\max}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}, \quad (5.7)$$

где σ и τ – напряжения в поперечном сечении, определяемые по формулам (5.2) и (5.3).

Положение главных площадок (направление главных напряжений) определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau}{\sigma}, \quad (5.8)$$

где угол α_0 отсчитывается от направления нейтральной оси. Положительные значения – по ходу часовой стрелки.

Главные напряжения обозначаются буквой σ с индексами 1, 2 и 3. Причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

По площадкам, образующим с главными угол 45° (см. рис. 5.13, *в*) действуют максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}. \quad (5.9)$$

Для полной проверки прочности балки сначала по эпюрам Q_x и M_x находится сечение, в котором оба их значения одновременно наибольшие. Это будет опасное сечение. Далее по высоте сечения выбирается точка, в которой одновременно значения σ и τ также наибольшие. Это будет опасная точка сечения. Для прямоугольного сечения эта точка не явна. Для сечений типа двутавр, швеллер, тавр опасная точка – точка сопряжения стенки с полкой.

Полная проверка прочности балки проводится по гипотезам прочности.

Для пластического материала по четвертой (энергетической) теории условие прочности имеет вид, выраженный:

– через нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_{\text{des}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq R, \quad (5.10)$$

– через главные напряжения

$$\sigma_{\text{des}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq R, \quad (5.11)$$

где σ_{des} – приведенное напряжение,

$\sigma_{1,2,3}$ – главные напряжения,

σ, τ – напряжение в проверяемой точке сечения.

Рациональной формой сечения балки будет та, при которой обеспечена прочность при малом весе. В большинстве случаев потеря прочности связана с нормальными напряжениями. Исходя из эпюры σ (см. рис. 5.12, 5.13) видно, что материал у нейтральной оси напряжен слабо. Поэтому часть материала можно «перенести» от нейтральной оси к краям сечения, где напряжения большие и где он (материал) будет использоваться полнее. Чем дальше от нейтральной оси расположены частицы сечения, тем больше будет момент сопротивления W_x .

Экономичность поперечного сечения балки можно оценить отношением $w_x = \frac{W_x}{\sqrt{A^3}}$: чем больше это отношение, тем экономичнее сечение.

Для пластичных материалов (сталь) рациональной является форма двутавра.

Для хрупких материалов (чугун), у которых сопротивление сжатию больше, чем растяжению, рациональным является такой тип сечения, у которого нейтральная ось сдвинута в сторону растянутых волокон. Это тавровое сечение.

Практика показала, что в большинстве случаев расчет балок на прочность ведется по нормальным напряжениям для крайних точек сечения по условию

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x,\max}}{W_x} \leq R.$$

По этому условию можно решить три типа задач:

- проверить прочность (σ_{\max}) при заданной форме и размерах сечения;
- подобрать размеры поперечного сечения (через W_x) при принятой форме сечения;
- определить наибольшую допустимую нагрузку (через $M_{x,\max}$) при известной форме и размерах поперечного сечения.

Примеры и задачи по расчету на прочность

Пример 5.6

Определить значения нормальных и касательных напряжений в точке K деревянной балки. Проверить прочность балки по этим напряжениям и построить эпюры.

Расчетные сопротивления материала балки: $R = 15$ МПа, $R_s = 2$ МПа.

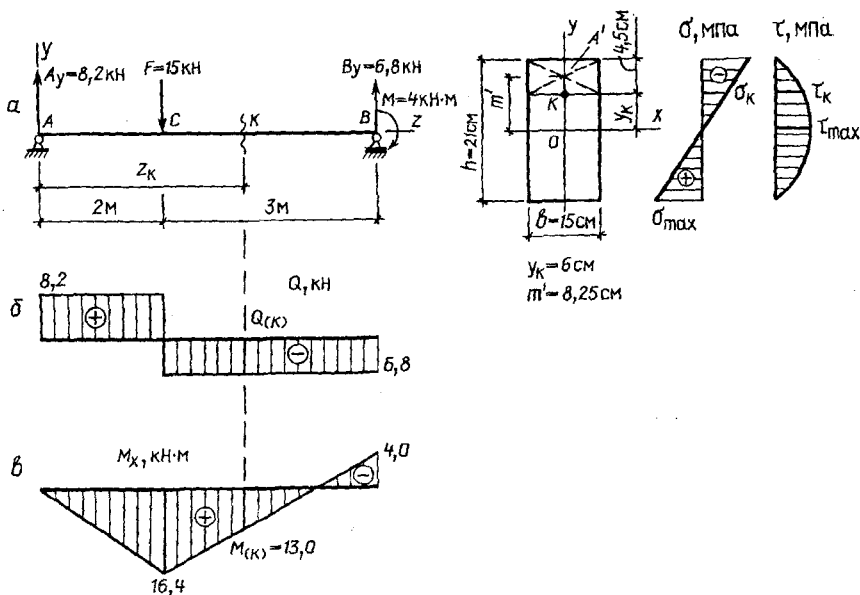


Рис. 5.14

Решение

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = -B_y \cdot 5 + 15 \cdot 2 + 4 = 0, \quad B_y = 6,8 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = A_y \cdot 5 - 15 \cdot 3 + 4 = 0, \quad A_y = 8,2 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 8,2 - 15 + 6,8 = 0 \text{ (проверка)}.$$

Вычислим значения Q и M для характерных сечений балки и построим их эпюры (см. рис. 5.14, б и в).

Сечение A $Q = A_y = 8,2 \text{ кН}, \quad M = 0.$

Сечение C $Q^I = A_y = 8,2 \text{ кН}, \quad M = A_y \cdot 2 = 8,2 \cdot 2 = 16,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

$$Q^{II} = A_y - F = 8,2 - 15 = -6,8 \text{ кН}.$$

Сечение B $Q = -B_y = -6,8 \text{ кН}, \quad M = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Приступаем к определению напряжений в точке K . В сечении балки, где расположена т. K :

$$Q = 6,8 \text{ кН}, \quad M = 8,2 \cdot 2,5 - 15 \cdot (2,5 - 2) = 13 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для определения нормального напряжения воспользуемся формулой (5.2).

По модулю:

$$\sigma_K = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_K = \frac{13 \cdot 10^3}{11576 \cdot 10^{-8}} \cdot 6 \cdot 10^{-2} = 0,00674 \cdot 10^9 \text{ Па} = 6,74 \text{ МПа}.$$

Для прямоугольного сечения балки момент инерции относительно нейтральной оси:

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{15 \cdot 21^3}{12} = 11576 \text{ см}^4.$$

Для установления знака вычисленного напряжения нужно обратиться к эпюре M_x . В сечении, где расположена точка K , ординаты эпюры лежат снизу от оси эпюры. Это значит, что волокна балки, лежащие ниже продольной оси, растянуты, а выше – сжатые. Так как точка K расположена в сжатой зоне сечения балки, напряжению в ней присваивается знак «минус» ($\sigma_K = -6,74 \text{ МПа}$).

Значение касательного напряжения в заданной точке вычислим по формуле (5.3):

$$\tau_k = \frac{Q_y \cdot S_x^K}{I_x \cdot b} = \frac{6,8 \cdot 10^3 \cdot 557 \cdot 10^{-6}}{11576 \cdot 10^{-8} \cdot 15 \cdot 10^{-2}} = 0,218 \text{ МПа}.$$

Статический момент части площади сечения, расположенной выше точки K : $S_X^K = A' \cdot m' = 15 \cdot 4,5 \cdot (6 + 11,5/2) = 557 \text{ см}^3$. Касательному напряжению присваивается знак поперечной силы ($\tau_K = -0,218 \text{ МПа}$).

Проверка прочности производится по максимальным значениям Q_Y и M_X . В данном примере $Q_{Y,\max} = 8,2 \text{ кН}$, $M_{X,\max} = 16,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Заметим, что оба значения внутренних сил относятся к одному и тому же сечению. В иных случаях они могут быть в разных сечениях балки.

Проверку прочности по нормальным напряжениям проведем по формуле (5.4):

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_{X,\max}}{J_X} \cdot y_{\max} = \frac{16,4 \cdot 10^3}{11576 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{21}{2} \cdot 10^{-2} = \\ &= 0,0149 \cdot 10^9 \text{ Па} = 14,9 \text{ МПа} < R.\end{aligned}$$

Эти напряжения имеют место в крайних точках сечения. На нейтральной оси, где $y = 0$, $\sigma = 0$.

Проверку прочности по касательным напряжениям проведем по формуле (5.6):

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{Q_{X,\max} \cdot S_{X,\max}}{b \cdot J_X} = \frac{8,2 \cdot 10^3 \cdot 827 \cdot 10^{-6}}{15 \cdot 10^{-2} \cdot 11576 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 0,0391 \cdot 10^7 \text{ Па} = 0,39 \text{ МПа} < R_S.\end{aligned}$$

Статический момент на уровне нейтральной оси

$$S_{X,\max} = \frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{h}{4} = \frac{21}{2} \cdot 1,5 \cdot \frac{21}{4} = 827 \text{ см}^3.$$

Максимальные касательные напряжения имеют место на нейтральной оси сечения балки. В крайних точках сечения, где $S_X = 0$, $\tau = 0$.

Таким образом, условия прочности балки по нормальным и касательным напряжениям выполняются.

Закономерность распределения нормальных и касательных напряжений по высоте сечения, т.е. их эпюры, показана на рис. 5.14, з.

Пример 5.7

Подобрать размеры нижеобозначенных форм сечений балки и сопоставить коэффициенты экономичности их. Принять для прямоугольного сечения $h/b = 1,4$.

Расчетные сопротивления материала балки: $R = 210$ МПа, $R_s = 130$ МПа (рис. 5.15).

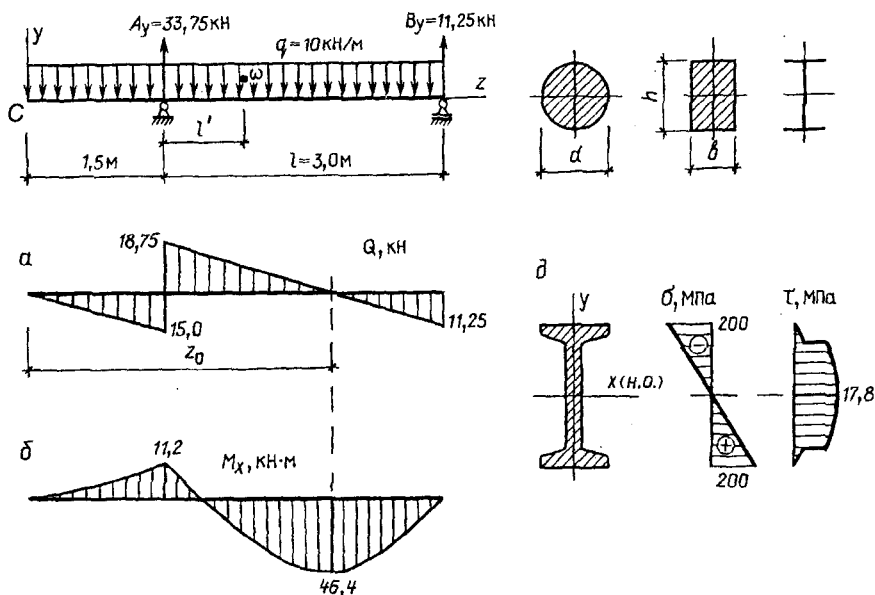


Рис. 5.15

Решение

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = -B_Y \cdot l + q \cdot l' = -B_Y \cdot 3 + 10(3 + 1,5) \left[\left(\frac{3 + 1,5}{2} \right) - 1,5 \right] = 0,$$

$$B_Y = 11,25 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = A_Y \cdot 3 - 10 \cdot 4,5 \cdot \frac{4,5}{2} = 0, \quad A = 33,75 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 33,75 - 10 \cdot 4,5 + 11,25 = 0 \quad \text{реакции определены верно.}$$

Вычислим значения Q и M в характерных сечениях балки и построим их эпюры (рис. 5.15, а, б).

Сечение C $Q = 0, \quad M = 0.$

Сечение A $Q^{\text{II}} = -10 \cdot 1,5 = -15 \text{ кН},$
 $Q^{\text{I}} = -10 \cdot 1,5 + 33,75 = 18,75 \text{ кН},$
 $M = -10 \cdot 1,5 \cdot 1,5/2 = -11,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Сечение B $Q^{\text{I}} = 33,75 - 10 \cdot 4,5 = -11,25 \text{ кН}, \quad M = 0.$

Абсцисса z_0 , где $Q = 0$, будет равна

$$z_0 = 1,5 + \frac{Q_A^{\text{II}}}{q} = 1,5 + \frac{18,75}{10} = 3,375 \text{ м}.$$

При $z = 3,375 \text{ м}$ $M_{\text{max}} = -10 \cdot 3,375^2/2 + 33,75(3,375 - 1,5) = 46,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Подбор сечений ведется по формуле (5.5), исходя из $M_{X,\text{max}} = 46,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Требуемый момент сопротивления

$$W_X \geq \frac{M_{X,\text{max}}}{R} = \frac{46,4 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,221 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 221 \text{ см}^3.$$

Для круглого поперечного сечения

$$W_X = \frac{\pi d^3}{32} = 221 \text{ см}^3,$$

откуда $d = \sqrt[3]{\frac{221 \cdot 32}{3,14}} = 13,1 \text{ см},$ принимаем $d = 13 \text{ см}.$

Для прямоугольного сечения

$$W_X = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(1,46)^2}{6} = 221 \text{ см}^3,$$

откуда $b = 8,77 \text{ см}, \quad h = 12,6 \text{ см}.$

Конструктивно принимаем $h = 13 \text{ см}, \quad b = 9 \text{ см}.$

Для прокатного двутавра из сортамента по $W_X = 221 \text{ см}^3$ принимаем № 22 с $W_X = 232 \text{ см}^3.$

Вычислим коэффициенты экономичности для принятых размеров сечений балки по выражению $\omega = \frac{W_X}{\sqrt{A^3}}$.

Для круглого сечения

$$W_X = \frac{3,14 \cdot 13^3}{32} = 216 \text{ см}^3, \quad A = \frac{3,14 \cdot 13^2}{4} = 132,7 \text{ см}^2, \quad \omega = 0,141.$$

Для прямоугольного сечения

$$W_X = \frac{9 \cdot 13^2}{6} = 253,4 \text{ см}^3, \quad A = 9 \cdot 13 = 117 \text{ см}^2, \quad \omega = 0,200.$$

Для двутавра $W_X = 232 \text{ см}^3, A = 30,6 \text{ см}^2, \omega = 1,37$.

Из рассмотренных форм сечений балки наиболее экономичным является двутавр.

Вычислим максимальные значения нормальных и касательных напряжений для принятых размеров сечений балки.

Нормальные напряжения (максимальны в крайних точках сечений):
а) круглое сечение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{X,\max}}{W_X} = \frac{46,4 \cdot 10^3}{216 \cdot 10^{-6}} = 215 \text{ МПа} > R = 210 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение составляет $\frac{215 - 210}{210} \cdot 100 = 2,38\%$, что допустимо;

б) прямоугольное сечение

$$\sigma_{\max} = \frac{46,4 \cdot 10^3}{253,4 \cdot 10^{-6}} = 183 \text{ МПа} < R;$$

в) для двутавра

$$\sigma_{\max} = \frac{46,4 \cdot 10^3}{232 \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ МПа} < R.$$

Касательные напряжения (максимальны на уровне нейтральной оси):
 а) круглое сечение

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{Q_{Y,\max} \cdot S_{X,\max}}{b \cdot J_X} = \frac{Q_{Y,\max} \cdot 64}{d \cdot \pi d^4} \cdot \frac{\pi d^2 \cdot 0,212 d}{8} = \\ &= \frac{18,75 \cdot 10^3 \cdot 64}{13 \cdot 10^{-2} \cdot 3,14 \cdot 13^4} \cdot \frac{3,14 \cdot 13^2 \cdot 10^{-4}}{10^{-8} \cdot 8} \cdot 0,212 \cdot 13 \cdot 10^{-2} = \\ &= 0,188 \cdot 10^7 \text{ Па} = 1,88 \text{ МПа} < R_S.\end{aligned}$$

Напомним, что для круглого сечения $S_{X,\max} = A' \cdot m'$, где половина площади сечения $A' = \frac{\pi d^2}{8}$, а расстояние от центра тяжести до ее нейтральной оси $m' = 0,212 d$;
 б) прямоугольное сечение

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{Q_{Y,\max} \cdot 12}{b \cdot b \cdot h^3} \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{18,75 \cdot 10^3 \cdot 12}{9 \cdot 10^{-2} \cdot 9 \cdot 10^{-2} \cdot 13^3 \cdot 10^{-6}} \cdot 9 \cdot 10^{-2} \times \\ &\times \frac{13 \cdot 10^{-2}}{2} \cdot \frac{13 \cdot 10^{-2}}{4} = 0,240 \cdot 10^7 \text{ Па} = 2,40 \text{ МПа} < R_S;\end{aligned}$$

в) для двутавра № 22 $J_X = 2550 \text{ см}^3$, $S_{X,\max} = 131 \text{ см}^3$, $d = 5,4 \text{ мм}$
 (толщина стенки)

$$\tau_{\max} = \frac{18,75 \cdot 10^3 \cdot 131 \cdot 10^{-6}}{5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 0,178 \cdot 10^8 \text{ Па} = 17,8 \text{ МПа} < R_S.$$

По полученным значениям σ и τ построены соответствующие эпюры (см. рис. 5.15, в, з, д), принимая во внимание, что на нейтральной оси сечения $\sigma = 0$, а в крайних точках сечения $\tau = 0$.

Примечание. Проанализировав значения τ_{\max} для рассмотренных форм сечений (а это наиболее распространенные), заметим – если размеры сечений определены из условия прочности по нормальным напряжениям, то максимальные касательные напряжения далеко не достигают предельно допустимых значений.

Пример 5.8

Расположив сечение чугуновой балки рационально по отношению к нагрузке, определить наибольшее допустимое значение ее, если расчетное сопротивление на растяжение $R_t = 50$ МПа, а на сжатие $R_c = 140$ МПа. Построить эпюры σ и τ .

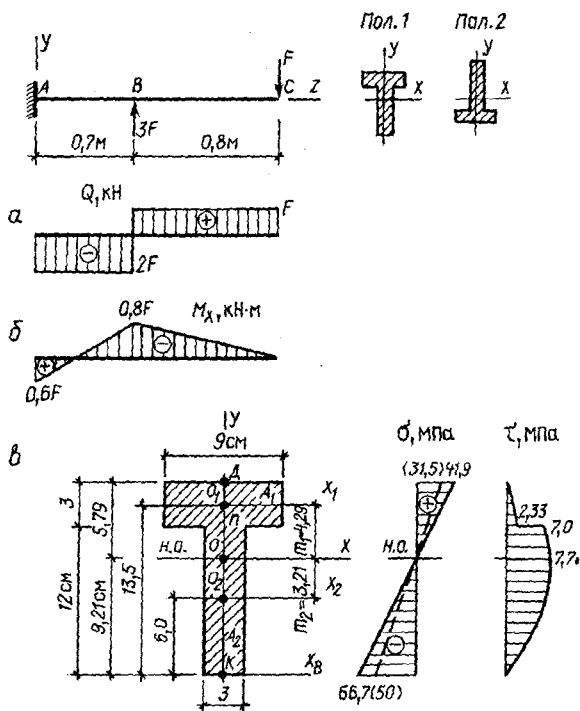


Рис. 5.16

Решение

Для вычисления значений Q и M будем намечать сечения, начиная с правого (свободного) конца балки (ход справа). При этом не требуется определять реакции в опоре балки. Составим выражения $Q = f(F)$, $M = f(F)$.

Сечение С $Q = F$, $M = 0$.

Сечение В $Q^I = F$, $Q^II = F - 3F = -2F$, $M = -0,8F$.

Сечение А $Q = F - 3F = -2F$, $M = -1,5F + 3F \cdot 0,7 = 0,6F$.

Определим геометрические характеристики сечения балки. Разделим сложное сечение на два прямоугольника.

Положение центра тяжести сечения

$$y_0 = \frac{\sum S_{XB}}{\sum A} = \frac{9 \cdot 3 \cdot 13,5 + 12 \cdot 3 \cdot 6}{9 \cdot 3 + 12 \cdot 3} = 9,21 \text{ см.}$$

Осейвой момент инерции

$$J_X = \sum (J_{X_i} + A_i m_i^2) = \frac{9 \cdot 3^3}{12} + 9 \cdot 3 \cdot 4,29^2 + \frac{3 \cdot 12^3}{12} + 3 \cdot 12 \cdot 3,21^2 = 1320 \text{ см}^4.$$

Статический момент на уровне нейтральной оси (центральной оси X_0) $S_{X(0)} = 3 \cdot 9,21 \cdot 9,21/2 = 127 \text{ см}^3$, на уровне соединения стенки с полкой $S_{X(n)} = 9 \cdot 3 \cdot 4,29 = 116 \text{ см}^3$.

Наибольшую допустимую нагрузку на балку определим из условия прочности по нормальным напряжениям (5.4), учитывая разные значения расчетного сопротивления.

Опасным является сечение B , где $M_{X,\max} = 0,8 F$. В этом сечении верхние от нейтральной оси волокна растянуты (т.к. ординаты эпюры M лежат сверху), а нижние – сжаты.

Для установления рационального положения сечения балки по отношению к нагрузке проведем следующие рассуждения. Наиболее напряженной в сечении является точка K , как наиболее удаленная от нейтральной оси. Поскольку хрупкий материал балки лучше работает на сжатие, чем на растяжение, сечение нужно расположить так, чтобы в точке K были сжимающие напряжения – это положение 1.

Рассматриваем принятое положение сечения (полкой вверх).

Из формулы (5.2) наибольший изгибающий момент по растягивающим напряжениям

$$M_{X,\max} \leq \frac{R_t \cdot J_X}{y_D} = \frac{50 \cdot 10^6 \cdot 1320 \cdot 10^{-8}}{5,79 \cdot 10^{-2}} = 11399 \text{ Н} \cdot \text{м} = 11,4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

по сжимающим напряжениям

$$M_{X,\max} \leq \frac{R_s \cdot J_X}{y_K} = \frac{140 \cdot 10^6 \cdot 1320 \cdot 10^{-8}}{9,21 \cdot 10^{-2}} = 20,1 \text{ кН}.$$

Чтобы обеспечить выполнение условий прочности по растягивающим и сжимающим напряжениям в качестве наибольшего допустимого, следует принять меньшее значение изгибающего момента $M_X = 11,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Наибольшую допустимую нагрузку на балку определим из равенства $0,8 F = 11,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$, откуда $F = 14,25 \text{ кН}$.

Внимание! Следует проверить прочность по нормальным напряжениям в сечении А, при принятом положении сечения балки и значении нагрузки $F = 14,25 \text{ кН}$.

В сечении А $M_X = 0,6 F = 0,6 \cdot 14,25 = 8,35 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

В точке D (сжатие)

$$\sigma_D = \frac{M_X}{J_X} y_D = \frac{8,35 \cdot 10^3}{1320 \cdot 10^{-8}} \cdot 5,79 \cdot 10^{-2} = 36,6 \text{ МПа} < R_C = 140 \text{ МПа}.$$

В точке К (растяжение)

$$\sigma_K = \frac{8,35 \cdot 10^3}{1320 \cdot 10^{-8}} \cdot 9,21 \cdot 10^{-2} = 58,3 \text{ МПа} > R_T = 50 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по растягивающим напряжениям не выполняется. Значит, значение нагрузки F следует скорректировать (уменьшить).

Из условия прочности по растягивающим напряжениям (как наиболее опасным)

$$M_{X,\max} \leq \frac{R_T \cdot J_X}{y_K} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 1320 \cdot 10^{-8}}{9,21 \cdot 10^{-2}} = 7,17 \text{ кН}\cdot\text{м}, \text{ но } M_X = 0,6 F,$$

откуда $F = 11,95 \text{ кН}$.

Окончательно принимаем $F_{\text{adm}} = 11,95 \text{ кН}$.

Вычислим значения σ и τ необходимые для построения эпюр напряжений. Для касательных напряжений опасным является сечение А, где $Q_Y = 2 F = 2 \cdot 11,95 = 23,9 \text{ кН}$, для нормальных – сечение В, где $M_X = 0,8 \cdot 11,95 = 9,56 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Нормальные напряжения в характерных точках сечения

$$\sigma_K = \frac{9,56 \cdot 10^3}{1320 \cdot 10^{-8}} \cdot 9,21 \cdot 10^{-2} = 0,0667 \cdot 10^9 \text{ Па} = 66,7 \text{ МПа (сжатие)},$$

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_D = \frac{9,56 \cdot 10^3}{1320 \cdot 10^{-8}} \cdot 5,79 \cdot 10^{-2} = 41,9 \text{ МПа (растяжение)}.$$

Касательные напряжения в характерных точках сечения (по формуле (5.3))

$$\tau_K = 0 \text{ (т.к. } S_K = 0 \text{)}.$$

$$\tau_0 = \frac{Q \cdot S_{K(0)}}{b \cdot J_X} = \frac{23,9 \cdot 10^3 \cdot 127 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-2} \cdot 1320 \cdot 10^{-8}} = 0,776 \cdot 10^7 \text{ Па} = 7,76 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{II} = \frac{23,9 \cdot 10^3 \cdot 116 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-2} \cdot 1320 \cdot 10^{-8}} = 7,0 \text{ МПа}.$$

$$\tau'_{II} = \frac{23,9 \cdot 10^3 \cdot 116 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-2} \cdot 1320 \cdot 10^{-8}} = 2,33 \text{ МПа}.$$

$$\tau_D = 0 \text{ (т.к. } S_D = 0 \text{)}.$$

Заметим, что в точке II ширина сечения изменяется скачкообразно. Вследствие этого, также скачкообразно изменяется значение τ (на эпюре скачек).

Эпюры σ и τ приведены на рис. 5.16, з.

На эпюре σ пунктиром показаны напряжения в сечении А.

Примечание. Расположив сечение балки полкой вниз (положение 2) и проделав аналогичные вычисления, получим меньшее значение допустимой нагрузки – $F = 9,5$ кН.

Пример 5.9

Определить главные напряжения в указанных точках балки и установить вид напряженного состояния. Сечение балки – двутавр № 16 (рис. 5.17)

Решение

Выписка из таблицы сортамента. Для I № 16 $W_X = 109 \text{ см}^3$, $J_X = 873 \text{ см}^4$, $S_X = 62,3 \text{ см}^3$, $d = 5 \text{ мм}$.

Вследствие симметрии нагрузки опорные реакции $A_Y = B_Y = F = 20 \text{ кН}$. Эпюры Q и M показаны на рисунках а, б.

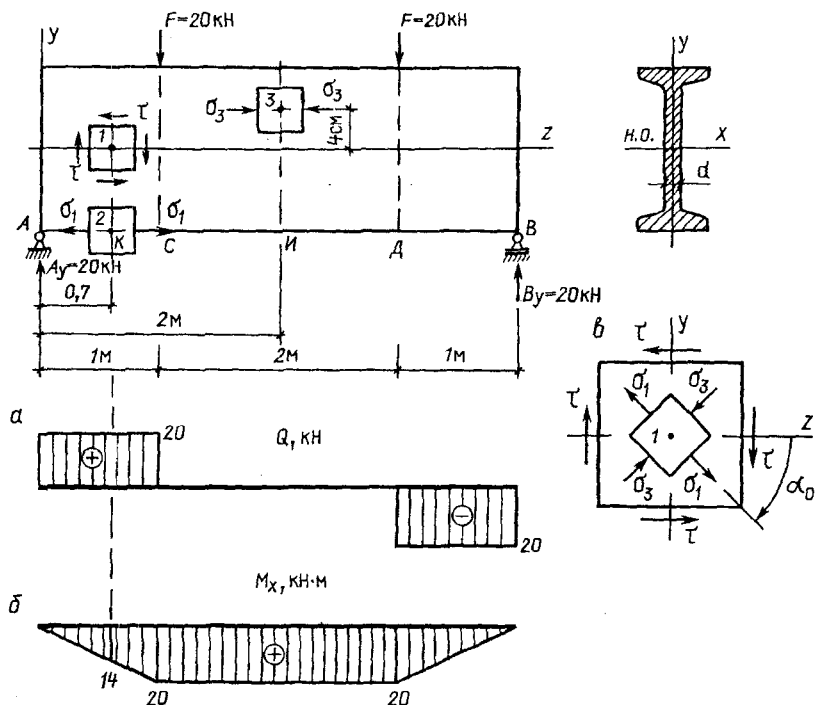


Рис. 5.17

Заметим, что на участке CD балка подвергается чистому изгибу, так как на этом участке $Q = 0$.

В исследуемом сечении K $Q = 20$ кН, $M = 20 \cdot 0,7 = 14$ кН·м.

Для определения главных напряжений необходимо вычислить значения нормальных и касательных напряжений в исследуемых точках сечения по формулам (5.2) и (5.3), а непосредственно главные напряжения – по формуле (5.7).

В точке 1.

$$\sigma = 0, \quad \tau = \frac{Q \cdot S_{X(0)}}{b \cdot J_X} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 62,3 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 28,5 \text{ МПа.}$$

Экстремальные напряжения

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2} = \pm \tau,$$

$$\sigma_{\max} = \tau = 28,5 \text{ МПа}, \sigma_{\min} = -28,5 \text{ МПа}.$$

Главные напряжения $\sigma_1 = 28,5 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -28,5 \text{ МПа}$.

В точке 1 балки имеет место плоское напряженное состояние, так как действуют два главных напряжения (σ_1 и σ_3).

Направление главных напряжений

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{2 \cdot 28,5}{0} = \infty, \quad 2\alpha_0 = 90^\circ, \quad \alpha_0 = 45^\circ.$$

Угол α_0 отсчитывается от нейтральной оси сечения. Положительное значение – по ходу часовой стрелки.

В точке 2.

$$\sigma = \frac{M_X}{W_X} = \frac{14 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} = 0,128 \cdot 10^9 \text{ Па} = 128 \text{ МПа}, \quad \tau = 0.$$

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{128}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{128^2} = 64 \pm 64, \quad \sigma_{\max} = 128 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\min} = 0.$$

$\sigma_1 = 128 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$ – здесь линейное напряженное состояние, так как действует только одно главное напряжение.

В сечении II балки $Q = 0$, $M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

В точке 3.

$$\sigma = \frac{M_X}{J_X} y = \frac{20 \cdot 10^3}{873 \cdot 10^{-8}} \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 91,6 \text{ МПа (сжатие)}, \quad \tau = 0.$$

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = -45,8 \pm 45,8; \quad \sigma_{\min} = -91,6 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\max} = 0.$$

Главные напряжения $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -91,6 \text{ МПа}$ – здесь линейное напряженное состояние.

Замечание. Если на участке CD балки $Q \neq 0$ (что чаще имеет место), то на уровне точки 3 – плоское напряженное состояние.

Пример 5.10

Провести полную проверку прочности балки, состоящую из двух швеллеров № 22, если $R = 210$ МПа, $R_S = 130$ МПа (рис. 5.18).

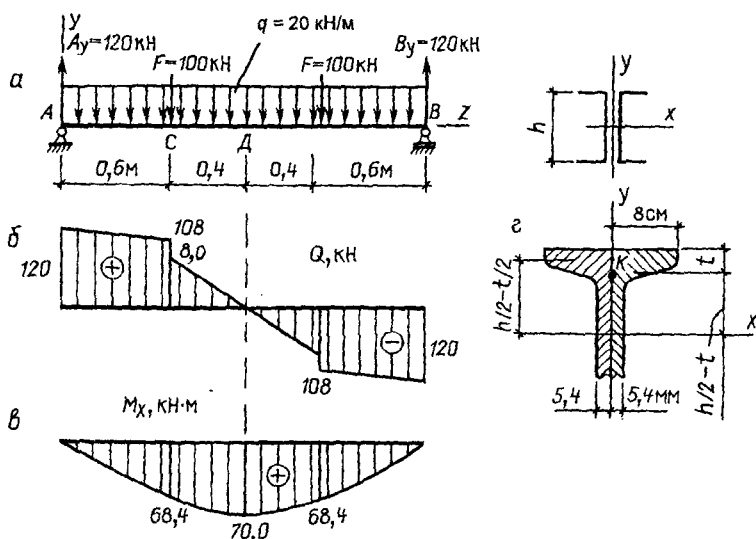


Рис. 5.18

Решение

Выписка из таблицы сортамента, для швеллера № 22:

$h = 220$ мм, $b = 82$ мм, $d = 5,4$ мм, $t = 9,5$ мм,

$J_x = 2110$ см⁴, $W_x = 192$ см³, $S_x = 110$ см³.

Вследствие симметрии нагрузки опорные реакции $A_y = B_y = 120$ кН.

Значения Q и M в характерных сечениях.

В сечении А $Q = 120$ кН, $M = 0$.

В сечении С $Q^I = 120 + 20 \cdot 0,6 = 108$ кН,

$Q^II = 120 - 100 - 20 \cdot 0,6 = 8$ кН.

$M = 120 \cdot 0,6 - 20 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = 68,4$ кН·м.

В сечении D $Q = 0$, $M = 70$ кН·м.

В других сечениях определите Q и M самостоятельно.

Эпюры Q и M показаны на рис. 5.18, б и в.

Проверка прочности балки по нормальным напряжениям производится для сечения D, где M_x максимален:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{X,\max}}{W_X} = \frac{70 \cdot 10^3}{2 \cdot 192 \cdot 10^{-6}} = 182 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Проверка прочности по касательным напряжениям производится для A , где Q_Y максимально:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{Y,\max} \cdot S_X}{b \cdot J_X} = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 110 \cdot 10^6 \cdot 2}{(5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 2110 \cdot 10^{-8}) \cdot 2} = 57,9 \text{ МПа} < R_S.$$

Условия прочности балки по σ и τ выполняются.

Полная проверка прочности производится в сечении балки, где Q и M одновременно возможно большие. В рассматриваемом примере опасное сечение – сечение C , где $Q = 108 \text{ кН}$, $M = 68,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Опасной точкой, где проводится полная проверка прочности, для сечений типа двутавр, швеллер является точка сопряжения полки со стенкой (точка K). В этой точке самое неблагоприятное сочетание напряжений σ и τ .

Примечание. При вычислении статического момента на уровне точки K полку швеллера можно рассматривать как прямоугольник (без учета закруглений и скоса):

$$S_{X(K)} = 2 \left[8,2 \cdot 0,95 \cdot \left(\frac{22}{2} - \frac{0,95}{2} \right) \right] = 169,1 \text{ см}^3.$$

Определяем нормальные и касательные напряжения в опасной точке K :

$$\sigma_K = \frac{68,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 2110 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(\frac{22}{2} - 0,95 \right) \cdot 10^{-2} = 0,163 \cdot 10^9 \text{ Па} = 163 \text{ МПа}.$$

$$\tau_K = \frac{108 \cdot 10^3 \cdot 164,1 \cdot 10^{-6}}{2(5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 2110 \cdot 10^{-8})} = 0,389 \cdot 10^8 \text{ Па} = 38,9 \text{ МПа}.$$

Главные напряжения определяются по формуле (5.7).

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{163}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{163^2 + 4 \cdot 38,9^2} = 81,5 \pm 90,3;$$

$$\sigma_{\max} = 171,8 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\min} = -8,8 \text{ МПа}.$$

Следовательно: $\sigma_1 = 171,8$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -8,8$ МПа.

В точке K имеет место плоское напряженное состояние. Поэтому проверка прочности производится по гипотезам прочности.

Для стальной балки (пластичный материал) применима четвертая (энергетическая) теория прочности в виде формулы (5.10) или (5.11).

По формуле (5.10) приведенное напряжение

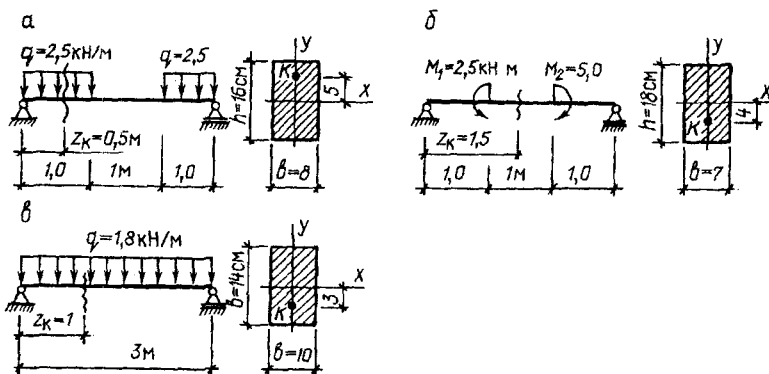
$$\sigma_{des} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{163^2 + 3 \cdot 38,9^2} = 176,4 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по четвертой теории выполняется.

Задача 5.9

Определить значения нормальных и касательных напряжений в точке K балки. Проверить прочность балки по этим напряжениям и построить их эпюры.

Для материала балки: $R = 12$ МПа, $R_S = 3$ МПа.



Ответы:

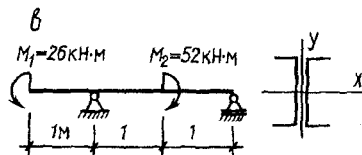
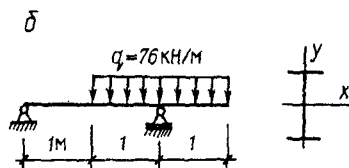
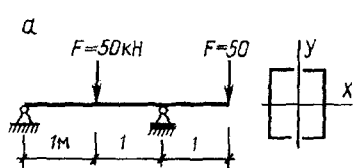
А. $\sigma_K = -1,72$ МПа, $\tau_K = 0,893$ МПа, $\sigma_{max} = 6,41$ МПа, $\tau_{max} = 2,93$ МПа.

Б. $\sigma_K = 4,41$ МПа, $\tau_K = 0,795$ МПа, $\sigma_{max} = 11,02$ МПа, $\tau_{max} = 0,993$ МПа.

В. $\sigma_K = 2,34$ МПа, $\tau_K = 0,787$ МПа, $\sigma_{max} = 6,18$ МПа, $\tau_{max} = 2,89$ МПа.

Задача 5.10

Подобрать номер прокатного профиля для двухопорной балки с консолью, если $R = 210$ МПа, $R_S = 130$ МПа. Построить эпюру σ , изобразить эпюру τ .



Ответы:

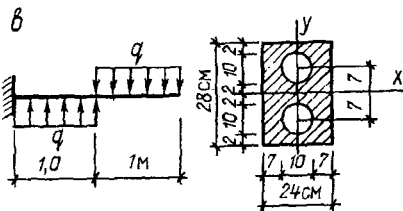
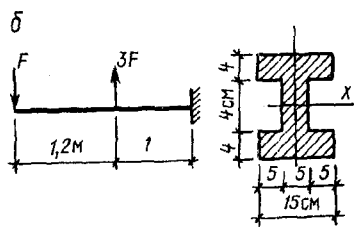
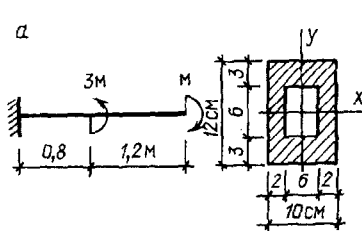
А. Швеллер № 18, $\sigma_{\max} = 207$ МПа, $\tau_{\max} = 62,8$ МПа.

Б. Двутавр № 20, $\sigma_{\max} = 207$ МПа, $\tau_{\max} = 82,6$ МПа.

В. Швеллер № 16, $\sigma_{\max} = 209$ МПа, $\tau_{\max} = 56,5$ МПа.

Задача 5.11

Определить наибольшую допустимую нагрузку на чугунную балку, расположив ее сечение рационально по отношению к этой нагрузке, если расчетное сопротивление на растяжение $R_t = 50$ МПа, на сжатие $-R_c = 140$ МПа.



Ответы:

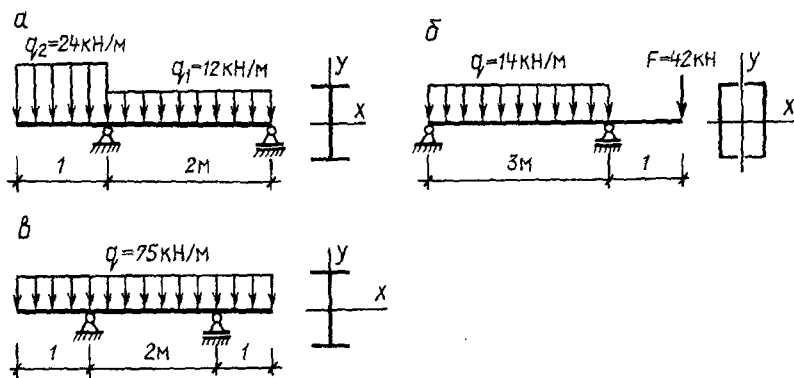
А. $M = 5,55$ кН·м.

Б. $F = 9,75$ кН.

В. $q = 132,4$ кН/м.

Задача 5.12

Подобрать номер прокатного профиля и провести полную проверку прочности балки, если $R = 210$ МПа, $R_S = 130$ МПа.



Ответы:

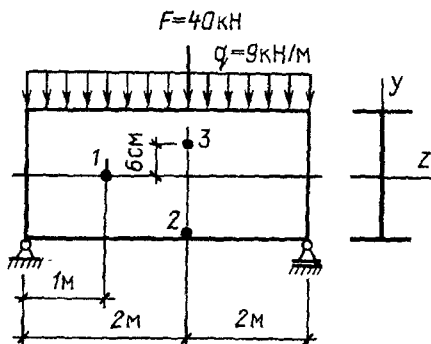
А. Двутавр № 12, $\tau_{\max} = 48,1$ МПа, $\sigma_{\text{des}} = 198$ МПа.

Б. Швеллер № 16а, $\tau_{\max} = 52,6$ МПа, $\sigma_{\text{des}} = 197$ МПа.

В. Двутавр № 20, $\tau_{\max} = 81,5$ МПа, $\sigma_{\text{des}} = 217$ МПа (перенапряжение 3,3 %).

Задача 5.13

Определить главные напряжения в указанных точках балки и установить вид напряженного состояния. Сечение балки – двутавр № 24.



Отвeты:

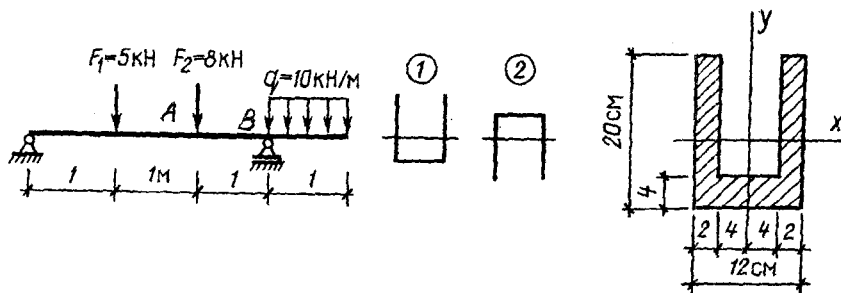
В точке 1 $\sigma_1 = 24,4$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -24,4$ МПа, плоское н.с.

В точке 2 $\sigma_1 = 201$ МПа, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ – линейное напряженное состояние.

В точке 3 $\sigma_1 = 123,3$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -22,3$ МПа, плоское н.с.

Задача 5.14

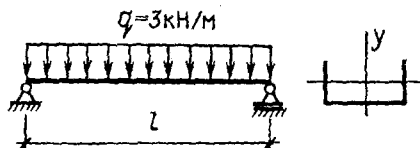
В балке Π -образного поперечного сечения изгибающие моменты равны: $M_A = 3,0$ кН·м, $M_B = -4,78$ кН·м. Установить рациональное положение сечения балки по отношению к вертикальной нагрузке.



Отвeт: для пластичного материала оба положения равноценны; для хрупкого – положение 2.

Задача 5.15

Определить наибольшую допустимую длину балки l из швеллера № 30, уложенного плашмя, если $R = 210$ МПа.



Отвeт: $l = 4,94$ м.

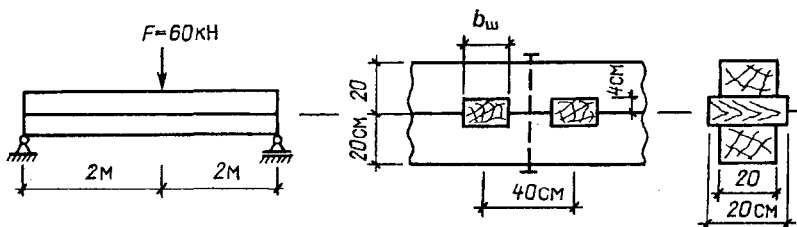
Задача 5.16

Деревянная балка составлена из двух сосновых брусьев, соединенных поперечными дубовыми шпонками.

Определить число шпонок и ширину шпонки $b_{ш}$.

Расчетные сопротивления: для сосны $R_S = 1,2$ МПа, для дуба – скалывание поперек волокон $R_{S90} = 1$ МПа, смятие поперек волокон $R_{см90} = 6$ МПа.

Соединительные болты в расчет не принимать.



Ответ: $n = 10$ шт., $b_{ш} = 18$ см.

5.3. Деформации при изгибе

Под действием нагрузки балка деформируется. Ось ее искривляется и, при плоском изгибе, представляет собой плавную плоскую кривую, называемую упругой линией (или осью изогнутой балки). При этом поперечные сечения балки претерпевают перемещения, преимущественно линейные v (прогиб перпендикулярно оси балки) и угловые θ (угол поворота сечения относительно первоначального положения) (рис. 5.19). Перемещения вдоль оси Z незначительные и ими пренебрегают.

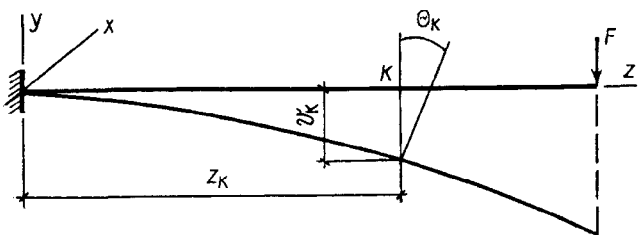


Рис. 5.19

Для определения перемещений балки необходимы уравнения ее упругой линии: $v = f(z)$, $\theta = f'(z)$.

Такие уравнения в дифференциальной форме составлены для случая чистого изгиба ($M_X \neq 0, Q_Y = 0$). Поскольку влияние поперечной силы Q_Y на величину перемещений незначительно, уравнения считаются допустимыми и для случая поперечного изгиба, когда $M_X \neq 0, Q_Y \neq 0$.

Для определения перемещений (θ, v) в балке существуют несколько методов.

1. Метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии. Метод обоснован для простых балок с 1...2 участками нагружения:

2. Метод начальных параметров – используются универсальные уравнения упругой линии балки, пригодные для любых (по сложности нагрузок) балок и позволяющие определить перемещения в любых ее сечениях.

3. Метод Мора с непосредственным интегрированием формулы перемещений, а также с использованием правила Верещагина для решения интеграла Мора. Метод универсален, применим как для прямых, так и ломаных стержней, как при изгибе, так и других деформациях. Целесообразен для определения перемещений в конкретном сечении.

В настоящее время для определения перемещений в балках наиболее часто используются универсальные уравнения упругой линии, а также формула Мора и правило Верещагина.

А. Метод начальных параметров

Началом координатных осей выбирается крайнее левое сечение балки, а положительные направления их – вправо (Z) и вверх (Y) (рис. 5.20).

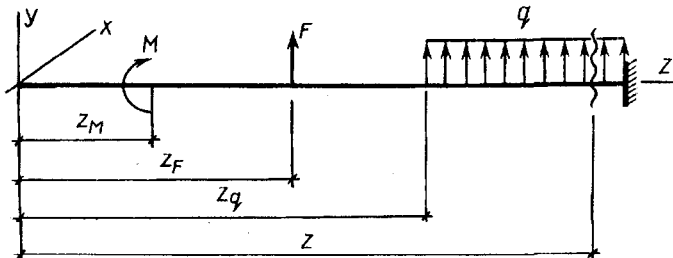


Рис. 5.20

Универсальными уравнениями оси изогнутой балки (упругой линии) являются:

уравнение углов поворота сечений

$$EJ_X\theta = EJ_X\theta_0 + \sum M(z - z_M) + \sum F \frac{(z - z_F)^2}{2} + \sum q \frac{(z - z_q)^3}{6}, \quad (5.12)$$

уравнение прогибов

$$EJ_X\vartheta = EJ_X\vartheta_0 + EJ_X\theta \cdot Z + \sum M \frac{(z - z_M)^2}{2} + \sum F \frac{(z - z_F)^3}{6} + \sum q \frac{(z - z_q)^4}{24}, \quad (5.13)$$

где θ – угол поворота исследуемого сечения балки,

θ_0 – угол поворота сечения в начале координатных осей (начальный параметр),

υ – прогиб в исследуемом сечении балки,

υ_0 – прогиб балки в начале координатных осей (начальный параметр),

z – абсцисса исследуемого сечения,

z_M, z_F, z_q – абсциссы точек приложения соответствующей внешней силы (M, F) и начала распределенной нагрузки q ,

M, F, q – внешние силы (активные и реактивные),

E – модуль продольной упругости материала балки,

J_X – момент инерции сечения балки относительно нейтральной оси.

При составлении уравнений упругой линии балки для конкретного сечения следует включать в них только те силовые факторы, которые расположены левее этого сечения и назначить знаки слагаемых, принятые для изгибающих моментов (рис. 5.4).

