Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра инженерной математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Руководство к решению задач
для студентов механико-технологического факультета

В 7 частях

Часть 1

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Под редакцией В. А. Нифагина

Минск 2008

УДК 51(076.5)
ББК 22.1 я 7
Р 85

Авторы: Н.К. Прихач, Н.А. Кондратьева,
О.Г. Вишневская, Е.А. Глинская

Под редакцией: В.А. Нифагин

Рецензент: А.Д. Корзников

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Матрицы и операции над ними

Теоретические сведения

1. **Понятие о матрице.** Таблица чисел a_{ik} вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей* размера $m \times n$. Числа a_{ik} называются ее *элементами*. Если $m = 1$, $n > 1$, мы имеем однострочечную матрицу, которую называют *матрицей-строкой*: $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$. Если же $m > 1$, а $n = 1$, то имеем одностолбцовую матрицу

$$(a_{11} \quad a_{21} \quad \dots \quad a_{m1})^T,$$

которую называют *матрицей-столбцом*.

Если в матрице число строк равно числу столбцов $(m = n)$, то такую матрицу называют *квадратной*, причем число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы.

Две матрицы A и B называются *равными* $(A = B)$, если они одинакового размера (т. е. имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов) и их соответствующие элементы равны.

2. **Сложение матриц.** Матрицы одинакового размера можно складывать.

Суммой двух матриц A и B называется матрица C, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ \left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right). \qquad (1.2)$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нуль-матрицей*.

3. **Вычитание матриц.** *Разностью* двух матриц A и B одинакового размера называется матрицы C, такая, что $C + B = A$.

4. **Умножение матрицы на число.** *Произведением* матрицы A на число λ называется матрица B, элементы которой равны произведению числа λ на соответствующие элементы матрицы A: $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$.

5. **Умножение матриц.** Произведением AB $(m \times n)$ – матрицы A на $(n \times k)$ – матрицу B называется $(m \times k)$-матрица C, элемент которой d_{ij}, стоящий в i -й строке и j - м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i - й строки матрицы A и j - го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{\gamma=1}^{n} a_{i\nu} \cdot b_{\nu j} \quad i = 1,\overline{m},\ \overline{j = 1,k}\,. \tag{1.3}$$

Единичной матрицей называется такая матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

при умножении которой слева или справа на матрицу A получается матрица A:

$$E \cdot A = A \cdot E = A\,.$$

Матрица A^T, полученная из матрицы A заменой столбцов строками с теми же номерами, называется *транспонированной по отношению к* A. Если для матриц A и B определено произведение AB, то

$$(AB)^T = B^T \cdot A^T\,.$$

6. **Основные свойства действий над матрицами.**

1) $A+B=B+A$.

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$.

3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

4) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

5) $A(BC)=(AB)C$.

6) $A(B+C)=AB+AC$.

Примеры

1. Найти сумму матриц

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 7 & -6 & -5\\ 1 & 8 & -9\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 8 & 8\\ 7 & 5 & -5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}.$$

Решение. Обе матрицы имеют одинаковое число строк (три) и одинаковое число столбцов (три). Такие матрицы можно складывать. По формуле (1.2) получаем

$$C=A+B=\begin{pmatrix}2+1 & 3+8 & -4+8\\ 7+7 & -6+5 & -5-5\\ 1+1 & 8-3 & -9-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 11 & 4\\ 14 & -1 & -10\\ 2 & 5 & -13\end{pmatrix}.$$

2. Даны три матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 7 & -8\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 8 & 6\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $3A+4B-2C$.

Решение. По определению произведения матрицы на число, получаем

$$3A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 15 & -18\end{pmatrix},\ 4B=\begin{pmatrix}12 & -16\\ 28 & -32\end{pmatrix},\ 2C=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 16 & 12\end{pmatrix}.$$

На основании формулы (1.2) получаем:

$$3A+4B-2C=\begin{pmatrix}3+12-2 & 6-16+6\\ 15+28-16 & -18-32-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -4\\ 27 & -62\end{pmatrix}.$$

3. Найти произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$ двух квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 4 & -1 & -3\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Решение. Обе матрицы являются квадратными матрицами третьего порядка. Такие матрицы можно умножать. Применим формулу (1.3) и получим элементы c_{ij} матрицы $A\cdot B$.

$$c_{11}=2\cdot 3+1\cdot 4+0\cdot 2=10;\ c_{12}=2\cdot(-2)+1\cdot(-1)+0\cdot(-1)=-5;$$

$$c_{13}=2\cdot(-1)+1\cdot(-3)+0\cdot(-1)=-5;$$

$$c_{21}=1\cdot 3+1\cdot 4+2\cdot 2=11;\ c_{22}=1\cdot(-2)+1\cdot(-1)+2\cdot(-1)=-5;$$

$$c_{23}=1\cdot(-1)+1\cdot(-3)+2\cdot(-1)=-6;$$

$$c_{31}=-1\cdot 3+2\cdot 4+2\cdot 2=9;\ c_{32}=-1\cdot(-2)+2\cdot(-1)+2\cdot(-1)=-2;$$

$$c_{33}=-1\cdot(-1)+2\cdot(-3)+2\cdot(-1)=-7.$$

Итак

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}10 & -5 & -5\\ 11 & -5 & -6\\ 9 & -2 & -7\end{pmatrix}.$$

По той же формуле (1.3) находим элементы c_{ij} матрицы $B \cdot A$. Меняя местами матрицы A и B, умножая последовательно первую строку матрицы B на первый, второй и третий столбец матрицы A, получим элементы первой строки матрицы $B \cdot A$.

$$c'_{11} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 5; \ c'_{12} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1;$$

$$c'_{13} = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = -6.$$

Аналогично вычисляются элементы второй строки:

$$c'_{21} = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 10; \ c'_{22} = 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -3;$$

$$c'_{23} = 4 \cdot 0 - 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -8$$

и элементы третьей строки матрицы $B \cdot A$:

$$c'_{31} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 4; \ c'_{32} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1;$$

$$c'_{33} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = -4.$$

Следовательно

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -6 \\ 10 & -3 & -8 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая матрицы $A \cdot B$ и $B \cdot A$, и пользуясь определением равенства матриц, заключаем, что $A \cdot B \neq B \cdot A$.

4. Найти произведение $A \cdot B$ и $B \cdot A$ следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -2 \\ 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, поэтому можно умножать матрицу A на матрицу B. По формуле (1.3) находим:

$$c_{11} = -1\cdot 4 + 1\cdot 4 - 7\cdot 2 + 2\cdot 4 = -6;\; c_{21} = 2\cdot 4 + 0\cdot 4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 4 = 10;$$

$$c_{12} = -1\cdot(-1) - 1\cdot 2 - 7\cdot 0 + 2\cdot(-1) = -3;\; c_{22} = 2\cdot(-1) + 0\cdot(-2) + 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) = -2.$$

Следовательно

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Число столбцов матрицы B равно числу строк матрицы A, поэтому можно умножить матрицу B на матрицу A

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 4\cdot(-1)+(-1)\cdot 2 & 4\cdot 1+(-1)\cdot 0 & 4\cdot(-7)-1\cdot 1 & 4\cdot 2+(-1)\cdot 0 \\ 4\cdot(-1)-2\cdot 2 & 4\cdot 1+(-2)\cdot 0 & 4\cdot(-7)-2\cdot 1 & 4\cdot 2-2\cdot 0 \\ 2\cdot(-1)+0\cdot 2 & 2\cdot 1+0\cdot 0 & 2\cdot(-7)+0\cdot 1 & 2\cdot 2+0\cdot 0 \\ 4\cdot(-1)-1\cdot 2 & 4\cdot 1-1\cdot 0 & 4\cdot(-7)-1\cdot 1 & 4\cdot 2-1\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 4 & -29 & 8 \\ -8 & 4 & -30 & 8 \\ -2 & 2 & -14 & 4 \\ -6 & 4 & -29 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Найти значение многочлена $f(A)$, если $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$f(A) = A^2 - 2\cdot A + 5\cdot E$, где E – единичная матрица.

Решение. Возведем матрицу A в квадрат – умножим ее саму на себя. По формуле (1.3) получаем:

$$A\cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 4 - 3\cdot 2 & 4\cdot(-3) - 3\cdot 1 \\ 2\cdot 4 + 1\cdot 2 & 2\cdot(-3) + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

Согласно определению умножения матрицы на число, получим:

$$-2\cdot A=\begin{pmatrix}-8 & 6\\ -4 & -2\end{pmatrix},\ 5\cdot E=5\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$f(A)=\begin{pmatrix}10 & -15\\ 10 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8 & 6\\ -4 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10-8+5 & -15+6+0\\ 10-4+0 & -5-2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -9\\ 6 & -2\end{pmatrix}.$$

1.2. Задачи для самостоятельного решения

1) Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Найти: а) $3A-2B+C$; б) $4A+2B-3C$.

2) Найти матрицу, транспонированную матрице A:

а) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 4\\ 0 & 9 & 5\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4 & 6\\ 2 & -1 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 4 & 7\\ 2 & 1 & 1 & 5 & 1\\ 3 & 2 & 3 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

3) Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & -4\\ 5 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -5 & 7\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

Найти: а) $2A+B^T$; б) $3A^T+5B$.

4) Найти $5A+2E$, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

5) Найти матрицу X, удовлетворяющую условию:

а) $3A+2X=E$, где $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица третьего порядка.

б) $2A-3X=B$, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

6) Проверить, имеет ли место равенство $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$, если

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти произведение матриц:

7) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

15) Даны матрицы A, B, C. Найти $A \cdot (BC)$, $(AB) \cdot C$ и показать, что $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -3 & 25 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -6 \\ 6 & 2 & 11 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

16) Даны матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти $(AB)^T$.

17) Даны матрицы

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти $(B\,A)^T$.

18) Вычислить $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^3$.

19) Вычислить $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^2$.

20) Для данных матриц A и B найти $(3A+2B)^2$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 9 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

21) Для данных матриц A, B, C найти $(2A-B+4C)^3$, если $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

22) Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти сумму матриц A^2+A+E, где E – единичная матрица третьего порядка.

Найти $f(A)$, если

23) $f(x)=x^2-5x+10$, $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$.

24) $f(x)=x^3-5x^2+2x+4$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 8 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

25) $f(x)=(2x^5-4x^2+7)(x^2-5x+10)+x+5$, $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

26) Доказать, что матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ является корнем многочлена $f(x)=x^3-6x^2+11x-4$.

27) Доказать, что матрица $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ является корнем многочлена $f(x)=x^3-3x^2+4$.

28) Дано $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $f(x)=x^3-x^2+x+4$, $\varphi(x)=x^2-4x+4$. Найти $2f(A)-\varphi(A)$.

29) Дано $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-2x+1$, $\varphi(x)=5x+3$. Найти $f(A)-2\varphi(A)$.

30) Найти $(f(A))^2$, если $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -3\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $f(x)=x+2$.

Ответы

1) а) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & 2\\ -7 & 5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}10 & 2\\ 16 & 3\\ -4 & 25\end{pmatrix}$. 3) а) $\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 1 & -7\\ 17 & 11\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-1 & -16 & 50\\ 16 & -7 & 6\end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix}12 & -5 & 25\\ 5 & 12 & 10\\ 5 & 0 & 17\end{pmatrix}$ 5) а) $x=\begin{pmatrix}-4 & 3 & -1.5\\ 6 & -1 & 4.5\\ -3 & 1.5 & 2\end{pmatrix}$; б) $x=\begin{pmatrix}-1/3 & 0\\ 11/3 & 1\end{pmatrix}$.

6) а) да; б) нет. 7) $\begin{pmatrix}-2 & 7\\ -4 & 7\end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix}3 & -15 & 21\\ -2 & 10 & -14\\ 4 & -20 & 28\end{pmatrix}$; 9) 16; 10) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 9\end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix}-4 & -28 & 16\\ 30 & 6 & 16\\ 1 & -10 & 13\end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix}17\\ 60\end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix}2 & -8\\ -39 & -24\end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix}30 & 30\\ -9 & 20\\ 7 & 6\\ 22 & -3\end{pmatrix}$;

15) а) $(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} 49 & -140 \\ -56 & 574 \\ 126 & 728 \end{pmatrix}$.

б) $(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} -84 & 252 & 168 & -42 \\ -232 & 696 & 464 & -116 \end{pmatrix}$.

16) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 11 & 38 \\ 57 & 106 \end{pmatrix}$; 19) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} 446 & 97 & 77 \\ 35 & 552 & -3 \\ 507 & -255 & 325 \end{pmatrix}$; 21) $\begin{pmatrix} 3815 & 3204 \\ 7476 & 1343 \end{pmatrix}$; 22) $\begin{pmatrix} 15 & 8 & 8 \\ 8 & 15 & 8 \\ 8 & 8 & 15 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} 23 & -1 \\ -7 & 31 \end{pmatrix}$;

24) $\begin{pmatrix} 92 & -84 & 0 \\ 112 & 22 & -336 \\ -112 & 70 & 92 \end{pmatrix}$; 25) $\begin{pmatrix} -5.392 \cdot 10^4 & 3.854 \cdot 10^4 \\ 9.635 \cdot 10^3 & -5.745 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$; 28) $\begin{pmatrix} -7 & 46 \\ 0 & 108 \end{pmatrix}$;

29) $\begin{pmatrix} -4 & -14 \\ -14 & -31 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -10 & 10 & -14 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

1.3. Определители

Определители второго порядка

Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определителем второго порядка, соответствующим матрице A, называется число, равное $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Определитель обозначают символом $|A|$. Т. о.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \tag{1.4}$$

Элементы матрицы A называются элементами определителя $|A|$, элементы a_{11}, a_{22} образуют *главную диагональ*, а элементы a_{12}, a_{21} – *побочную*.

Определители третьего порядка

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице A, называется число, равное

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}. \tag{1.5}$$

Чтобы запомнить какие числа в правой части равенства (1.5) следует брать со знаком “плюс”, какие – со знаком “минус”, полезно следующее правило, называемое *правилом треугольника*.

Минором (M_{ij}) какого-либо определителя называется определитель, полученный из данного определителя вычеркиванием той строки и того столбца, которым принадлежит этот элемент.

Алгебраическим дополнением (A_{ij}) элемента a_{ij} определителя $|A|$ называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Понятие определителя n-го порядка

Определителем n*-го порядка*, соответствующим квадратной матрице n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.6)$$

можно назвать число, равное сумме парных произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}. \qquad (1.7)$$

Свойства определителей n-го порядка

1) значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами и наоборот;
2) если поменять местами два параллельных ряда определителя, то он изменит знак на противоположный;
3) определитель с двумя параллельными рядами равен нулю;
4) если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий множитель, то последний можно вынести за знак определителя. Отсюда следует, что если элементы какого-либо ряда умножить на число λ, то определитель умножится на это же число λ;
5) если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель также равен нулю;
6) определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответственно пропорциональны, равен нулю;

7) сумма всех произведений элементов какого-либо ряда определителя и алгебраических дополнений соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю, т. е. верны равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 ; \ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{kj} = 0 \qquad (j \neq i);$$

8) если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором – из вторых слагаемых;
9) определитель не изменится, если ко всем элементам какого-либо ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и тоже произвольное число λ.

Основные методы вычисления определителей

1. *Метод эффективного понижения порядка*. В соответствии со свойством 3 вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению n определителей $(n-1)$- порядка.

2. *Приведение определителя к треугольному виду*. Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется *определителем треугольного вида*. В этом случае определитель равен произведению элементов его главной диагонали.

3. *Разложение определителя по элементам ряда*. Определитель матрицы равен сумме произведений элементов некоторого ряда на алгебраические дополнения этих элементов.

4. *Теорема Лапласа*. Определитель матрицы порядка n равен сумме произведений всевозможных миноров k-го порядка $(k < n)$, которые можно составить из произвольно выбранных k параллельных рядов, на алгебраические дополнения этих миноров.

5. *Метод опорного элемента* состоит в последовательном применении формулы, выражающей определитель порядка n через определитель порядка $(n-1)$, элементами которого являются определители второго порядка.

Если элемент данного определителя, стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля, то эта формула имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \left\| \begin{matrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{matrix} \right\|. \quad (1.8)$$

Примеры

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. По формуле (1.4) получим $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = -24 - 15 = -39$.

2. С помощью правила треугольника вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Применив формулу (1.5), получим

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-5) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-5) \cdot 4 - (-2) \cdot 3 \cdot 2 =$$

$$= 8 + 6 + 10 - 1 + 40 + 12 = 75.$$

3. Вычислить определитель, разложив его по элементам второй строки:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Находим

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot(5\cdot 3\cdot 4 - 3\cdot 1\cdot 2 + 7\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 5 - 7\cdot(-3)\cdot 4) +$$

$$+2\cdot(3\cdot 3\cdot 4 + (-2)\cdot 1\cdot 2 + 7\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 3 - 7\cdot(-2)\cdot 4) -$$

$$-3\cdot(3\cdot(-3)\cdot 4 - 2\cdot 2\cdot 2 + 5\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot(-3)\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 3 - 5\cdot(-2)\cdot 4) +$$

$$+4\cdot(3\cdot(-3)\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 7 + 5\cdot 3\cdot 1 - 7\cdot(-3)\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 3 - 5\cdot(-2)\cdot 1) =$$

$$= -(60 - 6 + 14 - 12 - 5 + 84) + 2\cdot(36 - 4 + 7 - 6 - 3 + 56) -$$

$$-3\cdot(-36 - 8 + 5 + 6 - 6 + 40) + 4(-9 - 28 + 15 + 21 - 18 + 10) =$$

$$= -135 + 172 - 3 - 36 = -2.$$

4. Вычислить определитель, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. Произведем следующие действия: 1) к элементам первой строки прибавим вторую строку; 2) к элементам третьей строки прибавим первую, умноженную на -4; 3) к элементам четвертой строки прибавим первую, умноженную на -5. Тогда исходный определитель преобразуется к виду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -14 & -17 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам первого столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ -10 & -10 & -10 \\ -5 & -14 & -17 \end{vmatrix}.$$

Т. к. во второй строке определителя имеется общий множитель, его можно вынести за знак определителя:

$$\Delta = -10 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & -14 & -17 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя к элементам первой строки вторую, умноженную на -5, затем, прибавляя к элементам второй строки третью, умноженную на 5, получим:

$$\Delta = -10 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -12 \end{vmatrix} = -10 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -9 & -12 \end{vmatrix} = 10 \cdot (3 \cdot 12 + 6 \cdot 9) = 10 \cdot 90 = 900$$

5. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

приведя его к треугольному виду.

Решение. Прибавив ко второй строке первую и к третьей строке – первую, умноженную на – 2, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

В полученном определителе к третьей строке прибавим вторую, умноженную на – 2, и к четвертой строке – вторую, умноженную на – 1. Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавив к четвертой строке этого определителя третью строку, умноженную на – 2, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, $\Delta = 1 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 15 = -60$.

6. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

методом опорного элемента.

Решение. По формуле (1.8) имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{(-1)^{4-2}} \cdot \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -14 & -25 \\ -5 & -10 & -13 \\ -7 & -16 & -24 \end{vmatrix}.$$

Применив еще раз формулу (1.8), получим

$$\Delta = \frac{1}{(-5)^{3-2}} \cdot \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} -5 & -14 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & -25 \\ -5 & -13 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -5 & -14 \\ -7 & -16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & -25 \\ -7 & -24 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{vmatrix} -20 & -60 \\ -18 & -55 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5}(20 \cdot 55 - 60 \cdot 18) = -\frac{1}{5}(1100 - 1080) = -\frac{1}{5} \cdot 20 = -4.$$

7. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

применяя теорему Лапласа.

Решение. Используя третий и четвертый столбцы данного определителя, по теореме Лапласа имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \cdot 3 = -21.$$

1.4. Задачи для самостоятельного решения

Вычислить указанные определители

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 131 & 231 \\ -130 & -230 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

10) Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) минор M, стоящий на пересечении первой, второй и четвертой строк, первого, третьего и четвертого столбцов; б) минор, дополнительный к минору M; в) алгебраическое дополнение к минору M.

11) Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти алгебраические дополнения элементов третьей строки.

Вычислить определители, предварительно разложив их по i-й строке и по j-му столбцу.

12) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=3$; 13) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=4, j=2$;

14) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=3, j=4$.

Вычислить определители, предварительно получив нули в любой строке или столбце.

15) $\begin{vmatrix} -1 & 12 & -2 & -3 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ -1 & 7 & 3 & -6 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 16) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

17) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; 18) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду.

19) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 20) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$; 21) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители по теореме Лапласа, предварительно упростив их.

$$22)\ \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 5 & 7 \end{vmatrix}; \quad 23)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ -5 & 2 & -4 & -8 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad 24)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители методом опорного элемента

$$25)\ \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad 26)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -4 & 2 \end{vmatrix}; \quad 27)\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители

$$28)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \quad 29)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 7 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \quad 30)\ \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & -8 \\ 8 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ответы

1) 13; 2) -15; 3) -100; 4) -1; 5) -29; 6) 5; 7) -2; 8) 11; 9) -5; 10) а) 55; б) 5; в) 5; 11) 7 21 -14 -56; 12) 76; 13) -25; 14) 210; 15) 150; 16) 74; 17) -86; 18) -36; 19) 20; 20) 24; 21) 9; 22) -140; 23) 8; 24) -35; 25) -13; 26) -235; 27) 360; 28) -2; 29) 30; 30) -595.

1.5. Обратная матрица. Элементарные преобразования матрицы. Ранг матрицы

Матрица A^{-1} называется *обратной* для квадратной матрицы A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица порядка n.

Если определитель $|A|$ матрицы (1.6) (§2) равен нулю, то матрица A называется *вырожденной*, в противном случае матрица A называется *невырожденной*

Матрица

$$A^{-1} = \frac{A^{*}}{|A|};\; A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} невырожденной матрицы A, является *обратной* для A.

Матрица A^{*} называется *присоединенной.*

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Обозначается r или r_A.

Если ранг квадратной матрицы A порядка n равен r, то $n-r$ называют *дефектом матрицы* A.

Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующее:

1) умножение некоторого ряда матрицы на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одному ряду матрицы другого, параллельного ему ряда, умноженного на произвольное число;
3) перестановку местами двух параллельных рядов матрицы.

Ранг матрицы, полученный из данной элементарными преобразованиями, равен рангу данной матрицы.

Базисным минором матрицы называется отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

При вычислении ранга матрицы могут быть использованы элементарные преобразования, метод приведения матрицы к трапециевидной форме, метод окаймляющих миноров и др.