Если распределенная нагрузка q не доходит до конца балки, то ее продлевают и прикладывают компенсирующую нагрузку $q' = q$ (см. рис. 5.21, а).

Начальные параметры θ_0 и υ_0 определяются из условий закрепления опор балок: в защемлении $\theta_0 = 0, \upsilon_0 = 0$ (см. рис. 5.21, а), на шарнирной опоре $\theta_0 \neq 0, \upsilon_0 = 0$ (см. рис. 5.21, б).

Если начало отсчета координатных осей находится на свободном конце балки (см. рис. 5.21, в), начальные параметры θ_0 и υ_0 определяются из условий закрепления на опорах: $\upsilon_A = 0, \upsilon_B = 0$.

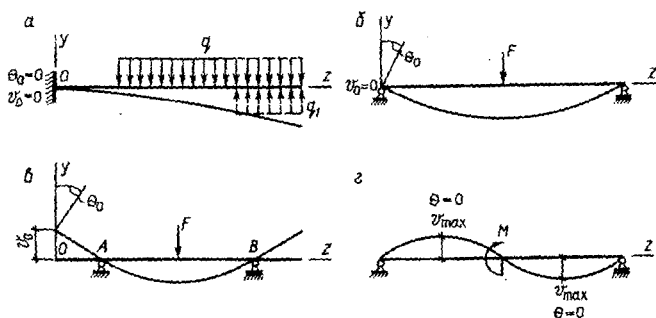


Рис. 5.21

По вычисленным значениям θ и v в характерных сечениях балки (обычно на границе расчетных участков) можно построить графики — эпюры углов поворота сечений θ и прогибов v .

В сечениях балки, где $\theta = 0$, на эпюре v имеется перегиб, а сам прогиб достигает максимального значения (рис. 5.21, г).

Примечание. При решении задач следует иметь ввиду, что положительный прогиб v направлен вверх (в сторону положительного направления оси Y), а положительный угол поворота сечения θ — против хода часовой стрелки (от первоначального положения сечения).

Примеры и задачи по определению деформации.

Пример 5.11

Для консольной балки определить углы поворота и прогибы сечений B и C (в долях от жесткости сечения балки — EJ_x) (рис. 5.22).

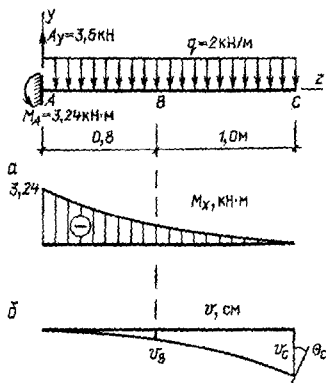


Рис. 5.22

Решение

Начало координатных осей помещаем в крайнем левом сечении балки (защемлении).

Опорные реакции определяются из условий равновесия

$$A_Y = 2(0,8 + 1,0) = 3,6 \text{ кН}, \quad M_A = 2 \frac{(0,8 + 1,0)^2}{2} = 3,24 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Балка имеет один расчетный участок.

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 5.22, а).

Составим уравнения оси изогнутой балки по формулам (5.12) и (5.13).

Уравнение углов поворота сечений

$$\begin{aligned} EJ_X \theta &= EJ_X \theta_0 - M(z-0) + A_Y \frac{(z-0)^2}{2} - q \frac{(z-0)^3}{6} = \\ &= EJ_X \theta_0 - 3,24z + 3,6 \frac{z^2}{2} - 2 \frac{z^3}{6}. \end{aligned}$$

Уравнение прогибов

$$\begin{aligned} EJ_X \vartheta &= EJ_X \vartheta_0 + EJ_X \theta_0 \cdot z - M \frac{(z-0)^2}{2} + A_Y \frac{(z-0)^3}{6} - q \frac{(z-0)^4}{24} = \\ &= EJ_X \vartheta_0 + EJ_X \theta_0 \cdot z - 3,24 \frac{z^2}{2} + 3,6 \frac{z^3}{6} - 2 \frac{z^4}{24}. \end{aligned}$$

Напомним, что слагаемыми уравнений являются выражения изгибающих моментов (с их знаками) от соответствующих силовых факторов (например, $A_Y \cdot z$), проинтегрированные в уравнении углов поворота сечений один раз ($A_Y \cdot \frac{z^2}{2}$), а в уравнении прогибов – два раза ($A_Y \cdot \frac{z^3}{2 \cdot 3}$).

Начальные параметры (θ_0 и ϑ_0) в составленных уравнениях определяются исходя из деформативных условий в начале координат. Поскольку начало координат помещено на опоре А – защемлении, где невозможны ни линейные, ни угловые перемещения, начальные параметры $\theta_0 = 0$, $\vartheta_0 = 0$.

Уравнения перемещений оси балки примут вид:

$$EJ_X \theta = -3,24 z + 1,8 z^2 - 0,333 z^3,$$

$$EJ_X \vartheta = -1,62 z^2 + 0,6 z^3 - 0,0833 z^4.$$

Определяем перемещения в названных сечениях.

При $z = 0,8$ м (сечение B)

$EJ_X \theta_B = -3,24 \cdot 0,8 + 1,8 \cdot 0,8^2 - 0,333 \cdot 0,8^3 = -1,61$ кН·м², откуда угол поворота сечения

$$\theta_B = -\frac{1,61}{EJ_X} \text{ (направлен по ходу часовой стрелки).}$$

$EJ_X \vartheta_B = -1,62 \cdot 0,8^2 + 0,6 \cdot 0,8^3 - 0,0833 \cdot 0,8^4 = -0,764$ кН·м³, откуда прогиб

$$\vartheta_B = -\frac{0,764}{EJ_X} \text{ (направлен вниз от оси } Z\text{).}$$

При $z = 1,8$ м (сечение C)

$EJ_X \theta_C = -3,24 \cdot 1,8 + 1,8 \cdot 1,8^2 - 0,333 \cdot 1,8^3 = -5,832 + 5,832 - 1,942 = -1,942$ кН·м², откуда $\theta_C = -\frac{1,942}{EJ_X}$.

$EJ_X \vartheta_C = -1,62 \cdot 1,8^2 + 0,6 \cdot 1,8^3 - 0,0833 \cdot 1,8^4 = -2,624$ кН·м³, откуда прогиб $\vartheta_C = -\frac{2,624}{EJ_X}$ (направлен вниз).

По вычисленным значениям можно построить эпюры углов поворота сечений θ и прогибов ϑ . Эпюра ϑ показана на рис. 5.22, б, где отмечены также углы θ . Полностью эпюра θ строится редко.

Результаты вычислений показывают, что наибольшие перемещения претерпевает концевое сечение балки (сечение C).

Внимание! Эпюра изгибающих моментов M_X и эпюра прогибов ϑ связаны между собой следующей зависимостью: ординаты эпюры M_X должны лежать с выпуклой стороны изогнутой балки, где волокна ее растянуты. Вспомним, что в строительном проектировании принято эпюру M_X строить со стороны растянутых волокон.

Пример 5.12

Для двухопорной деревянной балки прямоугольного поперечного сечения ($h = 18$ см, $b = 12$ см) построить эпюру прогибов и определить наибольший относительный прогиб, если модуль продольной упругости материала $E = 10$ ГПа (рис. 5.23).

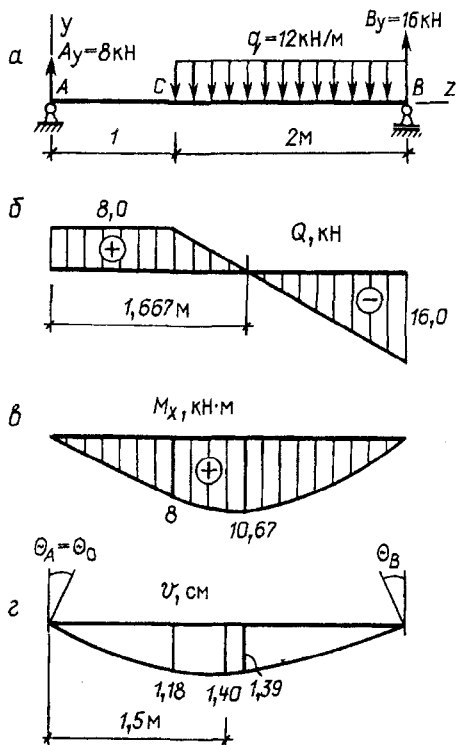


Рис. 5.23

Решение

Начало координатных осей помещаем в сечении A – шарнирной опоре балки.

Значения опорных реакций приведены на рис. 5.23, а, а эпюры Q и M_x показаны на рис. 5.23, б и в).

Момент инерции сечения балки относительно нейтральной оси

$$J_X = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{14 \cdot 18^3}{12} = 6800 \text{ см}^4.$$

Балка имеет два расчетных участка. Составим уравнения оси изогнутой балки:

$$EJ_X \theta = EJ_X \theta_0 + A_Y \frac{(z-0)^2}{2} \Big|_I - q \frac{(z-1)^3}{6} \Big|_{II} =$$

$$= EJ_X \theta_0 + 4z^2 - 2(z-1)^3;$$

$$EJ_X \vartheta = EJ_X \vartheta_0 + EJ_X \theta_0 \cdot z + A_Y \frac{(z-0)^3}{6} \Big|_I - q \frac{(z-1)^4}{24} \Big|_{II} =$$

$$= EJ_X \vartheta_0 + EJ_X \theta_0 \cdot z + 1,333z^3 \Big|_I - 0,50(z-1)^4.$$

Вертикальными линиями отмечены границы уравнений для участков балки и область применения их.

Обратите внимание, что в уравнения для первого участка вошли только те силовые факторы, которые лежат левее конца этого участка, т.е. только A_Y . На втором участке добавилась нагрузка q . Реакция B_Y в уравнения не вошла, т.к. для сечения B $z = z_B$ и слагаемое равно нулю.

Для определения начальных параметров в составленных уравнениях нужно рассмотреть условия перемещений в начале координат, т.е. на шарнирной опоре A . В шарнирной опоре вертикальное перемещение отсутствует, т.е. $v_A = 0$, следовательно, $v_0 = 0$. Угловое же перемещение на шарнирной опоре возможно, т.е. $\theta_A \neq 0$, значит и $\theta_0 \neq 0$.

Для определения параметра θ_0 нужно составить уравнение прогибов для сечения B , где на шарнирной опоре вертикальное перемещение отсутствует, т.е. $v_B = 0$.

При $z = 3$ м (сечение B)

$$EJ_X \vartheta_B = EJ_X \theta_0 \cdot 3 + 1,333 \cdot 3^3 - 0,5(3-1)^4 = 0,$$

откуда $EJ_X \theta_0 = -9,33 \text{ кНм}^2$.

После определения всех начальных параметров уравнения оси изогнутой балки примут вид:

$$EJ_X \theta = -9,33 + 4z^2 \Big|_I - 2(z-1)^3 \Big|_{II},$$

$$EJ_X \vartheta = -9,33z + 1,333z^3 \Big|_I - 0,5(z-1)^4 \Big|_II.$$

Известно, что максимальный прогиб балки будет в том сечении, угол поворота которого равен нулю. Отыщем это сечение.

Уравнение углов поворота сечений:

для первого участка

$EJ_X \vartheta = -9,33 + 4 \cdot z_0^2 = 0$, откуда $z_0 = 1,527 \text{ м} > 0$ (сечение за пределами участка),

для второго участка

$$EJ_X \vartheta = -9,33 + 4 \cdot z_0^2 - 2(z_0 - 1)^3 = 0, \text{ откуда } z_0 = 1,555 \text{ м.}$$

Для построения эпюры прогибов вычислим их значения для нескольких характерных сечений балки.

При $z = 0$ (сечение A , 1-й участок)

$$EJ\theta_A = -9,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad \theta_A = \frac{9,33 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^9 \cdot 6800 \cdot 10^{-8}} = -0,0137 \text{ рад.}$$

$$EJ\vartheta_A = 0.$$

При $z = 1 \text{ м}$ (сечение C , 1-й участок)

$$EJ\vartheta_C = -9,33 \cdot 1 + 1,33 \cdot 1^3 = -8,0 \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

$$\vartheta_C = -\frac{8,0 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^9 \cdot 6800 \cdot 10^{-8}} = -0,0118 \text{ м} = -1,18 \text{ см.}$$

При $z = 1,5 \text{ м}$ (сечение D , 2-й участок, середина пролета)

$$EJ\vartheta_D = -9,33 \cdot 1,5 + 1,33 \cdot 1,5^3 - 0,5 \cdot 0,5^4 = -5,32 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\vartheta_D = -0,0140 \text{ м} = 1,40 \text{ см}.$$

При $z = 1,555 \text{ м}$ (сечение, где $\theta = 0$)

$$EJ\vartheta_{\max} = -9,543 \text{ кН} \cdot \text{м}^3, \quad \vartheta_{\max} = -1,403 \text{ см}.$$

При $z = 1,667$ м (сечение H , где $M_{X \max}$) $EJ\vartheta_H = -9,48 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$,
 $\vartheta_H = -1,39 \text{ см}$.

При $z = 3$ м (сечение B , 2-й участок) $E\vartheta_B = -9,33 + 4 \cdot 3^3 - 2 \cdot 2^3 = 10,67$,
 $\theta_B = 0,0124 \text{ рад}$.

$EJ\vartheta_B = -9,33 \cdot 3 + 1,333 \cdot 3^3 - 0,5 \cdot 2^4 = -35,9 + 35,91 = 0,01 \approx 0$
(контроль).

По полученным значениям υ построена эпюра прогибов (см. рис. 5.23, z)

Выпуклость изогнутой оси балки (эпюра υ) направлена в сторону ординат эпюры M_X .

Анализ полученных значений прогибов показывает, что абсолютный прогиб в середине пролета балки (υ_D) и максимальный (υ_{\max}) практически совпадают.

Относительный прогиб балки равен $\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{1,403}{300} = \frac{1}{214}$.

Примечание. Сечение с наибольшим прогибом υ_{\max} не обязательно должно совпадать с сечением, где изгибающий момент наибольший ($M_{X, \max}$). Это возможно лишь в частных случаях.

Пример 5.13

Для двухопорной балки с консолью, выполненной из двух стальных швеллеров, подобрать их номер и проверить жесткость, если

$$R = 210 \text{ МПа}, \left(\frac{\vartheta}{l} \right)_{\text{adm}} = \frac{1}{160} \text{ (рис. 5.24)}.$$

Построить эпюру прогибов.

Решение

Начало координатных осей помещено в сечении A .

Значения опорных реакций приведены на рис. 5.24, a (нагрузку q , показанную пунктиром, при вычислении реакций можно не учитывать).

Построения эпюр Q и M .

В сечении A . $Q = A_y = 30 \text{ кН}$, $M = 0$.

В сечении C . $Q = 8 \text{ кН}$, $M = 0$.

В сечении B . $Q^I = 8 \text{ кН}$, $M = -8 \cdot 1 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

$$Q^II = 8 - 42 = -34 \text{ кН}.$$

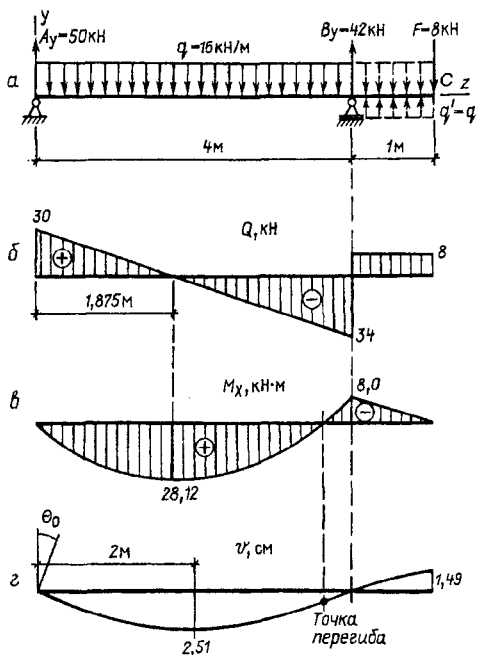


Рис. 5.24

Для сечения, в котором $Q = 0$, ордината $z_0 = \frac{30}{16} = 1,875$ м и

$$M_{X, \max} = 30 \cdot 1,875 - \frac{16 \cdot 1,875^2}{2} = 28,12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям требуемый момент сопротивления $W_x = \frac{28,12 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 134 \text{ см}^3$.

По таблицам сортамента принимаем два швеллера № 14 с $W_x = 70,2 \cdot 2 = 140,4 \text{ см}^3$ и $J_x = 491 \cdot 2 = 982 \text{ см}^4$.

Рассматриваемая балка имеет два расчетных участка (участка нагружения).

Заметим, что распределенная нагрузка q не доходит до конца балки. Поэтому ее необходимо продлить по консоли до конца балки и включить на этом участке компенсирующую нагрузку $q' = q$.

Составим уравнения перемещений оси изогнутой балки:

$$EJ_X \theta = EJ_X \theta_0 + A_Y \cdot \frac{z^2}{2} - q \frac{z^3}{6} \Big|_{0 \leq z \leq 4 \text{ м}} I + B_Y \cdot \frac{(z-4)^2}{2} + q \frac{(z-4)^3}{6} \Big|_{4 \leq z \leq 5 \text{ м}} II =$$

$$= EJ_X \theta_0 + 15 \cdot z^2 - 2,667 \cdot z^3 \Big|_I + 21(z-4)^2 + 2,667 \cdot (z-4)^3,$$

$$EJ_X \vartheta = EJ_X \vartheta_0 + EJ_X \theta_0 \cdot z + A_Y \cdot \frac{z^3}{6} - q \frac{z^4}{24} \Big|_I + B_Y \cdot \frac{(z-4)^3}{6} + q \frac{(z-4)^4}{24} \Big|_{II} =$$

$$= EJ_X \vartheta_0 + EJ_X \theta_0 + 5 \cdot z^3 - 0,667 \cdot z^4 \Big|_I + 7(z-4)^3 + 0,667 \cdot (z-4)^4 \Big|_{II}.$$

Начальные параметры θ_0 и ϑ_0 определим исходя из деформационных условий на опорах балки. При $z = 0$ (опора A) прогиб $\upsilon_A = 0$, а значит, и $\vartheta_0 = 0$.

При $z = 4$ м (опора B) прогиб $\upsilon_B = 0$.

Запишем уравнение прогибов для сечения B (первый участок, $z = 4$ м)

$$EJ_X \vartheta_B = EJ_X \vartheta_0 \cdot 4 + 5 \cdot 4^3 - 0,667 \cdot 4^4 = 0, \text{ откуда}$$

$$EJ_X \theta_0 = -37,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Определим значение прогибов посередине пролета балки и на конце консоли.

При $z = 2$ м

$$EJ_X \vartheta = -37,3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^3 - 0,667 \cdot 2^4 = -45,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^3, \text{ откуда}$$

$$\vartheta = -2,51 \text{ см}$$

При $z = 5$ м $EJ_X \vartheta = 29,2 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$, $\vartheta = 1,49 \text{ см}$.

Эпюра прогибов показана на рисунке г. При построении эпюры прогибов очертание ее согласуется с эпюрой изгибающих моментов.

Максимальный абсолютный прогиб в пролете балки достигает значения $\vartheta_{\max} = 2,51 \text{ см}$, относительный прогиб

$$\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{2,51}{400} = \frac{1}{159}.$$

Условие жесткости по формуле (5.16)

$$\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{1}{159} < \left(\frac{\vartheta}{l}\right)_{\text{adm}} = \frac{1}{160} \text{ — выполняется.}$$

Пример 5.14

Подобрать номер прокатного швеллера для двухконсольной балки из условия жесткости, если $\left(\frac{\vartheta}{l}\right)_{\text{adm}} = \frac{1}{200}$ (рис. 5.25). Построить эпюру прогибов.

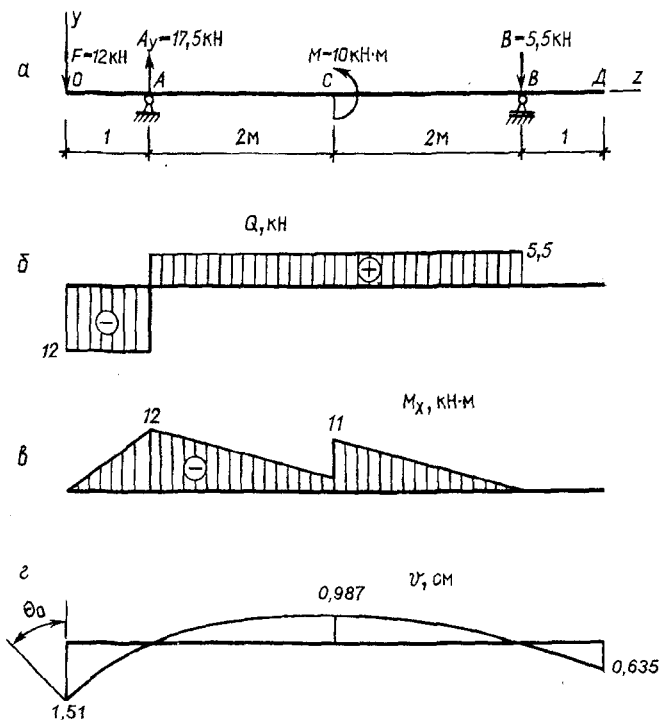


Рис. 5.25

Решение

Начало координат помещаем в крайнем левом сечении балки, т.е. на конце консоли (сечение O).

Значение опорных реакций и эпюра изгибающих моментов показаны на рис. 5.25.

Рассматриваемая балка имеет четыре расчетных участка.

Уравнения прогибов оси балки по (5.13):

$$\begin{aligned}
 EJ_X \vartheta &= EJ_X \vartheta_0 + EJ_X \theta_0 \cdot Z - 12 \cdot \frac{z^3}{6} \Big|_I + 17,5 \frac{(z-1)^3}{6} \Big|_{II} - 10 \frac{(z-3)^2}{2} \Big|_{III} - 5,5 \frac{(z-5)^3}{6} \Big|_{IV} = \\
 &= EJ_X \vartheta_0 + EJ_X \theta_0 \cdot Z - 2 \cdot z^3 \Big|_I + 2,917 (z-1)^3 \Big|_{II} - 0,917 (z-3)^2 \Big|_{III} - 5,5 (z-5)^3 \Big|_{IV}.
 \end{aligned}$$

В данном случае, когда начало координат расположено на свободном конце балки, ни один из начальных параметров не равен нулю. Значения их определим исходя из деформативных условий на шарнирных опорах A и B , где вертикальные перемещения (прогибы) равны нулю: $v_A = 0$, $v_B = 0$.

Запишем уравнения прогибов для названных сечений.

Сечение A ($z = 1$ м, участок 1) $EJ_X \vartheta = EJ_X \vartheta_0 + EJ_X \theta_0 \cdot 1 - 2 \cdot 1^3 = 0$.

Сечение B ($z = 5$ м, участок 3) $EJ_X \vartheta = EJ_X \vartheta_0 + EJ_X \theta_0 \cdot 5 - 2 \cdot 5^3 + 2,917 \cdot 4^3 - 5 \cdot 2^2 = 0$

или $EJ_X \vartheta = EJ_X \vartheta_0 + EJ_X \theta_0 \cdot 5 - 83,3 = 0$.

Из этих уравнений $EJ_X \theta_0 = 20,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$; $EJ_X \vartheta_0 = -18,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$.

Прогиб посередине пролета балки ($z = 3$ м, уч. 2)

$$EJ_X \vartheta_{\max} = -18,33 + 20,33 \cdot 3 - 2 \cdot 3^3 + 2,917 \cdot 2^3 = 12,0 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$$

Требуемый момент инерции сечения балки $I_x = \frac{12,0}{E v_{\max}}$,

$v_{\max} = v_{\text{adm}}$ — максимальный допустимый прогиб, определяемый из условия жесткости (5.16):

$$\vartheta_{\text{adm}} = \frac{1}{400} \cdot l = \frac{400}{400} = 1 \text{ см}.$$

Для сечения из двух швеллеров

$$J_X = \frac{12,0}{200 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 600 \text{ см}^4.$$

На один швеллер момент инерции составит

$$J'_X = \frac{600}{2} = 300 \text{ см}^4.$$

По таблицам сортамента принимаем 2 [№ 12, для которых

$$W_X = 50,6 \cdot 2 = 101,2 \text{ см}^3,$$

$$J_X = 304 \cdot 2 = 608 \text{ см}^4.$$

Вычисляем прогибы в характерных сечениях балки.

При $z = 0$ (сечение O)

$$\vartheta = \vartheta_0 = -\frac{18,33}{EI_x} = -\frac{18,33 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 608 \cdot 10^{-8}} = -1,51 \text{ см.}$$

При $z = 3$ м (сечение C) $\vartheta = 0,987$ см.

При $z = 6$ м (сечение D) $\vartheta = -0,635$ см.

По полученным значениям прогибов строится соответствующая эпюра (см. рисунок к примеру).

Проследите соответствие эпюры прогибов эпюре изгибающих моментов.

Внимание! Правая консоль балки (участок BD) не нагружена и, следовательно, не деформируется. Ось ее остается прямой, но все сечения перемещаются за счет деформаций остальной части балки.

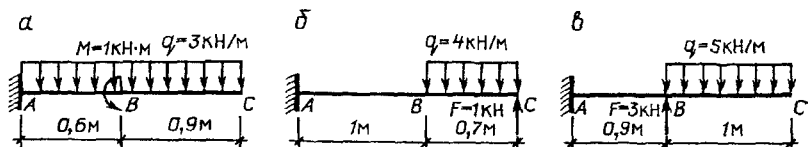
В завершение примера вычислим значения наибольшего нормального напряжения в балке:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x,\max}}{W_x} = \frac{12 \cdot 10^3}{69,6 \cdot 10^{-6}} = 172 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа.}$$

Прочность балки по нормальным напряжениям обеспечена, но материал ее недонапряжен на 22 %. Это обусловлено тем, что условие жесткости более «требовательно».

Задача 5.17

Для консольной балки определить углы поворота и прогибы сечений B и C (в долях от жесткости сечения балки — EJ_X).



Ответы:

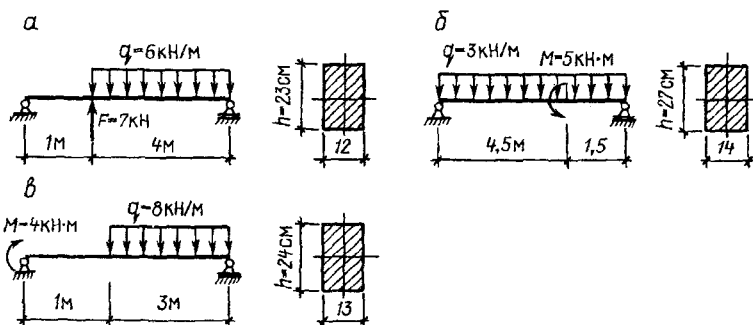
$$\text{A. } \vartheta_B = -\frac{0,882}{EJ_X}; \vartheta_C = -\frac{1,174}{EJ_X}; \theta_C = -\frac{1,088}{EJ_X}.$$

$$\text{Б. } \vartheta_B = -\frac{0,740}{EJ_X}; \vartheta_C = -\frac{1,572}{EJ_X}; \theta_C = -\frac{1,191}{EJ_X}.$$

$$\text{В. } \vartheta_B = -\frac{1,499}{EJ_X}; \vartheta_C = -\frac{5,101}{EJ_X}; \theta_C = -\frac{3,893}{EJ_X}.$$

Задача 5.18

Для двухопорной деревянной балки построить эпюру прогибов и определить наибольший относительный прогиб, если $E = 10$ ГПа.



Ответы:

А. При $z = 1$ м, $\vartheta = -1,44$ см; при $z = 2,5$ м, $\vartheta = \vartheta_{\max} = -2,83$ см;

$$\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{1}{177}.$$

Б. При $z = 3$ м, $\vartheta = \vartheta_{\max} = -2,65$ см; при $z = 4,5$ м, $\vartheta = -1,81$ см;

$$\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{1}{228}.$$

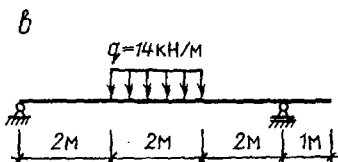
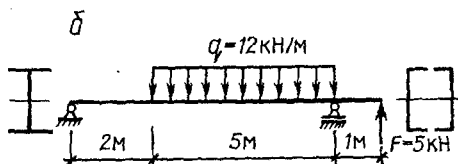
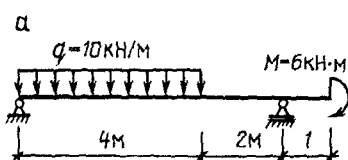
В. При $z = 1$ м, $\vartheta = -1,55$ см; при $z = 2$ м, $\vartheta = \vartheta_{\max} = -1,79$ см;

$$\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{1}{223}.$$

Задача 5.19

Для двухопорной балки с консолью подобрать номер прокатного профиля, построить эпюру прогибов, проверить жесткость, если

$$R = 210 \text{ МПа} \left(\frac{\vartheta}{l} \right)_{\text{adm}} = \frac{1}{160}.$$



Ответы:

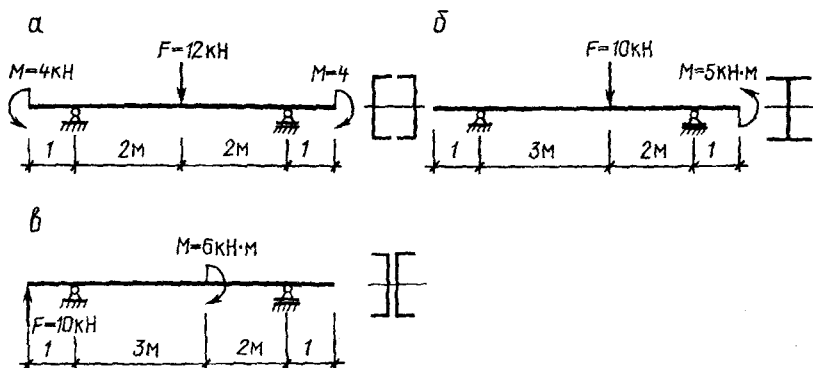
А. Двутавр № 20; при $z = 3$ м, $\vartheta = -3,06$ см; при $z = 7$ м, $\vartheta = 1,27$ см; $\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{1}{196}$.

Б. Швеллер № 22; при $z = 3,5$ м, $\vartheta = -4,07$ см; при $z = 8$ м, $\vartheta = 1,86$ см; $\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{1}{172}$.

В. Двутавр № 20; при $z = 3$ м, $\vartheta = -2,89$ см; при $z = 7$ м, $\vartheta = 0,43$ см; $\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{1}{208}$.

Задача 5.20

Для двухконсольной стальной балки подобрать из условия жесткости номер прокатного профиля при заданном относительном прогибе. Построить эпюру прогибов.



Ответы

- А. Два швеллера № 10; $\vartheta_0 = 0,287 \text{ см}$; $\vartheta_{\max} = -1,15 \text{ см}$; $\vartheta_C = 0,287 \text{ см}$.
 Б. Двутавр № 16; $\vartheta_0 = 1,06 \text{ см}$; $\vartheta_{\max} = -1,92 \text{ см}$; $\vartheta_C = 1,53 \text{ см}$.
 В. Два швеллера № 10; $\vartheta_0 = 2,16 \text{ см}$; $\vartheta_{\max} = -0,899 \text{ см}$; $\vartheta_C = 3,26 \text{ см}$.

Б. Метод Мора и Верещагина

Формула (интеграл) Мора, позволяющая определить перемещения в любом отдельном сечении балки, имеет вид:

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}}{EJ_X} \cdot dz; \quad (5.14)$$

где Δ – перемещение (угловое, линейное) в исследуемом сечении,
 M_F – выражение изгибающих моментов от заданной нагрузки,
 \bar{M} – выражение изгибающих моментов от вспомогательной единичной силы, соответствующей искомому перемещению,
 EJ_X – жесткость сечения балки.

На рис. 5.26, *a* показана заданная балка, у которой нужно определить угол поворота θ и прогиб v конечного сечения.

На рис. 5.26, *б, в* показаны вспомогательные состояния той же балки.

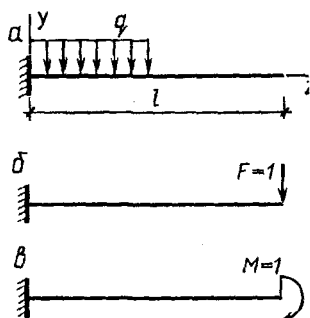


Рис. 5.26

При определении прогиба v в искомом сечении прикладывается единичная сила $F = 1$, а при определении угла поворота – единичный момент $M = 1$.

Составляются выражения для M_F и \bar{M} и по формуле (5.14) определяется искомое перемещение.

Если балка имеет сложную нагрузку и много участков нагружения, непосредственное интегрирование выражений изгибающих моментов трудоемко.

Вместо непосредственного вычисления интеграла Мора можно воспользоваться методом Верещагина – это графоаналитический прием решения интеграла перемещений, основанный на перемножении эпюр.

По методу Верещагина перемещение в любом сечении балки

$$\Delta = \frac{\sum \omega_i \cdot y_i}{EJ_X}, \quad (5.15),$$

где ω_i – площадь эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки (силовая площадь),

y_i – ордината эпюры изгибающих моментов от единичной силы, лежащая против центра тяжести эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки.

Определяются (по рис. 5.27): прогиб ϑ в сечении n и угол поворота θ в сечении m .

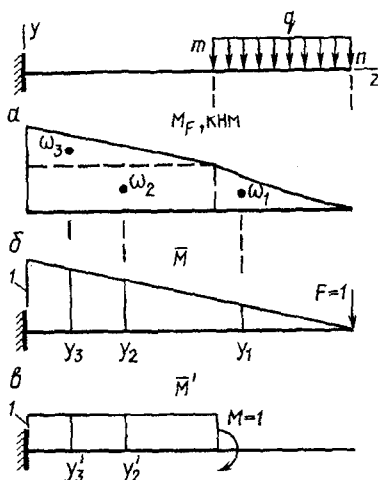


Рис. 5.27

На рис. 5.27, *а* изображена эпюра изгибающих моментов M_F от заданной нагрузки.

На рис. 5.27, *б* – единичная эпюра \bar{M} от вспомогательной единичной силы $F=1$ (для определения прогиба ϑ), а на рис. 5.27, *в* – единичная эпюра \bar{M}' от вспомогательного единичного момента $M=1$ (для определения угла поворота θ).

Эпюра M_F , которая может быть любой формы, в пределах расчетных участков разделяется на простые фигуры (прямоугольник, треугольник, парабола), площади и центры тяжести которых определяются легко.

По формуле (5.15) прогиб в сечении n :

$$\vartheta_n = \frac{\sum \omega_i \cdot y_i}{EJ_X} = \frac{\omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 \cdot y_2 + \omega_3 \cdot y_3}{EJ_X},$$

а угол поворота в сечении m – $\theta_m = \frac{\omega_2 \cdot y_2' + \omega_3 \cdot y_3'}{EJ_X}$. Эпюры изгибающих моментов от единичных сил всегда прямолинейны.

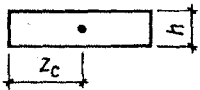
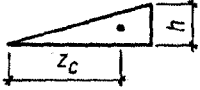
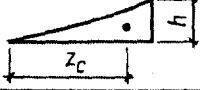
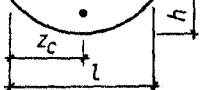
Если обе эпюры (M_F и \bar{M}) прямолинейны, то площадь ω можно брать с любой из них. Если эпюра M_F криволинейна, то площадь ω берется обязательно с этой эпюры.

Произведение $\omega_i \cdot y_i$ считается положительным если обе эпюры расположены по одну сторону от ее оси, и считается отрицательным — если по разные.

Положительный результат перемножения эпюр означает, что направление перемещения (θ , ϑ) совпадает с направлением единичной силы (или момента); если отрицательный — перемещение происходит в обратном направлении вектора единичной силы.

В табл. 5.1 приведены выражения для определения площадей некоторых простых фигур и ординаты их центра тяжести.

Таблица 5.1

Вид эпюры	ω	z_c
	$h \cdot l$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{h \cdot l}{2}$	$\frac{2 \cdot l}{3}$
	$\frac{h \cdot l}{3}$	$\frac{3 \cdot l}{4}$
	$\frac{2 \cdot h \cdot l}{3}$	$\frac{l}{2}$

Параболические эпюры, приведенные в таблице, получены от действия только распределенной нагрузки q .

В тех случаях, когда в сложной эпюре M_F криволинейные участки получены от одновременного действия q , F , M , их (участки) надо расчлнить на простые фигуры (см. примеры).

В. Проверка жесткости

Проверка жесткости балки сводится к требованию, по которому наибольший прогиб ϑ_{\max} не должен превышать определенной, установленной нормами проектирования, допустимой величины.

Обычно нормами задается допустимый относительный прогиб $\frac{\vartheta_{\max}}{l}$, где l – пролет балки. В зависимости от назначения конструкции допустимый относительный прогиб в строительном проектировании колеблется в пределах $\left(\frac{\vartheta}{l}\right)_{\text{adm}} = \frac{1}{150} \dots \frac{1}{500}$.

Условия жесткости при изгибе имеет вид:

$$\frac{\vartheta_{\max}}{l} \leq \left(\frac{\vartheta}{l}\right)_{\text{adm}}, \quad (5.16)$$

где ϑ_{\max} – максимальный прогиб в пролете балки,

$\left(\frac{\vartheta}{l}\right)_{\text{adm}}$ – допустимый относительный прогиб.

При самой несимметричной нагрузке можно считать, что максимальный прогиб наблюдается посередине пролета балки.

Пример 5.15

Определить угол поворота и прогиб сечения B консольной балки (в долях от жесткости сечения – EJ_X) (рис. 5.28).

Решение

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки (грузовая эпюра M_F), которая строится обычным методом, показана на рис. 5.28, а).

Для определения прогиба в сечении B к свободной от заданной нагрузки балке (вспомогательное состояние) в названном сечении прикладывается вспомогательная единичная сосредоточенная сила ($F = 1$) и строится эпюра изгибающих моментов – единичная эпюра \bar{M} (рис. 5.28, б). Направляется единичная сила произвольно, т.е. в положительном или отрицательном направлении оси Y .

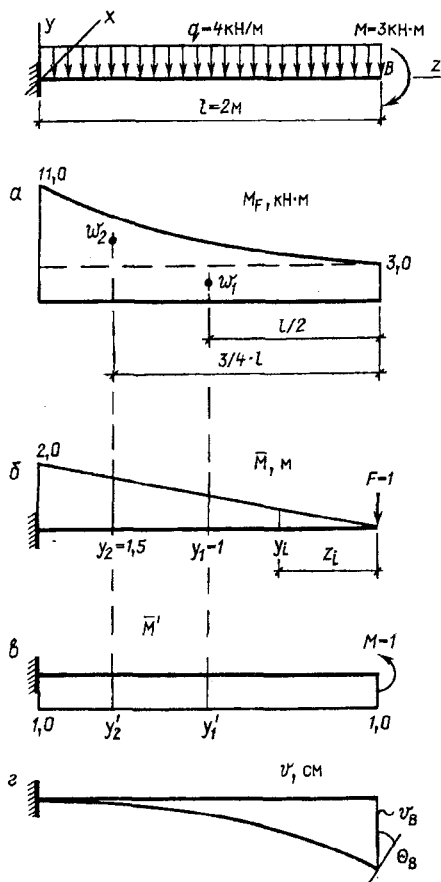


Рис. 5.28

Аналогичная операция производится для определения угла поворота сечения. Только в качестве вспомогательной единичной силы выступает единичный вспомогательный момент ($M = 1$), направляемый произвольно относительно оси X . Эпюра от единичного момента \bar{M}' показана на рис. 5.28, в.

Примечание. На рис. 5.28, б и в вспомогательное состояние балки и единичные эпюры совмещены.

Заметим, что единичные эпюры прямолинейны и имеют вид треугольника и прямоугольника, а грузовая – криволинейна и имеет сложное очертание.

Для определения перемещений по методу Верещагина используются эпюры изгибающих моментов (грузовые и единичные). От одних из них берутся площади эпюр (ω), из других — ординаты (y) под центром тяжести первых. Поскольку грузовая эпюра M_F имеет криволинейное очертание, площадь ω должна браться с этой эпюры.

Для проведения расчета сложное очертание эпюры M_F расчленяется на простые фигуры: прямоугольник (от момента M) площадью $\omega_1 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ и параболический треугольник (от нагрузки q) площадью $\omega_2 = \frac{1}{3} h \cdot l = 5,333 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$. На выделенных простых фигурах отмечаются их центры тяжести (см. табл. 5.1).

Замечание. Будьте внимательны при определении параметра h .

На единичных эпюрах \bar{M}' отмечаются ординаты y , лежащие под центром тяжести составляющих частей грузовой эпюры M_F . В нужном сечении $y_i = 1 \cdot z_i$.

Ординаты единичной эпюры \bar{M} для определения прогибов равны $y_1 = 1 \cdot \frac{1}{2} l = 1 \text{ м}$; $y_2 = 1 \cdot \frac{3}{4} l = 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 = 1,5 \text{ м}$.

Для определения углов поворота сечений ординаты берутся из единичной эпюры \bar{M}' : $y_i = y_2 = 1$.

Прогиб в сечении В по формуле (5.15):

$$EJ_X \Delta = \sum \omega_i \cdot y_i = 6 \cdot 1 + 5,333 \cdot 1,5 = 14,0 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Все слагаемые в выражении прогибов положительны, т.к. площади ω и ординаты y лежат по одну сторону от оси эпюры. Положительные значения $EJ_X \vartheta_B$ означают, что прогиб происходит в направлении единичной силы.

Угол поворота сечения В определяется по формуле (5.15)

$$\begin{aligned} EJ_X \Delta &= EJ_X \theta_B = \sum \omega_i \cdot y_i = -\omega_1 \cdot y_1' - \omega_2 \cdot y_2' = \\ &= -6 \cdot 1 - 5,33 \cdot 1 = -11,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

В полученном выражении слагаемые отрицательны, т.к. площади ω и ординаты y лежат по разную сторону от оси эпюры. Отрицательное значение $EJ_X \vartheta_B$ означает, что поворот сечения происходит в

направлении противоположном направлению единичного момента $M = 1$, т.е. по ходу часовой стрелки (рис. 5.28, з).

Эпюра прогибов показана на рис. 5.28, з.

Таким образом, перемещения на свободном конце балки (в долях от жесткости сечения) равны: $\theta_B = \frac{11,33}{EJ_X}$ (по ходу часовой стрелки),

$$\vartheta_B = \frac{14,0}{EJ_X} \text{ (вниз).}$$

Пример 5.16

Определить прогиб посередине пролета двухопорной балки (в долях от EJ_X) (рис. 5.29).

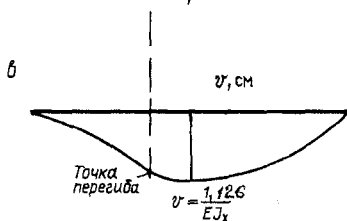
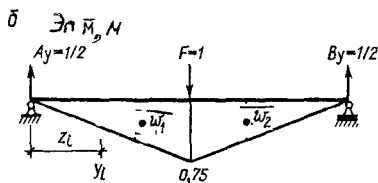
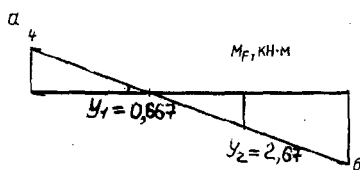
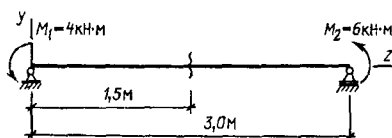


Рис. 5.29

Решение

Грузовая эпюра изгибающих моментов M_F (от заданной нагрузки) показана на рис. 5.29, а).

Посредине пролета, где требуется определить прогиб, к балке вспомогательного состояния прикладывается единичная сосредоточенная сила $F = 1$ (рис. 5.29, б), определяются опорные реакции и строится эпюра \bar{M} .

В этом примере обе эпюры прямолинейные, но единичная «ломаная». Поэтому площадь ω нужно брать из единичной эпюры \bar{M} .

Ординаты y берутся из грузовой эпюры M_F исходя из подобия треугольников образующих эту эпюру.

Заметим, что ординаты единичной эпюры лежат всегда по одну сторону от оси (здесь снизу). Значения их $y_i = A_y(B_y) \cdot z_i$.

Прогиб посредине пролета балки.

$$\begin{aligned} EJ_X \vartheta &= \sum (\omega_i \cdot y_i) = -\omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 \cdot y_2 = \\ &= -\frac{0,75 \cdot 1,5}{2} \cdot 0,667 + \frac{0,75 \cdot 1,5}{2} \cdot 2,67 = 1,126 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \end{aligned}$$

Найденный прогиб направлен вниз, по направлению единичной силы $F = 1$.

Вид эпюры прогибов показан на рис. 5.29, в.

Пример 5.17

Для двухопорной балки с консолью построить эпюру прогибов (в долях EJ_X) (рис. 5.30).

Решение

Значения опорных реакций определяются из условий равновесия:

$$\sum M_A = -B_y \cdot 6 + 10 + 40 = 0, \quad B_y = 8,33 \text{ кН},$$

$$\sum M_A = A_y \cdot 6 + 10 - 80 = 0, \quad A_y = 11,67 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 11,65 + 8,33 - 5 \cdot 4 = 0,$$

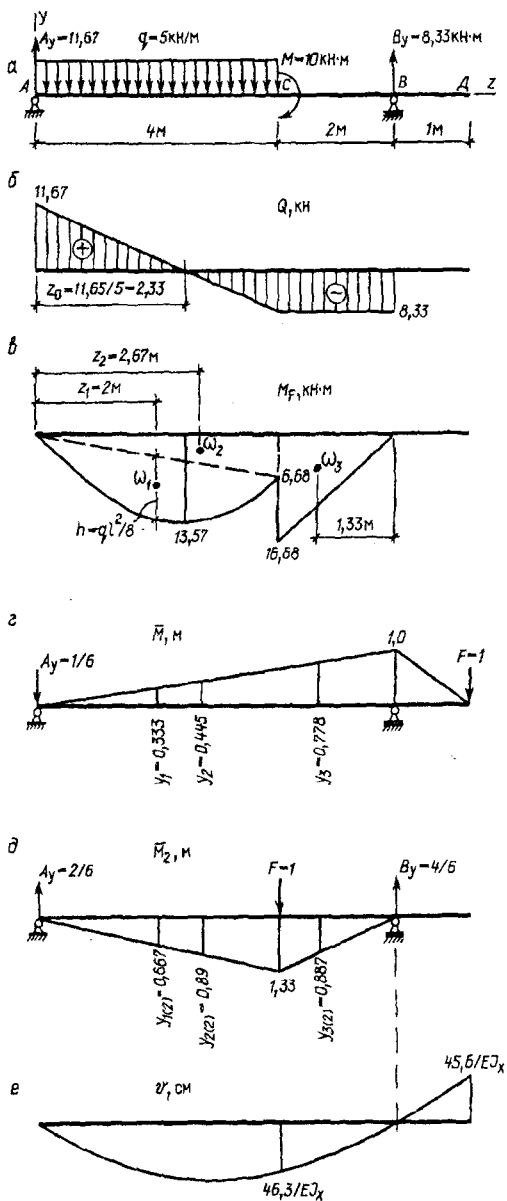


Рис. 5.30

Значения ординат для построения эпюр Q и M .

$$\text{При } z = 0, \quad Q = 11,67, \quad M = 0.$$

$$\text{При } z = 2,33 \text{ м, } Q = 0, \quad M = 13,57 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$\text{При } z = 4,0 \text{ м, } Q = 11,67 - 20 = -8,33 \text{ кН,}$$

$$M^I = 11,67 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 2 = 6,68 \text{ кН}\cdot\text{м,}$$

$$M^{II} = 11,67 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 2 + 10 = 16,68 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$\text{При } z = 6,0 \text{ м, } Q = 11,67 - 20 = -8,33 \text{ кН, } M = 0.$$

Эпюры Q и M – на рис. 5.31, а и б.

Единичные эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 от сил $F = 1$, приложенных в сечениях, где нужно определить прогибы, показаны на рис. 5.31, з и д. Строятся эти эпюры обычным образом: сначала определяются опорные реакции, а затем ординаты y в нужных сечениях ($(y_i = A_y(B_y) \cdot z_i)$).

Грузовую эпюру M_F , сложного очертания, расчленим на простые фигуры. Выделим параболу (ω_1) и два треугольника (ω_2 и ω_3).

Площадь параболы $\omega_1 = \frac{2}{3} \cdot h \cdot l$, где l – длина параболы, h – высота параболы в центре тяжести ее (от нижней точки до пунктирной линии). Высоту параболы можно вычислить геометрически по эпюре M , но удобнее пользоваться выражением $h = \frac{ql^2}{8}$, известным из

построения эпюр M : $h = \frac{5 \cdot 4^2}{8} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м.}$

Обратите внимание на расположение грузовой и единичных эпюр относительно их осей.

Прогиб на конце консоли (сечение D):

$$\begin{aligned} EJ_X \vartheta_D &= -\omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 \cdot y_2 - \omega_3 \cdot y_3 = \\ &= -\frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 4 \cdot 0,333 - \frac{1}{2} \cdot 6,66 \cdot 4 \cdot 0,445 - \frac{1}{2} \cdot 16,68 \cdot 2 \cdot 0,778 = -45,58 \text{ кН}\cdot\text{м}^3. \end{aligned}$$

(направлен в противоположную сторону, чем $F = 1$, т.е. вверх).

Прогиб в пролете балки (сечение C):

$$\begin{aligned}
 EJ_X \vartheta_C &= \omega_1 \cdot y_{1(2)} + \omega_2 \cdot y_{2(2)} - \omega_3 \cdot y_{3(2)} = \\
 &= \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 4 \cdot 0,667 + \frac{1}{2} \cdot 6,66 \cdot 4 \cdot 0,89 + \frac{1}{2} \cdot 16,68 \cdot 2 = 46,32 \text{ кН} \cdot \text{м}^3
 \end{aligned}$$

(направлен по направлению силы $F = 1$, т.е. вниз).

По полученным значениям прогибов строится соответствующая эпюра (рис. 5.30, e).

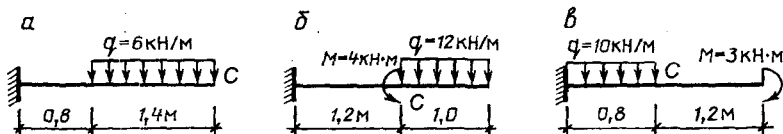
Очерчивая эпюру прогибов, обратите внимание, что консоль балки (участок BD) не нагружена и, следовательно, этот участок не деформируется, но перемещается вследствие деформации пролетной части.

Примечание. В случае необходимости определения прогиба не на границе расчетных участков балки, а в произвольном сечении, расчет по методу Верещагина значительно усложняется, особенно на участках с распределенной нагрузкой q .

В таких случаях лучше воспользоваться методом начальных параметров.

Задача 5.21

Определить угол поворота и прогиб конца консольной балки (в долях жесткости сечения EJ_X).



Ответы:

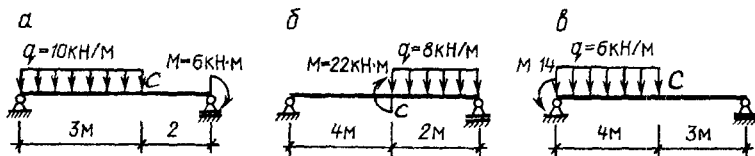
А. $EJ_X \theta = 10,14 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ (по часовой стрелке), $EJ_X \vartheta = 16,54 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$ (вниз).

Б. $EJ_X \theta = 13,04 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ (по часовой стрелке), $EJ_X \vartheta = 19,16 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$ (вниз).

В. $EJ_X \theta = 6,95 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ (по часовой стрелке), $EJ_X \vartheta = 7,54 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$ (вниз).

Задача 5.22

Для двухопорной балки определить прогиб в сечении C (в долях от EJ_X) и изобразить эпюру прогибов.



Ответы:

А. $EJ_X \vartheta_C = 17,67 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$ (вниз).

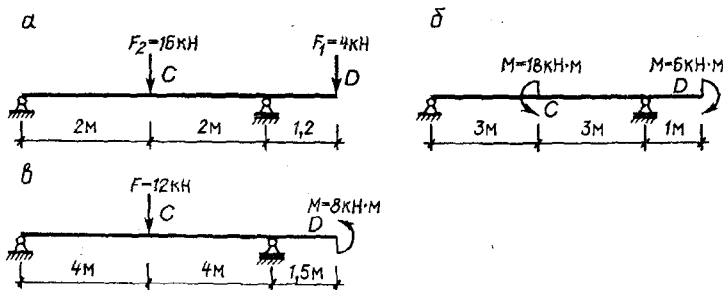
Б. $EJ_X \vartheta_C = 0,91 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$ (вниз).

В. $EJ_X \vartheta_C = 61,73 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$ (вниз).

Задача 5.23

Для двухопорной балки с консолью подобрать номер прокатного двутавра из условия жесткости, если $R = 210 \text{ МПа}$, $\left(\frac{\vartheta}{l}\right)_{\text{adm}} = \frac{1}{300}$.

Построить эпюру прогибов.



Ответы:

А. I №16, $\vartheta_C = 0,946 \text{ см}$ (вниз) $\vartheta_D = 0,328 \text{ см}$ (вверх).

Б. I №16, $\vartheta_C = 1,37 \text{ см}$ (вверх) $\vartheta_D = 1,317 \text{ см}$ (вниз).

В. I №24, $\vartheta_C = 2,19 \text{ см}$ (вниз) $\vartheta_D = 1,191 \text{ см}$ (вверх).

Раздел 6. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Статически неопределимыми называются балки, опорные реакции у которых невозможно определить при помощи одних лишь уравнений равновесия, т.к. они имеют «лишние» неизвестные реакции.

Степень статической неопределимости определяется разностью между числом неизвестных реакций и числом независимых уравнений равновесия.

Балки, изображенные на рис. 6.1, имеют четыре опорные связи, а следовательно, четыре опорные реакции при трех независимых уравнениях равновесия ($\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M = 0$) и являются один раз статически неопределимыми.

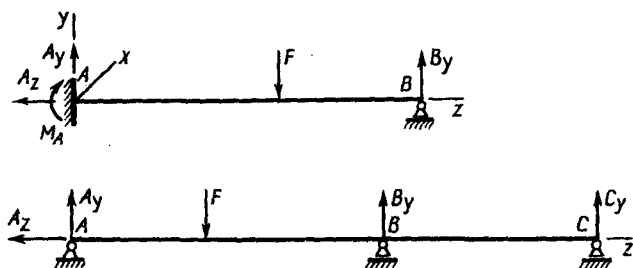


Рис. 6.1

Раскрытие статической неопределимости балки заключается в определении лишних неизвестных реакций путем составления к уравнениям равновесия такого количества дополнительных уравнений, сколько раз она статически неопределима.

Существует несколько методов раскрытия статической неопределимости балок. Выбор метода связан со степенью статической неопределимости. Если «лишних» неизвестных немного (одна-две), дополнительные уравнения целесообразно составить исходя из деформационных условий (прогибов) на опорах балки, используя метод начальных параметров.

У неразрезных балок степень статической неопределимости может быть высокой. В таких случаях дополнительные уравнения составляются исходя из деформационных условий (углов поворота сечений) на промежуточных опорах балки, используя метод сил.

Из совместного решения уравнений равновесия и дополнительных определяются все опорные реакции балки.

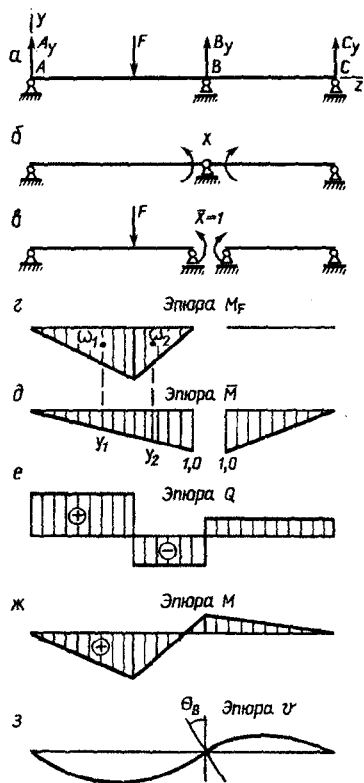


Рис. 6.2

Первый индекс коэффициентов и свободных членов уравнений означает направление перемещения и одновременно номер промежуточной опоры, второй – причину, вызвавшую перемещение (номер единичной силы).

Физический смысл уравнений метода сил для неразрезных балок заключается в неразрывности упругой линии над промежуточными опорами, т.е. в совместности угловых перемещений θ сечений над опорами (рис. 6.2, з).

Для определения параметров канонических уравнений необходимо построить эпюры изгибающих моментов для однопролетных балок основной системы, сначала от заданной нагрузки (грузовые эпюры M_F) (рис. 6.2, г), а затем от опорных моментов, принятых равными единице $\bar{X} = 1$ (единичные эпюры \bar{M}) (рис. 6.2, д).

Коэффициенты δ_i и свободные члены Δ_i канонических уравнений определяются по методу Верещагина путем перемножения единичных и грузовых эпюр: $\delta_i(\Delta_i) = \Sigma \omega_i y_i$. У одной из эпюр берется площадь ее « ω », а у другой ордината – « y », измеренная против центра тяжести первой (см. подраздел 5.3).

Перемножая единичные эпюры самих на себя, получим значения $\delta_{11}, \delta_{22}, \dots, \delta_{nn}$, а между собой – $\delta_{12}, \delta_{21}, \dots, \delta_{1n}$. Исходя из теоремы о взаимности перемещений $\delta_{12} = \delta_{21}$, $\delta_{1n} = \delta_{n1}$. Перемножив грузовые эпюры на единичные, получим значения свободных членов $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \dots, \Delta_{nF}$

Решив систему канонических уравнений, найдем значения изгибающих моментов на промежуточных опорах неразрезной балки: $X_1 = M_1, X_2 = M_2, \dots, X_n = M_n$. Этим заканчивается раскрытие ее статической неопределимости.

Окончательные эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M строятся отдельно для балки каждого пролета, загруженной заданной нагрузкой и найденными опорными реакциями с учетом их знаков (рис. 6.2, е, ж).

Эпюра прогибов (см. рис. 6.2, з) строится по значениям прогибов, полученных любым из ранее названных способов.

Заметим, что на промежуточной опоре B угол поворота единый как для левого примыкающего сечения, так и для правого, т.е. выполняется условие совместности перемещений, заложенного в канонические уравнения.

Расчет статически неопределимых балок на прочность и жесткость ведется также как и статически определимых.

Пример 6.1

Для балки (рис. 6.3, а) построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и определить прогиб посередине пролета. Изобразить ось изогнутой балки.

Жесткость сечения балки – EJ_x .

Решение

На левой опоре балки – защемлении (заделке) – возникнут три реакции A_y, A_z, M_A , на правой – шарнирно-подвижной – одна, B_y .

Всего реакций четыре. Уравнений равновесия можно составить только три ($\sum Y = 0, \sum Z = 0, \sum M = 0$). Значит, рассматриваемая балка является один раз ($4 - 3 = 1$) статически неопределимой.

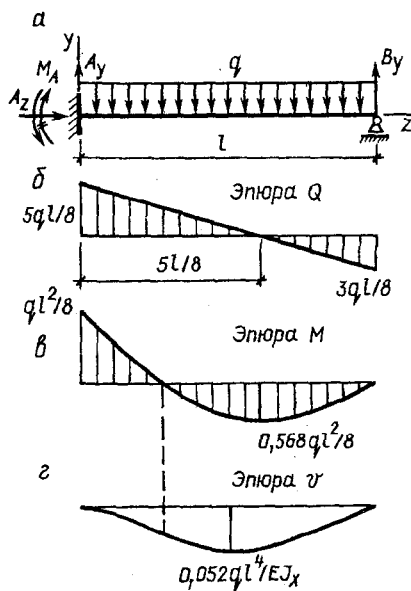


Рис. 6.3

Составим уравнения равновесия.

$$\sum Z = A_z = 0, \text{ откуда } A_z = 0,$$

$$\sum Y = A_y - ql + B_y = 0, \quad (6.2)$$

$$\sum M_B = M_A - ql \cdot \frac{l}{2} + A_y \cdot l = 0. \quad (6.3)$$

Два уравнения равновесия содержат три неизвестные величины. Непосредственное решение уравнений невозможно.

Необходимо составить одно дополнительное уравнение исходя из деформационных условий на опорах балки: на опоре A угол поворота сечения $\theta_A = 0$, прогиб $\vartheta_A = 0$; на опоре B прогиб $\vartheta_B = 0$.

Используем условие на опоре B и составим выражение для определения прогиба ϑ_B по методу начальных параметров:

$$EJ_X \vartheta_B = EJ_X \vartheta_0 + EJ_X \theta_0 \cdot l + M_A \frac{l^2}{2} + A_Y \frac{l^3}{6} - q \frac{l^4}{24} = 0.$$

Учтем, что на опоре A $\theta_A = 0$ и $\vartheta_A = 0$. Следовательно, начальные параметры уравнения прогибов $\theta_0 = 0$ и $\vartheta_0 = 0$.

Тогда

$$M_A + A_Y \cdot \frac{l}{3} - q \cdot \frac{l^2}{12} = 0. \quad (6.4)$$

Решив совместно уравнения (6.3) и (6.4), получим

$A_Y = \frac{5}{8} q \cdot l$, $M_A = -\frac{ql^2}{8}$ (направление противоположное, изображенному на рис. 6.3, а).

Реакцию B_Y целесообразно определить из уравнения $\sum M_A = 0$,

$$\sum M_A = -M_A + q \frac{l^2}{2} - B_Y \cdot l = -\frac{ql^2}{8} + \frac{ql^2}{2} - B_Y l = 0,$$

откуда $B_Y = \frac{3}{8} ql$.

Проверим правильность решения по уравнению (6.2).

$$\sum Y = \frac{5}{8} ql + \frac{3}{8} ql - ql = 0 - \text{решение верно.}$$

После раскрытия статической неопределимости дальнейший расчет балки ведется как и для статически определимой.

Эпюры Q и M показаны на рис. 6.3, б и в.

Выражение для определения прогиба посредине пролета балки ($Z = l/2$)

$$\begin{aligned} EJ_X \vartheta &= -M_A \frac{Z^2}{2} + A_Y \frac{Z^3}{6} - q \frac{Z^4}{24} = \\ &= -\frac{ql^2}{8 \cdot 2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{5}{8} q \cdot l \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{q}{24} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^4 = 0,052 ql^4, \end{aligned}$$

$$\text{откуда прогиб } \vartheta = -\frac{0,052ql^4}{EJ_x}$$

Ось изогнутой балки (эпюра прогибов) изображена на рис. 6.3, з. Напомним, что эпюра прогибов в точке, где $M = 0$, имеет перегиб.

Пример 6.2

Для двухпролетной балки (рис. 6.4, а) построить эпюры Q и M , подобрать номер прокатного двутавра, определить прогиб в сечении D , изобразить ось изогнутой балки.

Для стали: $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.

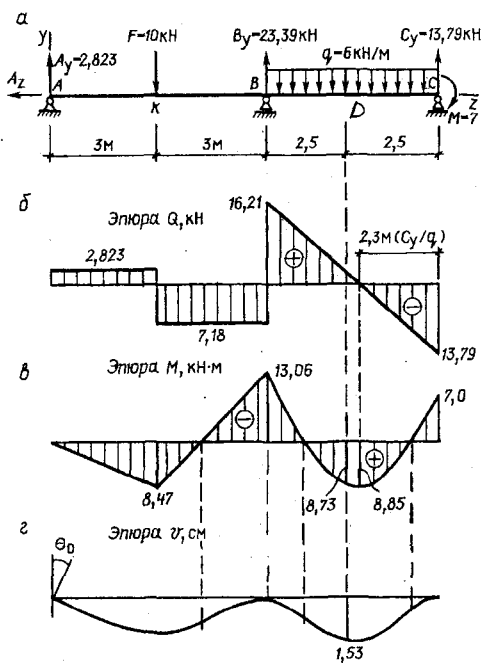


Рис. 6.4

Решение

Число неизвестных опорных реакций – четыре: A_z , A_y , B_y , C_y .

Число независимых уравнений равновесия – три: $\sum Z = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum M = 0$.

Следовательно, балка один раз статически неопределима.

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\sum Z = A_z &= 0, \\ \sum Y = A_y + B_y + C_y - F - q \cdot 5 &= 0,\end{aligned}\quad (6.5)$$

Независимое уравнение $\sum M = 0$ можно составить только одно относительно любой точки балки. В примере рационально использовать точку C .

$$\sum M_C = A_y(6+5) + B_y \cdot 5 - F(3+5) - q \cdot 5 \cdot 2,5 + M = 0$$

или
$$11A_y + 5B_y - 148 = 0. \quad (6.6)$$

Раскрытие статической неопределимости проведем двумя методами: с использованием метода начальных параметров и метода сил.

1. Расчет по методу начальных параметров.

Составим дополнительное уравнение исходя из деформативных условий на опорах балки: $\vartheta_B = 0$, $\vartheta_C = 0$.

Напомним, что начало координатных осей помещается в крайнем левом сечении балки — сечении A .

Составим выражения для названных прогибов.

При $z = 6$ м

$$EJ_X \vartheta_B = EJ_X \vartheta_0 + EJ_X \theta_0 \cdot 6 + A_y \frac{6^3}{6} - 10 \frac{3^3}{6} = 0. \quad (6.7)$$

При $z = 11$ м

$$EJ_X \vartheta_C = EJ_X \vartheta_0 + EJ_X \theta_0 \cdot 11 + A_y \frac{11^3}{6} - 10 \frac{8^3}{6} + B_y \frac{5^3}{6} - 6 \frac{5^4}{24} = 0. \quad (6.8)$$

Начальный параметр $\vartheta_0 = 0$, т.к. прогиб на опоре A $\vartheta_A = 0$.

Решая совместно уравнения (6.7) и (6.8), после исключения $EJ_X \theta_0$, получим

$$156A_y + 20,8B_y - 926,9 = 0. \quad (6.9)$$

Из совместного решения уравнений (6.6) и (6.9) найдем, что $A_Y = 2,823$ кН, $B_Y = 23,39$ кН.

Осталась неизвестной еще реакция C_Y . Для определения ее нужно составить уравнение $\sum M = 0$ относительно точки A или B .

$$\sum M_A = 10 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 8,5 + 7 - 23,39 \cdot 6 - C_Y \cdot 11 = 0, \text{ откуда } C_Y = 13,79 \text{ кН.}$$

Контроль правильности определения реакций выполним по уравнению (6.5):

$$\sum Y = 2,823 + 23,39 + 13,79 - 10 - 6 \cdot 5 = 40,0 - 40,0 = 0 - \text{раскрытие статической неопределимости выполнено верно.}$$

Дальнейший расчет балки обычный.

Ординаты эпюры M_X в характерных сечениях:

сечение A $M = 0$;

сечение K $M = 2,823 \cdot 3 = 8,47$ кН·м;

сечение B $M = 2,823 \cdot 6 - 10 \cdot 3 = -13,06$ кН·м;

сечение C $M = -7$ кН·м;

сечение D $M = -7 - 6 \cdot 2,5 \cdot \frac{2,5}{2} + 13,79 \cdot 2,5 = 8,725$ кН·м.

При $z = 2,3$ м (ход справа) $M = -7 - 6 \cdot \frac{2,3^2}{2} + 13,79 \cdot 2,3 = 8,85$ кН·м.

Эпюры Q и M_X показаны на рис. 6.4, б, в.

Из эпюры M_X следует, что $M_{X,\max} = 13,06$ кН·м.

Требуемый момент сопротивления для подбора номера двутавра

$$W_X \geq \frac{M_{X,\max}}{R} = \frac{13,06 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,0623 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 62,3 \text{ см}^3.$$

Принимаем двутавр номер 14 с $W_X = 81,7$ см³, $J_X = 572$ см⁴.

Для определения прогибов в сечениях балки составим соответствующее выражение (по методу начальных параметров), учтя, что $\vartheta_0 = 0$.

$$EJ_X \vartheta = EJ_X \theta_0 z + 2,823 \frac{z^3}{6} - 10 \frac{(z-3)^3}{6} + 23,39 \frac{(z-6)^3}{6} - 6 \frac{(z-6)^4}{24}.$$

Начальный параметр θ_0 определим из условия, что прогиб на опоре B ($z = 6$ м) равен нулю ($\vartheta_B = 0$):

$$EJ\vartheta_B = EJ_X\theta_0 \cdot 6 - 2,823 \cdot \frac{6^3}{6} - 10 \frac{(6-3)^3}{6} = 0,$$

откуда $EJ_X\theta_0 = -9,439 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$.

Прогиб в заданном сечении D (при $z = 8,5 \text{ м}$):

$$EJ_X\vartheta_D = -9,439 \cdot 8,5 + 2,823 \frac{8,5^3}{6} - 10 \frac{(8,5-3)^3}{6} + \\ + 23,39 \frac{(8,5-6)^3}{6} - 6 \frac{(8,5-6)^4}{24} = -17,47 \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

$$\vartheta_D = -\frac{17,47 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -0,0001527 \cdot 10^2 \text{ м} = -1,53 \text{ см}.$$

Ось изогнутой балки изображена на рис. 6.4, *з*.

Напомним – очертание эпюры прогибов должно согласовываться с эпюрой M_X – ординаты M_X должны находиться на выпуклой стороне балки. В сечениях, где $M_X = 0$ на эпюре прогибов должны быть точки перегиба.

2. Расчет по методу сил.

Необходимую для расчета основную систему получим путем постановки шарнира на промежуточной опоре B (рис. 6.5, *а*). Образуются две статически определимые балки, связанные между собой шарниром B (на рис. 6.5, *а* балки несколько раздвинуты для удобства пояснения).

Обозначим неизвестный опорный момент через X_1 и для его определения запишем каноническое уравнение метода сил (по уравнению (6.1)):

$$X_1\delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

Параметры уравнения определим по методу Верещагина. Сначала загружаем основную систему заданной нагрузкой, определяем опорные реакции и обычным способом строим эпюры изгибающих моментов M_F (грузовые эпюры) для каждого пролета (рис. 6.5, *б*).

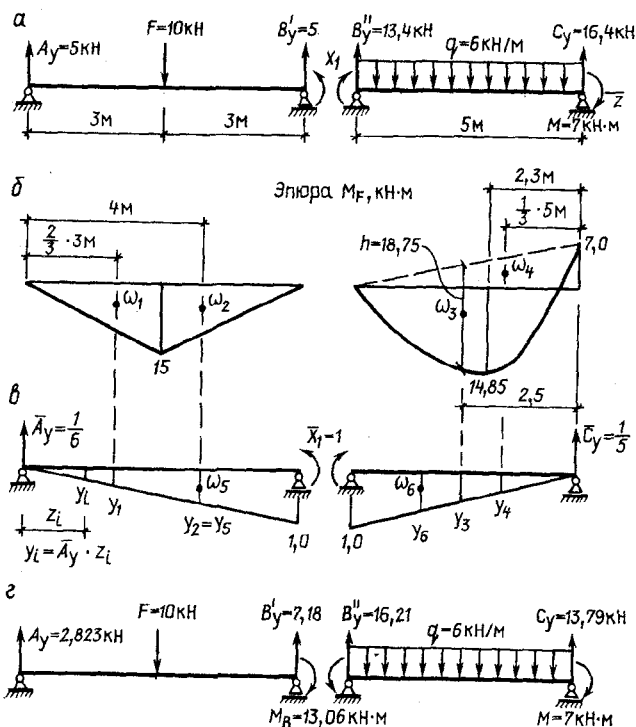


Рис. 6.5

Затем нагружаем основную систему единичным опорным моментом $\bar{X}_1 = 1$, определяем опорные реакции и строим эпюру изгибающих моментов \bar{M} (единичную эпюру) также для каждого пролета (рис. 6.5, в).

Примечание. Направлять неизвестное $X = 1$ можно произвольно. На рис. 6.5, в совмещены схема пролета балки, единичная нагрузка и эпюры моментов от этой нагрузки.

Грузовая эпюра M_F расчленяется на простые фигуры $\omega_1 \dots \omega_4$ и отмечаются их центры тяжести. На единичных эпюрах \bar{M} под центром тяжести простых фигур вычисляются значения ординат $y_1 \dots y_4$ и отмечаются собственные центры тяжести ω_5, ω_6 .

Вычислим сначала значения всех площадей ω (треугольники и парабола) и ординат y .

$$\text{Площади: } \omega_1 = \omega_2 = \frac{15 \cdot 3}{2} = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2,$$

$$\omega_3 = \frac{2}{3} \cdot h \cdot l = \frac{2}{3} \cdot \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot l = \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5^2}{8} \cdot 5 = 62,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2,$$

$$\omega_4 = \frac{7 \cdot 5}{2} = 17,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2,$$

$$\omega_5 = \frac{1 \cdot 6}{2} = 3 \text{ м},$$

$$\omega_6 = \frac{1 \cdot 5}{2} = 2,5 \text{ м}.$$

$$\text{Ординаты: } y_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{1}{3} \text{ м}, \quad y_2 = y_5 = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = \frac{2}{3} \text{ м},$$

$$y_3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{1}{2} \text{ м}, \quad y_4 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{1}{3} \text{ м}, \quad y_6 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{2}{3} \text{ м}.$$

Напомним, что $y_i = \bar{A}_y(\bar{C}_y) \cdot z_i$.

Приступаем к определению параметров уравнения метода сил (6.5).

Умножив единичную эпюру \bar{M} саму на себя получим значение коэффициента уравнения

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_X} (\omega_5 \cdot y_5 + \omega_6 \cdot y_6) = \frac{1}{EJ_X} \left(3 \cdot \frac{2}{3} + 2,5 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{3,67}{EJ_X}.$$

Умножив грузовую эпюру M на единичную \bar{M} получим значение свободного члена уравнения

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \frac{1}{EJ_X} (\omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 \cdot y_2 + \omega_3 \cdot y_3 - \omega_4 \cdot y_4) = \\ &= \frac{1}{EJ_X} \left(22,5 \cdot \frac{1}{3} + 22,5 \cdot \frac{2}{3} + 62,5 \cdot \frac{1}{2} - 17,5 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{47,92}{EJ_X}. \end{aligned}$$

Заметим, что произведение $\omega \cdot y$ будет положительным, если площадь ω и ордината «у» лежат по одну сторону от оси эпюры, отрицательным – если по разные (в примере ω_4 и y_4 – по разные).

Из уравнения (6.5) получим

$$X_{11}\delta_{11} + \Delta_{1F} = X_1 \cdot 3,67 + 47,92 = 0, \text{ откуда } X_1 = -\frac{47,92}{3,67} = -13,06 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Знак минус при X_1 означает, что направление изгибающего момента на опоре B противоположно предполагаемому.

Таким образом, определением изгибающего момента на опоре B балки $M_B = X_1 = 13,06$ кН·м заканчивается раскрытие ее статической неопределенности.

Для построения эпюр Q и M нужно рассматривать отдельно балку каждого пролета, нагруженную заданной нагрузкой и найденным опорным моментом (рис. 6.5, z).

Построив эпюры Q и M , можно убедиться, что они совпадают с показанными на рис. 6.4, $b, в$.

Для определения прогибов по методу Верещагина в заданном сечении D основной системы следует приложить единичную силу $F = 1$ (рис. 6.6, b), построить от нее единичную эпюру и перемножить эту эпюру с окончательной эпюрой изгибающих моментов M в этом пролете балки (рис. 6.6, a).

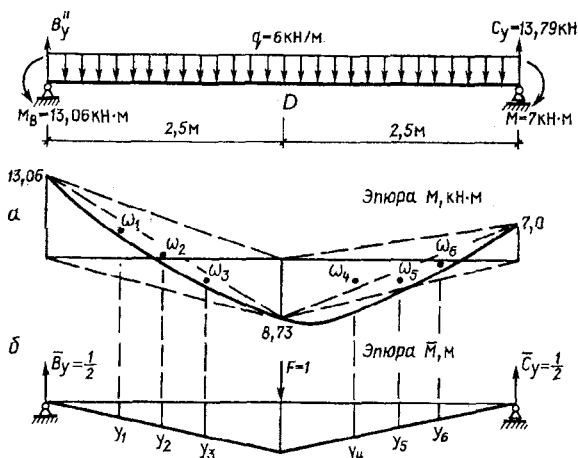


Рис. 6.6

При расчленении сложной эпюры M на простые фигуры следует иметь в виду, что единичная сила $F = 1$ разделила пролет балки на

два расчетных участка и на каждом из них выделяется парабола и два треугольника (см. рис. 6.6, а).

Площади фигур:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 13,06 \cdot 2,5 = 16,33 \text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

$$\omega_2 = \omega_5 = \frac{2}{3} \cdot h \cdot l = \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2,5^2}{8} \cdot 2,5 = 7,81 \text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

$$\omega_3 = \omega_4 = \frac{1}{2} \cdot 8,725 \cdot 2,5 = 10,91 \text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

$$\omega_6 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2,5 = 8,75 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

Ординаты y :

$$y_1 = y_6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2,5}{3} = 0,417 \text{ м},$$

$$y_3 = y_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 = 0,833 \text{ м},$$

$$y_2 = y_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2,5}{2} = 0,625 \text{ м}.$$

Заметим, что обе параболы (ω_2 и ω_5) лежат ниже оси эпюры M . Это станет очевидным, если представить эпюру M только от распределенной нагрузки q .

Прогиб в сечении D :

$$\begin{aligned} EJ_X \vartheta_D &= (-\omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 \cdot y_2 + \omega_3 \cdot y_3 + \omega_4 \cdot y_4 + \omega_5 \cdot y_5 - \omega_6 \cdot y_6) = \\ &= (-16,33 \cdot 0,417 + 0,781 \cdot 0,625 + 10,91 \cdot 0,833 + 10,91 \cdot 0,833 + \\ &\quad + 7,81 \cdot 0,625 - 8,75 \cdot 0,417) = 17,46 \text{ кН}\cdot\text{м}^3. \end{aligned}$$

$$\vartheta_D = \frac{17,46 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,0001526 \cdot 10^2 \text{ м} = 1,53 \text{ см}.$$

Знак плюс при ϑ_D означает, что прогиб происходит в направлении единичной силы $F = 1$, т.е. вниз.

Таким образом, результаты расчета двухпролетной балки методом начальных параметров и методом сил совпадают.

Анализируя трудоемкость расчета можно сделать вывод, что для балки один раз статически неопределимой оба метода примерно равноценны. При большей степени статической неопределимости – метод сил эффективнее.

Заметим, что при сложной нагрузке (особенно распределенной q) вычисление прогибов по методу Верещагина может оказаться сложнее, чем по методу начальных параметров.

Пример 6.3

Для многопролетной балки (рис. 6.7, а) построить эпюры Q и M , подобрать номер прокатного двутавра, если $R = 210$ МПа.

Определить прогиб посередине ненагруженного пролета, изобразить ось изогнутой балки.

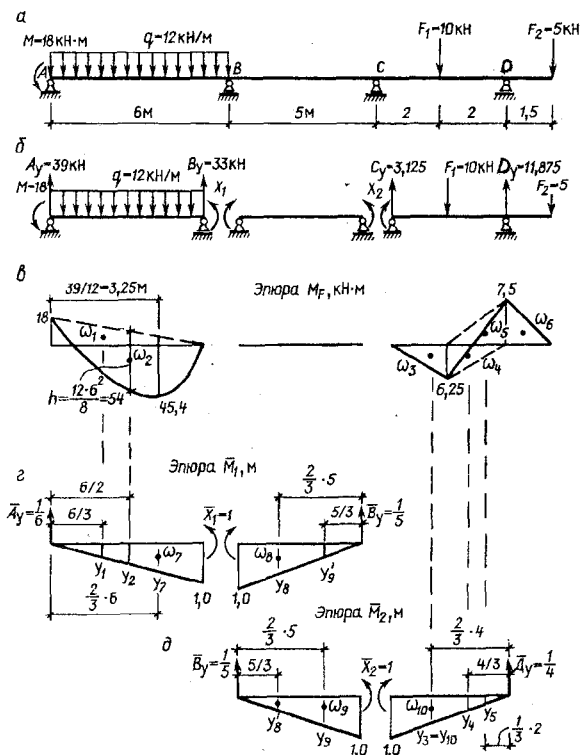


Рис. 6.7

Решение

Рассматриваемая балка состоит из трех пролетов и проходит не прерываясь над двумя промежуточными опорами, т.е. является неразрезной и дважды статически неопределимой (по числу промежуточных опор). Для ее решения воспользуемся методом сил.

Основную систему получим путем постановки шарниров на промежуточных опорах B и C (рис. 6.7, б). Обозначив неизвестные изгибающие моменты на этих опорах через X_1 и X_2 , запишем систему канонических уравнений (по выражению (6.1)):

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1F} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Загрузив основную систему заданной нагрузкой (рис. 6.7, б), вычислив опорные реакции и значения M в характерных сечениях, построим грузовую эпюру изгибающих моментов M_F для каждого пролета балки (рис. 6.7, в).

Затем нагружаем основную систему единичными опорными моментами $\overline{X}_1 = 1$ на опоре B и $\overline{X}_2 = 1$ на опоре C . Для каждого пролета основной системы определяем опорные реакции и строим единичные эпюры \overline{M} (рис. 6.7, з, д).

Грузовая эпюра M_F расчленяется на простые фигуры $\omega_1 \dots \omega_6$, и отмечаются их центры тяжести (см. рис. 6.7, в). На единичных эпюрах \overline{M} под центрами тяжести $\omega_1 \dots \omega_6$ вычисляются значения ординат $y_1 \dots y_6$ (см. рис. 6.7, з, д). Отмечаются также центры тяжести единичных эпюр $\omega_7 \dots \omega_{10}$ и ординаты $y_7 \dots y_{10}$ в их расположении.

Вычисляем значения площадей фигур, составляющих эпюры M_F и \overline{M} :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{18 \cdot 6}{2} = 54 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, & \omega_2 &= \frac{2}{3} \cdot h \cdot l = \frac{2}{3} \cdot 54 \cdot 6 = 216 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \\ \omega_3 &= \omega_4 = \frac{6,25 \cdot 2}{2} = 6,25 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, & \omega_7 &= \frac{1 \cdot 6}{2} = 3,0 \text{ м}, \\ \omega_5 &= \frac{7,5 \cdot 2}{2} = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, & \omega_8 &= \omega_9 = \frac{1 \cdot 5}{2} = 2,5 \text{ м}, \end{aligned}$$

$$\omega_6 = \frac{7,5 \cdot 1,5}{2} = 5,63 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad \omega_{10} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2,0 \text{ м.}$$

Вычисляем значения ординат y на единичных эпюрах:

$$y_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 = \frac{1}{3} \text{ м}, \quad y_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{1}{2} \text{ м}, \quad y_3 = \frac{1}{4} \cdot (2 + \frac{1}{3} \cdot 2) = \frac{2}{3} \text{ м},$$

$$y_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3} \text{ м}, \quad y_5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1}{6} \text{ м}, \quad y_6 = 0 \text{ м},$$

$$y_7 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{2}{3} \text{ м}, \quad y_8 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{2}{3} \text{ м}, \quad y_8' = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{1}{3} \text{ м},$$

$$y_9 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{2}{3} \text{ м}, \quad y_{10} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{2}{3} \text{ м}.$$

Перемножив единичные эпюры (самих на себя и между собой), получим значения коэффициентов канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_X} (\omega_7 \cdot y_7 + \omega_8 \cdot y_8) = \frac{1}{EJ_X} (3 \cdot \frac{2}{3} + 2,5 \cdot \frac{2}{3}) = \frac{3,667}{EJ_X},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_X} (\omega_3 \cdot y_3 + \omega_{10} \cdot y_{10}) = \frac{1}{EJ_X} (2,5 \cdot \frac{2}{3} + 2,0 \cdot \frac{2}{3}) = \frac{3,0}{EJ_X},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ_X} (\omega_8 \cdot y_8') = \frac{1}{EJ_X} (2,5 \cdot \frac{1}{3}) = \frac{0,833}{EJ_X}.$$

Перемножив грузовые эпюры на единичные, получим значения свободных членов канонических уравнений:

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ_X} (-\omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 \cdot y_2) = \frac{1}{EJ_X} (-54 \cdot \frac{1}{3} + 216 \cdot \frac{1}{2}) = \frac{90}{EJ_X},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2F} &= \frac{1}{EJ_X} (\omega_3 \cdot y_3 + \omega_4 \cdot y_4 - \omega_5 \cdot y_5 + \omega_6 \cdot y_6) = \\ &= \frac{1}{EJ_X} (6,25 \cdot \frac{2}{3} + 6,25 \cdot \frac{1}{3} - 7,5 \cdot \frac{1}{6} + 5,63 \cdot 0) = \frac{5}{EJ_X}. \end{aligned}$$

С учетом значений коэффициентов и свободных членов канонические уравнения примут вид

$$\left. \begin{aligned} 3,667X_1 + 0,883X_2 + 90 &= 0 \\ 0,883X_1 + 3,00X_2 + 5 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6.11)$$

Решив систему уравнений (6.11), получим значения изгибающих моментов на промежуточных опорах неразрезной балки: $X_1 = M_1 = -25,79$ кН·м, $X_2 = M_2 = 5,489$ кН·м.

Внимание! Решая задачи самостоятельно не забудьте проверить правильность решения системы уравнений (6.11).

Заметим и учтем, что направление опорного момента M_1 противоположно направлению $\overline{X_1}$ (знак минус), а направления M_2 и $\overline{X_2}$ совпадают.

Определением значений M_1 и M_2 заканчивается раскрытие статической неопределимости балки.

Окончательные эпюры Q и M построим, рассматривая отдельно каждый пролет неразрезной балки как самостоятельную балку, нагруженную заданной нагрузкой и найденными опорными моментами (рис. 6.8, а). Сначала определяются опорные реакции, а затем значения Q и M в характерных сечениях.

Эпюры Q и M для рассмотренной неразрезной балки показаны на рис. 6.8, б, в.

Для проверки правильности выполнения расчетов надо перемножить окончательную эпюру изгибающих моментов на единичные. Решение будет верным, если результат перемножения будет равен нулю.

Ограничимся перемножением окончательной эпюры M на единичную $\overline{M_1}$ (рис. 6.9, а, б):

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \Sigma(\omega_i \cdot y_i) = \frac{2}{3} \cdot 54 \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 - 18 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} - \\ &- (25,79 - 18) \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{25,79}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{5,486 \cdot 5}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 = \\ &= 112,57 - 112,56 = 0,01 \approx 0 - \text{решение верно.} \end{aligned}$$

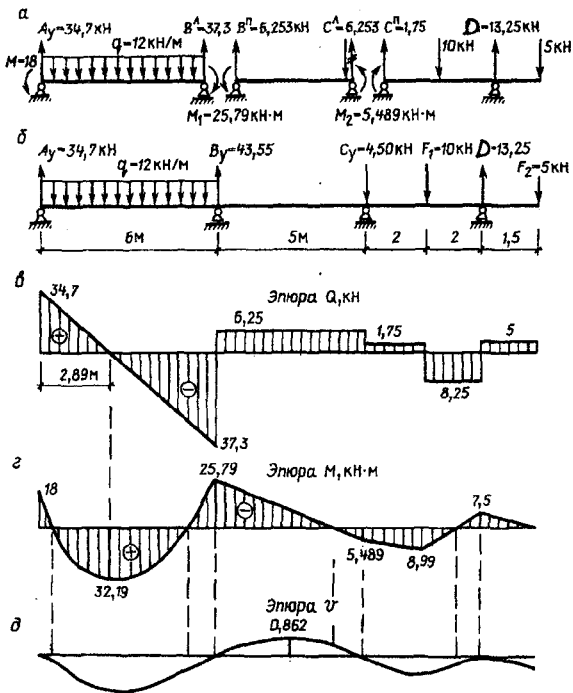


Рис. 6.8

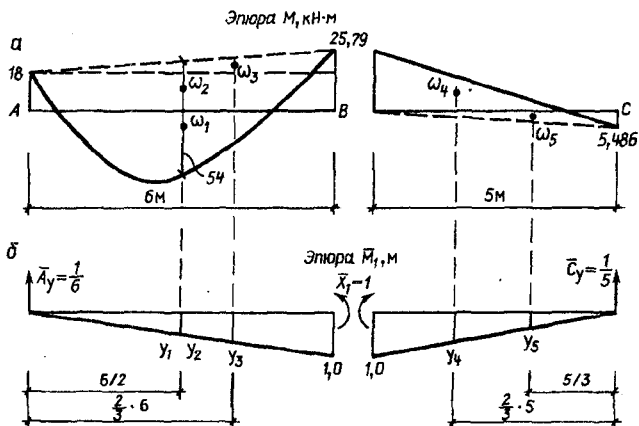


Рис. 6.9

Определим номер двутавра. Из окончательной эпюры M следует, что $M_{x,\max} = 32,19 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Требуемый момент сопротивления сечения

$$W_X \geq \frac{M_{X,\max}}{R} = \frac{32,19 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 153 \text{ см}^3.$$

Принимаем двутавр № 20, для которого $W_x = 184 \text{ см}^3$, $J_x = 1840 \text{ см}^4$.

Для определения прогиба посередине пролета BC (сечение K) следует приложить в названном сечении основной системы единичную силу $F = 1$ и построить единичную эпюру \bar{M} (рис. 6.10, а).

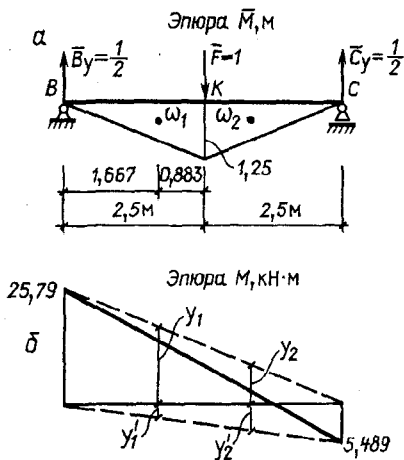


Рис. 6.10

Напомним, что:

- единичная эпюра всегда прямолинейна,
- площадь ω берется обязательно с криволинейной эпюры,
- если обе эпюры (грузовая и единичная) прямолинейны, без перелома, площадь ω можно взять от любой из них,
- если одна из эпюр изображается ломанной линией – она разбивается на ряд участков и площадь ω берется именно с этой эпюры.

В настоящем примере на грузовой эпюре M один расчетный участок, на единичной (ломаная прямая) – два. Площадь ω берется с каждого участка единичной эпюры, а ординаты y с грузовой, расчленив ее, как показано на рис. 6.10, б.

Значения площадей и ординат:

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1,25 \cdot 2,5}{2} = 1,563 \text{ м},$$

$$y_1 = \frac{25,79}{5} \cdot 3,333 = 17,19 \text{ м (из подобных треугольников),}$$

$$y_1' = \frac{5,489}{5} \cdot 1,667 = 1,83 \text{ м}, \quad y_2 = 3,659 \text{ м}, \quad y_2' = 8,538 \text{ м}.$$

Перемножив эпюры, получим

$$\begin{aligned} EJ_X \vartheta_K &= -\omega_1(y_1 - y_1') - \omega_2(y_2 - y_2') = \\ &= -1,563 \cdot (17,19 - 1,83) - 1,563 \cdot (8,538 - 3,654) = -31,73 \text{ кН} \cdot \text{м}^3, \end{aligned}$$

$$\text{откуда прогиб } \vartheta_K = -\frac{31,73 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = -0,000086210^2 \text{ м} = -0,862 \text{ см}.$$

Знак минус при v означает, что прогиб происходит в направлении противоположном единичной силе $\bar{F} = 1$, т.е. вверх (см. рис. 6.8, з).

Ось изогнутой неразрезной балки (эпюра прогибов) изображена на рис. 6.8, з.

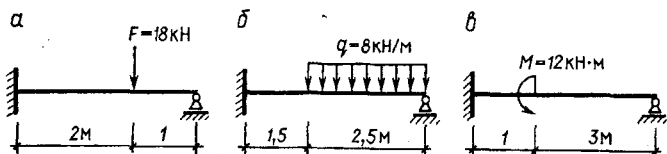
Обратите внимание на точки перегиба на эпюре v и проследите согласование расположения ординат эпюры M с выпуклостью балки.

Задачи для аудиторного и самостоятельного решения

Задача 6.1

Для балки с защемленным левым и шарнирно опертым правым концом построить эпюры Q и M , определить прогиб посередине пролета, изобразить ось изогнутой балки. Жесткость сечения балки – EJ_X .

Воспользоваться уравнениями метода начальных параметров.



Ответы:

А. $A_Y = 8,67 \text{ кН}$; $B_Y = 9,33 \text{ кН}$; $M_A = 8,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $v = -4,12/EJ_X$.

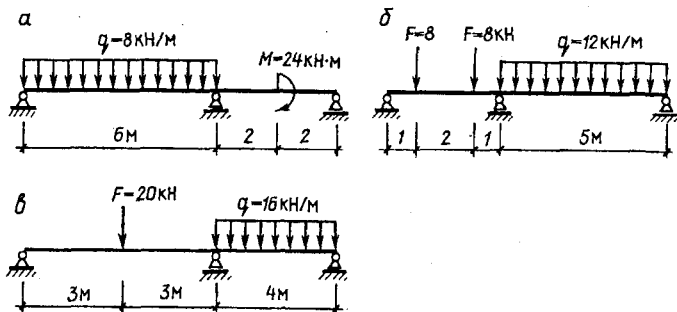
Б. $A_Y = 8,75 \text{ кН}$; $B_Y = 11,25 \text{ кН}$; $M_A = 10,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $v = -8,35/EJ_X$.

В. $A_Y = 1,97 \text{ кН}$; $B_Y = -1,97 \text{ кН}$; $M_A = -4,13 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $v = 4,79/EJ_X$.

Задача 6.2

Для двухпролетной балки построить эшоры Q и M , подобрать номер прокатного двутавра, если $R = 210$ МПа.

Использовать уравнения метода сил.



Ответы:

А. $M_B = -20,4$ кН·м; $M_{X,\max} = 26,5$ кН·м; двутавр № 18.

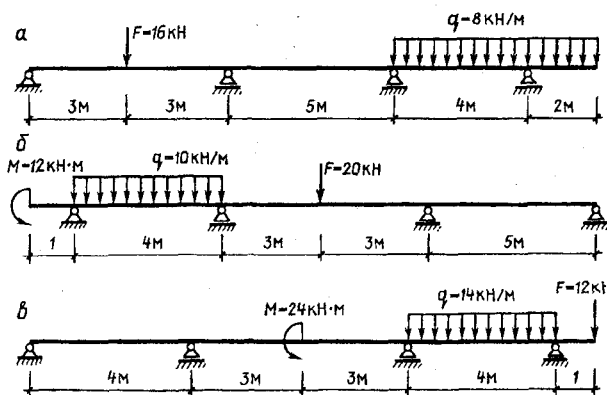
Б. $M_B = -24,8$ кН·м; $M_{X,\max} = 26,0$ кН·м; двутавр № 18.

В. $M_B = M_{X,\max} = -26,3$ кН·м; двутавр № 18.

Задача 6.3

Для многопролетной балки построить эшоры Q и M , подобрать номер прокатного двутавра, если $R = 210$ МПа.

Определить прогиб посередине ненагруженного пролета, изобразить ось изогнутой балки.



ОТВЕТЫ:

А. $M_B = -9,645 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_C = -0,714 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $Q_{\max} = -19,82 \text{ кН}$ ($z = 15 \text{ м}$);

$M_{X,\max} = 19,17 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ($z = 3 \text{ м}$); $v = 2,0 \text{ см}$ (вверх); двутавр № 16.

Б. $M_B = -16,8 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_C = -7,62 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $Q_{\max} = +18,8 \text{ кН}$ ($z = 1 \text{ м}$);

$M_{X,\max} = 17,76 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ($z = 8 \text{ м}$); $v = 0,68 \text{ см}$ (вверх); двутавр № 16.

В. $M_B = 0,924 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_C = -9,08 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $Q_{\max} = -28,73 \text{ кН}$ ($z = 18 \text{ м}$);

$M_{X,\max} = 17,48 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ($z = 11,95 \text{ м}$); $v = 0,062 \text{ см}$ (вниз); двутавр № 16.

Раздел 7. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

В случае простых видов сопротивлений (деформаций) (растяжение-сжатие, чистый изгиб, кручение) в поперечном сечении стержня возникают по одному внутреннему силовому фактору: при растяжении-сжатии – продольная сила N , при чистом изгибе – изгибающий момент M , при кручении – крутящий момент T .

При этом внешние силовые факторы, действующие на стержень, по отношению к его центральной продольной оси Z направлены строго определенным образом: при растяжении-сжатии – по его продольной оси (рис. 7.1, *a*), при изгибе – перпендикулярно продольной оси, но в одной из главных плоскостей сечения (рис. 7.1, *б*), при кручении – вокруг продольной оси (рис. 7.1, *в*).

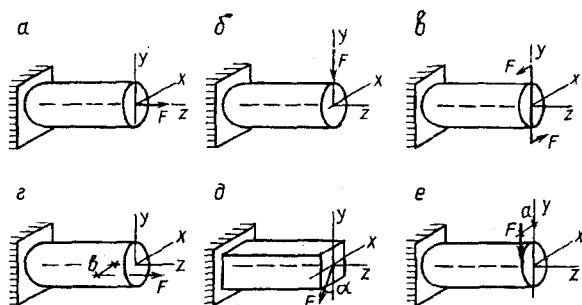


Рис. 7.1

На практике часты случаи, когда внешние силы ориентированы по отношению к продольной оси Z стержня произвольно: параллельно продольной оси, но с эксцентриситетом b к ней (рис. 7.1, *г*), перпендикулярно продольной оси, но не в главной плоскости сечения (рис. 7.1, *д*), перпендикулярно продольной оси, но с эксцентриситетом a к ней (рис. 7.1, *е*). В таких случаях в поперечном сечении стержня возникает одновременно несколько внутренних силовых факторов и он находится в условиях *сложного сопротивления*.

Вид сложного сопротивления в простых случаях загрузки стержня легко установить по направлению внешних сил по отношению к его продольной оси. При сложной нагрузке вид сопротивления устанавливается после определения внутренних сил.

Для выявления внутренних сил все действующие на стержень произвольно направленные внешние силы (рис. 7.2, *a*) должны быть

разложены на составляющие по направлению координатных осей (рис.7.2, б) и приведены к продольной оси Z по правилам механики (рис.7.2, в). Заметим, что оси X и Y являются главными центральными осями сечения стержня. В общем случае действия сил в сечении стержня образуются продольная сила N , изгибающие моменты M_X и M_Y , крутящий момент $T = M_Z$ и поперечная сила Q .