Метод приведения к трапециевидной форме заключается в том, что при помощи элементарных преобразований матриц данная матрица приводится к виду:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля. Ранг матрицы B, а, следовательно, и ранг данной матрицы равен r, где r – число строк матрицы B, в каждой из которых хотя бы один элемент отличен от нуля.

Минор порядка $k+1$, содержащий в себе минор M порядка k_1, называется окаймляющим минор M.

Метод окаймляющих миноров основан на том, что ранг данной матрицы равен порядку такого минора этой матрицы, который отличен от нуля, а все окаймляющие его миноры равны нулю.

Примеры

1. Найти обратную матрицу для

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем определитель:

$$|A| = 2\cdot1\cdot2+2\cdot2\cdot1+(-2)\cdot(-2)\cdot1-1-2\cdot2\cdot(-2)-2\cdot(-2)\cdot(-2)=$$

$$=4+4+4+8+8-1=27.$$

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6;\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+2) = -6;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4-2) = 6;\ A_{22} = \left(-1^{2+2}\right)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+2) = -6;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3;\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-6) = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Следовательно

$$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 & 2/9 & 1/9 \\ -2/9 & 1/9 & 2/9 \\ 1/9 & -2/9 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

2. Найти A^{-1} с помощью элементарных преобразований над строками матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Образуем матрицу C:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей строке первую, получим

$$C=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&0&2&0&1&0\\0&3&2&1&0&1\end{array}\right).$$

Поменяем местами вторую и третью строки. Тогда

$$C=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&3&2&1&0&1\\0&0&2&0&1&0\end{array}\right).$$

Прибавив ко второй строке третью, умноженную на – 1, получим

$$C=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&3&0&1&-1&1\\0&0&2&0&1&0\end{array}\right).$$

Умножив вторую строку на $1/3$, а третью – на $1/2$, имеем

$$C\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&1/3&-1/3&1/3\\0&0&1&0&1/2&0\end{array}\right).$$

Вычтем из первой строки третью. Тогда

$$C\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1/2&0\\0&1&0&1/3&-1/3&1/3\\0&0&1&0&1/2&0\end{array}\right)$$

и

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1/2&0\\1/3&-1/3&1/3\\0&1/2&0\end{pmatrix}.$$

3. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5\\ 0 & 4 & 3 & 0 & 9\end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем $M_2=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2-2=-4\neq 0$.

Окаймляющими для M_2 будут:

$$M_3=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 5\end{vmatrix}=-6+12-6=0;$$

$$M_3^*=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & 0\end{vmatrix}=0$$ (т. к. первый и третий столбец пропорциональны);

$$M_3^{**}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 9\end{vmatrix}=-18+16+20-18=-36+36=0.$$

Так как все миноры третьего порядка, окаймляющие M_2 равны нулю, ранг матрицы равен 2.

4. Найти ранг матрицы методом приведения к трапециевидной форме

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение. Умножая первую строку на – 1 и прибавляя ее к третьей строке, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь к третьей строке матрицы прибавляем вторую. Будем иметь:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг данной матрицы равен 2, т. к. в ней 2 строчки, отличные от нуля. Значит, ранг исходной матрицы A также равен 2.

1.6. Задачи для самостоятельного решения

Найти матрицу, обратную данной методом присоединенной матрицы:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; 5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу, обратную данной, методом элементарных преобразований:

6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 7) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; 8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решить матричные уравнения

9) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;   10) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$;   12) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$;

13) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;   14) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;   16) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 1 \end{pmatrix}$;

17) $AX + B = C$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

18) $XA - 2B = C$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Определить, при каких значениях λ существует матрица, обратная данной

19) $A = \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$;   20) $A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;   21) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1+\lambda & 9 \end{pmatrix}$.

Найти ранг матрицы

22) $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 8\\ 3 & -2 & 4\\ 4 & -6 & 12\end{pmatrix}$; 23) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 3 & 1 & 8\end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 0 & 4\\ -2 & 4 & 6 & 1 & 0\\ -3 & 6 & 9 & 1 & 4\\ -5 & 12 & 18 & 2 & 8\end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & -4 & 7\\ 0 & 0 & 5 & -7 & 9\\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2\\ 2 & 1 & 9 & -11 & 16\\ 8 & 4 & 1 & 5 & 1\end{pmatrix}$;

28) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2 & -4 & 5\\ 2 & 2 & -1 & 7 & -4\\ 1 & 1 & 0 & 10 & 3\end{pmatrix}$; 29) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 2 & 5\\ 1 & -1 & 2 & -2 & 0\\ 4 & -1 & 7 & -2 & 5\end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix}0 & 3 & -3 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & -5 & 4 & 1\\ -2 & 5 & 1 & -5 & 4\end{pmatrix}$.

Ответы

1) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}7/2 & -1/2 & 1\\ 6 & -1 & 1\\ 5 & -1 & 1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-5/24 & 1/4 & -5/24\\ -17/48 & 1/8 & 7/48\\ 1/6 & 0 & 1/6\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}-3/7 & 1/7 & 9/7\\ -5/7 & -3/7 & 8/7\\ -4/7 & -1/7 & 5/7\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}-4 & 8/9 & 5/9 & -1/9\\ -1/2 & 1/6 & 1/6 & -1/3\\ 2 & -5/9 & -2/9 & 4/9\\ -1/2 & 7/18 & 1/18 & -1/9\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}1/15 & 11/30 & -7/30\\ -4/15 & 1/30 & 13/30\\ 1/3 & -1/6 & -1/6\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}-7 & 5 & 12 & -19\\ 3 & -2 & -5 & 8\\ 41 & -30 & -69 & 111\\ -59 & 43 & 99 & 159\end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & 0\\ 15/11 & 10/11 & -8/11 & -1/11\\ -17/11 & -15/11 & 12/11 & 7/11\\ -7/11 & -1/11 & 3/11 & -1/11\end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix}-5/2 & 3/2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 1 & 13/5 \\ -1 & -7/10 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}26 \\ 0{,}9 & 0{,}22 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 13/30 & 13/30 \\ 7/12 & -5/12 \end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 16) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 120/19 & 127/19 & 153/19 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} 5/4 & 57/8 \\ 3/2 & -7/4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 5 & -7 & 15 \end{pmatrix}$; 19) $\lambda \neq 1$; 20) $\lambda \neq 2$; 21) ни при каком λ;

22) 2; 23) 3; 24) 5; 25) 3; 26) 3; 27) 2; 28) 4; 29) 2; 30) 2.

1.7. Системы линейных уравнений

1. **Правило Крамера.** Пусть задана система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}n_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}n_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}n_n = b_n. \end{cases} \tag{1.9}$$

Если в системе (1.9) определитель матрицы системы не равен нулю, то система имеет единственное решение. Решение системы можно найти по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = 1,\overline{n}, \tag{1.10}$$

где Δ – определитель матрицы системы, Δ_i – определитель, полученный из определителя Δ заменой его *i*-го столбца столбцом свободных членов.

2. **Матричный метод.** Запишем систему (1.9) в матричной форме: $Ax = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Если $|A| \neq 0$, т. е. матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, то система (1.9) имеет единственное решение:

$$x = A^{-1}B. \tag{1.11}$$

3. **Решение произвольных систем. Метод Гаусса.** Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}n_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}n_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}n_n = b_m \end{cases} \tag{1.12}$$

или, в матричной форме

$$AX = B, \tag{1.13}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если $B = 0$, то система называется *однородной*, иначе – она называется *неоднородной*.

Решением системы (1.12) называется всякий n-компонентный вектор-столбец x, который обращает матричное уравнение (1.13) в равенство. Система называется *совместной*, если у нее существует хотя бы одно решение, иначе она называется *несовместной*.

Матрица

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array} \right),$$

которая получается из матрицы A приписываем столбца из свободных членов, называется *расширенной матрицей системы* (1.12).

Теорема Кронекера-Капелли

Для совместности системы (1.12) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы.

Решение системы линейных уравнений производится следующим образом:

1. Находим r_A – ранг матрицы системы и $r_{\widetilde{A}}$ – ранг расширенной матрицы. Если $r_A \neq r_{\widetilde{A}}$, то система несовместна.

2. Если $r_A = r_{\widetilde{A}} = r$, то выделяем базисный минор и базисные неизвестные.

3. Данную систему заменяем равносильной, состоящих из тех r уравнений, в которые вошли элементы базисного минора.

4. Если $r = n$, т. е. число базисных неизвестных равно числу неизвестных системы, то система имеет единственное решение.

Если $r < n$, то из системы, полученной в пункте (3), находим выражение базисных неизвестных через свободные. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим бесконечно много решений исходной системы.

Элементарными преобразованиями системы (1.12) называются следующие преобразования:

1) умножение обеих частей одного из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;

2) перемена местами двух любых уравнений;

3) прибавление к обеим частям одного из уравнений соответствующих частей другого уравнения, умноженных на одно и то же число.

Метод Гаусса

1. Выбираем одно из уравнений системы, в котором коэффициент при одном из неизвестных отличен от нуля. Производя над уравнениями системы преобразования, которые приводят к равносильной системе, исключаем неизвестные из всех уравнений, кроме выбранных ранее.

Если в результате в системе появится уравнение, в котором все коэффициенты левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то это уравнение не удовлетворяется никаким значением неизвестных, следовательно полученная система несовместна.

Если в системе появится уравнение все коэффициенты которого и свободный член равны нулю, то оно может быть отброшено.

2. В системе, полученной после первого шага, выбираем одно из уравнений, в котором коэффициент при другом неизвестном, отличен от нуля. Исключаем неизвестные из всех уравнений, кроме двух выбранных.

Аналогично производим последующие шаги. После нескольких шагов будет иметь место один из случаев:

а) получится несовместная система;

б) получится треугольная система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n &= b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ d_{nn}x_n &= b_n^{(n-1)}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

где $a_{11}, b_{22}, \ldots, d_{nn} \neq 0$.

Система (1.14), а следовательно и исходная система имеет единственное решение.

в) получится трапециевидная система:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n &= b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{pp}x_p + \ldots + d_{pn}x_n &= b_p^{(p-1)}, \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

где $p < n,\ a_{11}, b_{22}, \ldots, d_{pp} \neq 0$.

В системе (1.15) число неизвестных больше числа уравнений. Так как $d_{pp} \neq 0$, то из последнего уравнения системы x_p выражается через x_{p+1}, x_n. Осуществляя обратный ход, выразим $x_{p-1}, x_{p-2}, \ldots, x_1$ через $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$. Придавая последним произвольные значения $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots, c_n$, получим бесконечно много решений системы (1.15), а следовательно, и исходной системы.

4. **Однородные линейные системы. Фундаментальная система решений.**

Система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

называется однородной. Она всегда совместна: совокупность нулей (0,0,...,0) является решением, которое называется *нулевым* (тривиальным).

Если однородная система (1.16) имеет 2 решения $(c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{n1})$ и $(c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{n2})$, то любая их линейная комбинация $(\alpha c_{11} + \beta c_{12}, \alpha c_{21} + \beta c_{22}, \ldots, \alpha c_{n1} + \beta c_{n2})$ также является решением системы (1.16).

Любой базис пространства решений системы (1.16) называется *фундаментальной системой решений* этой системы.

Базисные решения могут быть получены, если свободным неизвестным придавать поочередно значение 1, полагая остальные равные нулю.

Примеры

1. Решить невырожденную систему линейных уравнений матричным методом и по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Решение. а) Матричным методом.