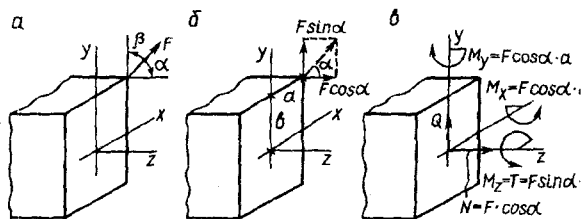


Рис. 7.2

По сочетанию внутренних сил различают следующие основные виды сложного сопротивления: косой изгиб (M_X, M_Y), внецентренное растяжение-сжатие (N, M_X, M_Y), изгиб с кручением (T, M_X, M_Y). Поперечная сила Q при расчете на прочность не играет существенной роли.

Методика расчета элементов конструкций на прочность при сложном сопротивлении идентична методике расчета простых сопротивлений: определяются опорные реакции, вычисляются значения внутренних сил, строятся их эпюры, выявляется опасное сечение и наиболее напряженная его точка, устанавливается вид напряженного состояния и вычисляется значение наибольшего напряжения, используя теории прочности.

Перемещения в элементах конструкции при сложном сопротивлении определяются теми же методами, что и при простых сопротивлениях.

Для достаточно жестких стержней (конструкций), имеющих очень малые деформации, используется принцип сложения действия сил. Это значит, что напряжения и перемещения от различных силовых воздействий суммируются: нормальные напряжения – алгебраически, а касательные и перемещения – геометрически.

Условие прочности и жесткости при сложном сопротивлении составляет идентично простым видам сопротивлений: максимальные напряжения и перемещения не должны превышать допустимых значений.

7.1. Косой изгиб

Косой изгиб наблюдается в тех случаях, когда плоскость действия нагрузки, проходящая через ось стержня, не совпадает ни с одной из главных плоскостей (рис. 7.3, б), или когда она действует одновременно в двух главных плоскостях (рис. 7.3, а).

В поперечном сечении стержня, подвергающегося косому изгибу, возникают, как и при плоском поперечном изгибе, поперечная сила Q и изгибающий момент M , но только не в одной, а в двух взаимно перпендикулярных главных плоскостях. Косой изгиб есть сочетание двух плоских изгибов.

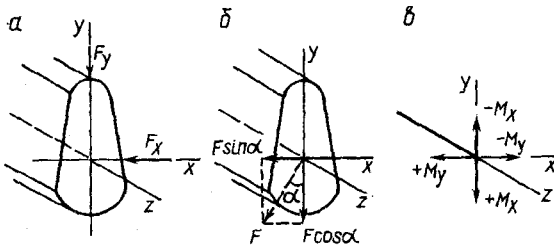


Рис. 7.3

Определение внутренних сил, построение их эпюр и нахождение напряжений при косом изгибе ведется по тем же правилам и формулам, что и при плоском изгибе.

Правило знаков для ординат изгибающих моментов при построении эпюр иллюстрируется рисунком 7.3, в.

Изгибающие моменты связаны с нормальными напряжениями, которые в любой точке поперечного сечения стержня при косом изгибе определяются по формуле

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{J_x} \cdot y \pm \frac{M_y}{J_y} \cdot x, \quad (7.1)$$

где M_x, M_y – изгибающие моменты в главных плоскостях исследуемого сечения;

J_x, J_y – моменты инерции сечения относительно главных центральных осей;

x, y – координаты точки, в которой определяется напряжение.

Знаки напряжений устанавливаются по смыслу: расположена ли рассматриваемая точка в растянутой ($+\sigma$) или сжатой ($-\sigma$) зоне сечения. Характер деформации зоны устанавливается по направлению изгибающих моментов M_x и M_y в данном сечении.

На рис. 7.4, а показаны эпюры нормальных напряжений в двух главных плоскостях сечения (σ_{M_x} и σ_{M_y}) и результирующая (эп. σ).

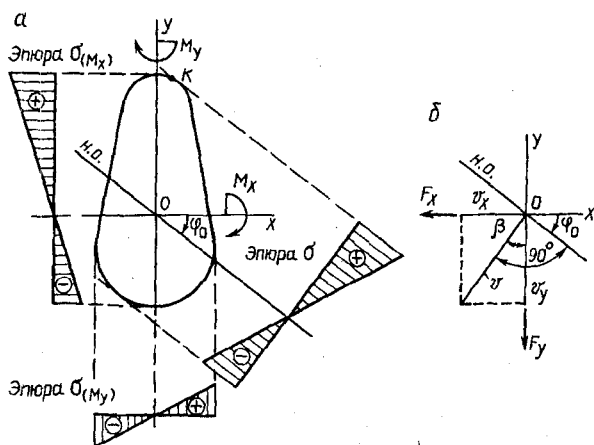


Рис. 7.4

Заметим, что изгибающий момент M_x растягивает часть сечения, расположенную выше оси X , а нижнюю часть сжимает (см. эп. σ_{M_x}). Изгибающий момент M_y растягивает часть сечения, расположенную справа от оси Y , а левую часть сжимает (см. эп. σ_{M_y}).

При сложной нагрузке характер деформации зоны сечения удобнее определять по эпюрам изгибающих моментов (см. примеры).

Нормальные напряжения при косом изгибе распределяются в поперечном сечении по линейному закону, но неравномерно (как и при плоском изгибе). Наибольшие напряжения возникают в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси (н.о.). На рис. 7.4, а это точка K . На этом же рисунке показаны эпюры нормальных напряжений от изгибающих моментов M_x и M_y и суммарная эпюра.

Напомним, что нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения и делит его на две зоны – растяжения и сжатия. На самой нейтральной оси волокна не деформируются, а следовательно, нормальные напряжения равны нулю.

Положение нейтральной оси определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{M_Y}{M_X} \cdot \frac{J_X}{J_Y}, \quad (7.2)$$

где φ_0 – угол наклона нейтральной оси к главной центральной оси X .

В приведенной формуле следует учитывать знаки изгибающих моментов. Положительное значение угла φ_0 отсчитывается от оси X против хода часовой стрелки, отрицательное – по ходу.

Максимальные нормальные напряжения действуют по контуру сечения стержня, где касательные напряжения равны нулю. Следовательно, в названных точках имеет место линейное напряженное состояние и условие прочности используется в виде $\sigma_{\max} \leq R$.

В развернутом виде условие прочности при косом изгибе для любой формы сечения в наиболее напряженной (опасной) точке имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{J_X} \cdot y_{\max} + \frac{M_Y}{J_Y} \cdot x_{\max} \leq R, \quad (7.3)$$

где x_{\max} , y_{\max} – координаты точки наиболее удаленной от нейтральной оси;

R – расчетное сопротивление материала стержня.

Для стержней из хрупкого материала следует проверять прочность как по растягивающим, так и по сжимающим напряжениям.

При сложной нагрузке, когда изгибающие моменты изменяются по длине стержня по различным законам, в поисках опасного приходится проверять несколько сечений, где оба изгибающих момента достигают возможно больших значений (см. примеры).

Для поперечных сечений, имеющих две оси симметрии и выступающие (не закругленные) углы (прямоугольник, двутавр, швеллер и подобные другие), условие прочности можно представить в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq R, \quad (7.4)$$

где W_x , W_y – моменты сопротивления сечения относительно главных центральных осей.

При подборе размеров сечения условие прочности целесообразно использовать в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x + kM_y}{W_x} = \frac{M_{des}}{W_x} \leq R, \quad (7.5)$$

где $M_{des} = M_x + kM_y$ – приведенный (расчетный) момент;
 k – коэффициент, равный отношению W_x / W_y .

Для прямоугольного сечения $k = h/b$, среднее значение для прокатного двутавра $k = 8$, для швеллера $k = 7$.

Наибольшее значение расчетного момента M_{des} определяется путем пробных вычислений в нескольких сечениях стержня.

Для стержня круглого поперечного сечения $W_x = W_y$. Поэтому косо́й изгиб сводится к плоскому и условие прочности принимает вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_x} \leq R, \quad (7.6)$$

где $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ – суммарный изгибающий момент в опасном сечении стержня.

Рациональной формой поперечного сечения при косом изгибе является сечение, у которого выполняется условие $\frac{W_x}{W_y} = \frac{M_x}{M_y}$. Для

прямоугольного сечения минимальная площадь сечения получается при условии $\frac{h}{b} = \frac{M_x}{M_y}$.

Перемещения в стержнях при косом изгибе определяются теми же методами, что и при плоском изгибе. Рекомендуется использовать уравнения метода начальных параметров, а также методы Мора и Верещагина.

Перемещения определяются отдельно в каждой из главных плоскостей (в горизонтальной v_x и вертикальной v_y) от действующих в них внешних сил или их составляющих (см. рис. 7.4, б).

Полный (суммарный) прогиб определяется по выражению $\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2}$, направлен перпендикулярно нейтральной оси и под углом β к вертикальной оси сечения ($\beta = \varphi_0$).

При косом изгибе продольная ось стержня представляет собой плоскую или пространственную кривую.

Пример 7.1

Проверить прочность и жесткость стальной консольной балки составного поперечного сечения (рис. 7.5, а), если нагрузка F направлена под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикальной оси сечения.

Для материала балки: $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.

Допустимый относительный прогиб балки $\left(\frac{\vartheta}{l}\right)_{\text{adm}} = \frac{1}{500}$.

Для определения прогиба на конце консоли (т. В) воспользоваться формулой $\vartheta = \frac{Fl^3}{3EJ}$, взятой из справочника.

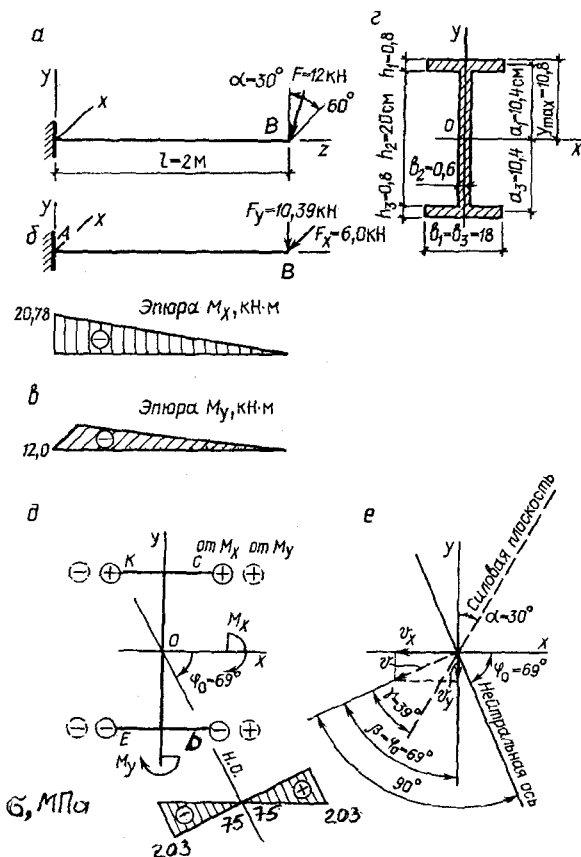


Рис. 7.5

Решение

Внешняя сила действует на балку перпендикулярно ее продольной оси и не совпадает ни с одной из главных центральных осей сечения X, Y .

Следовательно, рассматриваемая балка подвергается деформации косоугольного изгиба.

Разложим силу F на составляющие по направлению главных центральных осей сечения (рис. 7.5, б).

$$F_y = F \cos 30^\circ = 12 \cdot 0,866 = 10,39 \text{ кН},$$

$$F_x = F \cos 60^\circ = 12 \cdot 0,50 = 6,0 \text{ кН}.$$

Вычислим значения изгибающих моментов для характерных сечений балки в главных плоскостях (в вертикальной и горизонтальной).

В вертикальной плоскости:

$$\text{в сечении } B \quad M_x = 0, \text{ в сечении } A \quad M_x = F_y \cdot 2 = 10,39 \cdot 2 = 20,78 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

В горизонтальной плоскости:

$$\text{в сечении } B \quad M_y = 0, \text{ в сечении } A \quad M_y = F_x \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры изгибающих моментов строятся отдельно в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис. 7.5, в).

В примере опасное сечение A , где оба изгибающих момента достигают максимальных значений.

Поскольку сечение балки имеет две оси симметрии и незакругленные углы для ведения расчета, целесообразно использовать условие прочности в виде (7.4):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq R.$$

Приступим к вычислению геометрических характеристик сечения балки. Для вычисления моментов инерции сечение следует разделить на три прямоугольника (рис. 7.5, г). Вследствие симметрии сечения центр тяжести его очевиден.

Следует обратить внимание, что оси Y всех трех прямоугольников, составляющих сечение, совпадают, а оси X — не совпадают. При вычислении J_x учесть переход к параллельным осям.

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей:

$$\begin{aligned}
 J_X &= \frac{b_2 h_2^3}{12} + 2 \cdot \left(\frac{b_1 h_1^3}{12} + b_1 \cdot h_1 \cdot a_1^2 \right) = \\
 &= \frac{0,6 \cdot 20^3}{12} + 2 \cdot \left(\frac{18 \cdot 0,8^3}{12} + 0,8 \cdot 18 \cdot 10,4^2 \right) = 3517 \text{ см}^4, \\
 J_Y &= \frac{h_2 b_2^3}{12} + 2 \cdot \left(\frac{h_1 b_1^3}{12} \right) = \frac{20 \cdot 0,6^3}{12} + 2 \cdot \frac{0,8 \cdot 18^3}{12} = 778 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Моменты сопротивления сечения:

$$W_X = \frac{J_X}{y_{\max}} = \frac{3517}{10,8} = 325,6 \text{ см}^3, \quad W_Y = \frac{J_Y}{x_{\max}} = \frac{778}{9} = 86,4 \text{ см}^3.$$

Перейдем к вычислению нормальных напряжений в балке. Значение максимального нормального напряжения в опасном сечении балки (сечение A) будет

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\max} &= \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} = \frac{20,78 \cdot 10^3}{325,6 \cdot 10^{-6}} + \frac{12,0 \cdot 10^3}{86,4 \cdot 10^{-6}} = \\
 &= 0,06382 \cdot 10^9 \text{ Па} + 0,1389 \cdot 10^9 \text{ Па} = \\
 &= 63,82 \text{ МПа} + 138,9 \text{ МПа} = 202,7 \text{ МПа} < R.
 \end{aligned}$$

По результату вычисления следует, что прочность балки обеспечена. Для установления наиболее напряженной точки опасного сечения следует знать положение нейтральной оси в этом сечении, которое определяется из формулы (7.2):

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{M_Y}{M_X} \cdot \frac{J_X}{J_Y} = -\frac{-12}{20,78} \cdot \frac{3517}{778} = -2,61 \quad \text{и} \quad \varphi_0 = -69,0^\circ.$$

Заметим, что в формуле (7.2) следует учитывать знаки изгибающих моментов.

Отрицательное значение угла φ откладываем от оси X по ходу часовой стрелки (рис. 7.5, δ).

Знаки нормальных напряжений в точках сечения устанавливаются исходя из зоны растяжения и сжатия.

Так, часть сечения A , расположенная выше оси X , от изгибающего момента M_x растянута ($+\sigma$), а часть, расположенная ниже оси X , — сжата ($-\sigma$).

От изгибающего момента M_y растянута часть сечения, расположенная справа от оси Y , и сжата, расположенная слева (см. рис. 7.5, δ).

Определим нормальные напряжения в характерных (угловых) точках опасного сечения A , используя ранее вычисленные его составляющие:

$$\sigma_C = 63,8 + 138,9 = 202,7 \text{ МПа}; \quad \sigma_D = -63,8 + 138,9 = 75,1 \text{ МПа},$$

$$\sigma_E = -63,8 - 138,9 = -202,7 \text{ МПа}; \quad \sigma_K = 63,8 - 138,9 = -75,1 \text{ МПа}.$$

Суммарная эпюра нормальных напряжений показана на рис. 7.5, δ .

Заметим, что максимальные нормальные напряжения находятся, как и при плоском изгибе, в точках наиболее удаленных от нейтральной оси (точки C и E).

Завершим пример рассмотрением перемещений балки.

Вычислим значения вертикального и горизонтального прогиба свободного конца балки (сечение B)

$$\vartheta_Y = \frac{F_Y \cdot l^3}{3EJ_X} = \frac{10,39 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 3517 \cdot 10^{-8}} = 0,000039 \cdot 10^2 \text{ м} = 0,0039 \text{ см},$$

$$\vartheta_X = \frac{F_X \cdot l^3}{3EJ_Y} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 778 \cdot 10^{-8}} = 0,000103 \cdot 10^2 \text{ м} = 0,0103 \text{ см}.$$

Суммарный абсолютный прогиб конца балки (см. рис. 7.5, δ):

$$\vartheta = \vartheta_{\max} = \sqrt{\vartheta_X^2 + \vartheta_Y^2} = \sqrt{0,0039^2 + 0,0103^2} = 0,011 \text{ см}.$$

Относительный прогиб

$$\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{0,011}{200} = \frac{1}{18200} < \frac{1}{500} \text{ — жесткость балки обеспечена.}$$

Полный прогиб балки v направлен перпендикулярно нейтральной оси (н.о.), под углом $\beta = \varphi = 69^\circ$ к вертикальной оси Y сечения и под углом $\gamma = \beta - \alpha_0 = 69^\circ - 30^\circ = 39^\circ$ к силовой плоскости (рис. 7.5, e).

Поскольку в любом сечении рассматриваемой балки отношение

$$\frac{M_X}{M_Y} = \text{const}, \text{ изогнутая ось балки представляет собой плоскую кривую.}$$

Пример 7.2

Определить значение наибольшей допустимой нагрузки q на стальную консольную балку (рис. 7.6, а), выполненную из двутавра № 24, расположив его сечение рационально по отношению к этой нагрузке.

Расчетное сопротивление для стали $R = 210$ МПа.

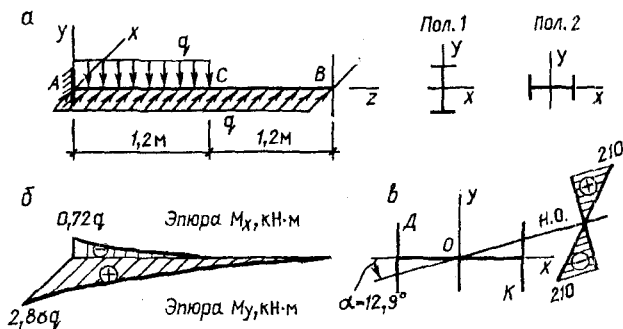


Рис. 7.6

Решение

Нагрузка на балку действует в двух плоскостях, совпадающих с главными центральными осями сечения X и Y , т.е. в двух главных плоскостях. Значит, эта балка подвергается косому изгибу.

Выпишем из таблицы сортамента геометрические характеристики для двутавра № 24, соответствующие положению 1:

$$J_x = 3460 \text{ см}^4; J_y = 198 \text{ см}^4; W_x = 289 \text{ см}^3; W_y = 34,5 \text{ см}^3.$$

Во втором положении двутавра его характеристики будут:

$$J_x = 198 \text{ см}^4; J_y = 3460 \text{ см}^4; W_x = 34,5 \text{ см}^3; W_y = 289 \text{ см}^3.$$

Эпюры изгибающих моментов строятся в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис. 7.6, б).

$$\text{В сечении } A: M_x = q \cdot 1,2 \cdot \frac{1,2}{2} = 0,72q; \quad M_y = q \cdot 2,4 \cdot \frac{2,4}{2} = 2,88q.$$

Анализ эпюр изгибающих моментов показывает, что в опасном сечении A балки наибольший изгибающий момент действует в горизонтальной плоскости ($M_y > M_x$). Следовательно, рациональным будет второе положение сечения балки, т.к. большему изгибающему моменту будет соответствовать больший момент сопротивления.

Исходя из формы поперечного сечения балки, условие прочности следует использовать в виде (7.4):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} = \frac{0,72q}{34,5 \cdot 10^{-6}} + \frac{2,88q}{289 \cdot 10^{-6}} = R = 210 \text{ МПа.}$$

Из этого условия наибольшая допустимая нагрузка на балку будет

$$0,0308q = 210, \text{ откуда } q = \frac{210}{0,0308} = 6818 \text{ Н/м} = 6,82 \text{ кН/м.}$$

В завершении примера определим положение нейтральной оси и построим суммарную эпюру нормальных напряжений.

Угол наклона нейтральной оси к главной центральной оси X определяется по формуле (7.2):

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{M_Y}{M_X} \cdot \frac{J_X}{J_Y} = -\frac{2,88 \cdot 6,8 \cdot 10^3}{-0,72 \cdot 6,8 \cdot 10^3} \cdot \frac{198 \cdot 10^{-6}}{3460 \cdot 10^{-6}} = 0,229, \quad \varphi_0 = 12,9^\circ.$$

Положительное значение угла φ_0 отсчитывается от оси X против хода часовой стрелки (рис. 7.6, в).

На нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю. Наибольшие напряжения будут в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, и равны расчетному сопротивлению R . Это точки D и K сечения.

В точке D нормальные напряжения будут положительными как от момента M_x , так и от момента M_y . В точке K оба значения отрицательны (см. рис. 7.6, в).

Пример 7.3

Определить размеры поперечного прямоугольного сечения деревянной двухопорной балки (рис. 7.7, а), подвергающейся изгибу в двух главных плоскостях, при заданном отношении сторон $h/b = 1,4$.

Расчетное сопротивление материала балки $R = 12 \text{ МПа}$.

Примечание. Виды опор балки в вертикальной и горизонтальной плоскостях одинаковы.

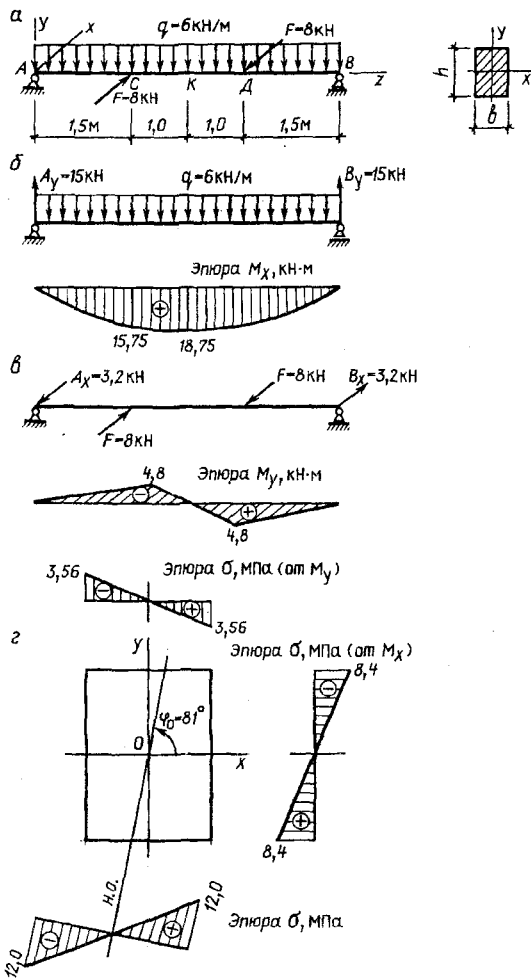


Рис. 7.7

Решение

Рассматриваемая балка подвергается косому изгибу.

Определим реакции опор и построим эпюры изгибающих моментов в плоскостях действующей нагрузки.

Вертикальная плоскость (рис. 7.7, б):

$\sum M_A = B_y \cdot 5 - 6 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0$, откуда $B_y = 15$ кН. Аналогично $A_y = 15$ кН.

$$\text{При } z = 1,5 \text{ м } M_c = 15 \cdot 1,5 - 6 \cdot \frac{1,5^2}{2} = 15,75 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } z = 2,5 \text{ м } M_k = 15 \cdot 2,5 - 6 \cdot \frac{2,5^2}{2} = 18,75 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Горизонтальная плоскость (рис. 7.7, в)

$\sum M_A = -B_x \cdot 5 - 8 \cdot 1,5 + 8 \cdot 3,5 = 0$, откуда $B_x = 3,2$ кН, аналогично $A_x = 3,2$ кН.

$$\text{При } z = 1,5 \text{ м } M_c = -3,2 \cdot 1,5 = -4,8 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } z = 2,5 \text{ м } M_k = -3,2 \cdot 2,5 + 8 \cdot 1 = 0.$$

Эпюры изгибающих моментов показаны на рис. 7.7, б и в.

Подбор размеров сечения балки проведем из условия прочности в виде (7.5):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X + kM_Y}{W_X} = \frac{M_{\text{des}}}{W_X} \leq R.$$

В данном примере коэффициент $k = W_x / W_y = h / b = 1,4$.

Расчет должен производиться по наибольшему расчетному моменту M_{des} .

Анализ эпюр изгибающих моментов показывает, что опасное сечение балки, где сочетание этих моментов самое неблагоприятное, неявно.

Исследуем сечение C и K :

$$\text{в сечении } C M_{\text{des}} = 15,75 + 1,4 \cdot 4,8 = 22,47 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{в сечении } K M_{\text{des}} = 18,75 + 1,4 \cdot 0 = 18,75 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Таким образом, опасным является сечение C , где $\max M_{\text{des}} = 22,47$ кН·м.

Требуемый момент сопротивления сечения балки из условия прочности будет

$$W_x = \frac{\max M_{\text{des}}}{R} = \frac{22,47 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^6} = 1,873 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1873 \text{ см}^3.$$

$$\text{Для прямоугольного поперечного сечения } W_x = \frac{bh^2}{6} = 1873 \text{ см}^3.$$

С учетом $h/b = 1,4$ получим: $b = 17,9$ см, $h = 25,06$ см.

Приняв конструктивно $b = 18$ см, $h = 25$ см вычислим значение максимального нормального напряжения по формуле (7.4):

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} = \frac{15,75 \cdot 10^3 \cdot 6}{18 \cdot 25^2 \cdot 10^{-6}} + \frac{4,8 \cdot 10^3 \cdot 6}{25 \cdot 18^2 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 11,96 \text{ МПа} \approx 12 \text{ МПа} = R.\end{aligned}$$

Размеры сечения определены верно.

Моменты инерции принятого сечения:

$$J_x = \frac{18 \cdot 25^3}{12} = 23440 \text{ см}^4, J_y = \frac{25 \cdot 18^3}{12} = 12150 \text{ см}^4.$$

Положение нейтральной оси в сечении C :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{M_X}{M_Y} \cdot \frac{J_Y}{J_X} = -\frac{15,75}{-4,8} \cdot \frac{23440}{12150} = 6,33, \varphi_0 = 81^\circ.$$

Положительное значение φ_0 откладываем от оси X против хода часовой стрелки.

Эпюры нормальных напряжений σ от каждого изгибающего момента и суммарного приведены на рис. 7.7, г.

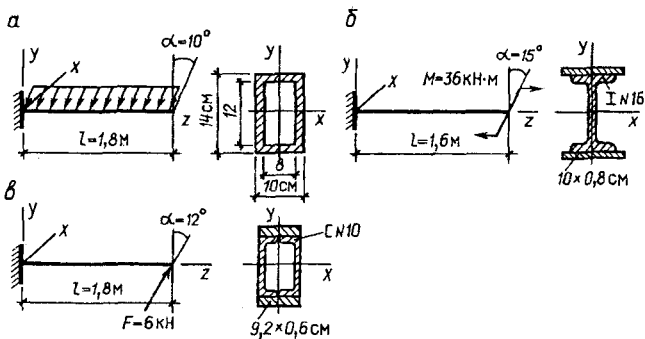
Задачи для аудиторного и самостоятельного решения

Задача 7.1

Стальная консольная балка заданного поперечного сечения нагружена внешней силой, направленной под углом α к вертикальной оси сечения.

Проверить прочность и жесткость балки, если $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа, а допустимый относительный прогиб $\left(\frac{\vartheta}{l}\right)_{adm} = \frac{1}{500}$.

Для определения прогиба в точке B балки воспользоваться формулами из справочника ($\vartheta = \frac{Fl^3}{3EJ}$; $\vartheta = \frac{ql^4}{8EJ}$; $\vartheta = \frac{Ml^2}{2EJ}$).



О т в е т ы :

А. $\sigma_{\max} = 209,6 \text{ МПа}$; $\varphi_0 = -20,7^\circ$; $\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{1}{1782}$.

Б. $\sigma_{\max} = 202,3 \text{ МПа}$; $\varphi_0 = -39,3^\circ$; $\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{1}{1206}$.

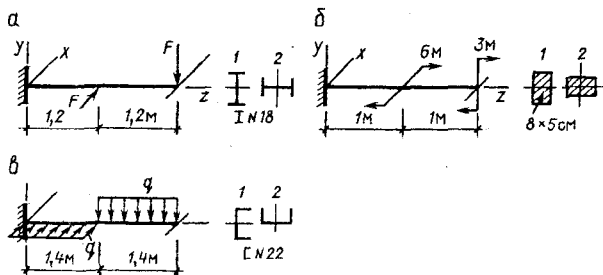
В. $\sigma_{\max} = 213,1 \text{ МПа}$; $\varphi_0 = -35,0^\circ$; $\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{1}{2262}$.

Задача 7.2

Стальная консольная балка заданного поперечного сечения нагружена внешними силами, действующими в главных плоскостях сечения.

Расположив сечение балки рационально по отношению к нагрузке, определить ее наибольшее допустимое значение, если $R = 210 \text{ МПа}$.

Примечание. Скручиванием швеллера пренебречь.



О т в е т ы :

А. Положение 1; $F = 2,561 \text{ кН}$; $\varphi_0 = 82,7^\circ$.

Б. Положение 2; $M = 3,111 \text{ кН}$; $\varphi_0 = -38,0^\circ$.

В. Положение 1; $q = 3,867 \text{ кН}$; $\varphi_0 = 77,8^\circ$.

Задача 7.3

Двухопорная деревянная (стальная) балка подвергается изгибу в двух главных плоскостях сечения.

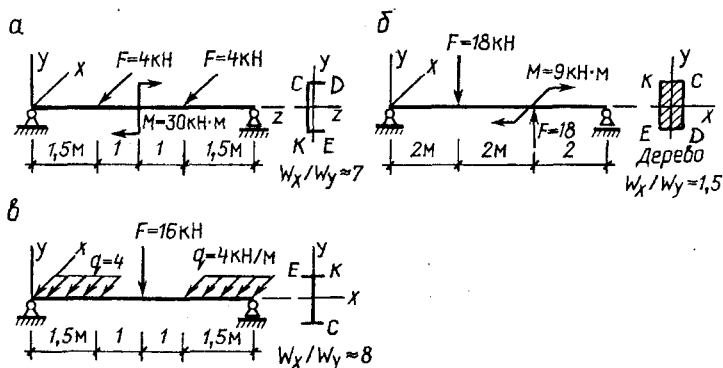
Определить размеры сечения (номер профиля) при заданном соотношении моментов сопротивления W_x / W_y . Построить суммарную эпюру нормальных напряжений. Указать точку сечения с наибольшим растягивающим напряжением.

Расчетные сопротивления: для древесины $R = 14 \text{ МПа}$, для стали $R = 210 \text{ МПа}$.

Примечание.

1. Виды опор балки в вертикальной и горизонтальной плоскостях одинаковы.

2. Скручиванием швеллера пренебречь.



Ответы:

А. Швеллер № 27;

$\sigma_{\max} = 209,6 \text{ МПа}$ в т. С; $\varphi_0 = 78,9^\circ$.

Б. Сечение $16 \times 24 \text{ см}$;

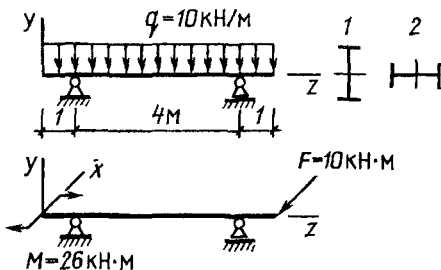
$\sigma_{\max} = 13,66 \text{ МПа}$ в т. К; $\varphi_0 = 77,5^\circ$.

В. Двутавр № 24;

$\sigma_{\max} = 197 \text{ МПа}$ в т. D; $\varphi_0 = -82,7^\circ$.

Задача 7.4

Определить наибольшее нормальное напряжение в балке из двутавра № 40, расположив сечение его рационально по отношению к нагрузке.



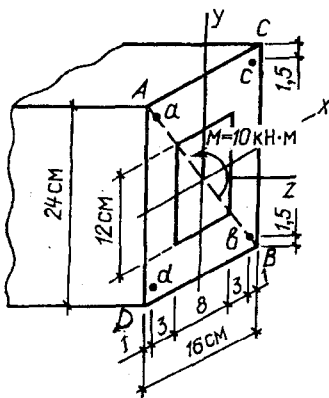
Ответ:

Рациональное положение – второе, $\sigma_{\max} = 182,4$ МПа.

Задача 7.5

В прямоугольном с отверстием сечении стержня возникает изгибающий момент $M = 10$ кН·м, действующий в плоскости, совпадающей с диагональю AB .

Вычислить напряжения в точках a , c , e и d , а также наибольшее растягивающее и сжимающее напряжения; определить положение нейтральной оси.



Ответ:

$$\sigma_A = -10,1 \text{ МПа}, \sigma_C = 0, \sigma_B = 10,1 \text{ МПа},$$

$$\sigma_D = 0, \sigma_{\max}^{\min} = \pm 11,6 \text{ МПа}.$$

Нейтральная ось совпадает с диагональю CD .

7.2. Внецентренное растяжение-сжатие

Элемент конструкции (стержень) подвергается деформации внецентренного растяжения-сжатия, когда внешняя сила действует параллельно его продольной оси с некоторым эксцентриситетом от центра тяжести сечения (рис. 7.8, а).

Расчетная схема стержня составляется путем переноса внешней силы F к центру тяжести сечения по правилам механики (рис. 7.8, б). При этом образуются продольная сила $N = F$ и изгибающие моменты относительно главных центральных осей сечения $M_x = F \cdot y_F$ и $M_y = F \cdot x_F$, где y_F и x_F координаты точки приложения силы F . Поперечная сила Q отсутствует.

Эпюры внутренних сил показаны на рис. 7.8, в. Следует заметить, что строить эпюры не обязательно, т.к. все внутренние силы по длине стержня постоянны.

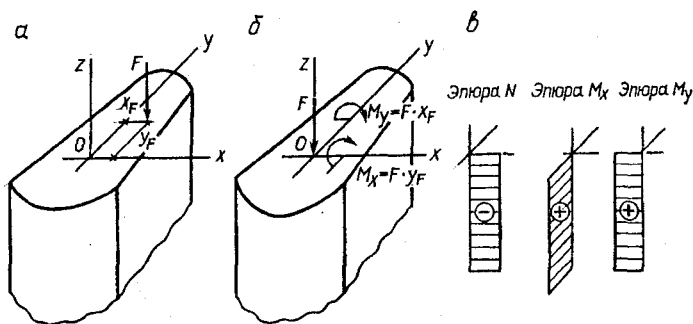


Рис. 7.8

Таким образом, внецентренное растяжение-сжатие есть сочетание центрального растяжения-сжатия и изгиба в главных плоскостях сечения стержня.

Для определения напряжений используются формулы, полученные для центрального растяжения-сжатия и чистого изгиба.

Продольная сила N и изгибающие моменты M_x и M_y связаны с нормальными напряжениями, которые в любой точке поперечного сечения внецентренно растянутого или сжатого стержня определяются по формуле

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x, \quad (7.7)$$

где N , M_x , M_y – внутренние силовые факторы в сечении стержня;
 A , J_x , J_y – геометрические характеристики сечения;
 x , y – координаты точки сечения, в которой определяются напряжения.

Знаки напряжений устанавливаются по смыслу: расположена ли точка в растянутой или сжатой зоне сечения стержня. Характер деформации зоны сечения устанавливается исходя из направления действия внутренних силовых факторов (N , M_x , M_y) по отношению к этому сечению (см. примеры).

При внецентренном растяжении-сжатии нормальные напряжения распределяются в сечении по линейному закону, но не равномерно. Нейтральная ось (где $\sigma = 0$) не проходит через центр тяжести сечения. Она располагается в противоположной четверти сечения, чем точка приложения внешней силы F , и делит сечение на растянутую и сжатую зоны (рис. 7.9).

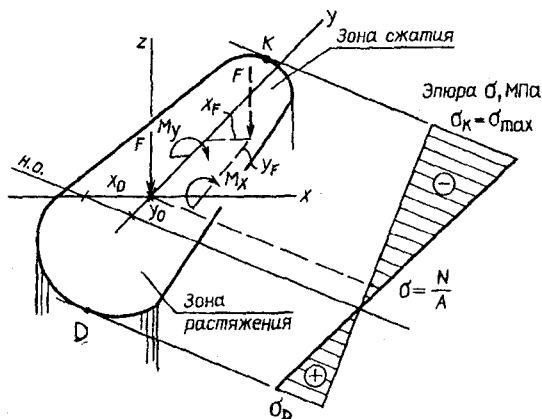


Рис. 7.9

Положение нейтральной оси в сечении стержня определяется по формулам

$$x_0 = -\frac{J_y}{A \cdot x_F}; \quad y_0 = -\frac{J_x}{A \cdot y_F}, \quad (7.8)$$

где x_0, y_0 — отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных центральных осях сечения;

x_F, y_F — координаты точки приложения внешней силы F в тех же осях.

В выражениях (7.8) следует учитывать знаки ординат точки приложения внешней силы F . Заметим, что координаты x_0, y_0 и x_F, y_F всегда имеют разные знаки, т.к. полюс силы и нейтральная ось лежат по разные стороны от центра тяжести сечения (в противоположных четвертях).

Положение нейтральной оси зависит от размеров и формы сечения, от координат полюса силы F , но не зависит от ее величины.

При внецентренном растяжении-сжатии в любой точке поперечного сечения стержня (кроме точек нейтральной оси) возникают лишь нормальные напряжения σ , а касательные τ отсутствуют. Это значит, что материал стержня находится в условиях линейного напряженного состояния и условие прочности используется в виде $\sigma_{\max} \leq R$.

В раскрытом виде это условие для любой формы сечения стержня принимает вид

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y_{dan} + \frac{M_y}{J_y} x_{dan} \leq R, \quad (7.9)$$

где x_{dan}, y_{dan} — координаты опасной точки сечения, т.е. точки наиболее удаленной от нейтральной оси.

Координаты этих точек сечения определяются при помощи касательных, проведенных к сечению параллельно нейтральной оси (нулевой линии) (на рис. 7.9 — точки K и D).

Для пластичных материалов опасной является точка сечения максимально удаленная от нейтральной оси, где напряжения наибольшие. Для хрупких материалов проверка прочности должна производиться как по растягивающим, так и по сжимающим напряжениям.

Для стержней, имеющих сечение с двумя осями симметрии и выступающими углами (прямоугольник, двутавр и подобные), условие прочности можно представить в виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R, \quad (7.10)$$

где W_x, W_y – моменты сопротивления сечения изгибу относительно главных центральных осей.

Для названных выше типов сечений наиболее напряженными всегда являются угловые точки.

Подбор размеров сечения при внецентренном растяжении – сжатии не дает однозначного решения, т.к. геометрические параметры A, W_x, W_y взаимно связаны. Рекомендуется проведение ряда последовательных попыток.

Между полюсом внешней силы F и положением нейтральной оси существует определенная взаимосвязь – они расположены по разные стороны от центра тяжести поперечного сечения. При приближении силы F к центру тяжести сечения нейтральная ось удаляется от него и наоборот. При некотором положении полюса силы F нейтральная ось будет касаться контура сечения. При этом по всему сечению напряжения будут одного знака.

Зона в сечении стержня, расположенная вокруг его центра тяжести, в пределах которой следует прикладывать нагрузку, чтобы по всему сечению напряжения были одного знака, называется ядром сечения (рис. 7.10).

Координаты ядра сечения $x_{F(Я)}, y_{F(Я)}$ связаны с положением нейтральной оси, т.е. с ее координатами x_0, y_0 , и определяются по следующим формулам, полученным из (7.8):

$$x_{F(Я)} = -\frac{J_y}{A \cdot x_0}, \quad y_{F(Я)} = -\frac{J_x}{A \cdot y_0}. \quad (7.11)$$

Формулы (7.11) можно привести к другому виду более удобному для многократных вычислений, используя такую геометрическую характеристику, как радиус инерции сечения:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}.$$

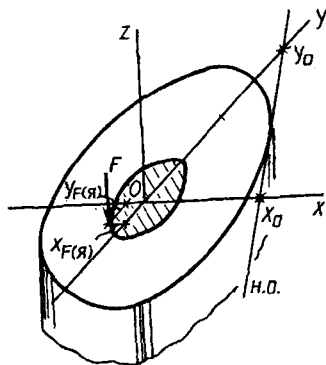


Рис. 7.10

Тогда формулы (7.11) примут вид

$$x_{F(ЯЯ)} = -\frac{i_y^2}{x_0}; \quad y_{F(ЯЯ)} = -\frac{i_x^2}{y_0}. \quad (7.12)$$

Для построения ядра сечения задаются рядом последовательных положений нейтральной оси, *касающейся* контура сечения (не пересекая его), вычисляются значения координат этих положений нейтральной оси, а затем координаты точек ядра сечения.

Форму и размеры ядра сечения важно знать при расчете внецентренно нагруженных элементов конструкции, выполненных из хрупкого материала.

Пример 7.4

Стальная полоса прямоугольного поперечного сечения, имеющая выточки (рис. 7.11, а), нагружена растягивающими силами $F = 20$ кН по продольной оси Z .

Проверить прочность полосы, если $R = 210$ МПа. Построить эпюры напряжений в характерных сечениях полосы.

Примечание: концентрацией напряжений у выточек пренебречь.

Решение

На полосе выделяются три характерных сечения. Внешние силы F , действующие по продольной оси полосы, в сечениях, где нет

Определим необходимые геометрические характеристики рассматриваемого сечения.

Высота сечения $h = 40 - 8 = 32$ мм, ширина $b = 6$ мм, площадь $A = 32 \cdot 6 = 192$ мм².

Положение центра тяжести сечения (т. C) и положение главных центральных осей (x_c, y_c) очевидны.

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей

$$J_{X_c} = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 32^3}{12} = 16384 \text{ мм}^4, \quad J_{Y_c} = \frac{hb^3}{12} = \frac{32 \cdot 6^3}{12} = 576 \text{ мм}^4.$$

Эксцентриситет силы F в рассматриваемом сечении:

$$y_F = 20 - 16 = 4 \text{ мм}, \quad x_F = 0.$$

Внутренние силы: продольная сила $N = F = 20$ кН, изгибающий момент относительно оси X_c $M_x = F \cdot y_F = 20 \cdot 4 = 80$ кН·мм, изгибающий момент относительно оси Y_c $M_y = F \cdot x_F = 0$.

Поскольку $x_F = 0$, а следовательно, и $M_y = 0$, здесь имеет место частный случай (плоский) внецентренного растяжения.

Определим положение нейтральной оси по формуле (7.8):

$$y_0 = -\frac{J_x}{A \cdot y_F} = -\frac{16384}{192 \cdot 4} = -21,33 \text{ мм},$$

$$x_0 = -\frac{J_y}{A \cdot x_F} = -\frac{576}{192 \cdot 0} = \infty \text{ (проходит параллельно оси } X_c).$$

Заметим, что нейтральная ось располагается по другую сторону от центра тяжести сечения, чем точка приложения силы F (рис. 7.11, в).

Так как нейтральная ось проходит ниже сечения, не пересекая его, нормальные напряжения по всему сечению будут одного знака (растягивающие), но по абсолютному значению разные.

Определим нормальные напряжения в характерных точках сечения III:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y_A = \frac{20 \cdot 10^3}{192 \cdot 10^{-6}} + \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{16384 \cdot 10^{-12}} \cdot 16 \cdot 10^{-3} = \\ &= (0,1042 + 0,0781) \cdot 10^9 \text{ Па} = 182,3 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

$$\sigma_c = \frac{20 \cdot 10^3}{192 \cdot 10^{-6}} = 104,2 \text{ МПа (для т. } C \text{ } y_c = 0),$$

$$\sigma_B = \frac{20 \cdot 10^3}{192 \cdot 10^{-6}} - \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{16384 \cdot 10^{-12}} \cdot 16 \cdot 10^{-3} = 26,1 \text{ МПа.}$$

Как видно по результатам вычислений, нормальные напряжения наибольшие в точке наиболее удаленной от нейтральной оси (точка *A*).

Эпюра нормальных напряжений для третьего сечения показана на рис. 7.11, в.

Условие прочности полосы обеспечено, т.к. $\sigma_{\max} = 182,3 \text{ МПа} < R$.

Пример 7.5

Короткая бетонная колонна сжимается продольной силой *F*, приложенной в точке *K* (рис. 7.12, а).

Определить: наибольшее допустимое значение этой силы, если $R_c = 24 \text{ МПа}$, $R_t = 1,6 \text{ МПа}$, положение нейтральной оси, построить эпюру нормальных напряжений и ядро сечения.

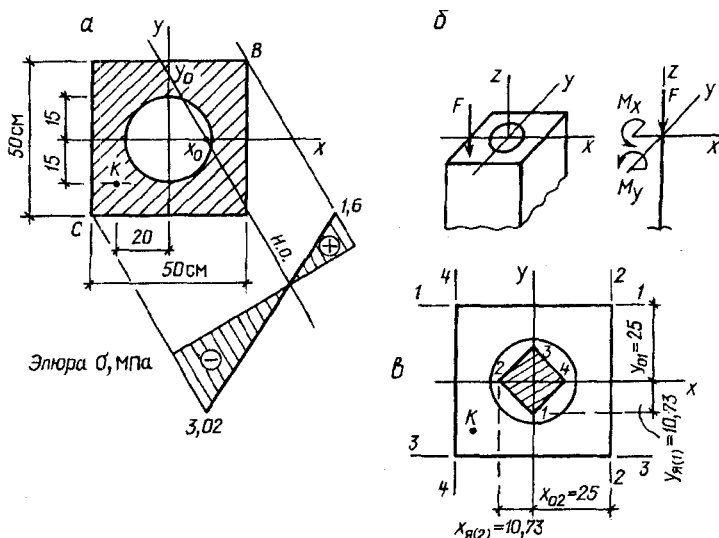


Рис. 7.12

Решение

Внешняя сила *F* действует на колонну параллельно ее продольной оси *Z*, но с эксцентриситетом: $x_F = -20 \text{ см}$, $y_F = -15 \text{ см}$. Вследствие этого колонна подвергается внецентренному сжатию.

Исходя из формы сечения (две оси симметрии и выступающие углы) условие прочности используем в виде (7.10):

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R.$$

Определим необходимые геометрические характеристики сечения колонны.

$$\text{Площадь сечения } A = 50 \cdot 50 - \frac{3,14 \cdot 30^2}{4} = 1793 \text{ см}^2.$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей

$$J_x = J_y = \frac{50 \cdot 50^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 30^4}{64} = 481100 \text{ см}^4.$$

Моменты сопротивления сечения

$$W_x = W_y = \frac{481100}{50/2} = 19244 \text{ см}^3.$$

Определим внутренние силы (усилия), образующие в колонне. Продольная сила $N = -F$, изгибающие моменты $M_x = F \cdot y_F = 15F \text{ Н}\cdot\text{м}$, $M_y = F \cdot x_F = 20F \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Расчетная схема колонны показана на рис. 17.12, б. Изгибающие моменты M_x и M_y направлены сообразно с точкой приложения силы F .

Заметим, что в данном случае все сечения колонны равноопасны.

Положение нейтральной оси определим исходя из формулы (7.8). Отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных центральных осях сечения, будут

$$x_0 = -\frac{J_y}{A \cdot x_F} = -\frac{481100}{1744 \cdot (-20)} = 13,79 \text{ см},$$

$$y_0 = -\frac{J_x}{A \cdot y_F} = -\frac{481100}{1744 \cdot (-15)} = 18,39 \text{ см}.$$

Положение нейтральной оси показано на рис. 7.12, а, на котором видно, что нейтральная ось не проходит через центр тяжести сечения.

Она, пересекая главные центральные оси ХУ, делит сечение на две зоны: сжатую (нижнеправую) и растянутую (верхнелевую), и лежит по другую сторону от центра тяжести сечения, чем точка приложения силы F .

Для хрупких материалов наиболее опасными являются растягивающие напряжения. Максимальные растягивающие напряжения будут в т. В сечения, как наиболее удаленной от нейтральной оси в растянутой зоне.

Составим выражение для определения напряжения в т. В:

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{F}{A} + \frac{15F}{W_x} + \frac{20F}{W_y} = \\ &= -\frac{F}{1793 \cdot 10^{-4}} + \frac{15 \cdot F \cdot 10^{-2}}{19244 \cdot 10^{-6}} + \frac{20 \cdot F \cdot 10^{-2}}{19244 \cdot 10^{-6}} = 12,6F, \text{ Па.}\end{aligned}$$

Внимание! Проследим знаки слагаемых в составленном выражении. Первое слагаемое со знаком «минус», т.к. действующая сила F сжимает колонну. Это относится к любой точке сечения. Второе и третье слагаемые имеют знак «плюс», т.к. в т. В оба изгибающих момента создают растягивающие напряжения (см. расчетную схему).

Условие прочности для т. В будет

$\sigma_{\max} = \sigma_B = 12,6F \leq R_t = 1,6 \cdot 10^6$, откуда наибольшая допустимая нагрузка на колонну, исходя из растягивающих напряжений, равна

$$F = \frac{1,6 \cdot 10^6}{12,6} = 127,0 \text{ кН.}$$

Вычислим наибольшие сжимающие напряжения, которые будут в т. С, как наиболее удаленной от нейтральной оси в сжатой зоне:

$$\begin{aligned}\sigma_c &= -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = -\frac{127,0 \cdot 10^3}{1793 \cdot 10^{-4}} - \frac{15 \cdot 127,0 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{19244 \cdot 10^{-6}} - \\ &= -\frac{20 \cdot 127,0 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{19244 \cdot 10^{-6}} = -0,302 \cdot 10^7 \text{ Па} = -3,02 \text{ МПа} < R_c.\end{aligned}$$

Таким образом, наибольшая допустимая нагрузка на колонну составит $F = 127,0$ кН, при которой будет обеспечена прочность как по растягивающим, так и по сжимающим напряжениям.

Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 7.12, а, из которого видно, что при внецентренной нагрузке нормальные напряжения распределяются по сечению неравномерно.

Заметим, что полюс нагрузки F (точка K) лежит в *большей* по площади зоне напряжений (сжатой). Это постоянная закономерность.

Координаты ядра сечения определим из (7.11), задавшись положениями нейтральной оси, совпадающими со сторонами сечения колонны (рис. 7.12, в)

Нейтральная ось в положении 1-1.

Отрезки, отсекаемые нейтральной осью в системе главных центральных осей, будут $y_{01} = 25$ см, $x_{01} = \infty$.

Координаты ядра сечения

$$x_{F(Я)_1} = -\frac{J_x}{A \cdot x_0} = -\frac{481100}{1793 \cdot \infty} = 0,$$

$$y_{F(Я)_1} = -\frac{J_x}{A \cdot y_0} = -\frac{481100}{1793 \cdot 25} = -10,73 \text{ см.}$$

Нейтральная ось в положении 2-2.

$$y_{02} = \infty, x_{02} = 25 \text{ см; } y_{F(Я)_2} = 0, x_{F(Я)_2} = -\frac{481100}{1793 \cdot 25} = -10,73 \text{ см.}$$

Вследствие симметрии сечения:

для положения нейтральной оси 3-3 $y_{F(Я)_3} = 10,73$ см, а для положения 4-4 $x_{F(Я)_4} = 10,73$ см.

Ядро сечения показано на рис. 7.12, в.

Обратите внимание, что точка K (полюс силы F) лежит за пределами ядра сечения, отчего нейтральная ось проходит по сечению, разделяя его на две зоны: сжатую и растянутую.

Если т. K будет *приближаться* к центру тяжести сечения, то нейтральная ось будет *удаляться* от его. При положении т. K в пределах ядра сечения нейтральная ось уйдет за пределы сечения и напряжения по всему сечению будут одного знака.

Пример 7.6

Определить на поперечном сечении колонны (рис. 7.13, а) точку приложения сжимающей силы F , наиболее удаленной от центра тяжести по оси Y , при которой в колонне не будет растягивающих напряжений.

Построить ядро сечения и эпюру напряжений (в долях от F).

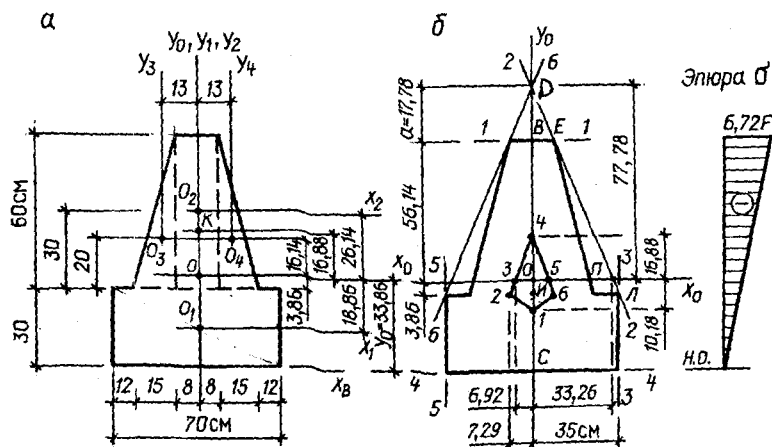


Рис. 7.13

Решение

Поскольку сила F должна быть приложена к колонне вне ее центра тяжести сечения, колонна будет подвергаться внецентренному сжатию.

Для отыскания точки приложения силы F воспользуемся формулами (7.12):

$$x_F = -\frac{i_y^2}{x_0}, \quad y_F = -\frac{i_x^2}{y_0}.$$

Для определения необходимых геометрических характеристик рассматриваемое сложное сечение разделим на четыре простые фигуры: два прямоугольника и два треугольника (см. рис. 7.13, а).

$$\text{Площадь сечения } A = 30 \cdot 70 + 16 \cdot 60 + 2 \cdot \frac{15 \cdot 60}{2} = 3960 \text{ см}^2.$$

Ордината центра тяжести сечения (относительно вспомогательной оси X_B)

$$y_0 = \frac{\sum S_{XB}}{\sum A} = \frac{30 \cdot 70 \cdot 15 + 16 \cdot 60 \cdot 60 + 2 \cdot \left(\frac{15 \cdot 60}{2} \cdot 50\right)}{3960} = 33,86 \text{ см.}$$

Оси X_0Y_0 являются главными центральными осями сечения, т.к. ось Y_0 — ось симметрии.

Моменты инерции относительно главных центральных осей сечения

$$J_{x_0} = \frac{70 \cdot 30^3}{12} + 30 \cdot 70 \cdot 18,86^2 + \frac{16 \cdot 60^3}{12} + 16 \cdot 60 \cdot 26,14^2 + 2 \cdot \left(\frac{15 \cdot 60^3}{36} + \frac{15 \cdot 60}{2} \cdot 16,14^2 \right) = 2263000 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_0} = \frac{30 \cdot 70^3}{12} + \frac{60 \cdot 16^3}{12} + 2 \cdot \left(\frac{60 \cdot 15^3}{36} + \frac{15 \cdot 60}{2} \cdot 13^2 \right) = 959700 \text{ см}^4.$$

Радиусы инерции сечения относительно главных центральных осей

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{2263000}{3960}} = 23,91 \text{ см}, \quad i_{y_0} = \sqrt{\frac{959700}{3960}} = 15,57 \text{ см.}$$

Точка приложения силы F связана с положением нейтральной оси. Поскольку сила F находится на оси Y_0 , нейтральная ось должна быть ей перпендикулярна.

Для выполнения условия задачи (в сечении не должно возникать растягивающих напряжений) нужно задаться двумя положениями нейтральной оси, совпадающими с верхней и нижней гранями сечения, и определить ординату точки приложения силы F .

В положении нейтральной оси по верхней грани сечения (рис. 7.13, б) ее ордината равна $y_0 = 60 - 3,86 = 56,14$ см, а ордината точки приложения силы F будет

$$y_F = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{23,91^2}{56,14} = -10,18 \text{ см.}$$

При положении н.о. по нижней грани сечения $-y_0 = 30 + 3,86 = 33,86$ см,

$$y_F = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{23,91^2}{(-33,86)} = 16,88 \text{ см.}$$

По условию задачи принимаем положение точки приложения силы F (точка K) выше центральной оси X_0 на расстоянии $y_F = 16,88$ см (см. рис. 7.13, а).

Для построения эпюры напряжений вычислим их значения (в долях от F) для крайних точек сечения

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot y_F}{J_X} y_B = -\frac{F}{3960 \cdot 10^{-4}} - \frac{F \cdot 16,88 \cdot 10^{-2}}{2263000 \cdot 10^{-8}} \cdot 56,14 \cdot 10^{-2} = -6,72F,$$

$$\sigma_C = -\frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_F}{J_X} y_C = -\frac{F}{3960 \cdot 10^{-4}} + \frac{F \cdot 16,88 \cdot 10^{-2}}{2263000 \cdot 10^{-8}} \cdot 33,86 \cdot 10^{-2} = 0.$$

Условие задачи выполнено – в сечении нет растягивающих напряжений. Эпюра напряжений показана на рис. 7.18, б.

Для построения ядра сечения задаемся рядом последовательных положений нейтральной оси, касающихся контуров сечения не пересекая его. Для каждого ее положения вычисляются координаты x_0, y_0 , а затем соответствующие данному положению нейтральной оси координаты точки приложения силы F , которые являются координатами точек ядра сечения ($x_F = x_{я}, y_F = y_{я}$).

Для вычисления координат точек ядра сечения воспользуемся формулами (7.12).

Нейтральная ось в положении 1-1: $y_{01} = 56,14$ см, $x_{01} = \infty$,

$$y_{я,1} = -\frac{i_{x_0}^2}{y_0} = -\frac{23,91^2}{56,14} = -10,18 \text{ см,} \quad x_{я,1} = -\frac{i_{y_0}^2}{x_0} = -\frac{15,57^2}{\infty} = 0 \text{ см.}$$

Нейтральная ось в положении 2-2 отсекает на главных центральных осях X_0, Y_0 отрезки, координаты которых (x_{02}, y_{02}) необходимо определить используя подобие образовавшихся треугольников: ДВЕ, ДИЛ, ДОП (см. рис. 7.13, б).

$$\frac{ДВ}{ВЕ} = \frac{a}{8} = \frac{60+a}{35}, \text{ откуда } a = 17,78 \text{ см, } y_{02} = 60 + 17,78 = 77,78 \text{ см,}$$

$$\frac{y_{02}}{x_{02}} = \frac{17,78}{8}, \text{ откуда } x_{02} = \frac{8 \cdot (77,78 - 3,86)}{17,78} = 33,26 \text{ см.}$$

Координаты ядра сечения

$$y_{я,2} = -\frac{23,91^2}{77,78} = -7,35 \text{ см, } x_{я,2} = -\frac{15,57^2}{33,26} = -7,29 \text{ см.}$$

Нейтральная ось в положении 3-3:

$$y_{03} = \infty, x_{03} = 35,0 \text{ см, } x_{я,3} = -\frac{15,57^2}{35} = -6,92 \text{ см, } y_{я,3} = \infty.$$

Нейтральная ось в положении 4-4:

$$y_{04} = -33,86 \text{ см, } x_{04} = \infty, x_{я,4} = 0, y_{я,4} = -\frac{23,91^2}{-33,86} = 16,88 \text{ см.}$$

Положение нейтральной оси 5-5 симметрично положению 3-3, а положение 6-6 симметрично 2-2.

По полученным значениям $x_{я}$, $y_{я}$ построено ядро сечения (рис. 7.13, б).

Как видно, по ядру сечения наиболее удаленной от центра точкой является точка 4. Приложив силу F в этой точке, получим наиболее допустимый эксцентриситет ее ($\max u_F = 16,88$ см), при котором в сечении будут напряжения *одного* знака. Это подтверждает ранее сделанный расчет.

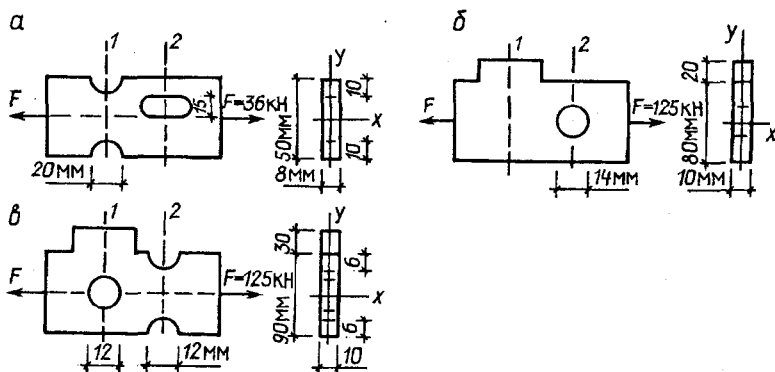
В заключение заметим, что прикладывая нагрузку F в пределах ядра сечения получим по всему сечению напряжения *одного* знака.

Задачи для аудиторного и самостоятельного решения

Задача 7.6

Стальная полоса, имеющая конструктивные элементы (отверстия, выточки, выступы) нагружена растягивающими силами F , направленными по продольной оси Z .

Определить наибольшее нормальное напряжение в полосе. Построить эпюру нормальных напряжений в отмеченных сечениях.



Ответы:

А. В сечении I $\sigma = 150$ МПа;

в сечении II $\sigma_{\max} = 183,9$ МПа, $\sigma_{\min} = 73,5$ МПа.

Б. В сечении I $\sigma_{\max} = 209$ МПа; $\sigma_{\min} = 24,0$ МПа;

в сечении II $\sigma = 160,3$ МПа.

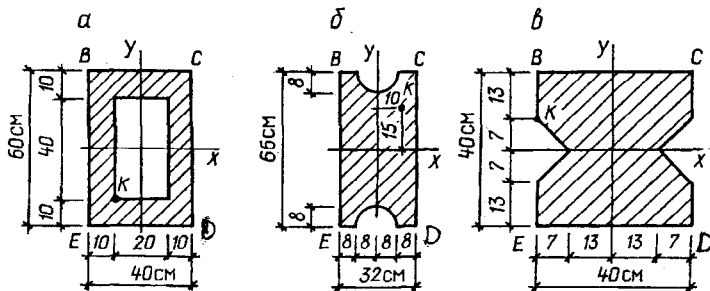
В. В сечении I $\sigma_{\max} = 200$ МПа; $\sigma_{\min} = 50$ МПа;

в сечении II $\sigma = 171,3$ МПа.

Задача 7.7

Определить наибольшее допустимое значение сжимающей силы F_{adm} , приложенной в точке K поперечного сечения короткой бетонной колонны, если $R_t = 1,4$ МПа, $R_c = 20$ МПа.

Построить эпюру напряжений и ядро сечения.



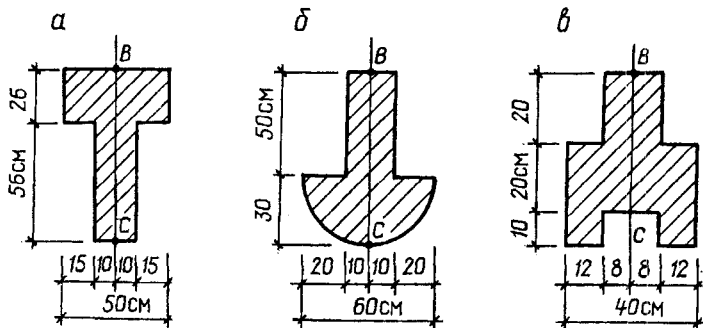
Отвeты:

- А. $F_{adm} = 135,3$ кН; $x_0 = 18,33$ см; $y_0 = 19,17$ см; $\sigma_C = 1,4$ МПа;
 $\sigma_E = -3,1$ МПа; $y_A = \pm 12,78$ см при $x_A = 0$; $x_A = \pm 9,17$ см при $y_A = 0$.
 Б. $F_{adm} = 114,7$ кН; $x_0 = -9,26$ см; $y_0 = -20,6$ см; $\sigma_C = -2,27$ МПа;
 $\sigma_E = 1,4$ МПа; $y_A = \pm 9,35$ см при $x_A = 0$; $x_A = \pm 5,79$ см при $y_A = 0$.
 В. $F_{adm} = 74,7$ кН; $x_0 = 7,09$ см; $y_0 = -20,21$ см; $\sigma_D = 1,4$ МПа;
 $\sigma_B = -2,39$ МПа; $y_A = \pm 7,07$ см при $x_A = 0$; $x_A = \pm 7,09$ см при $y_A = 0$.

Задача 7.8

Определить положение точки приложения сжимающей силы F , наиболее удаленной от центра тяжести сечения по оси Y , при котором в сечении колонны не будет растягивающих напряжений.

Построить ядро сечения и эпюру напряжений ($\sigma = f(F)$).



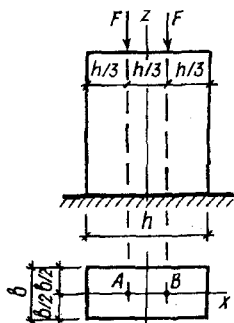
Отвeты:

- А. $y_{max} = 17,85$ см, вниз от н.о.; $\sigma_C = -10,6F$, $\sigma_B = 0$.
 Б. $y_{max} = 14,07$ см, вверх от н.о.; $\sigma_B = -10,4F$, $\sigma_C = 0$.
 А. $y_{max} = 6,88$ см, вверх от н.о.; $\sigma_B = -16,66F$, $\sigma_C = 0$.

Задача 7.9

В точках A и B колонны прямоугольного поперечного сечения приложены одинаковые силы F .

Как изменится наибольшее сжимающее напряжение в колонне, если одну из них удалить.



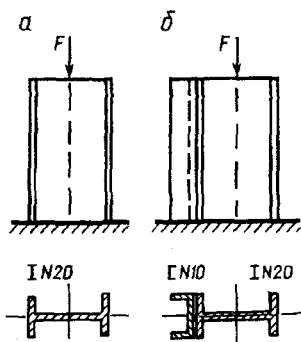
Ответ:

Не изменится.

Задача 7.10

Сопоставить напряжения в короткой колонне двутаврового сечения (а) и «усиленной» швеллером (б), приваренным к двутавру по всей длине.

Сжимающая сила $F = 500$ кН приложена по продольной оси двутавра.



Ответ:

Максимальное напряжение в варианте (б) увеличится на 12,1 %.

7.3. Изгиб с кручением

Элемент конструкции (стержень) подвергается деформации изгиба с кручением, когда внешние силы или их составляющие действуют перпендикулярно продольной оси Z в главных плоскостях

сечения (т.е. создают изгиб) и пары сил, действующей в плоскости перпендикулярной продольной оси, с моментом T_e вокруг этой оси (т.е. создают кручение) (рис. 7.14, а).

Деформации изгиба с кручением подвергаются в основном детали машин и валы различных механизмов, которые имеют преимущественно круглое поперечное сечение, а также стержни пространственных систем.

В поперечном сечении вала при изгибе с кручением образуются следующие внутренние силовые факторы: крутящий момент T , изгибающие моменты M_x, M_y (рис. 7.4, в) и поперечные силы Q_x, Q_y . Последние существенно на прочность вала не влияют (на рис. не показаны).

Определение внутренних сил и построение их эпюр ведется по тем же правилам, что и при простых видах сопротивлений (рис. 7.14, б). По построенным эпюрам M_x, M_y, T устанавливается опасное сечение вала, где их сочетание наиболее неблагоприятное.

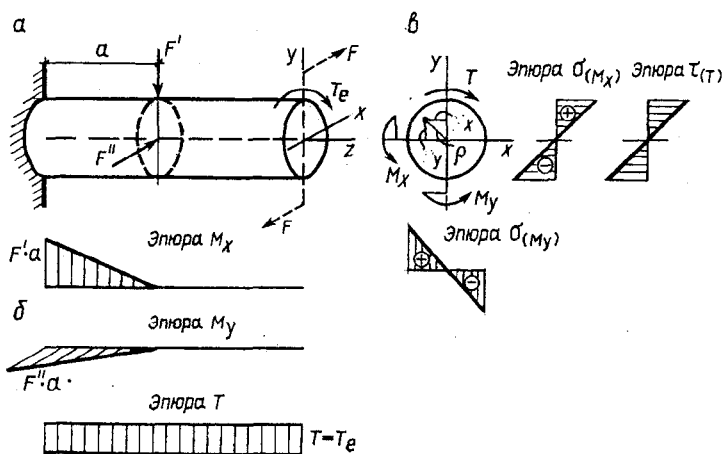


Рис. 7.14

Изгибающие моменты связаны с нормальными напряжениями, которые в любой точке сечения определяются по формулам

$$\sigma_{(M_x)} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y, \quad \sigma_{(M_y)} = \frac{M_y}{J_y} \cdot x,$$

а крутящие моменты – с касательными напряжениями

$$\tau = \frac{T}{J_p} \cdot \rho.$$

Поскольку в поперечном сечении вала, подвергающегося изгибу с кручением, возникают одновременно нормальные и касательные напряжения, материал вала находится в условиях плоского напряженного состояния. Поэтому проверка прочности производится по теориям прочности для точек, лежащих на контуре сечения, где самое неблагоприятное сочетание σ и τ (см. рис. 7.14, в).

Условие прочности, выраженное через внутренние силовые факторы, для вала круглого поперечного сечения имеет вид

$$\sigma_{des} = \frac{M_{red}}{W_x} \leq \sigma_{adm}, \quad (7.12)$$

где σ_{des} – расчетное напряжение;

M_{red} – приведенный момент в опасном сечении вала;

W_x – осевой момент сопротивления сечения;

σ_{adm} – допускаемое напряжение в материале вала, которое зависит от предела текучести σ_y и коэффициента запаса прочности K :

$$\sigma_{adm} = \sigma_y / K.$$

Для круглого сплошного сечения $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$; для кольцевого сечения

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \cdot (1 - c^4),$$

где $c = d_{вн} / d_{нар}$.

Приведенный момент по четвертой (энергетической) теории прочности:

$$M_{red} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75T^2} \quad \text{или} \quad M_{red} = \sqrt{M_u^2 + 0,75T^2},$$

где M_x, M_y – изгибающие моменты;

T – крутящий момент;

$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ – суммирующий изгибающий момент.

В поисках опасного сечения вала часто приходится просчитать значение M_{red} для нескольких по длине вала сечений, ориентируясь на эпюры внутренних сил.

Приведенное условие прочности применимо и для расчета валов кольцевого сечения.

Пример 7.7

Консольный стальной стержень (рис. 7.15, а) круглого поперечного сечения диаметром $d = 40$ мм нагружен системой внешних сил.

В опасном сечении стержня построить эпюры нормальных и касательных напряжений, отыскать его опасную точку.

Проверить прочность стержня, если $\sigma_{adm} = 140$ МПа.

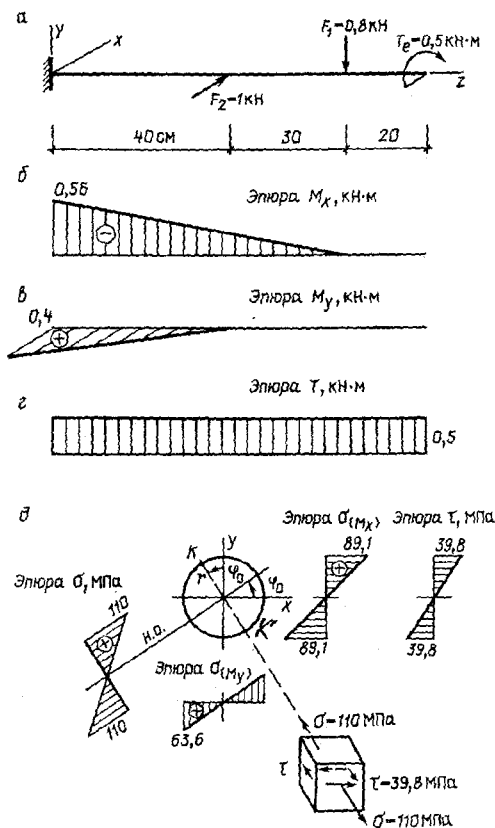


Рис. 7.15

Решение

Сосредоточенная сила F_1 , действующая перпендикулярно к продольной оси стержня Z , подвергает его плоскому изгибу в вертикальной плоскости, а сила F_2 – то же в горизонтальной.

Момент T_e , действующий вокруг продольной оси стержня Z , скручивает его.

Совместное действие всех внешних сил подвергает рассматриваемый стержень изгибу с кручением.

В сечениях стержня образуются усилия – изгибающие моменты M_x , M_y и крутящий момент T , эпюры которых приведены на рис. 7.15, б, в, г.

Анализ эпюр показывает, что опасным является опорное сечение (защемление), где все три усилия наибольшие: $M_x = 0,56$ кН·м, $M_y = 0,40$ кН·м, $T = 0,50$ кН·м.

Для проверки прочности стержня воспользуемся формулой (7.12):

$$\sigma_{des} = \frac{M_{red}}{W_x} \leq \sigma_{adm}.$$

Приведенный момент в опасном сечении стержня по четвертой теории прочности

$$\begin{aligned} M_{red} &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75 \cdot T^2} = \\ &= \sqrt{0,56^2 + 0,40^2 + 0,75 \cdot 0,50^2} = 0,814 \text{ кН·м.} \end{aligned}$$

Осевой момент сопротивления для круглого сплошного сечения

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 40^3}{32} = 6280 \text{ мм}^3.$$

Расчетное напряжение

$$\sigma_{des} = \frac{0,814 \cdot 10^3}{6280 \cdot 10^{-9}} = 0,000130 \cdot 10^{12} \text{ Па} = 130 \text{ МПа.}$$

Условие прочности рассматриваемого стержня выполняется, т.к.
 $\sigma_{des} = 130 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 140 \text{ МПа}$.

Приступим к определению наибольших нормальных и касательных напряжений в опасном сечении стержня.

Наибольшее касательное напряжение от крутящего момента T , действующее в любой точке контура сечения:

$$\tau = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{2W_x} = \frac{0,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 6280 \cdot 10^{-9}} = 39,8 \text{ МПа.}$$

Положение н.о. по формуле (7.2):

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} = -\frac{M_y}{M_x} = -\frac{0,40}{-0,56} = 0,714, \quad \varphi_0 = 35,5^\circ.$$

Напомним, что для круглого сечения $J_x = J_y$.

Угол φ_0 откладывается от оси X против хода часовой стрелки.

Суммарный изгибающий момент в опасном сечении стержня

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{0,56^2 + 0,40^2} = 0,688 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Экстремальные нормальные напряжения от суммарного изгибающего момента

$$\sigma_{(M_u)} = \pm \frac{M_u}{W_x} = \pm \frac{0,688 \cdot 10^3}{6280 \cdot 10^{-9}} = \pm 0,000110 \cdot 10^{12} \text{ Па} = \pm 110 \text{ МПа.}$$

Эпюры нормальных σ и касательных τ напряжений показаны на рис. 7.15, δ .

Анализ эпюр напряжений показывает, что наиболее напряженная точка лежит на контуре сечения, где нормальное напряжение от суммарного изгибающего момента максимально. Это точка K , лежащая по линии перпендикулярной нейтральной оси, или ей противоположная K' . Координаты точки K определяются по радиусу r и соответствующей тригонометрической функции.

Напряжения, действующие по граням элементарного прямоугольника, выделенного вокруг точки К, $\sigma_{(Mu)}$ и τ показаны на рис. 7.25, д. Исходя из $\sigma_{(Mu)}$ и τ несложно вычислить главные напряжения σ_1 и σ_3 и убедиться, что при изгибе с кручением материал стержня находится в условии плоского напряженного состояния и проверку прочности можно провести используя главные напряжения.

Пример 7.8

Консольный стальной стержень (рис. 7.16, а) круглого поперечного сечения нагружен внешними силами на перпендикулярно присоединенных к нему, поперечинах.

Определить диаметр стержня, если $\sigma_{adm} = 180$ МПа.

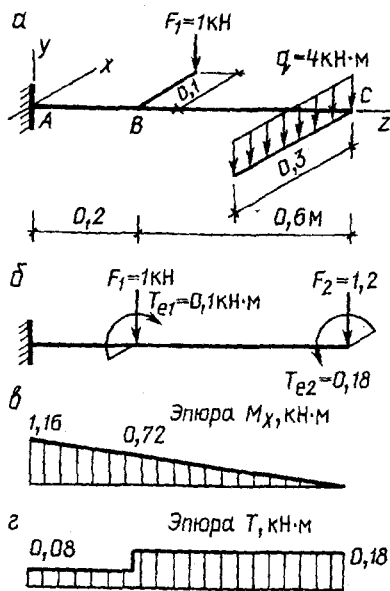


Рис. 7.16

Решение

Внешние силы не приложены непосредственно к рассматриваемому стержню. Поэтому для него нужно составить расчетную схему, перенося внешние силы к продольной оси Z по правилу механики. Образуются вертикально действующие перпендикулярные оси

сосредоточенные силы $F_1 = 1$ кН, $F_2 = 4 \cdot 0,3 = 1,2$ кН, изгибающие стержень, и моменты относительно оси Z $T_{e1} = 1 \cdot 0,1 = 0,10$ кН·м,

$$T_{e2} = 4 \cdot 0,3 \cdot \frac{0,3}{2} = 0,18 \text{ кН·м, скручивающие стержень (рис. 7.16, б).}$$

Определим значения изгибающих и крутящих моментов в характерных сечениях стержня.

Сечение C $M_x = 0, T = 0,18$ кН·м.

Сечение B $M_x = 1,2 \cdot 0,6 = 0,72$ кН·м.

$$T^n = 0,18 \text{ кН·м.}$$

$$T^n = 0,18 - 0,1 = 0,08 \text{ кН·м.}$$

Сечение A $M_x = 1,2 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,2 = 1,16$ кН·м.

$$T = 0,08 \text{ кН·м.}$$

Эпюры M_x и T показаны на рис. 7.16, в, г.

В данном примере опасное сечение не явно. Это сечение A или B .

Приведенные моменты для этих сечений равны:

сечение A $M_{red} = \sqrt{M_x^2 + 0,75 \cdot T^2} = \sqrt{1,16^2 + 0,75 \cdot 0,08^2} = 1,162$ кН·м,

сечение B $M_{red} = \sqrt{0,72^2 + 0,75 \cdot 0,18^2} = 0,742$ кН·м.

Таким образом, опасным является сечение A , где M_{red} наибольший.

Из условия прочности (7.12) требуемый момент сопротивления сечения:

$$W_x \geq \frac{M_{red}}{\sigma_{adm}} = \frac{1,162 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6} = 0,00646 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 6,46 \text{ см}^3.$$

Из выражения $W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 6,46 \text{ см}^3$ определяем диаметр стержня

$$d = \sqrt[3]{\frac{6,46 \cdot 32}{3,14}} = 4,04 \text{ см.}$$

Принимаем диаметр стержня $d = 40$ мм (перенапряжение при этом не превышает 5 %).

Пример 7.9

На стальной вал диаметром d насажен шкиф ременной передачи (1) и зубчатое колесо (2) (рис. 7.17, а).

Ведущий шкиф 1, связанный с электромотором, передает мощность $P = 5$ кВт при частоте оборотов $n = 1000$ об/мин зубчатому колесу 2, от которого мощность передается станку.

Диаметр шкифа $D_1 = 150$ мм, диаметр зубчатого колеса $D_2 = 300$ мм.

Определить диаметр вала, если предел текучести его материала $\sigma_y = 240$ МПа, а коэффициент запаса прочности $K = 3$.

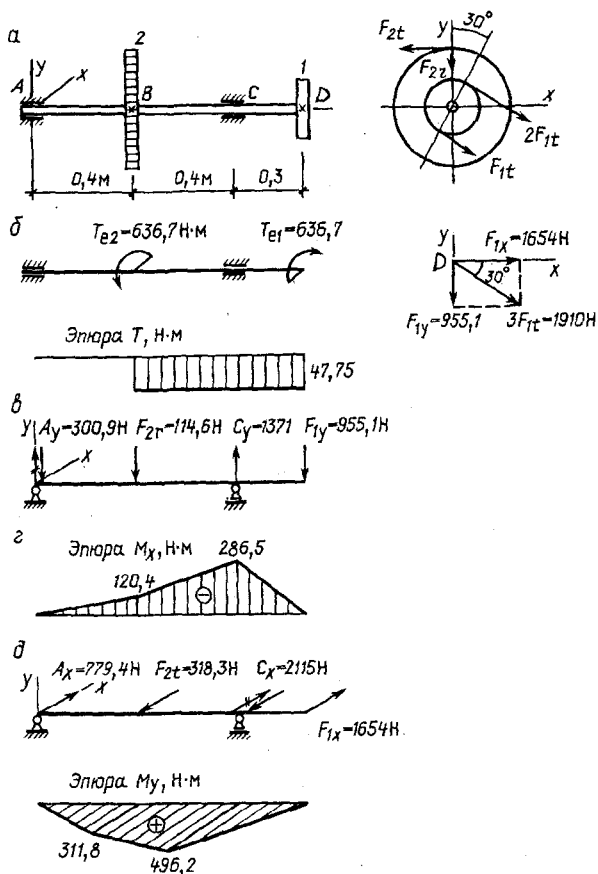


Рис. 7.17

Решение

Определим нагрузки, действующие на вал.

Крутящий момент на шкиве и зубчатом колесе (от электродвигателя)

$$T_e = 9550 \frac{P}{n} = 9550 \cdot \frac{5}{1000} = 47,75 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Сила натяжения ведомой ветви ремня

$$F_{1r} = 2000 \frac{T}{D_1} = 2000 \cdot \frac{47,75}{150} = 636,7 \text{ Н}.$$

Сила натяжения ведущей ветви ремня

$$2F_{1r} = 2 \cdot 636,7 = 1273,4 \text{ Н}.$$

Суммарная сила натяжения ремней

$$3F_{1r} = 3 \cdot 636,7 = 1910 \text{ Н}.$$

Разложив силу натяжения ремней по координатным осям получим ее составляющие:

$$F_{1y} = 3F_{1r} \sin 30^\circ = 1910 \cdot 0,5 = 955 \text{ Н},$$

$$F_{1x} = 3F_{1r} \cos 30^\circ = 1910 \cdot 0,866 = 1654 \text{ Н}.$$

Определяем силы зацепления на зубчатом колесе.

$$\text{Окружная сила } F_{2t} = 2000 T / D_2 = 2000 \cdot 47,75 / 300 = 318,3 \text{ Н}.$$

$$\text{Радиальная сила } F_{2r} = 0,36 F_{2t} = 0,36 \cdot 318,3 = 114,6 \text{ Н}.$$

На основании вычисленных нагрузок, действующих на вал, составим его расчетные схемы для скручивающих моментов (рис. 7.17, б), для изгибающих сил в вертикальной плоскости (рис. 7.17, в) и для изгибающих сил в горизонтальной плоскости (рис. 7.17, г).

Заметим, что направление скручивающих моментов обусловлено направлением силы натяжения ведущей ветви шкива или направлением окружной силы на зубчатом колесе.

Эпюра крутящих моментов показана на рис. 7.17, в.

Для построения эпюр изгибающих моментов от сил F необходимо сначала в расчетной схеме вала определить опорные реакции в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

В вертикальной плоскости:

$$\sum M_A = -C_y 0,8 + 114,6 \cdot 0,4 + 955,1 \cdot 1,1 = 0, \text{ откуда } C_y = 1370,6 \text{ Н}.$$

$$\sum M_C = A_y 0,8 - 114,6 \cdot 0,4 + 955,1 \cdot 0,3 = 0, \text{ откуда } A_y = -300,9 \text{ Н}.$$

$$\sum Y = -300,9 - 114,6 + 1370,6 - 955,1 = 0.$$

В горизонтальной плоскости

$$\sum M_A = 318,3 \cdot 0,4 - C_x \cdot 0,8 - 1654 \cdot 1,1 = 0, \text{ откуда } C_x = 2115 \text{ Н.}$$

$$\sum M_C = A_x \cdot 0,8 - 318,3 \cdot 0,4 - 1654 \cdot 0,3 = 0, \text{ откуда } A_x = 779,4 \text{ Н.}$$

$$\sum X = 779,4 + 1654 - 318,3 - 2115 = 0.$$

Эпюры изгибающих моментов показаны на рис. 7.17, з, д.

Анализ эпюр T , M_x , M_y позволяет сделать заключение, что опасным является сечение C , где изгибающие моменты максимальны.

Заметим, что на участке BD вала крутящий момент $T = \text{const}$.

Максимальный приведенный момент в вале по четвертой теории прочности

$$\begin{aligned} \max M_{red} &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75T^2} = \\ &= \sqrt{286,5^2 + 496,2^2 + 0,75 \cdot 47,75^2} = 574,6 \text{ Н} \cdot \text{м.} \end{aligned}$$

Допускаемое нормальное напряжение в материале вала

$$\sigma_{adm} = \sigma_y / \kappa = 240 / 3 = 80 \text{ МПа.}$$

Из условия прочности требуемый момент сопротивления сечения вала

$$W_x = \frac{\max M_{red}}{\sigma_{adm}} = \frac{574,6}{80 \cdot 10^6} = 7,183 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 7,183 \text{ см}^3.$$

Из выражения $W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 7,183$ диаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{7,183 \cdot 32}{3,14}} = 4,185 \text{ см.}$$

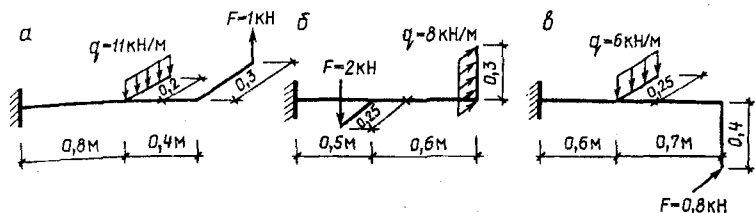
Принимаем диаметр вала $d = 42 \text{ мм}$.

Задачи для аудиторного и самостоятельного решения

Задача 7.11

Определить диаметр стального консольного стержня, если $\sigma_{adm} = 170 \text{ МПа}$.

Использовать четвертую (энергетическую) теорию прочности.



Отвсты:

А. $d = 3,23$ см.

Б. $d = 5,46$ см.

В. $d = 4,3$ см.

Задача 7.12

Определить диаметр стального вала, если предел текучести его материала $\sigma_y = 240$ МПа, а коэффициент запаса прочности $K = 3$.

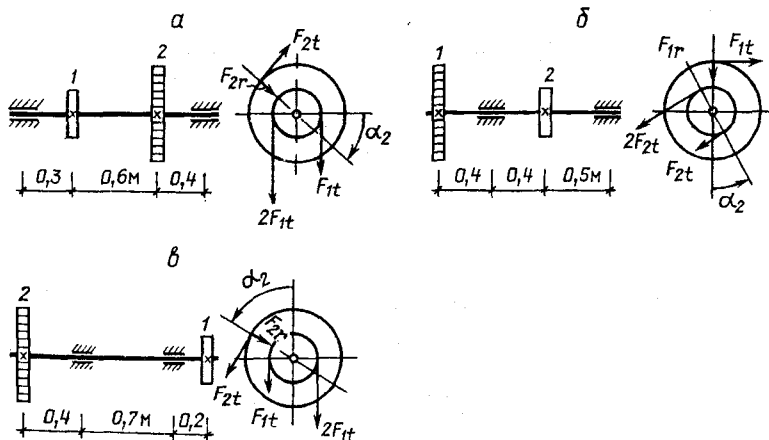
Пояснение к задаче см. в примере 7.9.

Данные к вариантам:

А. $P_1 = 3$ кВт, $n = 500$ об/мин, $D_1 = 100$ мм, $D_2 = 250$ мм, $\alpha_2 = 45$.

Б. $P_2 = 4$ кВт, $n = 800$ об/мин, $D_1 = 280$ мм, $D_2 = 100$ мм, $\alpha_2 = 30$.

В. $P_1 = 6$ кВт, $n = 600$ об/мин, $D_1 = 150$ мм, $D_2 = 300$ мм, $\alpha_2 = 60$.



Отвты:

А. $\max M_{red} = 777$ Н·м, $d = 4,04$ см.

Б. $\max M_{red} = 795$ Н·м, $d = 4,07$ см.

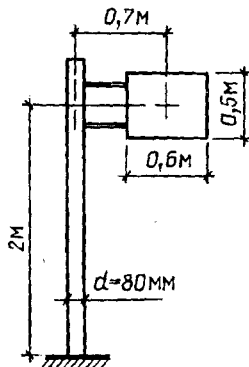
В. $\max M_{red} = 751$ Н·м, $d = 3,99$ см.

Задача 7.13

Дорожный знак укреплен на полый круглой стойке с наружным диаметром 80 мм и толщиной стенки 5 мм.

Используя четвертую теорию прочности, определить коэффициент запаса прочности стойки при наибольшей ветровой нагрузке на плоскость знака $q = 2 \text{ кН/м}^2$.

Предел прочности материала стойки $\sigma_y = 180 \text{ МПа}$.



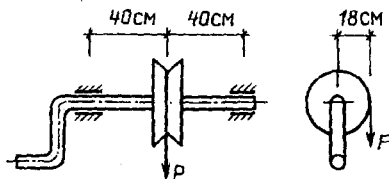
Ответ:

$$K = 4,48.$$

Задача 7.14

Определить значение наибольшего допустимого груза F , который можно поднять при помощи ворота.

Вал ворота круглого поперечного сечения диаметром 30 мм, стальной, с расчетным сопротивлением $R = 100 \text{ МПа}$.



Ответ:

$$P = 1043 \text{ Н.}$$

7.4. Общий случай сложного сопротивления

В общем случае сложного сопротивления (рис. 7.18, а) внешние силы действуют на элемент конструкции (стержень) таким образом, что в его поперечном сечении возникает шесть внутренних силовых факторов: продольная сила N , изгибающие моменты M_x , M_y , крутящий момент T и поперечные силы Q_x , Q_y (рис. 7.18, б). Поперечные силы на прочность стержня существенно не влияют и эпюры их на рисунке не показаны.

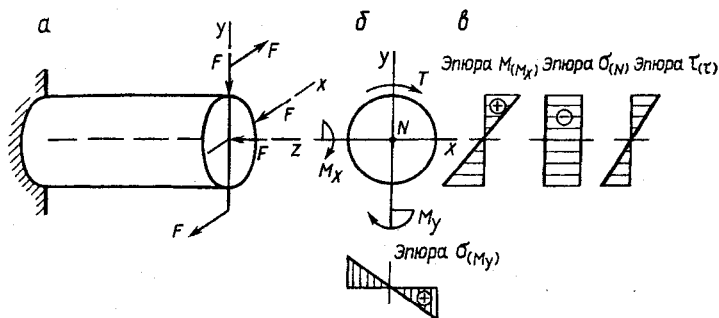


Рис. 7.18

Таким образом, общий случай сложного сопротивления элемента конструкции есть сочетание нескольких простых сопротивлений: центрального растяжения-сжатия, плоского изгиба, в одной или двух главных плоскостях сечения, и кручения.

Продольная сила N и изгибающие моменты M_x , M_y связаны с нормальным напряжением σ , а крутящий момент T — с касательным напряжением τ . Эпюры этих напряжений показаны на рис. 7.18, в.

В общем случае сложного сопротивления материал элемента конструкции находится в условиях сложного напряженного состояния. Поэтому условие прочности составляется по теориям прочности для наиболее напряженной точки сечения.

Для элемента с круглым поперечным сечением наиболее напряженная (опасная) точка лежит на контуре сечения.

Для пластичных материалов наиболее приемлема четвертая (энергетическая) теория прочности, по которой условие прочности, выраженное через напряжения, имеет вид

Решение

Стержни системы находятся под действием различных видов и направлений нагрузки. Чтобы установить вид сопротивления на каждом стержне системы необходимо построить эпюры внутренних силовых факторов. Для этого целесообразно рассматривать систему со свободного конца. В таком случае не потребуется определять опорные реакции в заземлении системы, и сложность эпюр будет нарастать постепенно.

Для каждого стержня системы, начиная с первого, составляется расчетная схема с использованием локальной системы координат (см. рис. 7.19, *a*). Переходя к последующему стержню необходимо перенести к нему по правилу механики все силы, действующие на предыдущий.

Напомним, что сосредоточенную силу F можно переносить по линии ее действия, а также параллельно. В последнем случае образуется сосредоточенная сила F той же величины и направления и момент M , равный произведению силы F на плечо (расстояние переноса) — $M = Fa$. Сосредоточенный момент M «перемещается» по оси, относительно которой он действует, параллельно самому себе.

Приступим к составлению расчетных схем, определению внутренних сил в характерных сечениях каждого стержня системы, начиная с первого, и построения их эпюр.

Поперечные силы от изгиба во внимание не принимаются.

Стержень 1 (AB).

Расчетная схема стержня — заземление в точке B (см. рис. 7.19, δ_1).

Нагрузкой на стержень является сосредоточенная сила $F = 0,6$ кН, действующая по направлению оси X . Она вызывает изгиб стержня относительно оси Y .

В точке A изгибающий момент $M_y = 0$, в точке B $M_y = F l_1 = 0,6 \times 0,5 = 0,3$ кН·м. Ординаты момента M_y откладываются по направлению оси X со стороны растянутых волокон стержня, т.е. справа от оси Z (AB) (рис. 7.19, *e*). Другие силовые факторы равны нулю ($N = 0$, $T = 0$, $M_x = 0$).

Внимание! Напомним общее правило: в системе взаимно перпендикулярных осей m , n сила F , действующая по направлению оси n , создает изгиб относительно оси m и ордината изгибающего момента M_m откладывается по направлению силы F .

Стержень 2 (BC).

Расчетная схема стержня — заземление в точке C (см. рис. 7.19, δ_2). Непосредственно на стержень действует распределенная нагрузка q .

Нагрузка F , действующая на первый стержень в т. A , будучи приведенной к т. B второго, образует сосредоточенную силу F , направленную параллельно оси X , и момент $M_1 = F l_1$ относительно оси Z , направленный по часовой стрелке, если смотреть со стороны сечения стержня.

Распределенная нагрузка q создает изгиб стержня относительно оси X , а сосредоточенная F – изгиб относительно оси Y . Момент M_1 создает кручение относительно оси Z .

Таким образом, второй стержень подвергается изгибу (в двух плоскостях) и кручению.

Определим значения внутренних сил в характерных сечениях. Крутящий момент $T_e = M_1 = F l_1 = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3 \text{ кН}\cdot\text{м} = \text{const}$.

Изгибающие моменты:

в т. B $M_x = 0, M_y = 0,$

$$\text{в т. } C \quad M_x = q \cdot l_2 \cdot \frac{l_2}{2} = \frac{0,8 \cdot 0,7^2}{2} = 0,196 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_y = F \cdot l_2 = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

Ординаты эпюры M_x (параболический треугольник) отложены по оси Y сверху продольной оси Z стержня, а M_y – по оси X слева оси Z . В обоих случаях – со стороны растянутых волокон. Продольная сила во втором стержне $N = 0$.

Эпюры внутренних сил показаны на рис. 7.19, z, δ, e .

Стержень 3 (CD).

Расчетная схема- заземление в т. D (см. рис. 7.19, δ_3). Непосредственно действующих на стержень внешних сил нет. Силы, действующие на предыдущие участки, будучи приведенными к третьему,

образуют в т. C : сосредоточенные силы F и $q l_2$ и моменты $M_3 = \frac{q l^2}{2}$,

$M_4 = F l_2$, а также момент $M_2 = F_1 l_1$ (на предыдущем стержне это M_1).

Сосредоточенная сила F создает в стержне деформацию сжатия. Сосредоточенная сила $q l_2$ и момент M_2 создают деформацию изгиба относительно оси X (т.е. в вертикальной плоскости), а момент M_4 – изгиб относительно оси Y (т.е. в горизонтальной плоскости). Момент M_2 создает деформацию кручения.

Внутренние силы в стержне.

Изгибающие моменты:

$$\text{в т. } C \quad M_x = F l_1 = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_y = F l_2 = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\begin{aligned} \text{в т. } D M_x &= F l_1 + q l_2 l_3 = 0,3 + 0,8 \cdot 0,7 \cdot 1 = 0,86 \text{ кН}\cdot\text{м}, \\ M_y &= F l_2 = 0,42 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

$$\text{Крутящий момент } T_e = M_3 = \frac{q l_2^2}{2} = \frac{0,8 \cdot 0,7^2}{2} = 0,196 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Продольная сила } N = F = 0,6 \text{ кН}.$$

Эпюры внутренних сил показаны на рис. 7.19, в, г, д, е.

Обратите внимание, что ординаты эпюр M_x и M_y отложены со стороны растянутых волокон стержня. Как изгибается стержень не трудно представить.

Анализ эпюр внутренних сил позволяет установить вид сопротивления каждого стержня системы, выявить опасное сечение и проверить их прочность.

Сначала вычислим необходимые геометрические характеристики сечения (сечение круглое диаметром $d = 4$ см).

$$\text{Площадь сечения } A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 12,56 \text{ см}^2; \text{ осевой момент}$$

$$\text{сопротивления } W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{32} = 6,28 \text{ см}^3; \text{ полярный мо-}$$

$$\text{мент сопротивления } W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{16} = 12,56 \text{ см}^3.$$

В стержне AB возникает лишь изгибающий момент M_y . Значит он подвергается плоскому изгибу. Опасное сечение – B , где $\max M_y = 0,3$ кН·м.

Максимальное нормальное напряжение в стержне

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_y}{W_y} = \frac{0,3 \cdot 10^3}{6,28 \cdot 10^{-6}} = 0,0478 \cdot 10^9 \text{ Па} = 47,8 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Условие прочности удовлетворяется.

Стержень BC подвергается изгибу в двух плоскостях и кручению. Опасное сечение C , где $T = 0,3$ кН·м, $\max M_x = 0,196$ кН·м, $\max M_y = 0,42$ кН·м.

Поскольку изгиб происходит в двух плоскостях, необходимо вычислить суммарный изгибающий момент

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{0,196^2 + 0,42^2} = 0,463 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Максимальное касательное напряжение от крутящего момента

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{0,196 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 0,0156 \cdot 10^9 \text{ Па} = 15,6 \text{ МПа}.$$

Максимальное нормальное напряжение от суммарного изгибающего момента

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{рез}}}{W_x} = \frac{0,463 \cdot 10^3}{6,28 \cdot 10^{-6}} = 0,0737 \cdot 10^9 \text{ Па} = 73,7 \text{ МПа}.$$

Так как стержень подвергается изгибу с кручением, проверку прочности следует выполнить по теории прочности (формула (7.13)).

Максимальное расчетное напряжение

$$\sigma_{\text{des}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{73,7^2 + 3 \cdot 15,6^2} = 78,5 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Условие прочности удовлетворяется.

Стержень *BD* подвергается сжатию, изгибу в двух плоскостях и кручению.