Матрица системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ее определитель: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 4 - 1 - 12 = -9$.

Найдем алгебраические дополнения

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6, \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4, \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix},$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \cdot 10 + 4/9 \cdot 23 - 2/9 \cdot 13 \\ 2/3 \cdot 10 - 2/9 \cdot 23 + 1/9 \cdot 13 \\ -1/3 \cdot 10 + 1/9 \cdot 23 + 4/9 \cdot 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

или $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

б) По формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ – определитель матрицы системы $\Delta = -9$.

Последовательно заменив в Δ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 23 & 2 & 1 \\ 13 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 40 + 26 - 10 - 92 = -36,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 3 & 23 & 1 \\ 0 & 13 & 2 \end{vmatrix} = 46 - 13 - 60 = -27,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 3 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 26 + 30 - 23 - 78 = -45.$$

Отсюда $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-36}{-9} = 4$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-27}{-9} = 3$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-45}{-9} = 5$.

2. Исследовать систему на совместность и в случае совместности решить ее

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Находим ранги матриц

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 1\\ 5 & 2 & 5\\ 1 & -4 & -3\end{pmatrix} \text{ и } \widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 2\\ 5 & 2 & 5 & 3\\ 1 & -4 & -3 & 1\end{array}\right)$$

$$M_2=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-2-9\neq 0.$$

Окаймляющие его миноры: $M_3=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 1\\ 5 & 2 & 5\end{vmatrix}=0$; $M_3^*=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & -4 & -3\end{vmatrix}=0$. Значит $r_A=2$.

Для расширенной матрицы: $M_2=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\neq 0$. Окаймляющие его миноры:

$$M_3=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 1\\ 5 & 2 & 5\end{vmatrix}=0;\quad M_3^*=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & -4 & -3\end{vmatrix}=0;\quad M_3^{**}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 5 & 2 & 3\end{vmatrix}=0;$$

$$M_3^{***}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & -4 & 1\end{vmatrix}=0;\quad M_4=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 2\\ 5 & 2 & 5 & 3\\ 1 & -4 & -3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Значит $r_{\widetilde{A}}=2$, $r_A=r_{\widetilde{A}}$ $\Rightarrow$ система совместна, имеет бесконечное множество решений.

В качестве базисного минора возьмем $M=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}$. Базисными неизвестными будут x_1 и x_2.

Исходная система равносильна системе: $\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=1,\\ 3x_1-x_2+x_3=2.\end{cases}$.

Запишем последнюю систему в виде: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 - 4x_3, \\ 3x_1 - x_2 = 2 - x_3. \end{cases}$.

По формулам Крамера находим

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-4x_3 & 3 \\ 2-x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1+4x_3-6+3x_3}{-2-9} = \frac{7x_3-7}{-11};$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-4x_3 \\ 3 & 2-x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4-2x_3-3+12x_3}{11} = \frac{10x_3+1}{-11}.$$

Следовательно, множество решений имеет вид:

$$\left\{ \left(\frac{7-7c}{11}, \ \frac{10c+1}{-11}, \ c \right) \middle| \forall c \in R \right\}.$$

3. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 7, \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 4, \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & -4 & -7 & 2 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \end{array} \right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & -7 & 2 & 7 & -10 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & 10 & 7 & 14 \end{array} \right)$$

(умножили первую строку на 2 и вычли из второй, переставили вторую и третью строки, к третьей строке прибавили вторую, умноженную на – 4).

Последней матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 7, \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ -7x_3 + 10x_4 + 3x_5 = 14, \end{cases}$$

равносильная данной. Перепишем полученную систему в виде:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 + x_4 + 3x_5, \\ x_2 = 6 - 2x_4 + x_5, \\ -7x_3 = 14 - 10x_4 - 3x_5, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_3 = -2 + \dfrac{10}{7}x_4 + \dfrac{3}{7}x_5, \\ x_2 = 6 - 2x_4 + x_5, \\ x_1 = 3 - \dfrac{5}{7}x_4 - \dfrac{5}{7}x_5. \end{cases}$$

Пусть $x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$. Множество решений системы имеет вид:

$$\left\{ \left(3 - \frac{5}{7}c_1 - \frac{5}{7}c_2; 6 - 2c_1 + c_2; -2 + \frac{10}{7}c_1 + \frac{3}{7}c_2;\ c_1, c_2 \right) \middle| \forall c_1, c_2 \in R \right\}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 12, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 8x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & 1 & 5 & -3 & 10 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 4 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & 13/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 7 & -22 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 4 \\ 0 & 1 & -1/3 & -13/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 7 & -22 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 4 \\ 0 & 1 & -1/3 & -13/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -22 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 4 \\ 0 & 1 & -1/3 & -13/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -22 \end{array}\right).$$

Откуда

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 8, \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{13}{3}x_4 = 0, \\ -6x_4 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -22. \end{cases}$$

Т. к. последнее уравнение этой системы противоречиво, то она является несовместной. Следовательно, несовместна и равносильная ей исходная система, которая не имеет решений.

5. Дана система

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Найти а) множество решений системы;

б) нормированную фундаментальную систему.

Решение. а) Так как число уравнений меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное число решений.

Ранг матрицы системы равен 2. В качестве базисного минора возьмем

$$M = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тогда базисными неизвестными будут x_1 и x_2. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -2x_3 - x_4, \\ x_1 + x_2 = 4x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = \dfrac{2x_3 - 3x_4}{4}$; $x_2 = \dfrac{14x_3 - 5x_4}{4}$.

Следовательно, множество решений системы имеет вид:

$$\left\{ \left(\frac{2c_1 - 3c_2}{4}, \ \frac{14c_1 - 5c_2}{4}, \ c_1, c_2 \right) \middle| \forall c_1, c_2 \in R \right\}.$$

б) Положив, сначала $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, а затем $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, получаем решения $(1/2; 7/2; 1; 0)$, $(-3/4; -5/4; 0; 1)$, образующие нормированную фундаментальную систему решений.

1.8. Задачи для самостоятельного решения

Решить невырожденную систему уравнений по формулам Крамера или матричным методом

1) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 + 7x_3 = -6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z - 8 = 0, \\ x + 5y + 2z - 5 = 0, \\ 2x + 3y + 4z - 3 = 0. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x+3y-z=0, \\ x-2y+4z=9, \\ y+z=2. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1+5x_2-6x_3=-15, \\ 3x_1+x_2+4x_3=13, \\ 2x_1-3x_2+x_3=9. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+3y+2z-4=0, \\ 2x+6y+z=2, \\ 4x+8y-z-2=0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x+3y-z=-1, \\ x+2y-4z=9, \\ -x-12y+14z=1. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3=12, \\ 2x_1+x_2+3x_3=16, \\ 3x_1+2x_2-x_3=8. \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2x-3y+z-2=0, \\ x+5y-4z+5=0, \\ 4x+y-3z+4=0. \end{cases}$

Исследовать систему на совместность, и в случае совместности решить ее

10) $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=2. \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2. \end{cases}$

12) $\begin{cases} 8x_1+6x_2+5x_3+2x_4=21, \\ 3x_1+3x_2+2x_3+x_4=10, \\ 4x_1+2x_2+3x_3+x_4=8, \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=15. \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+3x_2+4x_3+2x_4=1, \\ x_1-x_2-2x_3=-1. \end{cases}$

14) $\begin{cases} 4x_1+x_3=1, \\ 2x_2+x_3+x_4=0, \\ 8x_1+4x_2+4x_3+2x_4=2, \\ 4x_1-2x_2-x_4=1. \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=3, \\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4=7, \\ 3x_1+7x_2+7x_3+2x_4=12, \\ 5x_1+7x_2+9x_3+2x_4=20. \end{cases}$

16) $\begin{cases} 4x_1+2x_2+8x_3=5, \\ x_1+4x_3+6x_4=0, \\ 6x_1+2x_2+16x_3+12x_4=5, \\ x_1+2x_2-4x_3-18x_4=5. \end{cases}$

Решить систему уравнений методом Гаусса

17) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 15x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 9. \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

19) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

21) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$

23) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9. \end{cases}$

Найти фундаментальную систему решений однородной системы

24) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

25) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

26) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

27) $\begin{cases} 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 0, \\ 5x_2 - 10x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$

28) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

29) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 7x_3 - 11x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 9x_3 - 14x_4 = 0. \end{cases}$

30) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

Ответы

1) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$;

2) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$;

3) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$;

4) $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$;

5) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$;

6) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$;

7) $x_1 = 13/3$, $x_2 = -13/3$, $x_3 = -10/3$;

8) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$;

9) $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $x_3 = 10$;

10) система несовместна;

11) $\{(c_1;\ -5c_1 - 4c_2;\ 2 + 11c_1 + 9c_2;\ c_2) | \forall c_1, c_2 \in R\}$;

12) $\left\{\left(\frac{1+c}{4};\ \frac{11-c}{4};\ \frac{1-c}{2};\ c\right) \middle| \forall c \in R\right\}$;

13) $\left\{\left(\frac{-c-1}{2};\ \frac{1-c}{2}; 0; c\right) \middle| \forall c \in R\right\}$;

14) $\left\{\left(\frac{1-c_1}{4}; \frac{-c_1-c_2}{2}; c_1; c_2\right) \middle| \forall c_1, c_2 \in R\right\}$;

15) $\left\{\left(\frac{31}{6} + \frac{1}{2}c; \frac{2}{3};\ \frac{-7}{6} - \frac{1}{2}c; c\right) \middle| \forall c \in R\right\}$;

16) $\left\{\left(-4c_1 - 6c_2;\ \frac{5}{2} + 4c_1 + 12c_2; c_1; c_2\right) \middle| \forall c_1, c_2 \in R\right\}$;

17) $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 8$;

18) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.5$, $x_4 = -1.5$;

19) $\left\{\left(-\frac{6}{7}+\frac{8}{7}c; \frac{1}{7}-\frac{13}{7}c;\ \frac{15}{7}-\frac{6}{7}c; c\right)\middle|\forall c \in R\right\}$;

20) $\left\{\left(c_1; c_2; 20c_1 + 20c_2 - \frac{13}{2};\ 7c_1 + 7c_2 - 2; -5c_1 - 5c_2 + 3/2\right)\middle|\forall c_1, c_2 \in R\right\}$;

21) $\left\{(c_1;\ 1 + c_1 - c_2; 1; c_2)\middle|\forall c_1, c_2 \in R\right\}$;

22) система несовместна;

23) $\left\{\left(\frac{-3-5c_1-13c_2}{2}; \frac{-7-7c_1-19c_2}{2}; c_1; c_2\right)\middle|\forall c_1, c_2 \in R\right\}$;

24) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$;

25) $X = c \cdot E$, где $E = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

26) $X = c_1 \cdot E_1 + c_2 \cdot E_2$, $E_1 = (1 \quad 0 \quad 1/3 \quad -4/3)^T$, $E_2 = (0 \quad 1 \quad -5/3 \quad -4/3)^T$;

27) $X = c \cdot E$, $E = (-3 \quad 2 \quad 1)^T$;

28) $X = c_1 \cdot E_1 + c_2 \cdot E_2 + c_3 \cdot E_3$, $E_1 = (19/8 \quad 7/8 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T$,

$E_2 = (3/8 \quad -25/8 \quad 0 \quad 1 \quad 0)^T$, $E_3 = (-1/2 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T$;

29) $X = c_1 \cdot E_1 + c_2 \cdot E_2$, $E_1 = (1 \quad -1 \quad 0 \quad 0)^T$, $E_2 = (0 \quad 1/2 \quad -3/2 \quad 1)^T$;

30) $X = c_1 \cdot E_1 + c_2 \cdot E_2$, $E_1 = (1 \quad -2 \quad 0 \quad 0)^T$, $E_2 = (0 \quad -8 \quad -3 \quad 1)^T$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. Определение вектора. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора в данном базисе

Направленным отрезком называется отрезок прямой, одна из граничных точек которого принята за начало, а другая за конец.