Опасное сечение *D*, где $N = 0,6 \text{ кН}$, $\max M_x = 0,86 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $\max M_y = 0,42 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $T = 0,196 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Суммарный изгибающий момент $M_u = \sqrt{0,86^2 + 0,42^2} = 0,957 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Максимальное касательное напряжение от крутящего момента

$$\tau_{\max} = 15,6 \text{ МПа (как в стержне BC)}.$$

Максимальное нормальное напряжение от суммарного момента

$$\max \sigma_{\text{из}} = \frac{M_u}{W_x} = \frac{0,957 \cdot 10^3}{6,28 \cdot 10^{-6}} = 0,152 \cdot 10^9 \text{ Па} = 152 \text{ МПа}.$$

Максимальное нормальное напряжение от сжимающей продольной силы

$$\max \sigma_{\text{сж}} = \frac{N}{A} = \frac{0,6 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-4}} = 0,0477 \cdot 10^7 \text{ Па} = 0,477 \text{ МПа}.$$

Максимальное расчетное напряжение

$$\sigma_{des} = \sqrt{(\sigma_{сж} + \sigma_{из})^2 + 3\tau^2} = \sqrt{(0,477 + 152)^2 + 3 \cdot 15,6^2} = 154,9 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Условие прочности удовлетворяется.

В завершение примера установим положение наиболее напряженной точки в опасном сечении D .

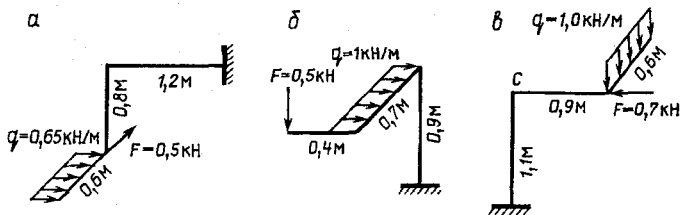
Нормальные напряжения от продольной силы N распределяются по сечению равномерно. Касательные напряжения от крутящего момента T максимальны по контуру сечения. Максимальные нормальные напряжения от изгибающих моментов M_x и M_y будут также на контуре сечения по линии действия суммарного момента M_u . Таким образом, наиболее напряженной является точка K , лежащая на контуре сечения по линии действия M_u (рис. 7.19, ж). Расчетное напряжение в этой точке $\sigma_{des} = 154,9$ МПа.

Координаты точки K легко определить, вычислив значение угла γ ($\text{tg } \gamma = M_x / M_y$).

Задача 7.15

Проверить прочность стальных стержней пространственной системы, если $R = 210$ МПа.

Диаметр вала $d = 3$ см.



О т в е т ы :

А. В защемлении: $N = 0,39$ кН, $T = 0,40$ кН·м, $M_x = 0,312$ кН·м, $M_y = 0,483$ кН·м, $\sigma_{des} = 205,8$ МПа.

Б. В защемлении: $N = 0,5$ кН, $T = 0,123$ кН·м, $M_x = 0,35$ кН·м, $M_y = 0,43$ кН·м, $\sigma_{des} = 200,3$ МПа.

В. В точке С (стержень 2): $N = 0,7$ кН, $T = 0,18$ кН·м, $M_x = 0,540$ кН·м, $M_y = 0$, $\sigma_{des} = 199,8$ МПа.

Раздел 8. ПРОДОЛЬНЫЙ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБЫ

В предыдущих разделах пособия рассматривался расчет элементов конструкций, для которых основным являлся вопрос о прочности или о жесткости. При этом напряжения и деформации линейно зависели от нагрузки, т.е. с ростом нагрузки они увеличивались постепенно без резких скачков.

Однако встречаются случаи, когда при постепенном увеличении нагрузки резко изменяется форма равновесия элемента конструкции, вследствие чего может произойти его внезапное разрушение. В таких случаях наряду с проблемой прочности существует проблема *устойчивости*, т.е. сохранения под действием нагрузки первоначальной формы равновесия.

Несущая способность элемента конструкции может быть исчерпана потерей устойчивости задолго до потери прочности. При этом утрачивается первоначальная форма равновесия.

Искривление стержня, вызванное только продольными сжимающими силами, называется *продольным изгибом*.

Продольно-поперечный изгиб стержня происходит в случае действия как продольных сжимающих, так и поперечных изгибающих сил.

8.1. Продольный изгиб (устойчивость сжатых стержней)

В механике твердого тела различают три формы равновесия твердого тела: устойчивая, безразличная и неустойчивая. Эти формы равновесия присущи сжатым гибким (длинным, тонким) стержням (рис. 8.1).

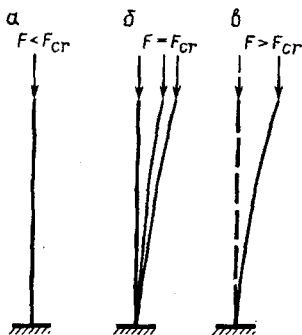


Рис. 8.1

При незначительной сжимающей силе F , меньше некоторого критического значения F_{cr} , первоначальная прямолинейная форма стержня является устойчивой (рис. 8.1, а).

При $F = F_{cr}$ сжатый стержень находится в состоянии безразличного равновесия, когда возможны как первоначальная прямолинейная форма равновесия, так и несколько близких к ней криволинейных (рис. 8.1, б).

Если $F > F_{cr}$, первоначальная форма стержня становится неустойчивой, происходит интенсивное нарастание деформации изгиба (прогиб) (рис. 8.1, в).

Устойчивость – способность стержня под действием сжимающей нагрузки находиться в состоянии упругого равновесия и сохранять первоначальную форму.

Критическая сила – значение осевой сжимающей нагрузки, при которой стержень будет в состоянии безразличного равновесия (критическое состояние), а малейшее превышение ее приведет к интенсивному росту прогибов (к потере устойчивости).

Критическая нагрузка является опасной и считается разрушающей. Разрушение происходит внезапно.

Допустимая (безопасная) сжимающая нагрузка на стержень составляет некоторую часть критической:

$$F_{adm} = F_{cr} / n_s, \quad (8.1)$$

где F_{adm} – допустимая нагрузка;

F_{cr} – критическая нагрузка;

n_s – коэффициент запаса устойчивости.

Критическая нагрузка для сжатого прямолинейного стержня постоянного поперечного сечения определяется по формуле Эйлера:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (8.2)$$

где E – модуль упругости материала стержня;

J_{\min} – минимальный момент инерции сечения относительно главных центральных осей;

μ – коэффициент приведения действительной длины стержня к расчетной (зависит от способа закрепления концов стержня);

l – длина стержня.

Непосредственно формула Эйлера была получена для случая стержня с шарнирными опорами. Влияние других видов опор Ф.С. Ясинский предложил учитывать коэффициентом μ , значения которого приведены на рис. 8.2. Пунктиром показана ось стержня при потере устойчивости.

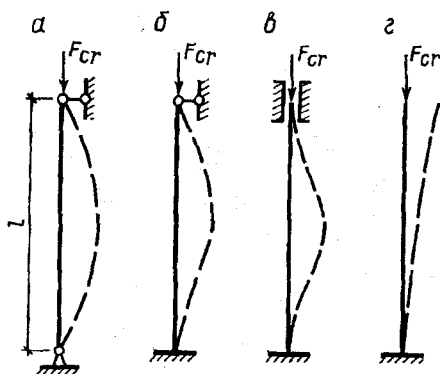


Рис. 8.2

На практике стержни могут иметь различные способы закрепления концов стержня в направлении главных центральных осей сечения XU .

Если моменты инерции сечения относительно главных центральных осей не равны между собой, то продольный изгиб произойдет в плоскости наименьшей жесткости, т.е. стержень будет искривляться перпендикулярно оси, относительно которой момент инерции будет меньшим.

Напряжение, вызванное в стержне действием критической силы, так же называется критическим σ_{cr} и определяется исходя их формулы Эйлера:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (8.3)$$

где $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ – гибкость стержня (введено Ясинским);

$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$ – минимальный радиус инерции сечения.

Гибкость стержня – геометрическая характеристика – зависит от способа закрепления его концов, длины, формы и размеров сечения.

Формула Эйлера (8.3) применима при условии, что критическое напряжение не превышает предела пропорциональности материала $\sigma_{cr} \leq \sigma_{pr}$, т.е. при работе материала в упругой стадии. Обычно это условие выражается через гибкость стержня и записывается в виде

$$\lambda \geq \lambda_u = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}}, \quad (8.4)$$

где λ_u – предельная гибкость, ниже которой формула Эйлера не применима.

Предельная гибкость зависит от механических свойств материала. Для стали $\lambda_u \cong 100$, для древесины $\lambda_u \cong 70$.

В тех случаях, когда $\lambda < \lambda_u$ – потеря устойчивости происходит за пределами упругости материала, – расчет на устойчивость ведется по зависимости (формуле) Ясинского:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, \quad (8.5)$$

где a и b – коэффициенты, полученные экспериментальным путем и зависящие от механических свойств материала. Так для стали $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа; для древесины $a = 28,7$ МПа, $b = 0,19$ МПа.

Критическая нагрузка в этих случаях равна

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A. \quad (8.6)$$

Различают три категории гибкости стержня (для стали):

1. Стержни большой гибкости $\lambda \geq 100$, расчет которых ведется на устойчивость по формуле Эйлера.

2. Стержни средней гибкости $\lambda = 50 \dots 100$, расчет которых ведется на устойчивость по формуле Ясинского.

3. Стержни малой гибкости $\lambda < 50$, расчет ведется на прочность при сжатии (потеря устойчивости не происходит).

Условие прочности для стержня малой гибкости имеет вид

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq R_c, \quad (8.7)$$

где R_c – расчетное сопротивление материала на сжатие.

Стержни средней и большой гибкости рассчитываются на устойчивость по формуле

$$\sigma = \frac{\sigma_{cr}}{n_s} \leq R_c, \quad (8.8)$$

где n_s – коэффициент запаса на устойчивость.

Этот коэффициент учитывает кроме чистого изгиба еще ряд других факторов: возможный небольшой эксцентриситет нагрузки, небольшое начальное искривление стержня, неоднородность материала и др. Для данного материала коэффициент n_s не является постоянной величиной, а зависит от гибкости стержня. Так для металлов $n_s = 1,5 \dots 3,0$, для древесины $n_s = 2,5 \dots 3,2$.

Для удобства проведения расчета сжатых стержней строительных конструкций принят общий вид условия устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot R_c, \quad (8.9)$$

где φ – коэффициент уменьшения расчетного сопротивления материала стержня (коэффициент продольного изгиба), зависящий от материала, гибкости стержня, принятого коэффициента запаса устойчивости.

Значения коэффициента φ изменяются от 0 до 1 и для различных материалов в зависимости от значения гибкости λ приводятся в виде таблиц (табл. 8.1, 8.3) или графиков (рис. 8.3).

Таким образом, расчет на устойчивость сводится к недопущению потери первоначальной формы равновесия сжатого стержня. Достигается это уменьшением допустимых нормальных напряжений, против расчетных значений R_c . Причем для каждого значения гибкости стержень будет иметь свое допускаемое напряжение.

Подбор сечения из формулы (8.9) затруднителен тем, что при неизвестной площади сечения A невозможно вычислить гибкость λ и получить значение φ . Поэтому рекомендуется предварительно задаться значением φ (для начала $\varphi = 0,5$ – середина интервала) и определить из (8.9) площадь сечения A , затем λ и φ .

Если выбранный и вычисленный коэффициенты φ близки – проверяют условие (8.9).

График $\varphi = f(\lambda)$ для ст. 3

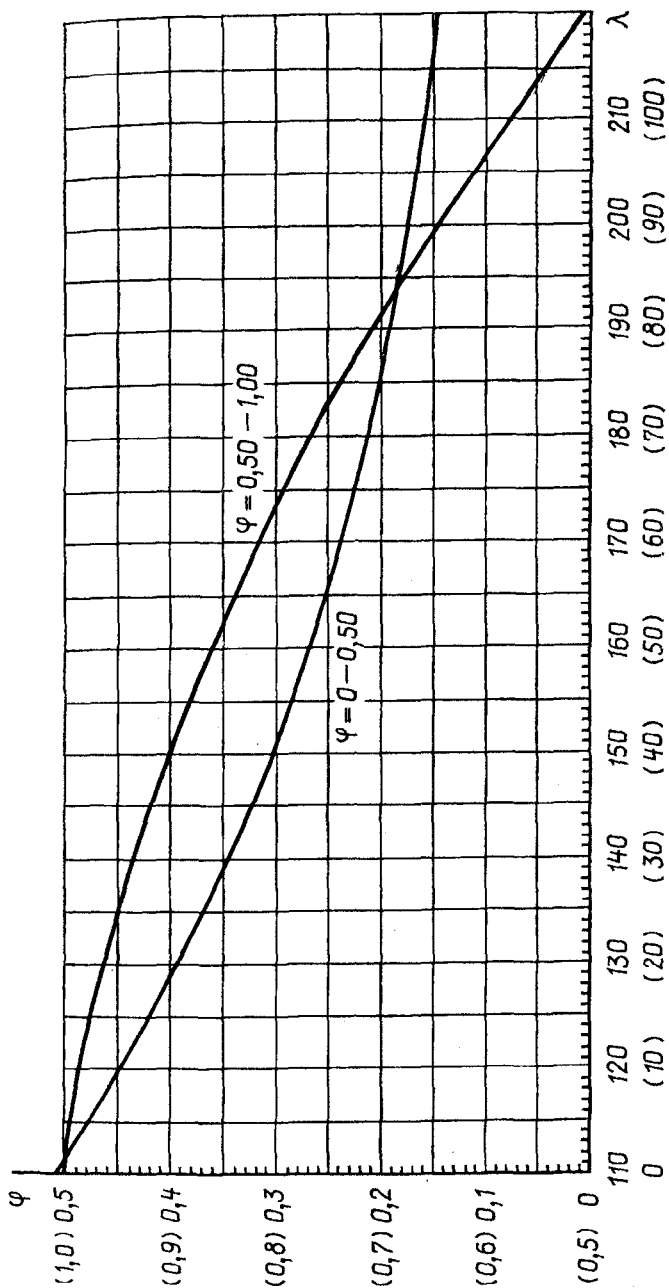


Рис. 8.3

Таблица 8.1

 $\varphi = f(\lambda)$ для ст. 3

λ	φ	λ	φ	λ	φ
0	1,000	80	0,710	160	0,267
10	0,987	90	0,638	170	0,238
20	0,964	100	0,570	180	0,214
30	0,935	110	0,507	190	0,193
40	0,901	120	0,449	200	0,176
50	0,860	130	0,395	210	0,160
60	0,816	140	0,345	220	0,147
70	0,768	150	0,302		

Таблица 8.2

 $\varphi = f(\lambda)$ для древесины

λ	φ	λ	φ	λ	φ
0	1,000	80	0,469	160	0,117
10	0,992	90	0,370	170	0,104
20	0,968	100	0,300	180	0,093
30	0,927	110	0,248	190	0,083
40	0,872	120	0,208	200	0,075
50	0,800	130	0,178	210	0,068
60	0,712	140	0,153	220	0,062
70	0,608	150	0,133		

Значительное их различие требует продолжение расчета (см. примеры).

Расхождение между σ и φR_c не должно превышать 3–5 %.

Сечение стержня, «работающего» на устойчивость, будет рациональным, если минимальный момент инерции J_{\min} будет возможно большим, при возможно меньшей площади сечения A . Этому требованию удовлетворяют трубчатые, коробчатые сечения, а также некоторые сечения, составленные из прокатных профилей (швеллеров, уголков).

Если у сечения главные моменты инерции равны ($J_x = J_y$) – стержень будет равноустойчивым.

Пример 8.1

Стальная стойка квадратного поперечного сечения ($a = 7\text{ см}$) длиной $l = 3\text{ м}$ центрально нагружена сжимающей силой F (рис. 8.4, а). Нижний конец стойки зашкелен, а верхний: в направлении главной центральной оси X – зашкелен, в направлении оси Y – свободен.

Определить наибольшее допустимое значение силы F , если $R = 210\text{ МПа}$, $E = 200\text{ ГПа}$, а коэффициент запаса устойчивости $n_s = 2$.

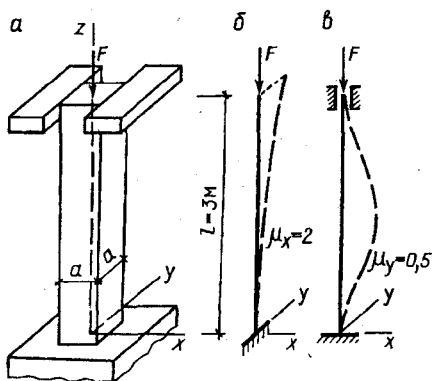


Рис. 8.4

Решение

Поскольку стойка находится под действием сжимающей силы, она должна быть рассчитана на устойчивость, т.е. определено такое значение силы F , при которой не произойдет потеря устойчивости (искривление).

Вычислим необходимые геометрические характеристики сечения стойки: площадь $A = 7 \cdot 7 = 49 \text{ см}^2$, а моменты инерции относительно главных центральных осей $J_x = J_y = \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{7^4}{12} = 200 \text{ см}^4$, ра-

диусы инерции $i_x = i_y = \sqrt{\frac{J_{x(y)}}{A}} = \sqrt{\frac{200}{49}} = 2,02 \text{ см}$.

По размерам сечения стойка равноустойчива ($J_x = J_y$), но верхний конец стойки закреплен в направлении главных центральных осей сечения различными способами.

Гибкость стойки определяется по формуле

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$$

Относительно оси Y (в направлении оси X) оба конца стойки заземлены. В соответствии с закреплением коэффициент приведения длины $\mu_y = 0,5$. Относительно оси X (в направлении оси Y) нижний конец стойки заземлен, верхний свободный — $\mu_x = 2$.

На рис. 8.4, б и в пунктиром показаны положения оси стойки в случае потери устойчивости.

Гибкости стойки относительно главных центральных осей будут

$$\lambda_y = \frac{\mu_y \cdot l}{i_y} = \frac{0,5 \cdot 300}{2,02} = 74,3, \quad \lambda_x = \frac{\mu_x \cdot l}{i_x} = \frac{2 \cdot 300}{2,02} = 297.$$

Определим критическую силу для стойки, используя формулы (8.2) и (8.5), (8.6) в зависимости от значений гибкостей. Для стальной стойки формула Эйлера (8.2) применима, когда предельная гибкость $\lambda_{cr} \geq 100$.

Поскольку для данного случая относительно оси X гибкость $\lambda > 100$, критическая сила определяется по формуле (8.2):

$$F_{cr(x)} = \frac{\pi^2 EJ_x}{(\mu_x \cdot l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 200 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 3)^2} = 1,0955 \cdot 10^5 \text{ Н} = 109,6 \text{ кН}.$$

Относительно оси Y гибкость $\lambda < 100$ – используются формулы Ясинского (8.5), (8.6).

Критическое напряжение $\sigma_{cr} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 74,3 = 225,3$ МПа.

Критическая сила $F_{cr} = \sigma_{cr} A = 218,5 \cdot 10^6 \cdot 49 \cdot 10^{-4} = 1,0707 \cdot 10^2$ Н = 1104 кН.

Определим наибольшие допустимые значения сжимающей силы F , используя коэффициент запаса устойчивости.

$$\text{Относительно оси } X \quad F_{x, adm} = \frac{F_{cr(x)}}{n_s} = \frac{109,6}{2} = 54,8 \text{ кН.}$$

$$\text{Относительно оси } Y \quad F_{y, adm} = \frac{F_{cr(y)}}{n_s} = \frac{1104}{2} = 552,5 \text{ кН.}$$

Принимаем в качестве наибольшей допустимой сжимающей силы ее наименьшее значение – $F_{adm} = 54,8$ кН.

В случае превышения допустимой нагрузки стойка потеряет устойчивость и искривится в плоскости ее наибольшей гибкости, т.е. относительно оси X (в направлении оси Y).

Действующее напряжение в стойке

$$\sigma = \frac{F_{adm}}{A} = \frac{54,8 \cdot 10^3}{49 \cdot 10^{-4}} = 1,118 \cdot 10^7 \text{ Па} = 11,18 \text{ МПа} < R.$$

Обратим внимание, что действующее напряжение σ значительно меньше расчетного сопротивления R . Такое уменьшение σ необходимо для достижения устойчивости стойки.

Примечание. В случае различных значений J_x , J_y , μ_x и μ_y потеря устойчивости стойки произойдет в плоскости наибольшей гибкости.

Пример 8.2

Стальная стойка длиной $l = 5$ м, составленная из двух швеллеров № 12, центрально нагружена сжимающей силой $F = 190$ кН (рис. 8.5).

Определить, каким запасом на устойчивость обладает стойка при условии равноустойчивости.

Схема закрепления концов стойки показана на рис. 8.5.

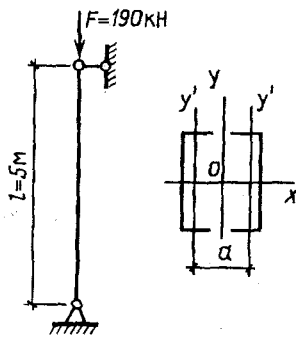


Рис. 8.5

Решение

Выписываем из таблицы сортамента необходимые геометрические характеристики для швеллера № 12:

$$A' = 13,3 \text{ см}^2, J'_x = 304 \text{ см}^4, J'_y = 31,2 \text{ см}^4.$$

Для сечения стойки:

$$\text{площадь } A = 2A' = 2 \cdot 13,3 = 26,6 \text{ см}^2;$$

$$\text{момент инерции относительно оси } X J_x = 2J'_x = 2 \cdot 304 = 608 \text{ см}^4;$$

условие равноустойчивости $J_x = J_y$;

момент инерции сечения относительно оси Y с учетом равноустойчивости будет

$$J_y = 2 \left[J'_y + A' \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = 2 \left[31,2 + 13,3 \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = 608 \text{ см}^4,$$

откуда расстояние между осями Y' швеллеров $a = 9,06 \text{ см}$;
радиусы инерции стойки

$$i_x = i_y = \sqrt{J_x / A} = \sqrt{608 / 26,6} = 4,78 \text{ см}.$$

При шарнирном закреплении концов стойки коэффициент длины $\mu = 1$.

$$\text{Гибкость стойки } \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 500}{4,78} = 104,6.$$

Так как гибкость стойки больше предельного значения для стали ($\lambda = 104,6 > \lambda_{st} = 100$), для определения критической силы используется формула Эйлера (8.2):

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 608 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 5)^2} = 476,4 \text{ кН.}$$

Коэффициент запаса устойчивости по формуле (8.1):

$$n_s = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{476,4}{190} = 2,51.$$

Пример 8.3

Стальная колонна длиной $l = 6$ м, составленная из четырех равнополочных уголков, нагружена сжимающей силой $F = 500$ кН (рис. 8.6).

Условия закрепления концов колонны в главных плоскостях сечения одинаковы. Жесткая решетка, соединяющая ветви колонны (показана пунктиром), обеспечивает их совместную работу.

Определить номер уголков, если $R = 210$ МПа, и коэффициент запаса устойчивости.

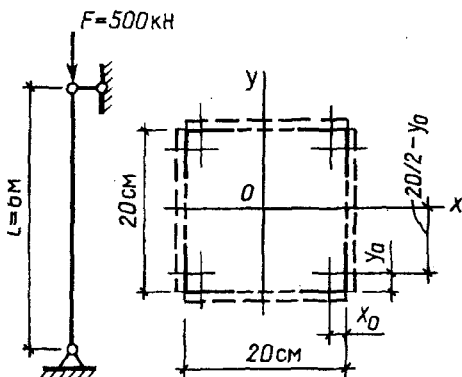


Рис. 8.6

Решение

По условию закрепления концов колонны (шарниры) коэффициент расчетной длины $\mu = 1$.

Положение центра тяжести сечения очевидно. Оси XU являются главными центральными осями сечения колонны.

Подбор уголков сечения проведем по формуле (8.9):

$$\sigma = F / A \leq \varphi R_c.$$

Поскольку площадь сечения неизвестна, расчет ведется путем предварительного выбора коэффициента φ с последующим его уточнением.

Задаемся в первом приближении $\varphi_1 = 0,5$ (середица интервала значений φ). Тогда площадь сечения колонны из (8.9):

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot R_c} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 4,762 \cdot 10^{-3} = 47,6 \text{ см}^2.$$

Площадь сечения одного уголка $A' = \frac{A}{4} = \frac{47,6}{4} = 11,9 \text{ см}^2$.

По этому значению выбираем ближайший номер уголка. Проверим сечение из уголков $80 \times 80 \times 8 \text{ мм}$.

Из таблицы сортамента: $A' = 12,3 \text{ см}^2$, $J'_x = J'_y = 73,36 \text{ см}^4$, $x_0 = y_0 = 2,43 \text{ см}$.

Для всего сечения:

площадь сечения $A = 12,3 \cdot 4 = 49,2 \text{ см}^2$;

моменты инерции относительно главных центральных осей

$$J_x = J_y = 4 \left[73,36 + 12,3 \cdot \left(\frac{20}{2} - 2,43 \right)^2 \right] = 3113 \text{ см}^4;$$

радиус инерции

$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{3113}{49,2}} = 7,95 \text{ см};$$

гибкость колонны

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 600}{7,95} = 75,5.$$

Для данного значения гибкости по табл. 8.1 ($\varphi = f(\lambda)$) путем интерполяции вычислим табличное значение φ_1^T , соответствующее $\lambda = 75,5$:

для $\lambda = 70$ $\varphi = 0,768$,

для $\lambda = 80$ $\varphi = 0,710$,

для $\lambda = 75,5$ $\varphi_1^m = 0,768 - \frac{0,768 - 0,710}{10}(75,5 - 70) = 0,736$.

Вычислим напряжение в колонне

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{500 \cdot 10^3}{49,2 \cdot 10^{-4}} = 10,16 \cdot 10^7 = 101,6 \text{ МПа.}$$

Расчетное сопротивление в колонне с учетом устойчивости

$$\varphi_1^m R = 0,736 \cdot 210 = 154,6 \text{ МПа.}$$

При этом сечении колонны недонапряжение составляет $\frac{154,6 - 101,6}{154,6} \cdot 100 = 34,3 \%$.

Устойчивость колонны будет обеспечена, однако возможности материала полностью не используются. Размеры сечения можно уменьшить.

Рекомендуется последовательное приближение к правильному выбору уголков.

Задаемся во второй попытке значением φ_2 между φ_1 и φ_1^m :

$$\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,736}{2} = 0,618.$$

Из условия устойчивости для сечения колонны необходима площадь

$$A = \frac{F}{\varphi_2 R} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,618 \cdot 210 \cdot 10^6} = 38,5 \text{ см}^2.$$

Для одного уголка $A' = \frac{38,5}{4} = 9,63 \text{ см}^2$.

проверим сечение из уголков $70 \times 70 \times 7$ мм, для которых $A' = 9,42 \text{ см}^2$, $J'_x = J'_y = 42,98 \text{ см}^4$, $x_0 = y_0 = 1,99$ см.

Для всего сечения $A = 9,42 \cdot 4 = 37,68 \text{ см}^2$;

$$J_x = J_y = 4 \left[42,98 + 9,42 \left(\frac{20}{2} - 1,99 \right)^2 \right] = 2589 \text{ см}^4;$$

$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{2589}{37,68}} = 8,29 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{1 \cdot 600}{8,29} = 72,5; \quad \varphi_2^T = 0,753.$$

Напряжение в колонне

$$\sigma = \frac{500 \cdot 10^3}{37,68 \cdot 10^{-4}} = 132,7 \text{ МПа.}$$

Расчетное сопротивление

$$\varphi_2^T R = 0,753 \cdot 210 = 158,1 \text{ МПа.}$$

Недонапряжение составляет 24,7 %.

Примечание. Поскольку площадь сечения уголков от номера к номеру изменяется не последовательно (см. таблицу сортамента), после нескольких попыток выбора коэффициента φ целесообразно перейти к логическому выбору номера уголка.

После второго приближения действующее напряжение в колонне ниже допустимого. Следовательно, площадь сечения можно уменьшить.

Проверим сечение из уголков $70 \times 70 \times 6$ мм для которых: $A' = 8,15 \text{ см}^2$, $J_x = J_y = 37,58 \text{ см}^4$, $x_0 = y_0 = 1,94$ см.

Для всего сечения $A = 32,6 \text{ см}^2$, $J_x = J_y = 2268 \text{ см}^4$, $i_x = i_y = 8,34$ см, $\lambda = 71,9$, $\varphi_3^T = 0,757$.

Напряжение в колонне $\sigma = 153,4$ МПа, расчетное сопротивление $\varphi R = 159,0$ МПа – недонапряжение составляет 3,21 %, что приемлемо.

Проверка сечения из уголков $75 \times 75 \times 5$ мм с ближайшей меньшей площадью показала перенапряжение 5,8 %, что недопустимо.

И так, принимаем сечение колонны из уголков $70 \times 70 \times 6$ мм с приемлемым недонапряжением.

В завершение примера вычислим коэффициент запаса устойчивости принятого сечения колонны.

Так как гибкость колонны $\lambda = 71,9 < \lambda_{cr} = 100$ МПа, воспользуем-ся формулами Ясинского.

Критическое напряжение $\sigma_{cr} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 71,9 = 228,2$ МПа.

Критическая сила $F_{cr} = \sigma_{cr} A = 228,2 \cdot 10^6 \cdot 32,6 \cdot 10^{-4} = 743,3$ кН.

Коэффициент запаса устойчивости $n_s = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{743,3}{500} = 1,49$.

Пример 8.4

Деревянная стойка длиной $l = 2$ м прямоугольного поперечного сечения ($h = 16$ мм, $b = 8$ см) нагружена центрально сжимающей силой F .

Способы закрепления концов стойки в направлении главных центральных осей сечения ХУ показаны на рис. 8.7, а, б.

Расположив сечение стойки рационально по отношению к осям ХУ, определить наибольшую допустимую нагрузку F и коэффициент запаса устойчивости. Для древесины $R_c = 20$ МПа, $E = 10$ ГПа.

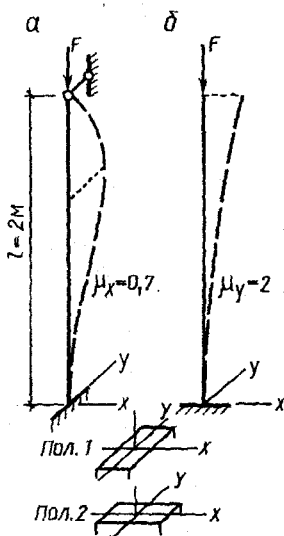


Рис. 8.7

Решение

Расчет по определению наибольшей допустимой нагрузки F будем вести по условию устойчивости (8.9) с использованием коэффициента ϕ .

Исходя из способов закрепления концов стойки коэффициент приведения длины относительно оси X (закрепление – шарнир) равен $\mu_x = 0,7$, а относительно оси Y (закрепление – свободный конец) – $\mu_y = 2$.

Вычислим необходимые для расчета геометрические характеристики сечения стойки в двух указанных положениях.

Положение 1: $A = 16 \cdot 8 = 128 \text{ см}^2$,

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \cdot 16^3}{12} = 2731 \text{ см}^4, \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{16 \cdot 8^3}{12} = 683 \text{ см}^4,$$

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{2731}{128}} = 4,62 \text{ см}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{683}{128}} = 2,31 \text{ см},$$

$$\lambda_x = \frac{\mu_x \cdot l}{i_x} = \frac{0,7 \cdot 200}{4,62} = 30,3, \quad \lambda_y = \frac{\mu_y \cdot l}{i_y} = \frac{2 \cdot 200}{2,31} = 173.$$

Положение 2: $A = 16 \cdot 8 = 128 \text{ см}^2$,

$$J_x = \frac{hb^3}{12} = \frac{16 \cdot 8^3}{12} = 683 \text{ см}^4, \quad J_y = \frac{8 \cdot 16^3}{12} = 2731 \text{ см}^4,$$

$$i_x = 2,31 \text{ см}, \quad i_y = 4,62 \text{ см},$$

$$\lambda_x = \frac{0,7 \cdot 200}{2,31} = 60,5, \quad \lambda_y = \frac{2 \cdot 200}{4,62} = 86,6.$$

Анализируя полученные значения гибкости λ необходимо выбрать оптимальное положение сечения, при котором нагрузка будет возможно большей без потери устойчивости.

В случае разных способов закрепления концов стойки относительно главных центральных осей сечения критерием для выбора рационального положения является гибкость стержня λ .

Из двух положений сечения наибольшая гибкость, а значит, и большая вероятность потери устойчивости, будет в первом положении – $\lambda_{\max} = \lambda_y' = 173$. Во втором положении сечения – $\lambda_{\max} = \lambda_x'' = 86,6$ – значительно меньше, чем в первом.

Принимаем положение 2.

Направление возможной потери устойчивости стойки определяется по значениям λ . В принятом положении потеря устойчивости возможна относительно оси с большей гибкостью, т.е. Y ($\lambda_y > \lambda_x$) в направлении оси X .

При гибкости $\lambda = 86,6$ коэффициент $\varphi = 0,403$.

Из условия устойчивости (8.9) наибольшая допустимая нагрузка на стойку

$$F_{adm} = A \varphi R_c = 128 \cdot 10^{-4} \cdot 0,403 \cdot 20 \cdot 10^6 = 103,2 \text{ кН.}$$

Критическая нагрузка на стойку по (8.2):

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(\mu_y \cdot l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 2731 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 2)^2} = 168,3 \text{ кН.}$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{168,3}{103,2} = 1,63.$$

Действующее напряжение в стойке

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{103,2 \cdot 10^3}{128 \cdot 10^{-4}} = 8,06 \text{ МПа}$$

$$\text{или } \sigma = \varphi \cdot R_c = 0,403 \cdot 20 = 8,06 \text{ МПа} < R_c.$$

Таким образом, принятое положение сечения стойки обеспечит ее прочность и устойчивость при $F = 103,2$ кН.

В продолжение примера определим размеры сечения стойки, при которых она будет *равноустойчива*, сохранив первоначальную площадь ($A = 128 \text{ см}^2$).

Условие равноустойчивости

$$\lambda_x = \lambda_y \quad \text{или} \quad \frac{\mu_x \cdot l}{i_x} = \frac{\mu_y \cdot l}{i_y}.$$

После преобразования получим

$$\frac{h}{b} = \frac{\mu_x}{\mu_y} = \frac{0,7}{2} = 0,35.$$

Установим оптимальные размеры сечения стойки, сохранив ее первоначальную площадь:

$$A = b \cdot h = b \cdot 0,35b = 0,35b^2 = 128 \text{ см}^2,$$

откуда $b = 19,1 \text{ см}$, $h = 6,69 \text{ см}$.

Принимаем $h = 6,7 \text{ см}$, $b = 19,0 \text{ см}$.

Примечание. Рациональное положение сечения стойки определилось автоматически. Большая сторона сечения (19 см) расположена вдоль оси X , как в положении 2.

Геометрические характеристики сечения стойки с оптимальными размерами

$$A = 6,7 \cdot 19 = 127,3 \text{ см}^2,$$

$$J_x = \frac{19 \cdot 6,7^3}{12} = 476,2 \text{ см}^4, \quad J_y = \frac{6,7 \cdot 19^3}{12} = 3830 \text{ см}^4,$$

$$i_x = \sqrt{\frac{476,2}{127,3}} = 1,934 \text{ см}, \quad i_y = \sqrt{\frac{3830}{127,3}} = 5,485 \text{ см},$$

$$\lambda_x = \frac{0,7 \cdot 200}{1,9344} = 72,4, \quad \lambda_y = \frac{2 \cdot 200}{5,485} = 72,9.$$

Замечание. Небольшое расхождение в гибкостях λ связано с округлением размеров сечения стойки.

При гибкости $\lambda = 72,9$ коэффициент $\varphi = 0,568$.

Максимальная допустимая нагрузка на стойку

$$F = A\varphi R_c = 127,3 \cdot 10^{-4} \cdot 0,568 \cdot 20 \cdot 10^6 = 144,6 \text{ кН}.$$

Таким образом, оптимизация размеров сечения позволила увеличить наибольшую допустимую нагрузку на стойку до 144,6 кН, т.е.

$$\text{на } \frac{144,6 - 103,2}{103,2} \cdot 100 = 40,1 \text{ \%}.$$

Пример 8.5

Строительная ферма нагружена сосредоточенной силой $F = 288$ кН в узле верхнего пояса (рис. 8.8, а).

Подобрать сечения стержней фермы из двух равнополочных прокатных уголков, если $R = 210$ МПа.

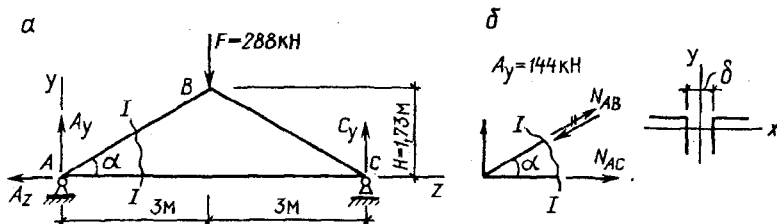


Рис. 8.8

Решение

Стержни фермы считаются соединенными друг с другом шарнирно.

Уголки стержней по оси X расположены на некотором расстоянии δ друг от друга, но соединены между собой таким образом, что обеспечена их совместная работа.

Определим длину стержней верхнего пояса.

Из схемы фермы следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,73}{3} = 0,577; \quad \alpha = 30^\circ; \quad l_{AB} = l_{BC} = \frac{3}{\cos \alpha} = \frac{3}{0,866} = 3,464 \text{ м.}$$

В шарнирных опорах, на которых установлена ферма, возможны три опорные реакции, которые определяются из условия ее равновесия:

$$\sum Z = 0 \rightarrow A_z = 0,$$

$$\sum M_A = -C_y \cdot 6 + F \cdot 3 = 0 \rightarrow C_y = \frac{288 \cdot 3}{6} = 144 \text{ кН,}$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow A_y = 0,5F = 144 \text{ кН,}$$

$$\sum Y = 144 - 288 + 144 = 0 - \text{реакции опор определены верно.}$$

Определим усилия в стержнях фермы используя метод сечений.

Напомним, что рассекать любую рассматриваемую систему надо на две части. Усилия в рассеченных стержнях определяются из условий равновесия отсеченной части системы.

Сечение I-I проведем через стержни AB и AC (рис. 8.8, б).

Уравнения равновесия:

$$\sum Y = A_y + N_{AB} \sin \alpha = 0, \text{ откуда } N_{AB} = -\frac{A_y}{\sin \alpha} = -\frac{144}{0,5} = -288 \text{ кН.}$$

$$\sum Z = N_{AC} + N_{AB} \cos \alpha = N_{AC} - 288 \cdot 0,866 = 0, \text{ откуда } N_{AC} = 249,4 \text{ кН.}$$

Второе сечение проводить нет надобности, т.к. вследствие симметрии фермы усилия в наклонных стержнях равны $N_{BC} = N_{AB} = -288$ кН.

Таким образом, верхние стержни *сжаты*, а нижнего — *растянуты*.

После определения усилий в стержнях фермы приступим к подбору сечений.

Так как стержень AC *растянут*, подбор его сечения ведется из условия прочности на растяжение: $\sigma = N / A \leq R$.

Требуемая площадь сечения

$$A = \frac{N_{AC}}{R} = \frac{249,4 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 1,188 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 11,88 \text{ см}^2.$$

$$\text{На один уголок приходится } A' = \frac{A}{2} = \frac{11,88}{2} = 5,94 \text{ м}.$$

Принимаем для нижнего пояса сечение из двух уголков $63 \times 63 \times 5$ мм с площадью сечения $A = 6,13 \cdot 2 = 12,26 \text{ см}^2$

Подбор сечения для *сжатых* стержней верхнего пояса ведется из условия устойчивости: $\sigma = N / A \leq \varphi R$.

Задаемся коэффициентом $\varphi = 0,5$.

Требуемая площадь сечения

$$A = \frac{N}{\varphi R} = \frac{288 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 2,743 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 27,43 \text{ см}^2.$$

$$\text{На один уголок приходится } A' = A / 2 = 27,43 / 2 = 13,71 \text{ см}^2.$$

Проверим уголок $100 \times 100 \times 7$, для которого: $A = 13,75 \text{ см}^2$, $J_x = J_y = 130,5 \text{ см}^4$.

Для всего сечения $A = 13,75 \cdot 2 \text{ см}^2$ и, очевидно, что минимальный момент инерции $J_{\min} = J_x = 2 \cdot 130,5 = 261 \text{ см}^4$.

Заметим, что J_y будет больше, чем J_x в связи с расстоянием δ .

Минимальный радиус инерции сечения

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{261}{27,5}} = 3,081 \text{ см.}$$

Гибкость стержня AB

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 3,464 \cdot 10^2}{3,081} = 112,4.$$

Напомним, что при шарнирном креплении концов стержня коэффициент $\mu = 1$.

При гибкости $\lambda = 112,4$ по таблице $\varphi = f(\lambda)$ коэффициент $\varphi = 0,493$.

Напряжение в стержне

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{288 \cdot 10^3}{27,5 \cdot 10^{-4}} = 10,47 \cdot 10^7 \text{ Па} = 104,7 \text{ МПа.}$$

Допускаемое напряжение в материале стержня

$\varphi R = 0,493 \cdot 210 = 103,6 \text{ МПа.}$

Перенапряжение составляет 1,16 %, что допустимо.

Принимаем для верхнего пояса сечение из двух уголков номер $100 \times 100 \times 7 \text{ мм.}$

Пример 8.6

Элемент конструкции P , имеющий большую жесткость, укреплен шарнирно в опоре A и поддерживается двумя стержнями длиной $l = 2 \text{ м}$ и диаметром $d = 4 \text{ см}$ (рис. 8.9, a).

Определить наибольшую допустимую нагрузку q из условия прочности и устойчивости стержней, если $R = 210 \text{ МПа.}$

Решение

Нагрузка q , приложенная к элементу P , передается непосредственно на опору A и через стержни 1 и 2 на опоры K и L , где возникают в сумме четыре неизвестные реакции. Поскольку для плоской системы можно составить только три уравнения равновесия, система является один раз статически неопределимой ($4 - 3 = 1$).

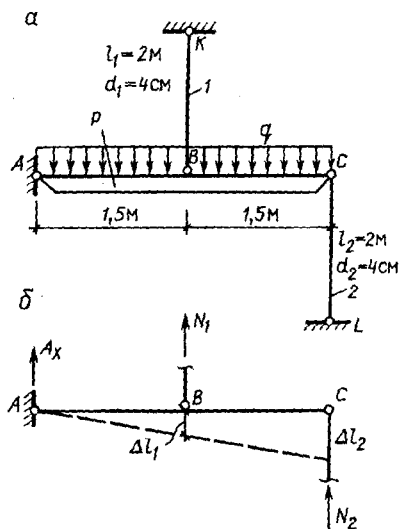


Рис. 8.9

Для решения задачи нужно знать усилия в стержнях, выраженные через нагрузку q .

Мысленно рассекаем стержни и показываем продольные силы, направляя их с учетом характера деформации (рис. 8.9). Нетрудно понять, что стержень 1 растянут (N_1 направлено от сечения), а стержень 2 сжат (N_2 направлено к сечению).

Вследствие деформации стержней 1 и 2 ось элемента P повернется вокруг опоры A на некоторый угол.

Рациональное уравнение равновесия

$$\sum M_A = -N_1 \cdot 1,5 - N_2 \cdot 3 + q \cdot 3 \cdot 1,5 = 0. \quad (8.10)$$

Уравнение деформации имеет вид

$$\frac{\Delta l_1}{1,5} = \frac{\Delta l_2}{3} \quad \text{или} \quad 2\Delta l_1 = \Delta l_2.$$

Используя формулу Гука получим

$$2 \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_2 l_2}{EA_2} \quad \text{или} \quad 2N_1 = N_2. \quad (8.11)$$

Поскольку стержень 2 подвергается сжатию, допускаемое усилие в нем должно быть определено из условия устойчивости (8.9).

Характеристики стержня:

$$\text{площадь сечения } A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 12,56 \text{ см}^2;$$

$$\text{момент инерции } J_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{64} = 12,56 \text{ см}^4;$$

$$\text{радиус инерции } i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{12,56}{12,56}} = 1 \text{ см};$$

$$\text{гибкость } \lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{1 \cdot 200}{1} = 200, \text{ коэффициент } \varphi = 0,176.$$

Наибольшее допустимое усилие во втором стержне из условия устойчивости

$$N_2 = A \cdot \varphi \cdot R = 12,56 \cdot 10^{-4} \cdot 0,176 \cdot 210 \cdot 10^6 = 464,2 \cdot 10^2 \text{ Н} = 46,4 \text{ кН}.$$

Из равенства (8.11) $2N_1 = 46,4 \text{ кН}$ усилие в первом стержне – $N_1 = 23,2 \text{ кН}$.

Из уравнения (8.10) наибольшая допустимая нагрузка на систему будет

$$23,2 \cdot 1,5 + 46,4 \cdot 3 = 4,5q, \text{ откуда } q = \frac{174}{4,5} = 38,67 \text{ кН/м}.$$

Действующие напряжения в стержнях системы и сопоставление с допускающими:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{23,2 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-4}} = 1,847 \cdot 10^7 \text{ Па} = 18,47 \text{ МПа} < R.$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{46,4 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-4}} = 3,694 \cdot 10^7 \text{ Па} = 36,94 \text{ МПа}.$$

Допускаемое напряжение во втором стержне

$$\sigma_{adm,2} = \varphi R = 0,176 \cdot 210 = 36,94 \text{ МПа}.$$

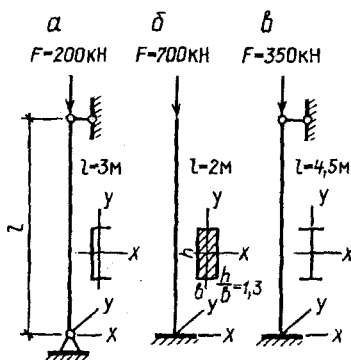
При нагрузке $q = 38,67 \text{ кН/м}$ прочность и устойчивость стержней обеспечена.

Задачи для аудиторного и самостоятельного решения

Задача 8.1

Стальная стойка длиной l загружена сжимающей силой F . Условия закрепления стойки в главных плоскостях сечения одинаковы.

Подобрать номер прокатного профиля (размеры поперечного сечения) и определить коэффициент запаса устойчивости, если $R = 210$ МПа.



Ответы:

А. Швеллер № 22, $n = 1,65$.

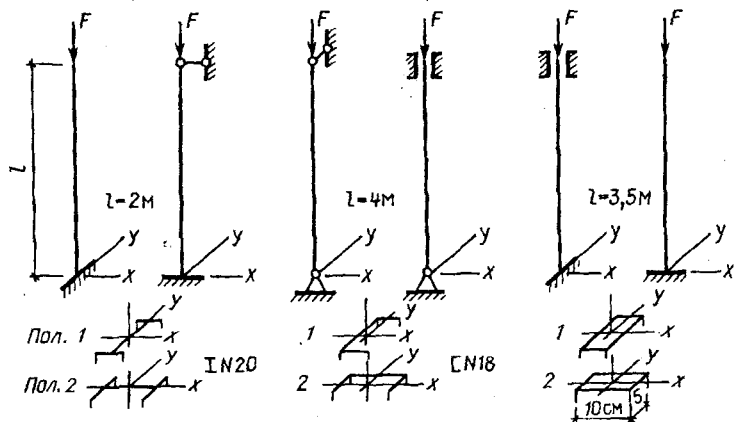
Б. $h = 12$ см, $b = 9,24$ см, $n = 1,39$.

В. Двутавр № 27, $n = 1,48$.

Задача 8.2

Стальная стойка центрально нагружена сжимающей силой F . Способы закрепления концов стойки в главных плоскостях сечения различны (см. рис.).

Расположив сечение стойки рационально по отношению к осям XU , определить наибольшую допустимую нагрузку F и коэффициент запаса устойчивости, если $R = 210$ МПа.



Отвeты:

А. Положение 1, $F_{\max} = 439 \text{ кН}$, $n = 2,64$.

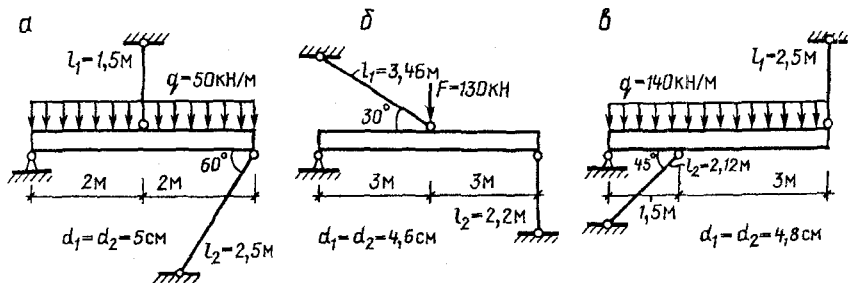
Б. Положение 1, $F_{\max} = 216,3 \text{ кН}$, $n = 1,38$.

В. Положение 2, $F_{\max} = 462 \text{ кН}$, $n = 1,45$.

Задача 8.3

Жесткая балка поддерживается стальными стержнями круглого поперечного сечения диаметром d .

Проверить прочность и устойчивость стержней, если $R = 210 \text{ МПа}$.



Отвeты:

А. $\sigma_1 = 50,0 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 52,0 \text{ МПа}$, $n_2 = 1,48$.