Два ненулевых направленных отрезка называются *эквивалентными*, если их длины равны и они сонаправлены. Нулевые направленные отрезки считаются эквивалентными.

Вектором называется множество всех направленных отрезков, эквивалентных между собой. Каждый направленный отрезок этого множества называется представителем вектора.

Длиной направленного отрезка AB называется расстояние между точками A и B.

Длиной вектора a называется длина любого из направленных отрезков, образующих вектор a. Длина вектора $a = \vec{AB}$ обозначается $|a|$ или $\left|\vec{AB}\right|$.

Два вектора называются *ортогональными*, если угол между ними равен $\pi/2$

.

Два вектора называются *коллинеарными*, если их направления совпадают или противоположны, т. е. если образующие их направленные отрезки параллельны некоторой прямой: $a \parallel b$.

Векторы называются *компланарными*, если представляющие их направленные отрезки лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейными операциями над векторами называются сложение векторов и умножение векторов на число.

Суммой векторов a_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ называется вектор, обозначаемый $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, начало которого находится в начале первого вектора a_1, а конец – в конце последнего вектора a_n ломаной линии, составленной из последовательности слагаемых векторов. В случае суммы двух векторов применяют правило параллелограмма.

Произведением вектора a *и числа* λ называется вектор, обозначаемый λa (или $a\lambda$), модуль которого равен $|\lambda|\cdot|a|$, а направление совпадает с направлением вектора a, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$.

Проекцией вектора a *на ось* l называется число, обозначаемое $\text{пр}_l\, a$ и равное $|a|\cos\varphi$, где $\varphi(0 \le \varphi \le \pi)$ – угол между положительным направлением оси l и направлением вектора a, т. е. $\text{пр}_l\, a = |a|\cos\varphi$.

Координатами вектора a называются его проекции на оси координат OX, OY, OZ. Запись $a = (x, y, z)$ означает, что вектор a имеет координаты x, y, z.

Линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \cdots, a_n$ называется вектор $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ – числа.

Векторы $a_1, a_2, \cdots, a_n$ называются *линейно-зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, не все одновременно равные нулю, такие, что

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0.$$

Векторы $a_1, a_2, \cdots, a_n$ называются *линейно-независимыми*, если равенство $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$ верно только в случае, когда $\lambda_i = 0$. Например, любые коллинеарные векторы, три компланарных вектора, четыре и более векторов в трехмерном пространстве всегда линейно зависимы.

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов этой плоскости.

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка линейно независимых (некомпланарных) векторов e_1, e_2, e_3.

Любой вектор a в пространстве можно разложить по базису e_1, e_2, e_3, т. е. представить a в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$a = x e_1 + y e_2 + e\, l_3,$$

где x, y, z – координаты вектора a в базисе e_1, e_2, e_3.

Базис называется *ортонормированным*, если базисные векторы попарно ортогональны и каждый базисный вектор является единичным.

Совокупность точки O (начало координат) и ортонормированного базиса i, j, k (единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси) называется *декартовой прямоугольной системой координат в пространстве.*

Свободный вектор a, заданный в координатном пространстве $OXYZ$, может быть представлен в виде

$$a = a_x i + a_y j + a_z k .$$

Такое разложение вектора a называется его *разложением по осям координат*, или разложением по ортам i, j, k (здесь a_x, a_y, a_z – проекции вектора a на соответствующие оси координат, т. е., координаты вектора a). Векторы $a_x i, a_y j, a_z k$ называются составляющими вектора a по осям координат.

Длина или модуль вектора $a = (a_x; a_y; a_z)$ определяется по формуле

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

Если векторы a и b заданы своими прямоугольными координатами: $a = (a_x; a_y; a_z)$, $b = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$a + b = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z);$$

$$a - b = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z).$$

Произведение вектора $a\,(a_x; a_y; a_z)$ на число λ имеет координаты $(\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda\, a_z)$.

Радиусом-вектором точки M относительно декартовой прямоугольной системы координат $(O; i,\, j,\, k)$ называется вектор $\overrightarrow{OM}$, начало которого находится в начале координат, а конец – в точке $M(x, y, z)$. Его обозначают $r(M)$ или r.

Радиус-вектор r имеет следующее разложение по ортам:

$$r = x\,i + y\,j + z\,k\,.$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$, имеющий начало в точке $A(x_1, y_1, z_1)$ и конец в точке $B(x_2, y_2, z_2)$, может быть записан в виде $\overrightarrow{AB} = r_2 - r_1$, где r_1, r_2 – радиусы-векторы точек A и B соответственно. Следовательно, разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ по ортам имеет вид:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\,i + (y_2 - y_1)\,j + (z_2 - z_1)\,k\,.$$

Его длина совпадает с расстоянием между точками A и B:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Направление вектора a задается углами α, β, γ, образованными им с осями координат OX, OY, OZ. Косинусы этих углов (*направляющие косинусы вектора*) определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\,;\; \cos\beta = \frac{a_y}{|a|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\,;\; \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\,.$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. В силу приведенных выше формул направление вектора $\overrightarrow{AB}$ определяется направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d};\ \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d};\ \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

Единичным вектором (ортом) вектора a называют вектор $a_0 = \frac{a}{|a|}$, который имеет длину, равную единице и направление, совпадающее с направлением вектора a. Координаты единичного вектора a_0 равны его направляющим косинусам:

$$a_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Примеры

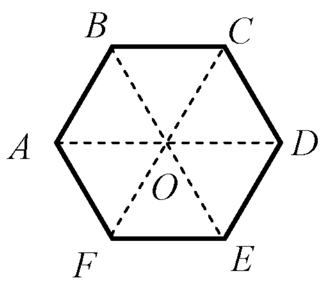

Рис. 2.1

1. Пусть O – центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 2.1). Найти сумму векторов $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF}$.

Решение. 1 способ. Диагонали правильного шестиугольника, пересекающиеся в точке O, делятся этой точкой пополам. Лучи $[OA)$ и $[OD)$ противоположно направлены. Поэтому $\vec{OA} = -\vec{OD}$.

Аналогично, $\vec{OB} = -\vec{OE}$, $\vec{OC} = -\vec{OF}$. Отсюда: $\vec{OA} + \vec{OD} = \vec{0}$, $\vec{OB} + \vec{OE} = \vec{0}$, $\vec{OC} + \vec{OF} = \vec{0}$, и значит,

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF} = \left(\vec{OA} + \vec{OD}\right) + \left(\vec{OB} + \vec{OE}\right) + \left(\vec{OC} + \vec{OF}\right) = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

2 способ. В правильном шестиграннике $ABCDEF$ справедливо равенство $\vec{AD} + \vec{EB} + \vec{CF} = \vec{0}$.

Так как $ODEF$ – параллелограмм, то $\vec{OE} = \vec{OD} + \vec{OF}$ и, следовательно,

$$\vec{AD} + \vec{EB} + \vec{CF} = \left(\vec{AO} + \vec{OD}\right) - \left(\vec{BO} + \vec{OE}\right) + \left(\vec{CO} + \vec{OF}\right) = \vec{OD} + \vec{OD} -$$

$$-\left(\vec{OE}+\vec{OE}\right)+\vec{OF}+\vec{OF}=\left(\vec{OD}+\vec{OF}\right)+\left(\vec{OD}+\vec{OF}\right)-\left(\vec{OE}+\vec{OE}\right)=$$

$$=\vec{OE}+\vec{OE}-\left(\vec{OE}+\vec{OE}\right)=\left(\vec{OE}-\vec{OE}\right)+\left(\vec{OE}-\vec{OE}\right)=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}.$$

2. Даны радиус-векторы вершин треугольника ABC: $\vec{OA}=3i+2j+k$, $\vec{OB}=i+4j+k$, $\vec{OC}=i+2j+3k$. Показать, что треугольник равносторонний.

Решение. Имеем:

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(i-3i)+(4j-2j)+(k-k)=-2i+2j;$$

$$\vec{BC}=\vec{OC}-\vec{OB}=(i-i)+(2j-4j)+(3k-k)=-2j+2k;$$

$$\vec{CA}=\vec{OA}-\vec{OC}=(3i-i)+(2j-2j)+(k-3k)=2i-2k.$$

Вычислим длины векторов: $\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$; $\left|\vec{BC}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$; $\left|\vec{CA}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$. Следовательно, $\left|\vec{AB}\right|=\left|\vec{BC}\right|=\left|\vec{CA}\right|=2\sqrt{2}$, т. е. данный треугольник ABC равносторонний.

3. Дан вектор a, образующий с осью Ol угол $\varphi_1=60^\circ$, и вектор b, образующий с той же осью угол $\varphi_2=120^\circ$. Найти проекцию суммы $a+b+c$, где $c=3a$, на ось Ol, если известно, что $|a|=6$, $|b|=4$.

Решение. Найдем проекцию каждого слагаемого на ось Ox, т. к. проекция суммы векторов равна сумме их проекций.

$$\text{пр}_{Ol}\,a=|a|\cos\varphi_1=6\cos 60^\circ=6\cdot\frac{1}{2}=3;$$

$$\text{пр}_{Ol}\,b=|b|\cos\varphi_2=4\cos 120^\circ=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2;$$

$$\text{пр}_{Ol}\, c = \text{пр}_{Ol}(3a) = 3\text{пр}_{Ol}\, a = 3 \cdot 3 = 9.$$

Проекция суммы векторов равна:

$$\text{пр}_{Ol}(a+b+c) = \text{пр}_{Ol}\, a + \text{пр}_{Ol}\, b + \text{пр}_{Ol}\, c = 3 + (-2) + 9 = 10.$$

4. Дан вектор $a = (7;-3;\, 5)$. Написать разложение вектора a по координатным ортам. Чему равны составляющие вектора a?

Решение. Разложение вектора a по координатным ортам имеет вид $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Составляющие вектора a: $\vec{a}_x = 7\vec{i}$, $\vec{a}_y = -3\vec{j}$, $\vec{a}_z = 5\vec{k}$.

5. Даны векторы: $a = (4;-3;\, 3)$, $b = (8;\, 1;\, -2)$. Найти векторы: $p = 3a + 2b$, $p = 3a + 2b$, $q = 5a - 4b$.

Решение. Координаты векторов $3a$ и $2b$ равны: $3a = (3 \cdot 4; 3 \cdot (-3); 3 \cdot 3) = (12; -9;\, 9)$, $2b = (2 \cdot 8; 2 \cdot 1; 2 \cdot (-2)) = (16; 2; -4)$. Координаты вектора p определим следующим образом: $p = (12 + 16;\, -9 + 2;\, 9 - 4) = (28; -7;\, 5)$.

Аналогичным образом находим координаты вектора q: $5a = (20; -15;\, 15)$, $4b = (32; 4; -8)$, $q = (20 - 32; -15 - 4; 15 - (-8)) = (-12; -19; 23)$.