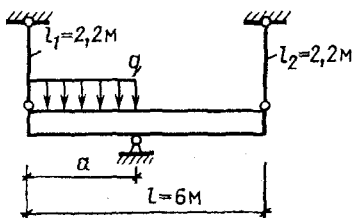
Б. $\sigma_1 = 5,75 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 36,2 \text{ МПа}$, $n_2 = 1,49$.

В. $\sigma_1 = 163,4 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 114,3 \text{ МПа}$, $n_2 = 1,39$.

Задача 8.4

Жесткая балка укреплена на шарнирно-неподвижной опоре A и двух стальных стержнях длиной $l = 2,2 \text{ м}$, выполненных из равнополочного уголка $70 \times 70 \times 7 \text{ мм}$.

Определить расстояние « a », при котором в стержнях будут максимально допустимые внутренние силы, если $R = 210 \text{ МПа}$. Какова при этом будет нагрузка q ?

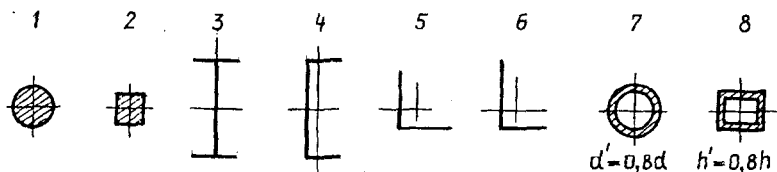


Отвeт:

$\max N_1 = 197,8 \text{ кН}$, $\max N_2 = 52,4 \text{ кН}$, $q = 89,4 \text{ кН/м}$.

Задача 8.5

Какое из приведенных на рисунке сечений центрально сжатой стойки, имеющих одинаковую площадь сечения $A = 23,4 \text{ см}^2$ (для равнополочного уголка $A = 22,8 \text{ см}^2$), обладают наибольшей и наименьшей несущей способностью и каково соотношение допустимых нагрузок?



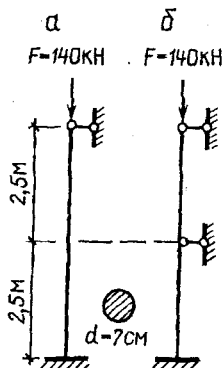
Ответ:

Наибольшую несущую способность имеет квадратное коробчатое сечение ($F = 446,7 \text{ кН}$), наименьшую – круглое сплошное сечение ($F = 367,6 \text{ кН}$), т.е. на 17,7 % меньше.

Задача 8.6

Изменится ли напряжение в стальной стойке, центрально сжатой силой $F = 140 \text{ кН}$, если посередине высоты стойки установить дополнительную опору? Изменится ли запас устойчивости? Можно ли увеличить нагрузку F ?

Для стали $R = 210 \text{ МПа}$.



Ответы:

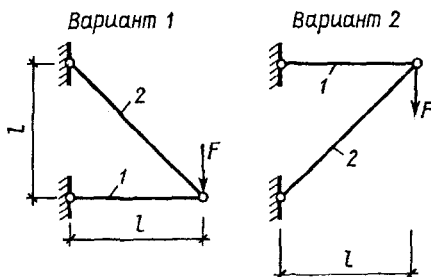
1. Напряжение ($\sigma = 36,4 \text{ МПа}$) не изменится.

2. Коэффициент запаса устойчивости увеличится с $n = 1,35$ до $n = 2,65$ в верхней части и до $n = 5,42$ в нижней части стойки.

3. Нагрузку можно увеличить до $F = 269$ кН.

Задача 8.7

В каком варианте расположения стержневой системы, имеющих одинаковую площадь сечения, допустимая нагрузка F будет наибольшей?



Ответ:

В варианте 1, т.к. сжимаемый стержень (1) будет короче (гибкость меньше) и допустимое усилие в нем, на систему, будет большим.

8.2. Продольно-поперечный изгиб

Изгиб прямого стержня называется продольно-поперечным, если к нему одновременно приложены продольная и поперечная нагрузки (рис. 8.10, а).

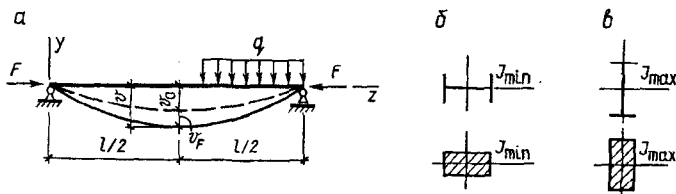


Рис. 8.10

При расчете массивных элементов конструкций, обладающих большой жесткостью, можно использовать принцип независимости действия сил, суммируя отдельно напряжения от изгиба и от сжатия ($\sigma = M/W + F/A$).

Для стержней, обладающих значительной гибкостью, принцип независимости действия сил не применим. Необходимо рассматривать деформированную схему стержня (см. рис. 8.17, а), у которого v_0 – прогиб от поперечной нагрузки, а v_F – дополнительный прогиб от продольной сжимающей силы F .

Задача определения полного прогиба v и изгибающего момента M является довольно затруднительной (особенно при сложной нагрузке). В таких случаях используются приближенные более простые приемы расчета. Принимают, что прогибы v_0 и v_F являются независимыми и что форма упругой линии балки близка к синусоиде.

Исходя из этих допущений получена формула для определения полного прогиба при продольно-поперечном изгибе

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{1 - \frac{F}{F_{\text{Э}}}}, \quad (8.12)$$

где $F_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ – эйлерова сила;

J – момент инерции сечения балки, зависящий от ее положения по отношению к поперечной нагрузке.

Это может быть J_{\min} (рис. 8.10, б) или J_{\max} (рис. 8.10, в).

Если используется J_{\min} – эйлерова сила равна критической $F_{\text{Э}} = F_{\text{cr}}$.

В поперечных сечениях стержня, подвергающегося продольно – поперечному изгибу, возникают изгибающие моменты как от поперечных нагрузок M_0 , определяемых обычным способом, так и дополнительные от продольной – $M_F = F \cdot v$. Полный изгибающий момент $M = M_0 + M_F$.

В изгибаемых балках с шарнирными опорами максимальный изгибающий момент $M_{0,\max}$ при симметричной нагрузке имеет место по середине пролета и вблизи середины – при несимметричной. В консольной балке $M_{0,\max}$ – в защемлении.

Максимальный изгибающий момент в балке

$$M_{\max} = M_{0,\max} + F \cdot v. \quad (8.13)$$

Проверка прочности при продольно-поперечном изгибе осуществляется по нормальным напряжениям, возникающим в крайних точках сечения с наибольшим изгибающим моментом, по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{\max}}{W} \leq R_C, \quad (8.14)$$

Формулу (8.14) можно представить в развернутом виде

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{0,\max}}{W} + \frac{F \cdot \vartheta_0}{W} \cdot \frac{1}{1 - \frac{F}{F_\vartheta}} \leq R_C, \quad (8.14')$$

Следует заметить, что нормальные напряжения σ нелинейно связаны с продольной силой F и при приближении ее величины к эйлеровой силе F_ϑ , напряжения будут стремительно возрастать, достигая опасных значений. Поэтому продольная сжимающая нагрузка должна быть в пределах $F \leq 0,8F_\vartheta$.

При большой продольно сжимающей силе F необходима проверка стержня на устойчивость в направлении, свободном от поперечных нагрузок по условию (8.9).

Пример 8.7

Стальная стойка из двутавра №22 нагружена сосредоточенной продольной силой F и равномерно распределенной q (рис.8.11, а).

Проверить прочность и устойчивость стойки, если $R = 210$ МПа.

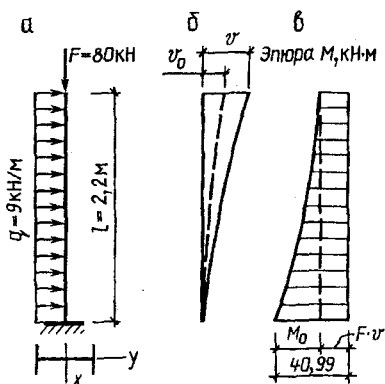


Рис. 8.11

Решение

Проанализируем характер действия нагрузок. Продольная сила F создает центральное сжатие стойки, а поперечно-действующая распределенная q – изгиб. Значит стержень подвергается продольно-поперечному изгибу.

Геометрические характеристики сечения двутавра № 22: $A = 30,6 \text{ см}^2$, $W_x = 232 \text{ см}^3$, $J_x = 2550 \text{ см}^4$, $J_y = 157 \text{ см}^4$, $i_x = 9,13 \text{ см}$, $i_y = 2,27 \text{ см}$.

Проверим устойчивость стойки от действия сосредоточенной силы F . По условию закрепления концов стойки коэффициент длины $\mu = 2$.

Гибкость стойки относительно главных центральных осей

$$\lambda_x = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{2 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{9,13} = 48,2, \quad \lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{2 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{2,27} = 194.$$

Проверку устойчивости следует проводить в плоскости *большой* гибкости, т.е. относительно оси Y .

Для $\max \lambda_y = 194$ по таблице $\varphi = f(\lambda)$ коэффициент продольного изгиба $\varphi = 0,186$.

Наибольшая допустимая нагрузка F по условию устойчивости (8.9)

$F_{adm} = A\varphi R = 30,6 \cdot 10^{-4} \cdot 0,186 \cdot 210 \cdot 10^6 = 119,5 \text{ кН}$, что превышает действующую нагрузку в $119,5/80 = 1,49$ раза – устойчивость стойки обеспечена.

Для проведения расчета стойки на прочность необходимо рассмотреть ее деформированное состояние (рис. 8.11, б).

Прогиб от поперечной нагрузки q (консольная балка с равномерно распределенной нагрузкой) происходит относительно оси X , в направлении оси Y :

$$\vartheta_0 = \frac{q \cdot l^4}{8EJ_x} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 2,2^4}{8 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 0,00427 \text{ м}.$$

Полный прогиб стойки определяется по формуле (8.12):

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{1 - \frac{F}{F_{\text{Э}}}}, \text{ в которой эйлерова сила}$$

$$F_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EJ_x}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 2,2)^2} = 259,3 \text{ кН.}$$

Заметим, что при вычислении эйлеровой силы момент инерции берется относительно главной центральной оси сечения *перпендикулярной* действию нагрузки q , т.е. относительно оси X .

Полный прогиб конца стойки

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{1 - \frac{F}{F_{\text{Э}}}} = \frac{0,00427}{1 - \frac{80}{259,3}} = 0,00618 \text{ м.}$$

В сечениях стойки возникает изгибающий момент как от поперечной нагрузки M_0 , так и от продольной — M_F (рис. 8.11, *в*).

В опасном сечении (защемлении) полный изгибающий момент

$$\begin{aligned} M_{\text{max}} &= M_{0,\text{max}} + F \cdot \vartheta = \frac{ql^2}{2} + F \cdot \vartheta = \frac{9 \cdot 3^2}{2} + 80 \cdot 0,00618 = \\ &= 40,5 + 0,49 = 40,99 \text{ кН} \cdot \text{м.} \end{aligned}$$

Проверка прочности осуществляется по формуле (8.14):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{max}} &= \frac{F}{A} + \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{80 \cdot 10^3}{30,6 \cdot 10^{-4}} + \frac{40,99 \cdot 10^3}{232 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 26,1 \text{ МПа} + 174 \text{ МПа} = 203,1 \text{ МПа} < R. \end{aligned}$$

Следовательно, прочность и устойчивость стойки обеспечены.

Пример 8.8

Стальная балка, шарнирно-опертая на концах нагружена поперечной и продольной нагрузками (рис. 8.12, *а*).

Определить номер двутавра, если $R = 210 \text{ МПа}$.

Решение

Рассматриваемая балка подвергается продольно-поперечному изгибу. Сначала надо учесть воздействие поперечной нагрузки, а затем дополнительное от продольной.

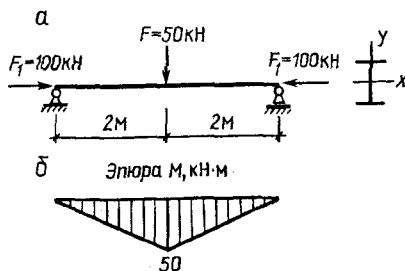


Рис. 8.12

Определим номер двутавра от воздействия поперечной силы $F = 50 \text{ кН}$, вызывающей изгиб балки. Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 8.12, б.

Максимальный изгибающий момент в середине пролета

$$\max M_0 = \frac{Fl}{4} = \frac{50 \cdot 4}{4} = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям требуемый момент сопротивления сечения

$$W_x = \frac{\max M_x}{R} = \frac{50 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,238 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 238 \text{ см}^3.$$

Наметим, предварительно, двутавр № 22, для которого: $A = 30,6 \text{ см}^2$, $W_x = 232 \text{ см}^3$, $J_x = 2550 \text{ см}^4$, $J_y = 157 \text{ см}^4$, $i_x = 5,13 \text{ см}$, $i_y = 2,27 \text{ см}$.

Прогиб в середине пролета балки v_0 от поперечной нагрузки F в плоскости действия ее определяется по формуле (см. справочник)

$$v_0 = \frac{Fl^3}{48EJ_x} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 4^3}{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 0,0131 \text{ м}.$$

Проверим намеченный номер двутавра на воздействие продольной нагрузки F_1 , создающей дополнительный прогиб и дополнительный изгибающий момент.

Вычислим полный прогиб ϑ от поперечной и продольной сил по формуле (8.12) в плоскости действия поперечной силы, т.е. в вертикальной плоскости:

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{1 - \frac{F_1}{F_{\text{Э}}}} = \frac{0,0131}{1 - \frac{100}{3143}} = 0,0135 \text{ м,}$$

где эйлера сила

$$F_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EJ_x}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 4)^2} = 3143 \text{ кН.}$$

Еще раз заметим, что при вычислении $F_{\text{Э}}$ использовалось значение момента инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости действия поперечной нагрузки, т.е. значение J_x .

Максимальный изгибающий момент в опасном сечении балки (по 8.13):

$$M_{\text{max}} = M_{0,\text{max}} + F_1 \cdot \vartheta = 50 + 100 \cdot 0,0135 = 51,31 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Проверку прочности предварительно намеченного двутавра проведем по формуле (8.14):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{max}} &= \frac{F_1}{A} + \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{100 \cdot 10^3}{30,6 \cdot 10^{-4}} + \frac{51,31 \cdot 10^3}{232 \cdot 10^{-6}} = \\ &= (32,7 + 221) \text{ МПа} = 258,7 \text{ МПа} > R. \end{aligned}$$

Перенапряжение составляет 20,8 %.

Проверим прочность ближайшего номера двутавра с большими геометрическими характеристиками – это №24. Его характеристики: $A = 34,8 \text{ см}^2$, $W_x = 289 \text{ см}^3$, $J_x = 3460 \text{ см}^4$, $J_y = 198 \text{ см}^4$, $i_x = 9,97 \text{ см}$, $i_y = 2,37 \text{ см}$.

Повторим вычисления расчетных параметров в установленном ранее порядке.

Прогиб от поперечной нагрузки

$$\vartheta_0 = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 4^3}{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 0,00963 \text{ м.}$$

Эйлера сила

$$F_{\text{Э}} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 4)^2} = 4264 \text{ кН.}$$

Полный прогиб балки

$$\vartheta = \frac{0,00963}{1 - \frac{100}{4264}} = 0,01 \text{ м.}$$

Максимальный изгибающий момент

$$M_{\text{max}} = 50 + 100 \cdot 0,01 = 51 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Максимальное нормальное напряжение

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{100 \cdot 10^3}{34,8 \cdot 10^{-4}} + \frac{51 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = 28,7 + 176,5 = 205,2 < R.$$

Условию прочности двутавр № 24 удовлетворяет.

Проверим устойчивость балки из двутавра № 24 в горизонтальной плоскости (плоскости наибольшей гибкости, т.к. $J_y < J_x$).

Гибкость балки $\lambda_y = \mu l / i_y = 1 \cdot 4 \cdot 10^2 / 2,37 = 168,8$, коэффициент $\varphi = 0,241$.

Допускаемая продольная сила $F_1' = \varphi R A = 0,241 \cdot 210 \cdot 10^6 \times \times 34,8 \cdot 10^{-4} = 176,1 \text{ кН} < F_1 = 100 \text{ кН}$.

Принимаем окончательно двутавр № 24.

Пример 8.9

Балка длиной $l = 6 \text{ м}$ с шарнирными опорами, выполненная из двух швеллеров № 22, нагружена поперечной равномерно распределенной нагрузкой $q = 5 \text{ кН/м}$ и продольной силой F (рис. 8.13, а).

Определить наибольшую допустимую продольную нагрузку F , расположив сечение швеллеров рационально (вариант 1, 2 или 3).

Проверить прочность и жесткость балки при принятом варианте, если $R = 210 \text{ МПа}$, $v_{adm} = l / 300$.

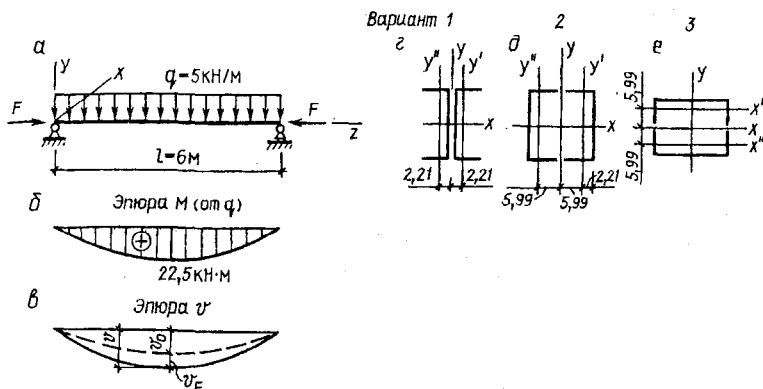


Рис. 8.13

Решение

Балка подвергается продольно-поперечному изгибу.

Сначала надо выявить рациональное положение сечения балки по отношению к поперечной нагрузке, т.е. при изгибе. Затем определить наибольшую допустимую продольную нагрузку из условия устойчивости балки при различных вариантах расположения ее сечения. И только после этого проверить прочность и жесткость балки при принятом положении сечения.

Геометрические характеристики швеллера № 22: $A = 26,7 \text{ см}^2$, $W_x = 192 \text{ см}^3$, $W_y = 25,1 \text{ см}^3$, $J_x = 2110 \text{ см}^4$, $J_y = 151 \text{ см}^4$, $h = 22 \text{ см}$, $b = 8,2 \text{ см}$, $x_c = 2,21 \text{ см}$.

Эпюра изгибающих моментов от поперечной силы показана на рис. 8.13, б. Максимальная ордината эпюры в середине пролета

$$M_q = \frac{ql^2}{8} = \frac{5 \cdot 6^2}{8} = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Деформированная схема балки показана на рис. 8.13, в.

Рассмотрим первый вариант расположения сечения (рис. 8.13, г).

Вычислим геометрические характеристики сечения относительно главных центральных осей.

$$\text{Момент сопротивления } W_x = 2 \cdot 192 = 384 \text{ см}^4.$$

$$\text{Моменты инерции } J_x = 2 \cdot 2110 = 4220 \text{ см}^4.$$

$$J_y = 2(151 + 26,7 \cdot 2,21^2) = 562,8 \text{ см}^4.$$

Радиусы инерции

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{4220}{53,4}} = 8,89 \text{ см}; \quad i_y = \sqrt{\frac{562,8}{53,4}} = 3,246 \text{ см}.$$

Гибкость балки

$$\lambda_x = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 10^2}{8,89} = 67,5, \quad \lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 10^2}{3,246} = 184,8.$$

Заметим, что по условию закрепления концов балки коэффициент $\mu = 1$.

Анализируя значения гибкостей балки (можно также и моментов инерции сечения) видим, что гибкость относительно оси Y больше, чем относительно оси X . Значит, потеря устойчивости возможна относительно оси Y , в направлении оси X .

Для $\lambda_{\max} = \lambda_y = 184,8$ по таблице $\varphi = f(\lambda)$ коэффициент продольного изгиба $\varphi_y = 0,205$.

Наибольшее допустимое значение сжимающей продольной силы из условия устойчивости (8.9) будет

$$F_{adm} = A \varphi R = 53,4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,205 \cdot 210 \cdot 10^6 = 2299 \cdot 10^2 \text{ Н} = 229,9 \text{ кН}.$$

Рассмотрим второй вариант расположения сечения (рис. 8.13, д).

Геометрические характеристики сечения: $A = 53,4 \text{ см}^2$, $W_x = 2 \times 192 = 384 \text{ см}^3$, $J_x = 4220 \text{ см}^4$, $J_y = 2(151 + 26,7(8,2 - 2,21)^2) = 2218 \text{ см}^4$,

$$i_x = \sqrt{\frac{4220}{56,4}} = 8,89 \text{ см}; \quad i_y = \sqrt{\frac{2218}{53,4}} = 6,44 \text{ см};$$

$$\lambda_x = \sqrt{\frac{4220}{53,4}} = 67,5; \quad \lambda_y = \sqrt{\frac{2218}{53,4}} = 93,2.$$

Для $\lambda_{\max} = \lambda_y = 93,2$ коэффициент $\varphi = 0,617$.

Наибольшая допустимая продольная сила

$$F_{adm} = \varphi A R = 53,4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,617 \cdot 210 \cdot 10^6 = 691,9 \cdot 10^2 \text{ Н} = 691,9 \text{ кН.}$$

Третий вариант расположения сечения (рис. 8.13, е).

Геометрические характеристики сечения: $A = 53,4 \text{ см}^2$, $J_y = 4220 \text{ см}^4$,

$$J_x = (151^2 + 26,7(8,2 - 2,21)^2) = 2218 \text{ см}^4, W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{2218}{8,2} = 270,5 \text{ см}^3,$$

$$i_x = 6,44 \text{ см}, i_y = 8,89 \text{ см}, \lambda_x = 93,2, \lambda_y = 67,5.$$

Для $\lambda_{\max} = \lambda_x = 93,2$ коэффициент $\varphi = 0,617$.

Наибольшая допустимая продольная сила

$$F_{adm} = 53,4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,617 \cdot 210 \cdot 10^6 = 691,9 \text{ кН.}$$

Из результатов вычислений следует.

Для продольной сжимающей силы F рациональным будут варианты 2 и 3, т.к. допускаемая нагрузка большая, чем в варианте 1.

Для поперечной силы q рациональным будут варианты 1 и 2, поскольку момент сопротивления в этих случаях больший, чем в варианте 3.

Для дальнейшего расчета принимаем расположение сечения балки по варианту 2, при котором будет наибольшая сопротивляемость как поперечному, так и продольному изгибу.

Проверим жесткость балки в принятом варианте расположения сечения.

Максимальный прогиб будет в середине пролета балки (см. рис. 8.13, в).

Прогиб от поперечной нагрузки

$$s_0 = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 6^4}{200 \cdot 10^9 \cdot 4220 \cdot 10^{-8}} = 0,999 \text{ см.}$$

Эйлерова сила

$$F_E = \frac{\pi^2 EJ_x}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 4220 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 6)^2} = 2312 \text{ кН.}$$

Полный прогиб балки

$$s = \frac{s_0}{1 - \frac{F}{F_E}} = \frac{0,999}{1 - \frac{692}{2312}} = 1,425 \text{ см.}$$

Так как полный прогиб 1,425 см меньше допустимого $v_{adm} = 600/300 = 2$ см, жесткость балки обеспечена.

Проверим прочность балки от совместного действия поперечной и продольной нагрузок.

Максимальный изгибающий момент в балке

$$M_{max} = M_q + Fv = 22,5 + 692 \cdot 1,425 \cdot 10^{-2} = 22,5 + 9,81 = 32,36 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Максимальное нормальное напряжение в балке

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{F}{A} + \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{692 \cdot 10^3}{53,4 \cdot 10^{-4}} + \frac{32,36 \cdot 10^3}{384 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 12,96 \cdot 10^7 + 0,0843 \cdot 10^9 = 129,6 + 84,3 = 213,9 \text{ МПа} > R. \end{aligned}$$

Перенапряжение в балке составляет 1,86 %, что допустимо.

Таким образом, положение сечения балки по варианту 2 удовлетворяет требованиям по жесткости и прочности.

Пример 8.10

Деревянная стойка длиной $l = 2,8$ м прямоугольного поперечного сечения ($h = 18$ см, $b = 10$ см) сжимается силой $F = 25$ кН, приложенной с эксцентриситетом $e = 5$ см по оси X (рис. 8.14, а).

Проверить прочность и устойчивость стойки, если $R = 17$ МПа, $E = 10$ ГПа.

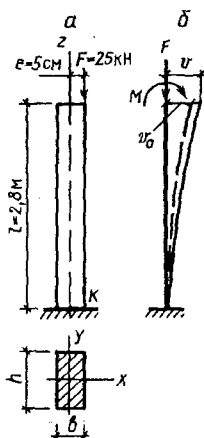


Рис. 8.14

Решение

При составлении расчетной схемы стойки силу F необходимо перенести в центр тяжести сечения. Образуются центрально приложенная сила $F = 25$ кН и момент относительно оси $Y - M_y = F \cdot e = 25 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 1250$ Н·м = 1,25 кН·м.

Анализируя расчетную схему стойки (рис. 8.14, б) видим, что она подвержена центральному сжатию силой F и поперечному изгибу моментом M_y , т.е. продольно-поперечному изгибу.

Вычислим геометрические характеристики стойки.

Площадь сечения $A = 18 \cdot 10 = 180$ см².

Главные центральные моменты инерции сечения

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 18^3}{12} = 4860 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{18 \cdot 10^3}{12} = 1500 \text{ см}^4.$$

Моменты сопротивления сечения

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{10 \cdot 18^2}{6} = 540 \text{ см}^3, \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{18 \cdot 10^2}{6} = 300 \text{ см}^3.$$

Радиусы инерции сечения

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{4860}{180}} = 5,196 \text{ см}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{1500}{180}} = 2,887 \text{ см}.$$

Гибкости стойки

$$\lambda_x = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{2 \cdot 2,8 \cdot 10^2}{5,196} = 108, \quad \lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{2 \cdot 2,8 \cdot 10^2}{2,887} = 194.$$

Наибольшая гибкость стойки, а это, значит, и наименьшая сопротивляемость потере устойчивости, выявлена относительно оси Y . Расчет на устойчивость по формуле (8.9) ведется относительно оси Y . При $\lambda_y = 194$ коэффициент $\varphi = 0,083$.

Допустимая нагрузка на стойку

$$F_{adm} = \varphi R A = 0,083 \cdot 17 \cdot 10^6 \cdot 180 \cdot 10^{-4} = 25,4 \text{ кН.}$$

Устойчивость стойки обеспечена, т.к. действующая сила не превышает допустимую.

Для расчета на прочность следует рассмотреть деформированную схему стойки (см. рис. 8.14, б).

Прогиб стойки относительно оси Y от изгибающего момента M (формула взята из справочника):

$$\vartheta_0 = \frac{M_y l^2}{2EJ_y} = \frac{1,25 \cdot 10^3 \cdot 2,8^2}{2 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 1500 \cdot 10^{-8}} = 0,0327 \text{ м.}$$

Критическая сила относительно оси s J_{\min} , т.е. оси Y по формуле (8.2):

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 1500 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 2,8)^2} = 47160 \text{ Н} = 47,16 \text{ кН.}$$

Полный прогиб стойки от продольной и поперечной нагрузки (по формуле (8.12)):

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} = \frac{0,0327}{1 - \frac{25}{47,16}} = 0,0696 \text{ м.}$$

Заметим, что в данном случае $F_s = F_{cr}$, т.к. изгибающий момент M действует относительно оси Y , которая является осью с *минимальным* моментом инерции.

Полный изгибающий момент:

$$M_{\max} = M_y + F \cdot \vartheta = 1,25 + 25 \cdot 0,0696 = 1,25 + 1,74 = 2,99 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Проверим прочность стойки по формуле (8.14):

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{F}{A} + \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{25 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^{-4}} + \frac{2,99 \cdot 10^3}{300 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 1,39 \text{ МПа} + 9,97 \text{ МПа} = 11,36 \text{ МПа} < R. \end{aligned}$$

Прочность стойки обеспечена.

Примечание.

1. Поскольку возможности материала стойки (по напряжению) полностью не использованы, допустимо ли существенное увеличение нагрузки?

2. Предлагается читателю внести конструктивное предложение, не изменяющее геометрические размеры стойки и величину эксцентриситета e , которое приведет к уменьшению напряжения в стойке?

Пример 8.11

Деревянная консольная балка длиной $l = 2$ м прямоугольного поперечного сечения ($h = 20$ см, $b = 12$ см) нагружена сосредоточенной силой $F = 10$ кН в точке K под углом $\alpha = 60^\circ$ к оси Z (рис. 8.15, а).

Проверить прочность и устойчивость балки, если $R = 22$ МПа, $E = 10$ ГПа.

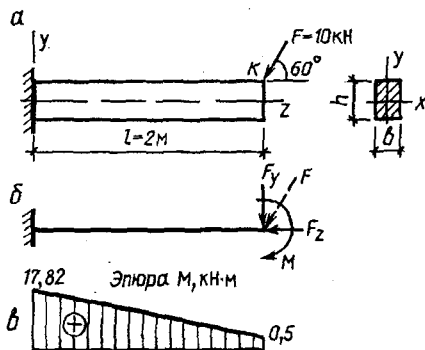


Рис. 8.15

Решение

Составим расчетную схему балки.

Разложив действующую силу F на составляющие по направлению координатных осей, получим

$$F_z = F \cos 60^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН}, \quad F_y = F \sin 60^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН}.$$

Перенесем составляющие F_z и F_y к центру тяжести поперечного сечения балки, т.е. к оси Z .

Образуются: продольно сжимающая сила $F_z = 5$ кН, поперечно изгибающая сила $F_y = 8,66$ кН и поперечно изгибающий момент $M = F_z \cdot h/2 = 5 \cdot 20 \cdot 10^{-2} / 2 = 0,5$ кН·м.

Расчетная схема балки показана на рис. 8.15, б, а эпюра изгибающих моментов – на рис. 8.15, в. Опасное сечение – защемление, максимальный изгибающий момент $M_{\max} = F_y \cdot 2 + M = 8,66 \cdot 2 + 0,5 = 17,82$ кН·м.

Анализ расчетной схемы показывает, что балка подвергается продольно-поперечному изгибу.

Вычислим геометрические характеристики балки.

Площадь сечения $A = 20 \cdot 12 = 240$ см².

Главные моменты инерции сечения

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 8000 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{20 \cdot 12^3}{12} = 2880 \text{ см}^4.$$

Момент сопротивления сечения

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{12 \cdot 20^2}{6} = 800 \text{ см}^3.$$

Радиусы инерции сечения

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{8000}{240}} = 5,774 \text{ см}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{2880}{240}} = 3,464 \text{ см}.$$

Гибкости балки

$$\lambda_x = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{2 \cdot 200}{5,774} = 69,3, \quad \lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{2 \cdot 200}{3,464} = 115,5.$$

Проверка устойчивости ведется в плоскости наибольшей гибкости ($\max \lambda_y = 115,5$), т.е. относительно оси Y от продольно сжимающей силы F_z .

При гибкости $\lambda = 115,5$ коэффициент $\varphi = 0,226$.

Наибольшая допустимая продольная сила из (8.2):

$$F_{adm} = A \cdot \varphi \cdot R = 240 \cdot 10^{-4} \cdot 0,226 \cdot 22 \cdot 10^6 = 119,33 \text{ кН} > F_z = 5 \text{ кН}.$$

Устойчивость балки обеспечена.

Приступим к расчету на поперечный изгиб с учетом прогибов балки.

Прогиб балки в вертикальной плоскости, т.е. относительно оси X , от силы F_z и момента M (формулы взяты из справочника):

$$\vartheta_0 = \frac{F_y l^3}{3EJ_x} + \frac{Ml^2}{2EJ_x} = \frac{8,66 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{3 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 8000 \cdot 10^{-8}} + \frac{0,5 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{2 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 8000 \cdot 10^{-8}} = 0,0302 \text{ м.}$$

Эйлерова сила относительно оси X

$$F_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EJ_x}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 8000 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 2)^2} = 493 \text{ кН.}$$

Полный прогиб балки от продольной и поперечной нагрузки

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{1 - \frac{F_y}{F_{\text{Э}}}} = \frac{0,0302}{1 - \frac{8,66}{493}} = 0,0308 \text{ м.}$$

Полный изгибающий момент

$$M = M_{\text{max}} + F_z \cdot \vartheta = 17,82 + 5,0 \cdot 0,0308 = 17,97 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

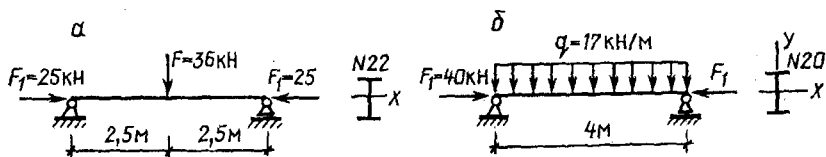
Максимальное нормальное напряжение в балке

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{F_z}{A} + \frac{M}{W_x} = \frac{5 \cdot 10^3}{240 \cdot 10^{-4}} + \frac{17,97 \cdot 10^3}{800 \cdot 10^{-6}} = 22,78 \text{ МПа.}$$

Перенапряжение составляет 3,5 %, что допустимо.

Задача 8.8

Проверить прочность и устойчивость шарнирно закрепленной балки из прокатного профиля, несущей поперечную и продольную нагрузки, если $R = 210 \text{ МПа}$, $E = 200 \text{ ГПа}$.



Ответы:

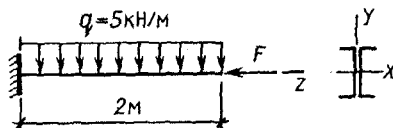
А. $\sigma_{\max} = 204,2$ МПа, устойчивость обеспечена.

Б. $\sigma_{\max} = 203,8$ МПа, устойчивость обеспечена.

Задача 8.9

Консольная стальная балка, выполненная из швеллеров, несет распределенную поперечную нагрузку q и сосредоточенную продольную F .

Подобрать номер швеллера и определить наибольшую допустимую продольную нагрузку F , если $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.



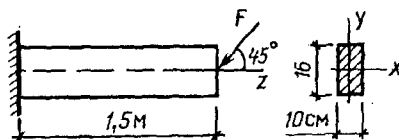
Ответ:

Швеллер № 10, $F_{adm} = 80,1$ кН.

Задача 8.10

Деревянная консольная балка длиной $l = 1,5$ м прямоугольного поперечного сечения ($h = 16$ см, $b = 10$ см) нагружена сосредоточенной силой F в центре тяжести сечения под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси Z .

Определить наибольшее допустимое значение силы F , если $R = 21$ МПа, $E = 10$ ГПа.



Ответ:

$F_{adm} = 8,1$ кН.

Раздел 9. ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗКИ

При *статическом* действии на конструкцию нагрузка возрастает медленно и плавно от нуля до конечного значения, оставаясь постоянной, или изменяется также медленно. Образующиеся при этом силы инерции ничтожно малы.

При *динамическом действии* нагрузка возрастает быстро, с ускорением, или внезапно; может изменить свою величину и направление, а также длительность действия. Все это приводит к возникновению больших инерционных сил.

К числу динамических относятся нагрузки в элементах конструкций (деталях машин),двигающиеся с ускорением, а так же ударного и вибрационного воздействия.

Физические условия работы элемента конструкции при динамическом действии нагрузки являются более сложными, чем при статическом. Для выработки расчетных условий требуется привлечение более сложных математических методов. Многие факторы еще недостаточно изучены. Поэтому на практике пользуются упрощенными методами расчета, основанными на ряде допущений. В частности, допускается, что в пределах упругих деформаций при динамических нагрузках верен закон Гука, т.е. напряжения и деформации связаны линейной зависимостью ($\sigma = E\epsilon$).

Установлено, что практически во всех случаях силы динамического воздействия *пропорциональны* статическим. Поэтому расчеты на прочность при динамических нагрузках выполняются по методам, разработанным для статических нагрузок, но с введением *динамического* коэффициента.

Однако вследствие ряда принятых допущений расчетные формулы при динамических нагрузках являются более приближенными, чем при статических.

Различают следующие простейшие динамические задачи: расчет на действие сил инерции, расчет на ударную нагрузку и расчет на колебательную (вибрационную) нагрузку.

Для всех этих видов расчета принимается принцип Даламбера.

9.1. Расчет на действие сил инерции

Инерционной нагрузке подвержены элементы подъемников, лифтов, транспортеров, деталей машин и механизмов, движение которых происходит с ускорением (рис. 9.1, а).

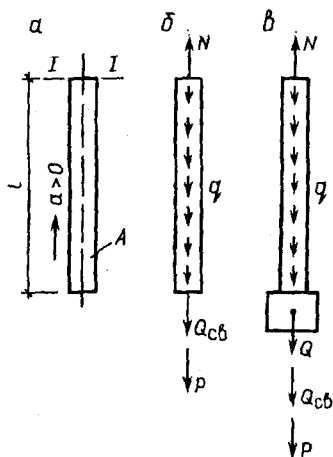


Рис. 9.1

Сила инерции P численно равна произведению массы движущегося элемента m на ускорение движения a ($P = ma$) и направлена противоположно ускорению.

Ускорение a возникает в период разгона, при подъеме груза и торможении, при его опускании. При равномерном перемещении ускорение a , следовательно, и сила инерции равны нулю.

Для случая, показанного на рис. 9.1, б, на рассматриваемую часть стержня действуют собственный вес этой части $Q_{св} = q l$, где q – вес погонного метра стержня (линейная плотность), и сила инерции $P = ma$, где m – масса части стержня.

В случае наличия груза Q (рис. 9.1, в) на рассматриваемую часть стержня действуют вес груза Q , собственный вес части стержня $Q_{св}$ и сила инерции $P = m'a$, где m' – масса груза и части стержня.

Напряжение в стержне, движущимся с ускорением:

$$\sigma_d = \sigma_{ст} K_d, \quad (9.1)$$

где σ_d – динамическое напряжение;

$\sigma_{ст}$ – напряжение от статического действия собственного веса (груза);

K_d – динамический коэффициент, показывающий во сколько раз увеличится статическое напряжение от воздействия сил инерции.

Для случая (см. рис. 9.1, б) $\sigma_{ст} = \frac{Q_{св}}{A} = \frac{ql}{A}$.

Для случая (см. рис. 9.1, в) $\sigma_{ст} = \frac{Q + Q_{св}}{A} = \frac{Q + ql}{A}$.

Динамический коэффициент определяется по формуле

$$K_d = 1 + \frac{a}{g}, \quad (9.2)$$

где a – ускорение движения;

g – ускорение силы тяжести (свободного падения).

Условие прочности при учете сил инерции имеет вид

$$\sigma_d = \sigma_{ст} K_d \leq R. \quad (9.3)$$

При значительном весе груза Q и небольшой длине стержня (троса), собственным весом его можно пренебречь.

Пример 9.1

Груз массой $m = 1,5$ т при помощи троса поднимается на высоту $H = 30$ м (рис. 9.2). В первые 3 с подъема с постоянным ускорением груз проходит путь $S = 22,5$ м.

Определить площадь сечения троса, если его расчетное сопротивление $R = 190$ МПа, модуль продольной упругости $E = 100$ ГПа, плотность $\gamma = 7,4$ т/м³.

Задачу решить без и с учетом массы троса.

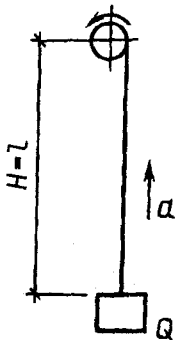


Рис. 9.2

Решение

В момент разгона ускорение подъема груза составляет

$$a = 2S / t^2 = 2 \cdot 22,5 / 3^2 = 5 \text{ м/с}^2.$$

Приведем данные к примеру в единицы, требуемые системой СИ.

Вес груза $Q = mg = 1,5 \cdot 9,81 = 14,72 \text{ кН}$, плотность троса $\gamma = 7,4 \times 9,81 = 72,6 \text{ кН/м}^3$.

Решение без учета массы троса.

Усилие в тросе от статического действия груза $N_{ст} = Q = 14,72 \text{ кН}$.

Динамический коэффициент (по формуле (9.2)):

$$K_d = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{5}{9,81} = 1,51.$$

Усилие в тросе от динамического действия груза $N_d = N_{ст} K_d = 14,72 \cdot 1,51 = 22,23 \text{ кН}$.

Условие прочности троса

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} = \frac{22,23 \cdot 10^3}{A} \leq 190 \cdot 10^6, \text{ откуда площадь сечения троса}$$

$$A = \frac{22,23 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6} = 0,117 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 1,17 \text{ см}^2.$$

Определим максимальное напряжение в тросе с учетом массы.

Вес троса $Q_{св} = A l \gamma = 0,117 \cdot 10^{-3} \cdot 30 \cdot 72,6 \cdot 10^3 = 254,8 \text{ Н}$.

Статическое усилие в тросе $N_{ст} = Q + Q_{св} = 14,72 \cdot 10^3 + 254,8 = 14,97 \text{ кН}$.

Динамическое усилие в тросе $N_d = N_{ст} K_d = 14,97 \cdot 1,51 = 22,6 \text{ кН}$.

Динамическое напряжение в тросе

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} = \frac{22,6 \cdot 10^3}{0,117 \cdot 10^{-3}} = 193,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 193,2 \text{ МПа} > R.$$

Перенапряжение составляет 1,68 %, что допустимо.

Заметим, что влияние массы троса на напряжение в нем в данном случае незначительно (небольшая длина троса).

Вычислим удлинение троса.

Без учета массы троса.

Удлинение от статического действия груза

$$\Delta l_{ст} = \frac{Ql}{EA} = \frac{14,72 \cdot 10^3 \cdot 30}{100 \cdot 10^9 \cdot 0,117 \cdot 10^{-3}} = 37,74 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,77 \text{ см.}$$

Удлинение от динамического воздействия груза

$$\Delta l_d = \Delta l_{ст} \cdot K_d = 3,77 \cdot 1,51 = 5,69 \text{ см.}$$

С учетом массы троса

$$\begin{aligned} \Delta l_{ст} &= \frac{Ql}{EA} + \frac{Q_{св}l}{2EA} = \frac{14,72 \cdot 10^3 \cdot 30}{100 \cdot 10^9 \cdot 0,117 \cdot 10^{-3}} + \frac{253,8 \cdot 30}{2 \cdot 100 \cdot 10^9 \cdot 0,117 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 37,74 \cdot 10^{-3} + 325 \cdot 10^{-6} = (37,74 + 0,325) \cdot 10^{-3} = 38,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,81 \text{ см.} \end{aligned}$$

$$\Delta l_d = \Delta l_{ст} \cdot K_d = 3,81 \cdot 1,51 = 5,75 \text{ см.}$$

Учет массы троса показал, в данном случае, незначительное увеличение удлинения (на 1,05 %).

Таким образом, при небольшой длине троса собственным весом его, при вычислении напряжений и деформаций, можно пренебречь.

Пример 9.2

Швеллер № 20 при помощи тросов, каждый сечением $A = 0,5 \text{ см}^2$, поднимается вверх с ускорением $a = 7 \text{ м/с}^2$ (рис. 9.3, а).

Определить нормальные напряжения в тросе и швеллере.

Собственный вес тросов не учитывать.

Решение

Геометрические данные швеллера № 20, уложенного плашмя: $J_x = 113 \text{ см}^4$, $W_x = 20,5 \text{ см}^3$. Линейная плотность $\rho = 18,4 \text{ кг/м}$. Вес одного погонного метра швеллера в системе СИ $q = \rho \cdot g = 18,4 \cdot 9,81 = 181 \text{ Н/м}$.

Определим сначала напряжения в швеллере. Собственный вес его является равномерно распределенной нагрузкой $q = 181 \text{ Н/м}$. Расчетная схема поднимаемого швеллера показана на рис. 9.3, б.

Определение опорных реакций и построение эпюры изгибающих моментов (рис. 9.3, в) выполняется обычными методами.

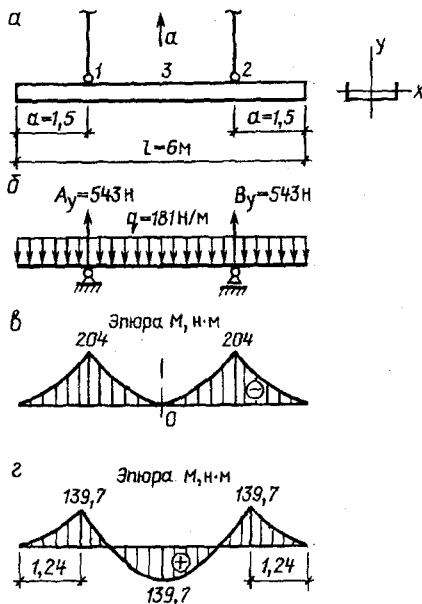


Рис. 9.3

Напряжение в швеллере от статического действия собственного веса

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{204}{20,5 \cdot 10^{-6}} = 9,95 \cdot 10^6 \text{ Па} = 9,95 \text{ МПа.}$$

Динамический коэффициент

$$K_d = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{7}{9,81} = 1,71.$$

Динамическое напряжение в швеллере

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot K_d = 9,95 \cdot 1,71 = 17,0 \text{ МПа.}$$

Вес швеллера ($Q = q \cdot l = 181 \cdot 6 = 1086 \text{ Н}$ является нагрузкой на тросы.

$$\text{Продольная сила в тросах } N_1 = N_2 = \frac{Q}{2} = \frac{1086}{2} = 543 \text{ Н.}$$

Напряжение в тросах от статического действия швеллера

$$\sigma_d = \frac{N}{A} = \frac{543}{0,5 \cdot 10^{-4}} = 1086 \cdot 10^4 \text{ Па} = 10,86 \text{ МПа.}$$

Динамическое напряжение в тросе

$$\sigma_d = \sigma_{\text{ст}} \cdot K_d = 10,86 \cdot 1,71 = 18,57 \text{ МПа.}$$

Примечание. При подъеме элементов строительных конструкций, особенно длинных и большого веса, а иногда в непроектном положении, важно, чтобы монтажные напряжения были возможно меньшими. Это достигается по крайней мере двумя методами: малым ускорением в начале и окончании подъема (определяется характеристикой двигателя подъемного устройства) и рациональным местом strapовки (закрепление подъемных канатов).

Анализ эпюры M (рис. 9.3, в) показывает, что места strapовки выбраны не достаточно рационально, т.к. в середине длины швеллера изгибающий момент равен нулю.

Не трудно понять, что изменение расстояния a приведет к появлению изгибающего момента в сечении 3 швеллера. Причем увеличение расстояния a приведет к повышению M_{max} , а уменьшение его – к уменьшению M_{max} . Рациональным будет такое соотношение изгибающих моментов: $M_1 = M_2 = M_3$ (рис. 9.3, г).

Определим оптимальное значение расстояния a . По расчетной схеме

$$M_1 = M_2 = \frac{q \cdot a^2}{2} = \frac{181 \cdot a^2}{2} = 90,5 \cdot a^2,$$

$$M_3 = A_y \cdot \left(\frac{6}{2} - a\right) - q \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{6}{4} = 543(3 - a) - 181 \cdot 3 \cdot 1,25 = 841,5 - 543a.$$

Условие рациональности

$$M_1 = M_3; 90,5a^2 = 841,5 - 543a \text{ или } a^2 - 9,0 + 6,0a = 0.$$

Решив квадратное уравнение получим $a = 1,243$ м

При $a = 1,243$ м $M_1 = M_2 = M_3 = 90,5 \cdot 1,243^2 = 139,8$ Н·м, что на 45,9 % меньше, чем при $a = 1,5$ м. На столько же процентов уменьшится и напряжение в швеллере.

Напряжение в тросе не изменится.

Пример 9.3

На балке, состоящей из двух двутавров № 20, установлена лебедка массой $m_1 = 0,4$ т для подъема груза массой $m_2 = 5$ т на тросе сечением $A = 4$ см² (рис. 9.4, а).

Определить для конструкции максимально допустимое ускорение подъема, если расчетное сопротивление для двутавра $R = 210$ МПа, для троса $R = 150$ МПа.

Собственный вес балки и троса не учитывать.

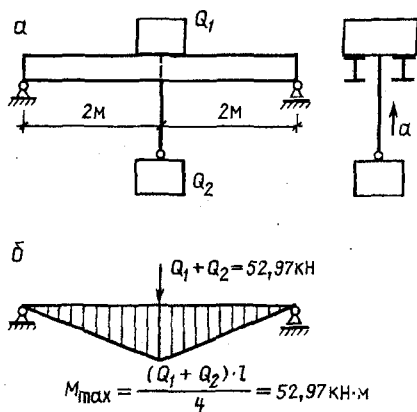


Рис. 9.4

Решение

Момент сопротивления двутавра № 20 – $W_x = 184$ см³.

Нагрузкой на трос являются вес поднимаемого груза $Q_2 = m_2 \cdot g = 5000 \cdot 9,81 = 49050$ Н = 49,05 кН.

Напряжение в тросе от статического действия веса Q_2

$$\sigma_c = \frac{Q_2}{A} = \frac{49,05 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 12,26 \cdot 10^7 \text{ Па} = 122,6 \text{ МПа.}$$

Максимальное допускаемое напряжение в тросе $\sigma_{\max} = R = 150$ МПа.
Максимальный допускаемый коэффициент динамичности для троса

$$K_d = \frac{R}{\sigma_{\text{ст}}} = \frac{150}{122,6} = 1,223.$$

По формуле (9.2) $K_d = 1 + \frac{a}{g} = 1,223$, откуда максимальное допустимое ускорение подъема груза $a = (1,223 - 1) 9,81 = 2,19$ м/с².

Нагрузкой для балки являются вес лебедки $Q_1 = m_1 \cdot g = 400 \cdot 9,81 = 3924$ Н = 3,924 кН и вес поднимаемого груза $Q_2 = 49,05$ кН.

Расчетная схема балки и эпюра изгибающих моментов показаны на рис. 9.4, б.

Напряжение в балке от статического действия нагрузки

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{52,97 \cdot 10^3}{184 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 0,1439 \cdot 10^9 \text{ Па} = 143,9 \text{ МПа}.$$

Для балки максимальный допустимый коэффициент динамичности

$$K_d = \frac{R}{\sigma_{\text{ст}}} = \frac{210}{143,9} = 1,459.$$

Из формулы (9.2) максимальное допустимое ускорение подъема груза $a = (1,459 - 1) 9,81 = 4,50$ м/с².

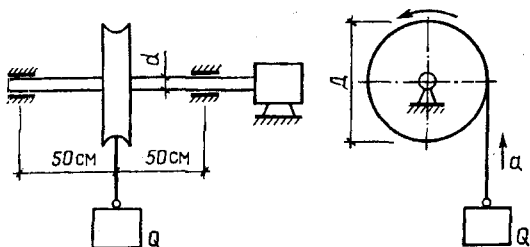
Принимаем для конструкции наибольшее допустимое ускорение подъема груза $a = 2,19$ м/с², исходя из прочности троса.

Задача 9.1

Груз массой $m = 500$ кг поднимается равноускоренно ($a = 4$ м/с²) на тросе площадью сечения $A = 1$ см², накрутом на шкив диаметром $D = 60$ см, который насажен на вал диаметром $d = 6$ см.

Определить наибольшие напряжения в тросе и вале, используя энергетическую теорию прочности.

Вес троса, вала и шкива не учитывать.



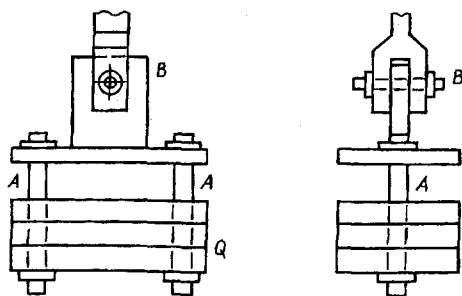
Ответ:

Напряжение в тросе $\sigma = 69,1$ МПа, в вале $\sigma = 117,5$ МПа.

Задача 9.2

Противовес подъемника весит 4,2 т. При торможении подъемного механизма противовес испытывает ускорение $a = 1,5$ м/с².

Определить диаметры болтов *A* и *B*, если расчетное сопротивление материала болта на растяжение $R = 32$ МПа, на срез $R_s = 20$ МПа.



Ответ: $d_A = 31$ мм, $d_B = 39$ мм.

9.2. Расчет на ударную нагрузку

Ударной называется нагрузка, которая за короткий промежуток времени достигает значительной величины.

Поскольку продолжительность удара измеряется долями секунды, образующиеся большие ускорения приводят к большой инерционной силе, воздействующей на элемент конструкции, воспринимающий удар.

В зависимости от характера взаимодействия соударяющихся тел различают продольный (сжимающий или растягивающий), поперечный

(изгибающий) и скручивающий удары. Во всех этих случаях степень воздействия ударной нагрузки зависит от массы и скоростей (в момент удара) обоих соударяющихся тел. Массой ударяемого элемента можно пренебречь, если она значительно меньше массы ударяющего тела.

В случае сжимающего или растягивающего удара (рис. 9.5), коэффициент динамичности определяется по формуле

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{ст}}}, \quad (9.4)$$

где H – высота падения груза;

$\Delta l_{ст}$ – деформация стержня от статического действия ударяющей силы $\Delta l_{ст} = \frac{Fl}{EA}$;

A – площадь поперечного сечения;

E – модуль продольной упругости материала стержня).

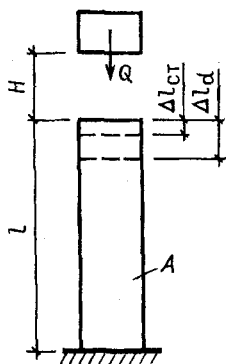


Рис. 9.5

В случае изгибающего удара (рис. 9.6) динамический коэффициент определяется по формуле

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{g_{ст}}}, \quad (9.5)$$

где H – высота падения груза;

$v_{ст}$ – прогиб балки в ударяемом сечении от статического действия ударяющей силы.

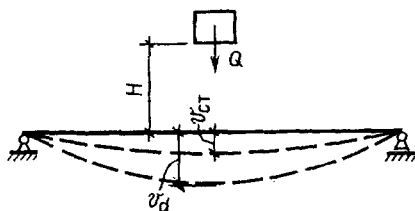


Рис. 9.6

Например, при ударе посередине длины балки $\vartheta_{ст} = \frac{Fl^3}{48EJ}$, при

ударе на конце консоли $\vartheta_{ст} = \frac{Fl^3}{3EJ}$.

Анализ формул для определения K_d показывает, что при внезапном приложении нагрузки ($H = 0$) коэффициент динамичности $K_d = 2$. Если высота падения груза H значительно больше $\Delta l_{ст}$ ($v_{ст}$), единицей под корнем, в названных формулах, можно пренебречь.

Если известна скорость падения груза V в начале удара, то коэффициент динамичности можно определить по формуле

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g \cdot \delta_{ст}}}, \quad (9.6)$$

где $\delta_{ст} = \Delta l_{ст}$ или $v_{ст}$ в зависимости от вида удара (продольный или поперечный).

Условие прочности по методу предельных состояний при ударном действии нагрузки имеет вид

$$\sigma_{d, \max} = \sigma_{ст, \max} \cdot K_d \leq R, \quad (9.7)$$

где $\sigma_{d, \max}$ – максимальное динамическое напряжение;

$\sigma_{ст, \max}$ – максимальное статическое напряжение;

K_d – динамический коэффициент, зависящий от вида динамического воздействия (9.4), (9.5).

Деформация элемента конструкции

$$\delta_d = \delta_{ст} \cdot \mu, \quad (9.8)$$

где δ_d — деформация от динамического действия силы ($\Delta l_d, v_d$),

$\delta_{ст}$ — деформация от статического действия силы ($\Delta l_{ст}, v_{ст}$).

В теории курса доказывается, что величина динамических напряжений зависит от объема подвергающегося удару элемента конструкции (стержня, балки, вала) и качества его материала.

Чем *больше* объем и чем *меньше* модуль упругости, тем *меньше* динамические напряжения в элементе конструкции.

Для снижения динамических напряжений нужно увеличить податливость (деформативность) элемента путем увеличения, например, его длины или замены материала с более низким модулем упругости. Применимы и амортизирующие устройства (прокладки, пружины).

Изложенный выше способ расчета на действие ударной нагрузки не учитывает массы элемента конструкции, который подвергается удару. Вследствие этого формулы (9.4)–(9.8) дают несколько преувеличенное значение определяемых параметров, что идет в запас прочности и жесткости.

Приведем формулу для вычисления динамического коэффициента с учетом массы ударяемого элемента конструкции

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{ст}} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \frac{Q_{св}}{Q}}}, \quad (9.9)$$

где α — коэффициент приведения массы ударяемого элемента к месту удара;

$Q_{св}$ — собственный вес ударяемого элемента;

Q — вес ударяющего груза.

Пример 9.4

На стальной стержень длиной $l = 1$ м квадратного поперечного сечения ($a = 5$ см) (рис. 9.7) с высоты $H = 10$ см падает груз массой $m = 30,6$ кг.

Проверить прочность стержня без и с учетом его массы, если допускаемое напряжение из расчета на устойчивость составляет $R = 74,1$ МПа.

Для материала стержня: $E = 200$ ГПа, плотность $\gamma = 8,0$ т/м³.

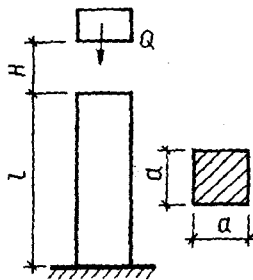


Рис. 9.7

Решение

В системе СИ: $\gamma = 8,0 \cdot 9,81 = 78,5$ кН/м³, вес груза $Q = 30,6 \cdot 9,81 = 300$ Н.

Решение без учета массы стержня.

Статическое напряжение в стержне от груза весом Q

$$\sigma_{ст} = \frac{Q}{A} = \frac{300}{5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 12 \cdot 10^4 = 0,12 \text{ МПа.}$$

Статическая деформация стержня от груза весом Q

$$\Delta l_{ст} = \frac{Q \cdot l}{EA} = \frac{300 \cdot 1}{200 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,06 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,06 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

Коэффициент динамичности (по формуле (9.4)):

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{0,06 \cdot 10^{-3}}} = 578.$$

Динамическое напряжение

$$\sigma_d = K_d \sigma_{ст} = 578 \cdot 0,12 = 69,4 \text{ МПа} < R.$$

Решение с учетом массы ударяемого стержня.

Собственный вес ударяемого стержня

$$Q_{св} = \gamma A l = 78,5 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 196,3 \text{ Н.}$$

Динамический коэффициент (по выражению (9.9)):

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{ст}} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \frac{Q_{св}}{Q}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,06 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{196,3}{300}}} = 523,6.$$

Для призматического стержня коэффициент приведения массы к месту удара $\alpha = 1/3$.

Динамическое напряжение

$$\sigma_d = \mu \sigma_{ст} = 523,6 \cdot 0,12 = 62,8 \text{ МПа} < R.$$

Динамическая деформация (укорочение)

$$\Delta l_d = \Delta l_c \cdot \mu = 0,06 \cdot 10^{-3} \cdot 523,6 = 31,42 \cdot 10^{-3} \text{ см} = 3,14 \text{ мм.}$$

Анализ полученных значений напряжений позволяет сделать заключение, что при продольном ударе учет массы ударяемого элемента конструкции небольшой длины мало влияет на величину напряжения.

Пример 9.5

На стальную балку, состоящую из двух двутавров № 22, длиной $l = 5 \text{ м}$ с абсолютно жесткими опорами (рис. 9.8, а) посередине пролета падает с высоты $H = 1 \text{ см}$ груз массой $m = 510 \text{ кг}$.

Определить в опасном сечении балки максимальное нормальное напряжение и прогиб.

Как изменятся искомые величины, если одна из опор балки будет упругой (цилиндрическая пружина с податливостью $\beta = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ см/Н}$) (рис. 9.8, б)?

Решение

Для двутавра № 22: $J_x = 2550 \text{ см}^4$, $W_x = 232 \text{ см}^3$.

Нагрузка на балку $Q = m \cdot g = 510 \cdot 9,81 = 5000 \text{ Н} = 5 \text{ кН}$.

Расчет при жестких опорах (без учета массы балки).

Опасным будет сечение посередине пролета балки, поскольку здесь изгибающий момент наибольший

$$M_{\max} = \frac{Q \cdot l}{4} = \frac{5 \cdot 5}{4} = 6,25 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

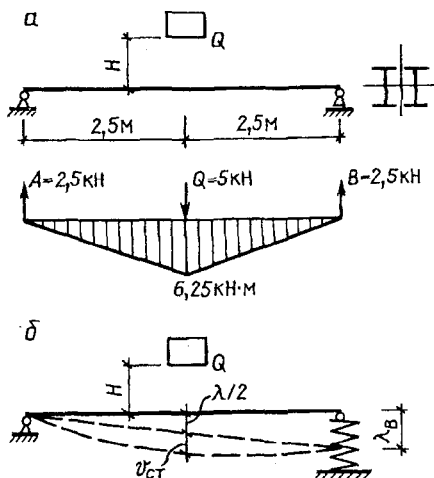


Рис. 9.8

Напряжение и прогиб от статического действия груза весом Q

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{6,25 \cdot 10^3}{232 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 0,01347 \cdot 10^9 \text{ Па} = 13,5 \text{ МПа.}$$

$$v_{ст} = \frac{Q \cdot l^3}{48 E J_x} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 5^3}{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 2 \cdot 10^{-8}} = 0,00127 \text{ м} = 0,127 \text{ см.}$$

Динамический коэффициент, напряжение и прогиб:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0,127}} = 5,09;$$

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot K_d = 13,5 \cdot 5,09 = 68,7 \text{ МПа,}$$

$$v_d = v_{ст} \cdot K_d = 0,127 \cdot 5,09 = 0,646 \text{ см.}$$

Примечание. Рекомендуется читателю самостоятельно провести расчет с учетом массы балки ($\rho = 24 \text{ кг/м}$, $\alpha = 17/35$).

Результаты должны быть несколько меньшими ($\sigma_d = 66,0$ МПа, $v_d = 0,618$ м).

Расчет при одной упругой (податливой) опоре.

Осадка пружины на опоре B от статического действия груза

$$\lambda = \beta \cdot B = 1,6 \cdot 10^{-4} \cdot 2,5 \cdot 10^3 = 0,4 \text{ см.}$$

Статический прогиб в точке удара

$$g'_{\text{ст}} = \frac{\lambda_B}{2} + g_{\text{ст}} = \frac{0,4}{2} + 0,127 = 0,327 \text{ см.}$$

Динамические параметры:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0,327}} = 3,67,$$

$$\sigma_d' = 13,5 \cdot 3,67 = 49,5 \text{ МПа, } v_d' = 0,327 \cdot 3,67 = 1,20 \text{ см.}$$

Заметим, что при наличии амортизатора на опоре балки динамическое напряжение в ней заметно меньше.

Пример 9.6

К деревянной консольной балке прямоугольного поперечного сечения ($h = 20$ см, $b = 10$ см) (рис. 9.9) на свободном конце внезапно приложен груз массой $m = 200$ кг.

Определить предельную длину балки, если $R = 11$ МПа.

Массу балки не учитывать.

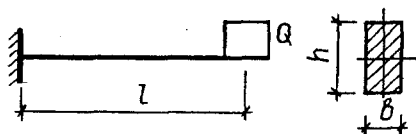


Рис. 9.9

Решение

Вес груза $Q = 200 \cdot 9,81 = 1962$ Н.

Момент сопротивления сечения балки

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{10 \cdot 20^2}{6} = 667 \text{ см}^3.$$

При внезапном приложении груза принимается $H = 0$. Тогда из формулы (9.4) динамический коэффициент $K_d = 2$.

Из условия прочности балки $\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot K_d \leq R$ максимально допустимое статическое напряжение

$$\sigma_{ст} = \frac{R}{K_d} = \frac{11}{2} = 5,5 \text{ МПа.}$$

Исходя из схемы балки и вида нагрузки максимальный изгибающий момент будет в защемлении и определится выражением $M_{\max} = Q \cdot l$.

Максимальное нормальное напряжение в защемлении

$$\sigma_d = \frac{Q \cdot l}{W_x} \leq 5,5 \text{ МПа,}$$

откуда наибольшая допустимая длина балки

$$l = \frac{5,5 \cdot 10^6 \cdot 667 \cdot 10^{-6}}{1962} = 1,87 \text{ м.}$$

При этой длине прочность балки обеспечена.

Возникает вопрос: как взаимосвязаны динамические напряжения с длиной балки при внезапном приложении груза и почему? (Пропорционально, т.к. $K_d = \text{const}$).

Пример 9.7

Определить напряжение в стальном канате, на котором опускается груз массой $m = 4,5 \text{ т}$ со скоростью $v = 1 \text{ м/с}$, в случае внезапной остановки в момент, когда груз опустится на 18 м .

Сечение каната $A = 16 \text{ см}^2$, модуль упругости $E = 105 \text{ ГПа}$.

Решение

Деформация каната от статического действия груза весом $Q = m \cdot g$.

$$\Delta l_{\text{ст}} = \frac{m \cdot g \cdot l}{EA} = \frac{4,5 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 18}{105 \cdot 10^9 \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 0,473 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Динамический коэффициент по формуле (9.4)

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g \cdot \Delta l_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{9,81 \cdot 0,473 \cdot 10^{-2}}} = 5,75.$$

Напряжение в канате от статического действия груза

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{mg}{A} = \frac{4,5 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{16 \cdot 10^{-4}} = 27,6 \text{ МПа.}$$

Динамическое напряжение в канате

$$\sigma_d = \sigma_{\text{ст}} \cdot K_d = 27,6 \cdot 5,75 = 158,7 \text{ МПа.}$$

Дополнение к примеру.

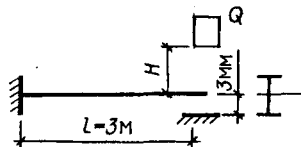
Если динамическое напряжение превосходит допускаемое, с целью его уменьшения нужно снизить скорость опускания груза.

Определите, самостоятельно, наибольшую допустимую скорость опускания груза, если допускаемое напряжение в канате $R = 80$ МПа (должно получиться $v = 0,436$ м/с).

Задача 9.3

Определить высоту падения груза массой $m = 100$ кг, при которой свободный конец консольной балки (двутавр №16) в результате удара коснется неподвижной плоскости.

Массой балки пренебречь.



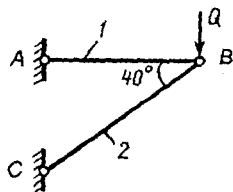
Ответ: $H = 5,74$ см.

Задача 9.4

Груз массой $m = 200$ кг мгновенно (но без удара) приложен в узле В короткого кронштейна ABC . Стержень 1 – стальной, диаметром $d = 2$ см, стержень 2 – деревянный, сечением $5,5 \times 5,5$ см.

Чему равен коэффициент запаса прочности конструкции, если для стали $R = 210$ МПа, для древесины $R = 20$ МПа?

Массой стержней кронштейна пренебречь.



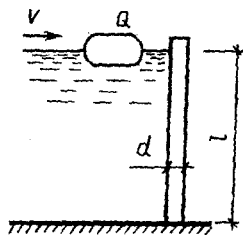
Ответ: $n = 4,98$.

Задача 9.5

Льдина массой $m = 150$ кг, плывущая с постоянной скоростью $V = 1$ м/с, ударяется о верхний конец деревянной сваи. Длина сваи 3 м, диаметр $d = 25$ см.

Определить наибольшее напряжение в свае, если $E = 8$ ГПа.

Массой сваи пренебречь.



Ответ: $\sigma_{\max} = 12,79$ МПа.

9.3. Упругие колебания

Всякий упругий элемент конструкции (балка, вал, пружина) определенной массы m под действием внезапно приложенной нагрузки Q способен совершать около положения равновесия собственные

(свободные) непериодические колебания с частотой ω_0 и, благодаря наличию внутренних упругих сил, постепенно затухающей амплитудой ν до восстановления равновесия (рис. 9.10).

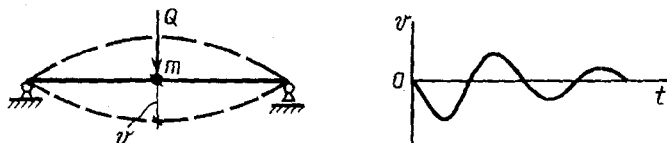


Рис. 9.10

Если на балку действует один груз Q и если ее собственная масса m значительно меньше, чем масса груза, то такая балка обладает одной степенью свободы и перемещения всех точек ее в любой момент времени можно выразить через перемещение одной точки (под грузом). Балка несущая n сосредоточенных грузов имеет n степеней свободы.

По виду деформации элемента конструкции различают: продольные колебания (при растяжении-сжатии стержня, пружины), поперечные (при изгибе балки) и крутильные (при кручении вала).

Частота собственных колебаний для любого элемента конструкции с одной степенью свободы независимо от вида совершаемых колебаний – линейных (при растяжении-сжатии, изгибе), угловых (при кручении) – определяется по формуле

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}}, \quad (9.10)$$

где ω_0 – частота собственных колебаний;

$\Delta_{\text{ст}}$ – статическое перемещение под действием веса колеблющегося груза;

g – ускорение силы тяжести.

Для консольной балки с грузом на конце ее

$$\Delta_{\text{ст}} = \vartheta = \frac{Q \cdot l^3}{3EJ}.$$

Для двухопорной балки с грузом посередине пролета

$$\Delta_{ст} = \vartheta = \frac{Q \cdot l^3}{48EJ}.$$

При определении частоты собственных колебаний силами сопротивления в опорах конструкции, а часто и ее собственным весом, пренебрегают.

Если на элемент конструкции кроме постоянного груза Q будет действовать периодически изменяющаяся возмущающая сила с амплитудой P и частотой ω_1 , то этот элемент станет совершать *вынужденные* колебания с частотой возмущающей силы (рис. 9.11).

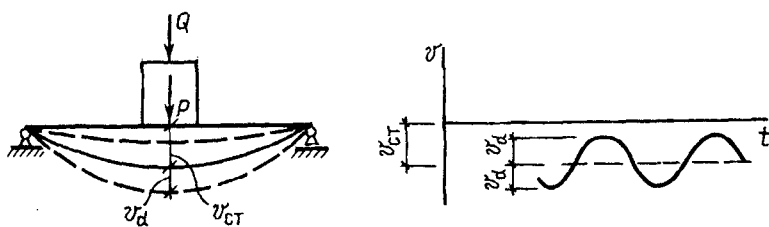


Рис. 9.11

Возмущающую силу (вибрацию) создают механизмы с вращающимися, не вполне уравновешенными, частями за счет возникающей центробежной силы инерции (электродвигатели, лебедки, валы механизмов).

В отличие от собственных колебаний, которые быстро затухают, вынужденные остаются постоянными, т.к. энергия со стороны возмущающей силы подводится непрерывно.

Расчет ведется по вертикальной амплитуде центробежной силы P , совпадающей с направлением постоянного груза Q .

От соотношения частот вынужденных и собственных колебаний зависит степень силового воздействия на элемент конструкции, которая оценивается динамическим коэффициентом

$$K_d = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}, \quad (9.11)$$

где K_d – динамический коэффициент;
 ω_0 – частота собственных колебаний;
 ω_1 – частота вынужденных колебаний.

Из формулы (9.11) следует, что если частота вынужденных колебаний ω_1 приближается к частоте собственных колебаний ω_0 , то динамический коэффициент, а следовательно, деформации и напряжения в элементе конструкции неограниченно возрастают.

Если $\omega_1 = \omega_0$, коэффициент K_d возрастает до бесконечности – наступает явление *резонанса*, представляющего собою опасность для элемента конструкции. Соответствующая частота возмущающей силы называется критической. Не целесообразно допускать эксплуатацию конструкции в зоне резонанса, т.к. обеспечение прочности потребует значительного расхода материала. Частота собственных колебаний должна быть примерно на 30 % больше частоты вынужденных.

Деформации и напряжения в элементе конструкции от возмущающей силы P определяются с использованием динамического коэффициента:

$$\Delta_d = \Delta_{ст} \cdot K_d, \quad \sigma_d = \sigma_{ст} \cdot K_d, \quad \tau_d = \tau_{ст} \cdot K_d. \quad (9.12)$$

Суммарные деформации и напряжения слагаются из статических и динамических

$$\Delta = \Delta_{ст} + \Delta_d, \quad \sigma = \sigma_{ст} + \sigma_d, \quad \tau = \tau_{ст} + \tau_d. \quad (9.13)$$

Пример 9.8

Электродвигатель весом $Q = 1,5$ кН установлен на консольных деревянных балках прямоугольного поперечного сечения при соотношении сторон $h / b = 1,5$ (рис. 9.12, а).

Электродвигатель делает $n = 1400$ об/мин. Вертикальная амплитуда возмущающей силы $P = 0,4$ кН.

Определить размеры поперечного сечения балок, чтобы частота собственных колебаний балок была на 30 % больше частоты возмущающей силы. Для древесины: $R = 10$ МПа, $E = 12$ ГПа.

Собственным весом балок пренебречь.

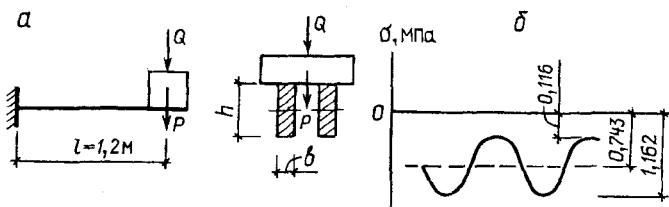


Рис. 9.12

Решение

Консольные балки воспринимают вес двигателя Q как статическую нагрузку и дополнительную P как динамическую, вызванную работой двигателя.

Обе нагрузки вызывают плоский изгиб балок.

Частота вынужденных колебаний балок

$$\omega_1 = \frac{n}{60} \cdot 2\pi = \frac{1400}{60} \cdot 2 \cdot 3,14 = 146,5 \text{ 1/с.}$$

Согласно условию задачи частота собственных колебаний балок должна быть $\omega_0 = 1,3 \omega_1 = 1,3 \cdot 146,5 = 190,5 \text{ 1/с.}$

Используя формулу (9.10), запишем

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\vartheta_{\text{ст}}}} = 190,5,$$

откуда статический прогиб балок

$$\vartheta_{\text{ст}} = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{9,81}{190,5^2} = 0,0270 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

С другой стороны, статический прогиб двух консольно-закрепленных балок

$$\vartheta_{\text{ст}} = \frac{Q \cdot l^3}{3E \cdot 2J_x},$$

откуда момент инерции сечения одной балки

$$J_x = \frac{Q \cdot l^3}{3E \cdot 2 \cdot \vartheta_{\text{ст}}} = \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,2^{-3}}{3 \cdot 12 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 0,0270 \cdot 10^{-2}} = 1,333 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4 = 13330 \text{ см}^4.$$

Поскольку момент инерции для прямоугольного сечения $J_x = \frac{bh^3}{12}$,

а с учетом $h / b = 1,5$ получим $J_x = \frac{b \cdot (1,5b)^3}{12} = 13330 \text{ см}^4$, откуда

$b = 14,75 \text{ см}$, $h = 22,1 \text{ см}$.

Конструктивно принимаем $h = 22 \text{ см}$, $b = 15 \text{ см}$. Момент инерции принятого сечения $J_x = 13310 \text{ см}^4$.

Для принятых размеров сечения балки частота собственных колебаний будет

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\vartheta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{g \cdot 3E \cdot 2 \cdot J_x}{Q \cdot l^3}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 13310 \cdot 10^{-8}}{1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,2^3}} = 190,4 \text{ 1/с},$$

что соответствует требованию расчета.

Вычислим динамические напряжения в балке.

Для сечений балок

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot 2 = \frac{15 \cdot 22^2}{6} \cdot 2 = 2420 \text{ см}^3.$$

Нормальное напряжение в балках от статического действия силы Q

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{Q \cdot l}{W_x} = \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2420 \cdot 10^{-6}} = 0,743 \text{ МПа}.$$

Значение динамического коэффициента по формуле (9.11):

$$K_d = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{146,5}{190,4}} = 4,33.$$

Напряжения от возмущающей силы

$$\sigma_d = \frac{M_{(p)}}{W_x} \cdot K_d = \frac{P \cdot l}{W_x} \cdot K_d = \frac{0,4 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2420} \cdot 4,33 = 0,859 \text{ МПа.}$$

Напряжение в крайних точках опасного сечения балок (в заземлении) будет меняться (по формуле (9.12)) в следующих пределах (рис. 9.12, б):

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ст}} + \sigma_d = 0,743 + 0,859 = 1,612 \text{ МПа} < R,$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{\text{ст}} - \sigma_d = 0,743 - 0,859 = -0,116 \text{ МПа.}$$

Максимальное напряжение составляет небольшую часть расчетного сопротивления. Это вызвано необходимостью обеспечения работы конструкции вне зоны резонанса.

Вычислим динамический прогиб балок.

Статический прогиб от веса Q

$$\vartheta_{\text{ст}} = \frac{F \cdot l^3}{3E \cdot 2J_x} = \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,2^3}{3 \cdot 12 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 13310 \cdot 10^{-8}} = 0,027 \text{ см.}$$

Амплитуда вынужденных колебаний от возмущающей силы P

$$A = \vartheta_d = \vartheta_{\text{ст}}^{(p)} \cdot K_d = \frac{P \cdot l^3 \cdot K_d}{3E \cdot J_x \cdot 2} = \frac{0,4 \cdot 10^3 \cdot 1,2^3 \cdot 4,33}{3 \cdot 12 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 13310 \cdot 10^{-8}} = 0,0312 \text{ см.}$$

Максимальный прогиб конца балки (по выражению (9.13)):

$$v_{\max} = v_{\text{ст}} + v_d = 0,027 + 0,0312 = 0,0582 \text{ см.}$$

$$\text{Максимальный относительный прогиб } \frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{0,0582}{120} = \frac{1}{2060}.$$

Пример 9.9

Электродвигатель весом $Q = 4 \text{ кН}$ установлен в середине пролета двухопорной балки, выполненной из двух прокатных швеллеров № 20 (рис. 9.13).

Электродвигатель делает $n = 800$ об/мин. Вертикальная амплитуда возмущающей силы $P = 1$ кН.

Проверить прочность балки, если $R = 210$ МПа.

Собственным весом швеллеров пренебречь.

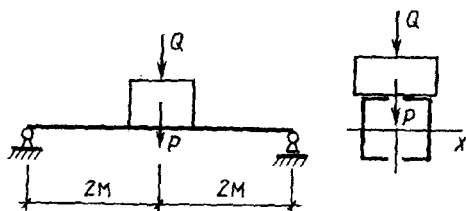


Рис. 9.13

Решение

Из таблицы сортамента прокатных швеллеров для номера 20 следует: $J_x = 1520$ см⁴, $W_x = 152$ см³.

Прогиб балки в середине пролета от статического действия груза Q

$$\vartheta_{ст} = \frac{Q \cdot l^3}{48EJ_x} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 4^3}{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 1520 \cdot 2 \cdot 10^{-8}} = 0,087 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Частота собственных колебаний балки

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\vartheta_{ст}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,087 \cdot 10^{-2}}} = 106,2 \text{ 1/с.}$$

Частота вынужденных колебаний балки

$$\omega_1 = \frac{n}{60} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{800}{60} \cdot 2 \cdot 3,14 = 83,7 \text{ 1/с.}$$

Заметим, что отношение $\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{106,2}{83,7} = 1,27$, т.е. эксплуатация кон-

струкции будет происходить вне опасной резонансной зоны.

Напряжение от веса двигателя (опасное сечение посередине пролета балки)

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{Ql}{4W_x} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 4}{4 \cdot 152 \cdot 10^{-6} \cdot 2} = 13,2 \text{ МПа.}$$

Динамический коэффициент

$$K_d = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{83,7}{106,2}\right)^2} = 2,64.$$

Напряжение от возмущающей силы

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \sigma_{\text{см}}^{(p)} \cdot K_d = \frac{M_{\text{max}}^{(p)}}{W_x} \cdot K_d = \frac{Pl}{4W_x} \times \\ &\times K_d = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 4}{4 \cdot 152 \cdot 10^{-6} \cdot 2} \cdot 2,64 = 8,68 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Максимальное напряжение в балке

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{ст}} + \sigma_d = 13,2 + 8,68 = 21,9 \text{ МПа} < R.$$

Условие прочности удовлетворяется.

Амплитуда вынужденных колебаний от возмущающей силы P

$$\begin{aligned} A &= g_{\text{ст}}^{(p)} \cdot K_d = \frac{P \cdot l^3}{48EJ_x} \cdot K_d = \\ &= \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 4^3 \cdot 2,64}{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1520 \cdot 10^{-8}} = 0,057 \text{ см.} \end{aligned}$$

Максимальный прогиб в середине пролета балки

$$v_{\text{max}} = v_{\text{ст}} + A = 0,087 + 0,057 = 0,144 \text{ см.}$$

Максимальный относительный прогиб

$$\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{0,144}{400} = \frac{1}{2778},$$

что соответствует большой жесткости балки.

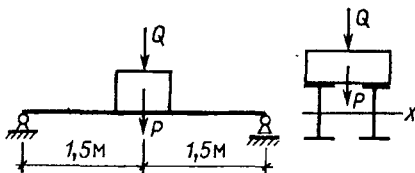
Задача 9.6

Посредине пролета двухопорной балки длиной $l = 3$ м, состоящей из двух двутавров, установлен электродвигатель весом $Q = 8,3$ кН, делающий $n = 900$ об/мин.

Вертикальная амплитуда возмущающей силы $P = 2,5$ кН.

Приняв $\omega_0 = 1,3 \omega_1$, определить номер двутавра, если $R = 210$ МПа.

Собственным весом двутавра пренебречь.



Ответ: двутавр №20, $\sigma_{\max} = 22,0$ МПа.

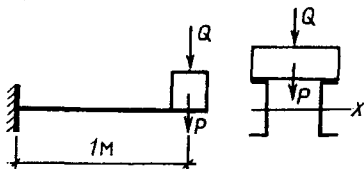
Задача 9.7

На конце консоли длиной $l = 1$ м, выполненной из двух швеллеров № 14, установлен двигатель весом $Q = 3$ кН, делающий $n = 1000$ об/мин.

Вертикальная амплитуда возмущающей силы $P = 0,75$ кН.

Проверить прочность балки, если $R = 210$ МПа.

Собственным весом швеллеров пренебречь.



Ответ: $\sigma_{\max} = 33,5$ МПа.

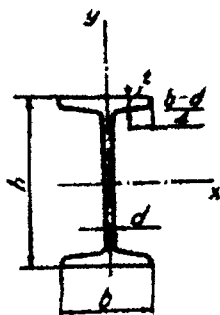
ЛИТЕРАТУРА

1. Заяц, В.Н. Сопротивление материалов / В.Н. Заяц, М.К. Балыкин, И.А. Голубев. – Минск: Вышэйшая школа, 1997.
2. Александров, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – М., 1995.
3. Сопротивление материалов / А.Ф. Смирнов [и др.]. – М., 1975.
4. Никифоров, С.Н. Сопротивление материалов / С.Н. Никифоров. – М., 1966.
5. Дарков, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М., 1975.
6. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.В. Александров [и др.]. – М., 1977.
7. Сборник задач по сопротивлению материалов / В.К. Качурин [и др.]. – М., 1970.
8. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И.Н. Миролюбов [и др.]. – М., 1962.
9. Балыкин, М.К. Сопротивление материалов: учебное пособие / М.К. Балыкин, В.А. Пенькевич, И.А. Голубев. – Минск, 2005.
10. Балыкин, М.К. Сборник заданий для расчетно-проектировочных работ / М.К. Балыкин, В.А. Пенькевич, И.А. Голубев. – Минск, 2003.
11. Атаров, Н.М. Примеры решения задач по сопротивлению материалов / Н.М. Атаров, Ю.Д. Насонкин. – М., 1990.
12. Винокуров, Е.Ф. Сопротивление материалов: расчетно-проектировочные работы / Е.Ф. Винокуров, А.Г. Петрович, Л.И. Шевчук. – Минск, 1987.
13. Методические указания к контрольным работам по сопротивлению материалов / В.А. Пенькевич [и др.]. – Минск, 1981.
14. Сборник заданий для курсовых работ по сопротивлению материалов / М.Н. Рудицин [и др.]. – Минск, 1973.
15. Пенькевич, В.А. Сопротивление материалов. Программа, контрольные работы и методические указания для студентов строительных специальностей / В.А. Пенькевич, М.К. Балыкин, И.А. Голубев. – Минск, 1965.
16. Любошиц, М.И. Геометрические характеристики сечений / М.И. Любошиц. – Минск, 1962.
17. Рудицин, М.Н. Расчетно-графические работы по сопротивлению материалов / М.Н. Рудицин. – Минск, 1957.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (по ГОСТ 8239-89*)

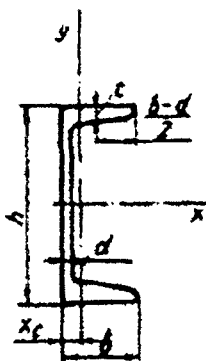


I – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент площади полусечения;
 i – радиус инерции.

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения A , см ²	Линейная плотность $\rho_{л}$, кг/м	Геометрические характеристики относительно осей						
	h	b	d	t			x			y			
							I_x , см ⁴	W_{x3} , см ³	i_x , см	S_{x3} , см ³	I_y , см ⁴	W_{y1} , см ³	i_y , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5	7,8	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6	9,8	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7	11,2	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13	72,6	57	19062	953	16,2	545	667	86	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	92,6	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	108	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

* Здесь и далее звездочка в обозначении шифра указывает на переиздание соответствующего стандарта с учетом внесенных изменений.

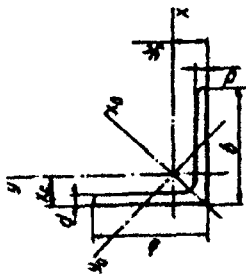
Сталь горячекатаная. Швеллеры (по ГОСТ 8240-89)



I – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент площади полусечения;
 i – радиус инерции.

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения A , см ²	Линейная плотность P_n , кг/м	Геометрические характеристики относительно осей							x_c , см
	h	b	d	t			x				y			
							I_{xx} , см ⁴	W_{xx} , см ³	i_{xx} , см	S_{xx} , см ³	I_{yy} , см ⁴	W_{yy} , см ³	i_{yy} , см	
5	50	32	4,4	7	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,6	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,9	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	23,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	12,3	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	160	64	5	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	160	68	5	9	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	220	82	5,4	9,5	26,7	21	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10	30,6	24	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	270	95	6	10,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11	40,5	31,8	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	400	115	8	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Рекомендуемый сортамент равнополочных уголков
(по ГОСТ 8509-86)



- b — ширина полки;
- d — толщина полки;
- I — момент инерции;
- i — радиус инерции;
- x_0, y_0 — расстояния от центра тяжести; до наружных граней полкок.

Таблица ПЗ.1

Номер профиля	Размеры, мм		Площадь сечения A , см ²	Линейная плотность ρ_p , кг/м	Геометрические характеристики относительно осей								x_0, y_0 см
	b	d			x		x_0		y		I_{y0} , см ⁴	I_{y0} , см	
					I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x0} , см ⁴	i_{x0} , см	I_y , см ⁴	I_y , см ⁴			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
2	20	3	1,13	0,89	0,4	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,23	0,6	
		4	1,46	1,15	0,5	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,28	0,64	
3	30	3	1,74	1,36	1,45	0,91	2,3	1,15	0,6	0,59	0,85	0,85	
		4	2,27	1,78	1,84	0,9	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89	
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09	
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,9	0,78	2,68	1,13	
		5	3,79	2,98	5,53	1,21	8,75	1,52	2,3	0,78	3,22	1,17	

Продолжение табл. ПЗ.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1	4,16	1,33	
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,63	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38	
		5	4,8	3,77	11,2	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	0,98	6,57	1,42
		6	5,69	4,47	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	0,98	7,65	1,46
		4	4,96	3,9	18,86	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,25	11	1,69
6,3	63	5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74	
		6	7,28	5,72	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	15,9	1,78	
		5	6,86	5,38	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,7	1,9	
		6	8,15	6,39	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,1	1,94	
		7	9,42	7,39	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,2	1,99	
7,5	75	8	10,67	8,37	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,2	2,02	
		5	7,39	5,8	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	23,1	2,02	
		6	8,78	6,89	46,57	2,3	73,87	2,9	19,28	1,48	27,3	2,06	
		7	10,15	7,97	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,47	31,2	2,1	
		8	11,5	9,02	59,84	2,28	94,89	2,87	24,8	1,47	35	2,15	
8	80	9	12,83	10,07	66,1	2,27	104,72	2,86	27,48	1,46	38,6	2,18	
		6	9,38	7,36	56,97	2,47	90,4	3,11	23,54	1,58	33,4	2,19	
		7	10,85	8,51	65,31	2,45	103,6	3,09	26,97	1,58	38,3	2,23	
		8	12,3	9,65	73,36	2,44	116,3	3,08	30,32	1,57	43	2,27	
		6	10,61	8,33	82,1	2,78	130	3,5	33,97	1,79	48,1	2,43	
9	90	7	12,28	9,64	94,3	2,77	149,6	3,49	38,94	1,78	55,4	2,47	
		8	13,93	10,93	106,1	2,76	168,4	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51	
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	68	2,55	

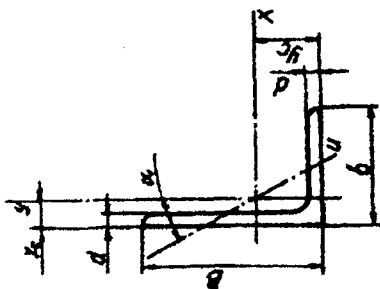
Продолжение табл. ПЗ.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
10	100	7	13,75	10,79	130,5	3,08	207	3,88	54,16	1,98	76,4	2,71
		8	15,6	12,25	147,1	3,07	233	3,87	60,92	1,98	86,3	2,75
		10	19,24	15,1	178,9	3,05	283	3,84	74,08	1,96	110	2,83
		12	22,8	17,9	208,9	3,03	330	3,81	86,84	1,95	122	2,91
		14	26,28	20,63	237,1	3,00	374	3,78	99,32	1,94	138	2,99
12,5	125	8	19,69	15,46	294	3,87	466	4,87	121,9	2,49	172	3,36
		9	22	17,3	327	3,86	520	4,86	135,8	2,48	192	3,4
		10	24,33	19,1	359	3,85	571	4,84	148,5	2,47	211	3,45
		12	28,89	22,68	422	3,82	670	4,82	174,4	2,46	248	3,53
		14	33,37	26,2	481	3,8	763	4,78	199,6	2,45	282	3,61
		16	37,77	29,65	538	3,78	852	4,75	224,2	2,44	315	3,68
14	140	9	24,72	19,41	465	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
		10	27,33	21,45	512	4,33	813	5,46	210	2,78	301	3,82
		12	32,49	25,5	602	4,31	956	5,43	248	2,76	354	3,9
		10	31,43	24,67	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,3
16	160	11	34,42	27,02	844	4,95	1340	6,24	347	3,18	496	4,35
		12	37,39	29,35	912	4,94	1450	6,23	375	3,17	537	4,39
		14	43,57	33,97	1046	4,92	1662	6,2	430	3,16	615	4,47
		16	49,07	38,52	1175	4,89	1865	6,17	484	3,14	690	4,55
		18	54,79	43,01	1290	4,87	2061	6,13	537	3,13	771	4,63
		20	60,4	47,44	1418	4,85	2248	6,1	589	3,12	830	4,7

Окончание табл. ПЗ.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
20	200	12	47,1	36,97	1822	6,22	2896	7,84	749	3,99	1073	5,37
		13	50,85	39,92	1960	6,21	3116	7,83	805	3,98	1156	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,2	3333	7,81	861	3,97	1236	5,46
		16	61,98	48,65	2362	6,17	3755	7,78	969	3,96	1393	5,54
		20	76,54	60,08	2871	6,12	4560	7,72	1181	3,93	1689	5,7
		25	94,29	74,02	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	2028	5,89
		30	111,54	87,56	4019	6	6351	7,55	1698	3,89	2332	6,07
		16	78,4	61,55	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	2775	6,75
		18	87,72	68,86	5247	7,73	8336	9,75	2157	4,96	3089	6,83
		20	96,96	76,11	5764	7,71	9159	9,72	2370	4,94	3395	6,91
25	250	22	106,12	83,31	6270	7,09	9961	9,69	2579	4,93	3691	7
		25	119,71	93,97	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	4119	7,11
		28	133,12	104,5	7716	7,61	12243	9,59	3189	4,9	4527	7,23
		30	141,96	111,44	8176	7,59	12964	9,56	3388	4,89	4788	7,31

Рекомендуемый сортмент неравнополочных уголков
(по ГОСТ 8510-86)



- B — ширина большой полки;
- b — ширина малой полки;
- d — толщина полки;
- I — момент инерции;
- i — радиус инерции;
- x_0, y_0 — расстояние от центра тяжести до наружных граней полкок;
- α — угол наклона главной центральной оси.

Таблица П4.1

Номер профиля	Ширина полки		Толщина полки	Геометрические характеристики относительно осей						x_0 , см	y_0 , см	I_{x0}^A , см ⁴	tg α		
				X		Y		и							
				I_x , см ⁴	i_x , см	I_y , см ⁴	i_y , см	I_{xy} , см ⁴	i_{xy} , см						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	0,13	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392

Продолжение табл. П4.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3,2/2	32	20	3	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382
			4	1,94	1,52	1,93	1	0,57	0,54	0,35	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	0,56	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385
			4	2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	0,63	1,37	1,22	0,281
			5	3,03	2,37	4,73	1,25	1,41	0,68	0,86	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374
5/3,2	50	32	3	2,42	1,9	6,18	1,6	1,99	0,91	1,18	0,7	0,72	1,60	2,01	0,403
			4	3,17	2,4	7,98	1,59	2,56	0,9	1,52	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401
6,3/4,0	63	40	4	4,04	3,17	16,33	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397
			5	4,98	3,91	19,91	2	6,26	1,12	3,73	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396
			6	5,9	4,63	23,31	1,99	7,29	1,11	4,36	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393
			8	7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	1,07	2,2	9,27	0,386
7,5/5	75	60	5	6,11	4,79	34,81	2,39	12,47	1,43	7,24	1,09	1,17	2,39	12	0,436
			6	7,25	5,69	40,92	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	1,21	2,44	14,1	0,435
			7	8,37	6,57	46,77	2,36	16,61	1,41	9,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435
			8	9,47	7,43	52,38	2,35	18,52	1,4	10,87	1,07	1,29	2,52	17,8	0,43
9/5,6	90	56	5,5	7,86	6,17	65,28	2,88	19,67	1,58	11,77	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384
			6	8,54	6,7	70,58	2,88	21,22	1,58	12,7	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384
			8	11,18	8,77	90,87	2,85	27,08	1,56	16,29	1,21	1,36	3,04	28,33	0,38
10/6,3	100	63	6	9,58	7,53	98,29	3,2	30,58	1,79	18,2	1,38	1,42	3,23	31,5	0,393
			7	11,09	8,7	112,86	3,19	34,99	1,78	20,83	1,37	1,46	3,28	36,1	0,392
			8	12,57	9,87	126,96	3,18	39,21	1,77	23,38	1,36	1,5	3,32	40,5	0,391
			10	15,47	12,14	153,95	3,15	47,18	1,75	28,34	1,35	1,58	3,4	48,6	0,387

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
12,5/8	125	80	7	14,06	11,04	226	4,01	73,73	2,29	43,4	1,76	1,8	4,01	74,7	0,407
			8	15,98	12,58	225	4	80,95	2,28	48,82	1,75	1,84	4,05	84,1	0,406
			10	19,7	15,47	311	3,98	100,47	2,26	59,33	1,74	1,92	4,14	102	0,404
			12	23,36	18,34	364	3,95	116,84	2,24	69,47	1,72	2	4,22	118	0,4
16/10	160	100	9	22,87	17,96	605	5,15	186	2,85	110,4	2,2	2,24	5,19	194	0,391
			10	25,28	19,85	666	5,13	204	2,84	121,16	2,19	2,28	5,23	213	0,390
			12	30,04	23,58	784	5,11	238	2,82	142,14	2,18	2,36	5,32	249	0,388
			14	34,72	27,26	897	5,08	271	2,8	162,49	2,16	2,43	5,4	282	0,385
20/12,5	200	125	11	34,87	27,37	1449	6,45	446	3,58	263	2,75	2,79	6,5	465	0,392
			12	37,89	29,74	1568	6,43	481	3,57	285	2,74	2,83	6,54	503	0,392
			14	43,87	34,43	1800	6,41	550	3,54	326	2,73	2,91	6,62	575	0,390
			16	49,77	39,07	2026	6,38	616	3,52	366	2,72	2,99	6,71	643	0,388

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Введение. Основные понятия	4
Раздел 1. Растяжение и сжатие	13
1.1. Статически определимые системы	17
1.2. Статически неопределимые системы	41
Раздел 2. Сдвиг	65
2.1. Расчет заклепочных соединений	66
2.2. Расчет сварных соединений	74
2.3. Расчет врубок	79
Раздел 3. Геометрические характеристики плоских сечений	86
Раздел 4. Кручение	103
4.1. Кручение стержней круглого поперечного сечения	104
4.2. Кручение стержней прямоугольного поперечного сечения	108
Раздел 5. Плоский изгиб	123
5.1. Внутренние силы. Эпюры	123
5.2. Напряжения при изгибе. Условия прочности	146
5.3. Деформации при изгибе	172
Раздел 6. Статически неопределимые балки	202
Раздел 7. Сложное сопротивление	225
7.1. Косой изгиб	227
7.2. Внецентренное растяжение-сжатие	243
7.3. Изгиб с кручением	260
7.4. Общий случай сложного сопротивления	273
Раздел 8. Продольный и продольно-поперечный изгибы	280
8.1. Продольный изгиб (устойчивость сжатых стержней) ...	280
8.2. Продольно-поперечный изгиб	307
Раздел 9. Динамическое действие нагрузки	325
9.1. Расчет на действие сил инерции	325
9.2. Расчет на ударную нагрузку	334
9.3. Упругие колебания	344
Литература	354
Приложения	355

Учебное издание

БАЛЫКИН Михаил Кириллович
ПЕНЬКЕВИЧ Владимир Александрович
ГОЛУБЕВ Иван Архипович и др.

СОПРОТИВЛЕНИЕ
МАТЕРИАЛОВ

(примеры и задачи)

Учебно-методическое пособие

Редактор Л.Н. Шалаева
Технический редактор О.В. Дубовик
Компьютерная верстка О.В. Дубовик

Подписано в печать 26.06.2008.

Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 21,22. Уч.-изд. л. 16,59. Тираж 500. Заказ 144.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0131627 от 01.04.2004.

220013, Минск, проспект Независимости, 65.