6. Найти длину вектора $a = 10i + 25j - 40k$, его направляющие косинусы и единичный вектор.

Решение. Длина вектора a равна $|a| = \sqrt{10^2 + 25^2 + (-40)^2} = 2325$.

Направляющие косинусы: $\cos\alpha = \dfrac{10}{2325}$; $\cos\beta = \dfrac{25}{2325} = \dfrac{1}{93}$; $\cos\gamma = -\dfrac{40}{2325}$.

Единичный вектор имеет вид: $a_0 = \dfrac{a}{|a|} = \dfrac{10i + 25j - 40k}{2325} = \dfrac{10}{2325} i +$

$+\dfrac{1}{93} j - \dfrac{40}{2325} k$, или $a_0 = \left(\dfrac{10}{2325}; \dfrac{1}{93}; -\dfrac{40}{2325}\right)$.

7. Даны проекции силы F на координатные оси: $x = 6$, $y = 6$, $z = -2\sqrt{7}$. Вычислить силу F и определить направление ее действия.

Решение. Вектор $\vec{AB}=\vec{F}$ по условию имеет координаты $x=6$, $y=6$, $z=-2\sqrt{7}$. Величина силы F равна модулю вектора $\vec{F}$, который можно вычислить по формуле: $\vec{F}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{6^2+6^2+\left(-2\sqrt{7}\right)^2}=10$.

Определим направляющие косинусы вектора $\vec{F}$: $\cos\alpha=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$; $\cos\beta=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$; $\cos\gamma=\frac{-2\sqrt{7}}{10}=-\frac{\sqrt{7}}{5}$.

Следовательно, сила $F=8$ действует в направлении вектора, образующего с координатными осями углы: $\alpha=\arccos\frac{3}{5}$, $\beta=\arccos\frac{3}{5}$, $\gamma=\arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{5}\right)$.

8. Вычислить периметр треугольника ABC с вершинами $A(9;0;4)$, $B(12;3;8)$, $C(7;-1;5)$.

Решение. Найдем длины сторон треугольника.

$$|AB|=\sqrt{(12-9)^2+(3-0)^2+(8-4)^2}=\sqrt{3^2+3^2+4^2}=\sqrt{34},$$

$$|BC|=\sqrt{(7-12)^2+(-1-3)^2+(5-8)^2}=\sqrt{(-5)^2+(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{50},$$

$$|AC|=\sqrt{(7-9)^2+(-1-0)^2+(5-4)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}.$$

Следовательно, периметр треугольника $P=\sqrt{34}+\sqrt{50}+\sqrt{6}$.

9. Вектор a составляет с осью ординат и осью аппликат углы в 60°. Найти угол между вектором a и осью абсцисс.

Решение. По условию углы $\beta=\gamma=60^\circ$, поэтому $\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{2}$. Используя зависимость $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, получим $\cos^2\alpha+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$. Следовательно, $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}$, или $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. $\cos\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Углы между вектором a и осью абсцисс равны: $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 135^\circ$.

10. Выяснить, коллинеарны или нет векторы a_1 и a_2, равнонаправлены или противоположно направлены:

а) $a_1 = (-2; 1; 3)$, $a_2 = (4; -2; -6)$;

б) $a_1 = (4; 0; 10)$, $a_2 = (6; 0; 15)$;

в) $a_1 = (2; 0; 4)$, $a_2 = (4; 0; 2)$.

Решение. Векторы $a_1 = (x_1; y_1; z_1)$ и $a_2 = (x_2; y_2; z_2)$ коллинеарны когда их соответственные координаты пропорциональны $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$ и обратно.

Если коэффициент пропорциональности $\lambda = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$ положителен, то векторы a_1 и a_2 равнонаправлены; если отрицателен – противоположно направлены.

а) $\frac{4}{-2} = \frac{-2}{1} = \frac{-6}{3}$, $\lambda = -2$. Данные векторы коллинеарны и противоположно направлены. Второй вектор вдвое длиннее первого.

б) $\frac{6}{4} = \frac{0}{0} = \frac{15}{10}$, $\lambda = \frac{3}{2}$. Следовательно, данные векторы коллинеарны и равнонаправлены. Второй вектор в полтора раза длиннее первого.

в) $\frac{4}{2} \neq \frac{0}{0} \neq \frac{2}{4}$. Данные векторы не коллинеарны.

11. Даны векторы: $a = (4; 7; -2)$, $b = (3; -1; 5)$, $a = (5; 0; 7)$, $d = (4; -1; 7)$. Показать, что векторы a, b, c образуют базис, и найти координаты вектора d в этом базисе.

Решение. Базисом в пространстве R^3 является любая упорядоченная система из трех линейно независимых векторов. Покажем, что векторы a, b, c линейно независимы, т. е. выполняется равенство

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c = 0$$

при условии, что все числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ одновременно равны нулю. Подставляя в это равенство координаты векторов a, b, c получаем:

$$\alpha_1(4e_1 + 7e_2 - 2e_3) + \alpha_2(3e_1 - 1e_2 + 5e_3) + \alpha_3(5e_1 + 7e_3) = 0$$

или

$$(4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3)\,e_1 + (7\alpha_1 - \alpha_2)\,e_2 + (-2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3)\,e_3 = 0\,.$$

Для того чтобы вектор, разложенный по базису e_1, e_2, e_3 был равен нулевому вектору, его координаты должны равняться нулю, т. е.

$$\left.\begin{aligned} 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0, \\ 7\alpha_1 - \alpha_2 \qquad\quad &= 0, \\ -2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Получим однородную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Такая система имеет нулевое решение $(\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0)$, если ее определитель не равен нулю.

Поскольку

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -10 \neq 0,$$

то векторы a, b, c линейно независимы. Следовательно, они образуют базис и вектор d является линейной комбинацией векторов a, b, c: $d = \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c$. Числа β_1, β_2, β_3 будут координатами вектора d в базисе a, b, c. Найдем их.

Воспользовавшись разложением a, b, c, d в базисе e_1, e_2, e_3 имеем:

$$4e_1 - e_2 + 7e_3 = \beta_1(4e_1 + 7e_2 - 2e_3) + \beta_2(3e_1 - e_2 + 5e_3) + \beta_3(5e_1 + 7e_3)$$

или

$$4e_1 - e_2 + 7e_3 = (4\beta_1 + 3\beta_2 + 5\beta_3)\,e_1 + (7\beta_1 - \beta_2)\,e_2 + (-2\beta_1 + 5\beta_2 + 7\beta_3)\,e_3\,.$$

Из равенства векторов следует равенство их координат, поэтому получаем систему:

$$\left.\begin{aligned} 4\beta_1+3\beta_2+5\beta_3&=4,\\ 7\beta_1-\beta_2\qquad\quad&=-1,\\ -2\beta_1+5\beta_2+7\beta_3&=7.\end{aligned}\right\}$$

Решая ее по формулам Крамера $\beta_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i=1,2,3$, находим

$$\Delta=\begin{vmatrix}4&3&5\\7&-1&0\\-2&5&7\end{vmatrix}=-10;\ \Delta_1=\begin{vmatrix}4&3&5\\-1&-1&0\\7&5&7\end{vmatrix}=3;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}4&4&5\\7&-1&0\\-2&7&7\end{vmatrix}=11;\ \Delta_3=\begin{vmatrix}4&3&4\\7&-1&-1\\-2&5&7\end{vmatrix}=-17.$$

Следовательно, решением полученной системы являются следующие значения β_i: $\beta_1=-0{,}3$; $\beta_2=-1{,}1$; $\beta_3=1{,}7$.

Координаты вектора d в базисе $a\,b\,c$: $d=(-0{,}3;\,-1{,}1;\,1{,}7)$.

2.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Даны векторы $\vec{OA}=a$ и $\vec{OB}=b$. Вектор $\vec{OC}=c$ – медиана треугольника OAB. Разложить аналитически и геометрически вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а вектор $\vec{a}$ – по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

2. Даны векторы $\vec{a}=(2;-5;3)$, $\vec{b}=(1;3;-7)$. Найти векторы $\vec{c}=4\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{d}=5\vec{a}-2\vec{b}$.

3. Найти координаты и составляющие вектора $\vec{a}=2\vec{i}+6\vec{j}-7\vec{k}$.

4. Сила $F = 6(H)$ действует в направлении вектора, образующего с координатными осями углы $\alpha = \beta = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$. Найти проекции вектора силы и его составляющие.

5. Вершины четырехугольника находятся в точках $A(2;0;4)$, $B(7;-15;16)$, $C(-1;-1;11)$, $D(-14;28;-6)$. Показать, что $ABCD$ есть трапеция.

6. На оси OY найти точку, равноудаленную от точек $A(2;-3;7)$ и $B(-4;2;5)$.

7. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, длины оснований AD и BC которой соответственно равны 4 и 2, а угол D равен 45°. Найти проекции векторов $\vec{AD}$, $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{AC}$ на ось l, определяемую вектором $\vec{CD}$.

8. Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями OX и OY углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$. Вычислить его координаты, если $|a| = 2$.

9. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (3;-5;8)$ и $\vec{b} = (-1;1;-4)$.

10. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $a = 2m + n$ и $b = m - 2n$, где m, n – единичные векторы, $\left(\widehat{m,n}\right) = 60^\circ$.

11. Дан вектор $a = 2m - n$, где m, n – единичные векторы, $\left(\widehat{m,n}\right) = 120^\circ$. Найти $\cos\left(\widehat{a,m}\right)$ и $\cos\left(\widehat{a,n}\right)$.

12. Найти угол между векторами $a = 2m + 4n$ и $b = m - n$, если m, n – единичные векторы, $\left(\widehat{m,n}\right) = 120^\circ$.

13. Даны радиус-векторы вершин треугольника ABC: $\vec{OA} = i + 2j + 3k$, $\vec{OB} = 3i + 2j + k$, $\vec{OC} = i + 4j + k$. Показать, что треугольник ABC – равносторонний.

14. В некотором базисе векторы заданы координатами: $a=(1;1;2)$, $e_1=(2;2;-1)$, $e_2=(0;4;8)$, $e_3=(-1;-1;3)$. Убедиться, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис, и найти в нем координаты вектора a.

15. Даны векторы $a_1=(3;-2;1)$, $a_2=(-1;1;2)$, $a_3=(2;1;-3)$. Найти разложение вектора $a=(11;-6;5)$ по базису a_1, a_2, a_3.

Ответы

1) $c=(a+b)/2$, $a=2c-b$. 2) $c=(11;-11;-9)$, $d=(8;-31;29)$. 3) $x=2$, $y=6$, $z=-7$; $\bar{a}_x=2\bar{i}$, $\bar{a}_y=6\bar{j}$, $\bar{a}_z=-7\bar{k}$. 4) $x=-3$, $y=-3$, $z=3\sqrt{2}$; $\bar{F}_x=3\bar{i}$, $\bar{F}_y=-3\bar{j}$, $\bar{F}_z=3\sqrt{2}\,\bar{k}$. 5) Указание: Убедиться в том, что среди векторов $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$ есть два коллинеарных. 6) $M(0;-1,7;0)$. 7) $\text{пр}_l\vec{AD}=2\sqrt{2}$, $\text{пр}_l\vec{AB}=-\sqrt{2}$, $\text{пр}_l\vec{BC}=\sqrt{2}$, $\text{пр}_l\vec{AC}=0$. 8) $a=(1;-1;\sqrt{2})$ или $a=(1;-1;-\sqrt{2})$. 9) $|a+b|=6$, $|a-b|=14$. 10) $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$. 11) $\frac{5}{2\sqrt{7}}$, $-\frac{2}{\sqrt{7}}$. 12) 120°. 13) Указание: Смотри решение примера № 2. 14) $a=(1;0;1)$. 15) $a=2a_1-3a_2+a_3$.

2.3. Деление отрезка в данном отношении. Преобразование декартовых прямоугольных координат. Полярная система координат

Отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, называется число λ, удовлетворяющее равенству $\vec{M_1M}=\lambda\,\vec{MM_2}$. Связь между координатами делящей точки $M(x,y,z)$, точек $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и числом λ задается равенствами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\; y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\; z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},\; (\lambda\neq-1).$$

Деление отрезка M_1M_2 будет внутренним, если $\lambda > 0$, и внешним, если $\lambda < 0$. При $\lambda = 1$ точка M будет серединой отрезка M_1M_2; координаты середины отрезка определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Рассмотрим две декартовые прямоугольные системы координат с одним и тем же масштабным отрезком и одинаковыми направлениями одноименных координатных осей (рис. 2.1).

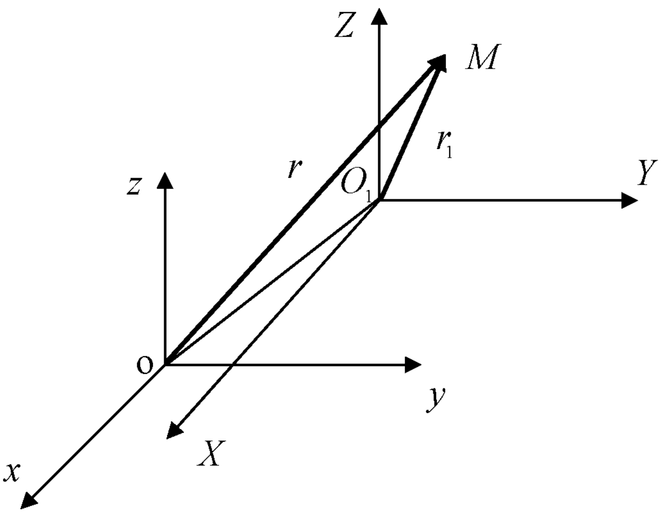

Рис. 2.1

Начало новой системы находится с точке $O_1(a,b,c)$.

Пусть M – произвольная точка пространства, x, y, r – ее координаты в старой системе, X, Y, Z – в новой. Тогда связь между старыми x, y, z и новыми X, Y, Z одной и той же точки M определяется следующими формулами

$$x = X + a, \quad y = Y + b, \quad z = Z + c,$$

или

$$X = x - a, \quad Y = y - b, \quad Z = z - c.$$

Если одна из координатных осей новой системы при параллельном переносе направлена противоположно соответствующей оси старой системы, то, в указанных выше формулах, координата точки M по этой оси берется со знаком минус. Например, оси oy и OY имеют противоположные направления. Для этого случая формулы связи между старыми и новыми координатами одной и той же точки плоски запишутся в виде:

$$x = X + a, \quad y = -Y + b, \quad z = Z + c;$$

$$X = x - a, \quad -Y = y - b, \quad Z = z - c.$$

При повороте координатных осей системы Oxy на угол α вокруг точки O (угол α отсчитывается в положительном направлении, т. е. в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки) получается новая система $Ox'y'$ с прежним началом O и осями, образующими с соответствующими осями старой системы угол α (рис. 2.2).

Зависимость между старыми координатами $(x;y)$ и новыми $(x';y')$ определяется следующими формулами:

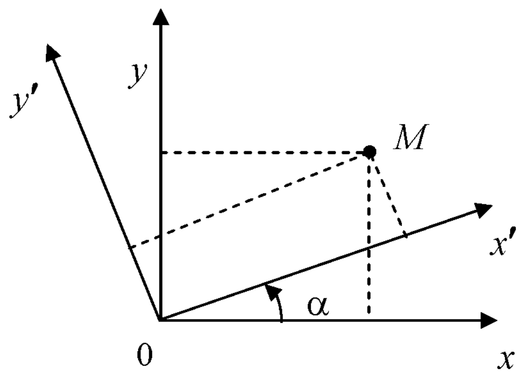

Рис. 2.2

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha;$$

или

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Если в пространстве новая система координат $Ox'y'z'$ получена из старой системы $Oxyz$ путем поворота ее вокруг оси Oz на угол α, то связь между старыми координатами $(x;\ y;\ z)$ точки M и ее новыми координатами $(x'\ y'\ z')$ задается формулами:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \qquad x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \quad \text{или} \quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

$$z = z'; \qquad z' = z.$$

Если оси новой системы координат $Ox'y'$ на плоскости образуют с осями старой системы Oxy угол α, а новое начало O' относительно старой системы имеет координаты $(a; b)$, то зависимость между старыми координатами $(x; y)$ точки M и ее новыми координатами $(x'; y')$ определяется формулами:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b; \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha, \\ y' &= -(x-a)\sin\alpha - (y-b)\cos\alpha. \end{aligned}$$

Полярная система координат на плоскости задается с помощью точки O, которая называется *полюсом*, и выходящим из полюса лучом, называется *полярной осью*; кроме того, задается масштабная единица. Координатами точки M в полярной системе координат являются: *полярный радиус* ρ – расстояние от точки M до полюса $(\rho = |OM|)$, полярный угол θ – угол между полярной осью и радиусом вектором $\overrightarrow{OM}$ точки M. При этом пишут $M(\rho,\theta)$. Полярные координаты ρ и θ произвольной точки плоскости, согласно определению, могут принимать значения: $\rho \geq 0$, $-\infty < \theta < +\infty$. Однако в этом случае соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами чисел (ρ,θ) не является взаимно однозначным. Поэтому достаточно рассматривать угол θ, удовлетворяющий неравенствам

$$-\pi < \theta < \pi \quad \text{или} \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Существует связь координаты $(\rho;\theta)$ точки в полярной системе координат с координатами $(x; y)$ той же точки в декартовой прямоугольной системе координат, если полюс совпадает с началом координат прямоугольной декартовой системы координат, полярная ось – с осью абсцисс и масштабная единица в обеих системах одна и та же:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta, \\ y &= \rho\sin\theta. \end{aligned}\right\}$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} &\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ &\operatorname{tg}\theta = y/x. \end{aligned}\right\}$$

Примеры

1. Даны вершины $A(4;2;4)$, $B(6;4;2)$, $C(0;3;8)$ параллелограмма $ABCD$. Найти вершину D.

Решение. Пусть точка O – пересечение диагоналей параллелограмма. Так как точка O – середина отрезка AC, то ее координаты равны:

$$x = \frac{4+0}{2} = 2,\ y = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2},\ z = \frac{4+8}{2} = 6,\ \text{т. е. } O\left(2; \frac{5}{2}; 6\right).$$

С другой стороны, O – середина BD. Координаты точек B и O известны, координаты точки D определяются аналогично:

$$2 = \frac{6+x}{2},\ \frac{5}{2} = \frac{4+y}{2},\ 6 = \frac{2+z}{2},$$

откуда $x = -2,\quad y = 1,\quad z = 10$. Следовательно, $D(-2;1;10)$.

2. Концы однородного стержня находятся в точках $M_1(7;-3;3)$ и $M_2(11;4;-6)$. Найти координаты центра масс стержня.

Решение. Центр масс $C(x;y;z)$ однородного стержня находится в середине. Поэтому $\lambda = 1$ и $x = \dfrac{7+11}{2} = 9$, $y = \dfrac{-3+4}{2} = \dfrac{1}{2}$, $z = \dfrac{3-6}{2} = -\dfrac{3}{2}$.

Следовательно, $C\left(9;\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

3. Отрезок AB, где $A(5;-7;2)$, $B(9;-3;0)$, точками C и D разделен на три равные части. Найти координаты точек C и D.

Решение. По условию $AC:CB=1:2$, $AD:DB=2:1$. Координаты точки C рассчитаем при условии $\lambda=\frac{1}{2}$.

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{5+\frac{1}{2}\cdot 9}{1+\frac{1}{2}}=\frac{19}{3};$$

$$y_C=\frac{y_A+\lambda\cdot y_B}{1+\lambda}=\frac{-7+\frac{1}{2}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{17}{3};$$

$$z_C=\frac{z_A+\lambda\cdot z_B}{1+\lambda}=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 0}{1+\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}.$$

Следовательно, $C=\left(\frac{19}{3};-\frac{17}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Координаты точки D находятся аналогично, при $\lambda=2$.

$$x_D=\frac{5+2\cdot 9}{1+2}=\frac{23}{3},\ y_D=\frac{-7+2\cdot(-3)}{1+2}=-\frac{13}{3};\ z_D=\frac{2+2\cdot 0}{1+2}=\frac{2}{3}.$$

Следовательно, $D=\left(\frac{23}{3};-\frac{13}{3};\frac{2}{3}\right)$.

4. Дан треугольник: $A(1;1;1), B(5;1;-2), C(7;9;1)$. Найти координаты точки D пересечения биссектрисы угла A со стороной CB.

Решение. Найдем длины сторон треугольника, образующие угол A:

$$|AC|=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}=\sqrt{(7-1)^2+(9-1)^2+(1-1)^2}=10,$$

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(5-1)^2+(1-1)^2+(-2-1)^2}=5.$$

Так как биссектриса делит сторону CB на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то $|CD|:|DB|=10:5=2$.

Координаты точки D определим при $\lambda=2$.

$$x_D=\frac{x_C+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{7+2\cdot 5}{1+2}=\frac{17}{3},\ y_D=\frac{y_C+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{9+2\cdot 1}{1+\lambda}=\frac{11}{3},$$

$$z_D=\frac{z_C+\lambda z_B}{1+\lambda}=\frac{1+2\cdot(-2)}{1+2}=-1.$$

Следовательно, искомая точка $D\left(\frac{17}{3};\frac{11}{3};-1\right)$.

5. Начало координат перенесено в точку $(2;-5)$. Найти новые координаты точки $M(-3;4)$.

Решение. Пусть старые координаты точки $M(x;y)=(-3;4)$, новые координаты точки $M(x';y')$ связаны со старыми координатами соотношением

$$x=x'+x_0,\ y=y'+y_0 \quad \text{или} \quad x'=x-x_0,\ y'=y-y_0,$$

где (x_0,y_0) – координаты нового начала (в старой системе).

Имеем: $x_0=2,\ y_0=-5;\ x=-3,\ y=4$.

Искомые координаты точки M равны: $x'=-3-2=-5,\quad y'=4+5=9$.

6. Некоторая линия задана уравнением $x^2+y^2-4x+6y=36$. Каково будет уравнение той же линии после переноса начала координат в точку $O'(2;-3)$?

Решение. Согласно формулам переноса начала координат имеем: $x=x'+2$, $y=y'-3$.

Подставим эти выражения в данное уравнение. Получим:

$$(x'+2)^2+(y'-3)^2-4(x'+2)+6(y'-3)=36,$$

или после упрощений

$$x'^2+y'^2=49.$$

Новое уравнение линии соответствует окружности радиуса $R=7$ с центром в точке O'.

7. В системе координат Oxy точка M имеет координаты $(-2;1)$, а в системе $O'x'y'$ – $(4;-3)$. Найти координаты нового начала O' относительно старой системы Oxy.

Решение. Имеем $x=-2,\ y=1,\ x'=4,\ y'=-3$. Поэтому $-2=4+a$ и $1=-3+b$, отсюда $a=-6$, $b=4$. Таким образом, $O'(-6;\ 4)$

8. На плоскости в координатной системе Oxy дана точка $M(8;\ -6)$. Найти координаты этой точки относительно системы $Ox'y'$, повернутой относительно системы Oxy на угол $\alpha=30^\circ$ вокруг точки O.

Решение. Так как $\sin 30^\circ=\frac{1}{2},\ \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$$x'=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-6\cdot\frac{1}{2}=4\sqrt{3}-3;$$

$$y'=-8\cdot\frac{1}{2}-6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-4-3\sqrt{3}.$$

Следовательно, в данной системе координат $Ox'y'$ $M\left(4\sqrt{3}-3;\ -4-3\sqrt{3}\right)$.

9. Найти угол, на который повернута система координат $Oxyz$ вокруг оси Oy, если одна и та же точка имеет координаты $(1;\ 6;\ 3)$ и $(-3;\ 6;\ -1)$ в новой и старой системах соответственно.

Решение. Так как новая система получена из старой путем поворота последней вокруг оси Oy, то новые $(x';y';z')$ и старые $(x;y;z)$ координаты точки M связаны формулами:

$$x' = x\cdot\cos\alpha + z\cdot\sin\alpha;\quad y' = y;\quad z' = -x\cdot\sin\alpha + z\cdot\cos\alpha\,.$$

Подставив в эти формулы значения $x=1,\ y=6,\ z=3,\ x'=-3,\ y'=6,\ z'=-1$, получим систему тригонометрических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -3 &= \cos\alpha + 3\sin\alpha,\\ 6 &= 6,\\ -1 &= -\sin\alpha + 3\cos\alpha,\end{aligned}\right\}$$

из которой необходимо определить угол α. Получаем:

$$\sin\alpha = -\frac{4}{5},\quad \cos\alpha = -\frac{3}{5},$$

отсюда $\alpha = \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)$, причем угол α расположен во втором квадранте, т. к. $\sin\alpha < 0,\ \cos\alpha < 0$.

10. Доказать, что в полярной системе координат расстояние d между точками $M_1(\rho_{1,}\theta_1)$ и $M_2(\rho_{2,}\theta_2)$ определяется формулой

$$d = \sqrt{\rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2 - \theta_1) + \rho_2^2}\,.$$

Решение. Наряду с данной полярной системой координат рассмотрим прямоугольную декартову систему координат, начало координат которой совпадает с полюсом, ось абсцисс – с полярной осью, масштабная единица в обеих системах одна и та же.

Пусть в этой прямоугольной декартовой системе координат x_{1_1}, y_1 – координаты точки M_1, а x_{2_1}, y_2 – координаты точки M_2. Тогда

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

Так как $x_1=\rho_1\cos\theta_1$, $y_1=\rho_1\sin\theta_1$, $x_2=\cos\theta_2$, $y_2=\rho_2\sin\theta_2$, то

$$d=\sqrt{(\rho_2\cos\theta_2-\rho_1\cos\theta_1)^2+(\rho_2\sin\theta_2-\rho_1\sin\theta_1)^2}=$$

$$=\sqrt{\rho_2^2-2\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+\rho_1^2}=\sqrt{\rho_1^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1)+\rho_2^2}$$

2.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Точка $C(2;\,2;4)$ делит отрезок AB в отношении $\lambda=2/3$. Найти координаты точки B, если $A(-2;\,4;\,0)$.

2. Даны вершины треугольника $A(4;\,-1;\,2)$, $B(0;\,1;\,-3)$, $C(6;\,5;\,3)$. Найти координаты вектора $\vec{AD}$, если AD – медиана треугольника.

3. Найти центр масс однородного стержня AB, если $A(3;\,4;-2)$, $B(0;\,1;\,3)$.

4. Даны вершины $A(2;-3;-5)$, $B(-1;\,3;\,2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(4;-1;7)$. Найти координаты остальных вершин параллелограмма.

5. Отрезок, ограниченный точками $A(-1;\,8;-3)$ и $B(9;-7;-2)$, разделен точками M_1, M_2, M_3, M_4 на пять равных частей. Найти координаты точек M_1 и M_3.

6. Найти новые координаты точки $M(-2;\,5)$, если начало координат перенесено в точку $(4;-1)$.

7. Дана некоторая кривая второго порядка: $16x^2+25y^2-32x+50y=359$. Каков будет вид и тип этой же линии после переноса начала координат в точку $O'(1,-1)$?

8. Новая система координат получена из старой путем параллельного переноса начала координат в точку $O'(-2;1)$ при сохранении направления осей

координат. Относительно новой системы координат даны координаты точек $A(11;3)$, $B(-7;4)$, $C(2;0)$, $D(-1;-8)$. Найдите координаты этих же точек относительно старой системы координат.

9. Относительно некоторой системы координат даны точки $A(7;2)$, $B(3;-1)$, $C(2;-4)$. Найдите координаты этих же точек относительно новой системы координат, которая получается из старой путем поворота осей координат на угол 30°.

10. Координаты ряда точек удовлетворяют уравнению $7x^2-2xy+3y^2-3x-8y-1=0$. Какому уравнению будут удовлетворять координаты тех же точек, если перенести начало координат в точку $O'(-2;-3)$?

11. Построить в полярной системе координат точки $A\left(2;-\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(3;\frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(\sqrt{2};\frac{5\pi}{3}\right)$, $D\left(1;\frac{7\pi}{6}\right)$, $E\left(-3;\frac{\pi}{3}\right)$, $F\left(-2;-\frac{\pi}{4}\right)$.

12. Найти полярные координаты точек, симметричных точкам $A\left(1;\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$, $C(3;0)$:

а) относительно полярной оси;

б) относительно полюса.

Ответы

1) $B(8;-1;10)$. 2) $\vec{AD}(-1;4;-2)$. 3) $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$. 4) $C(6;1;19)$, $D(9;-5;12)$. 5) $M_1(1;5;-2)$, $M_3(5;-1;0)$. 6) $(-6;6)$. 7) $16x'^2+25y'^2=400$ или $\frac{(x')^2}{25}+\frac{(y')^2}{16}=1$ есть эллипс с центром в точке O'. 8) $A(9;4)$, $B(-9;5)$, $C(0;1)$, $D(-3;-7)$. 9) $A\left(\frac{7\sqrt{3}}{2}+1;-\frac{7}{2}+\sqrt{3}\right)$, $B\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2};\frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\sqrt{3}-2;-1-2\sqrt{3}\right)$.

10) $7'^2 - 2x'y' + 3y'^2 - 25x' - 22y' + 72 = 0$. 12) а) $A'\left(1; -\frac{\pi}{6}\right)$, $B'\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$, $C'(3; 0)$,

б) $A'\left(1; \frac{7\pi}{6}\right)$, $B'\left(2; \frac{2\pi}{3}\right)$, $C'(3; \pi)$.

2.5. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов a и b называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними

$$(a,b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos\varphi,$$

где φ обозначает меньший угол между направлениями векторов a и b. Отметим, что всегда $0 \le \varphi \le \pi$.

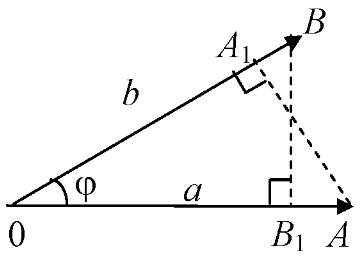

Рис. 2.2

Так как $|b|\cos\varphi = \text{пр}_a b$ и $|a|\cos\varphi = \text{пр}_b a$ (рис. 2.2), то выражение скалярного произведения можно представить в виде:

$$(a,b) = |a| \cdot \text{пр}_a b = |b| \cdot \text{пр}_b a.$$

Следовательно, $\text{пр}_b a = \frac{(a,b)}{|b|}$ и $\text{пр}_a b = \frac{(a,b)}{|a|}$.

Основные свойства скалярного произведения векторов:

1) $(a,a) = |a|^2 = a^2$, отсюда $|a| = \sqrt{(a,a)}$;

2) $(a,b) = 0$, если a=0, либо $b = 0$, либо $a \perp b$;

3) $(a,b) = (b,a)$;

4) $(\lambda a, b) = (a, \lambda b) = \lambda(a,b)$, $\lambda \in R$

5) $(a, b + c) = (a,b) + (a,c)$.

Если в прямоугольной системе координат векторы a и b заданы своими координатами:

$$a = (X_1, Y_1, Z_1), \quad b = (X_2, Y_2, Z_2),$$

то

$$(a,b) = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2,$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат. Если $b = a$, то

$$(a,a) = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2.$$

Поскольку $aa = a^2 = |a|^2$, то $|a| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$.

Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{|a| \cdot |b|} = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов выражается равенством

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0.$$

Если ось l образует с координатными осями углы α, β, γ соответственно, то проекция вектора $S = (X, Y, Z)$ на эту ось определяется равенством

$$\text{пр}_l S = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma.$$

Понятие скалярного произведения возникло в механике. Если вектор F изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора S, то работа A указанной силы определяется равенством

$$A = (F,S) = |F| \cdot |S| \cos(\widehat{F,S}).$$

Примеры

1. Угол между векторами a и b равен 60°, $|a| = 4$, $|b| = 9$. Найти $|a + b|$ и $|a - b|$.

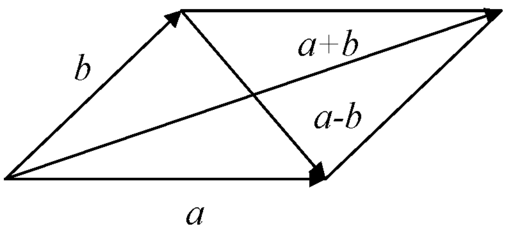

Рис. 2.3

Решение. Построим параллелограмм на векторах a и b (рис. 2.3). Воспользуемся свойствами скалярного произведения векторов. Имеем:

$$|a + b|^2 = (a + b, a + b) = (a, a) + (a, b) + (b, a) + (b, b) =$$

$$= |a|^2 + 2(a, b) + |b|^2 = |a|^2 + 2|a| \cdot |b| \cos 60^\circ + |b|^2 = 16 + 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} + 81 = 133,$$

откуда $|a + b| = \sqrt{133}$;

$$|a - b|^2 = (a - b, a - b) = (a, a) - (b, a) - (a, b) + (b, b) = |a|^2 - 2(a, b) + |b^2| =$$

$$= 16 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} + 81 = 61,$$

откуда $|a - b| = \sqrt{61}$.

2. Даны вершины четырехугольника $ABCD$: $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

Решение. Найдем координаты векторов $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$: $\vec{AC} = (-5; 3; -1)$, $\vec{BD} = (-6; -9; 3)$.

Вычислим скалярное произведение векторов $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$:

$$(\vec{AC}, \vec{BD}) = (-5)(-6) + 3 \cdot (-9) + (-1)(3) = 0.$$

Отсюда следует, что $\vec{AC} \perp \vec{BD}$.

3. Даны векторы: $a = 3i - 6j - k$, $b = i + 4j - 5k$, $c = 3i - 4j + 12k$. Найти проекцию вектора $a + b$ на вектор c.

Решение. Требуемая проекция

$$\text{пр}_c(a+b) = \frac{(a+b, c)}{|c|}.$$

Имеем: $a = (3; -6; -1)$, $b = (1; 4; -5)$, $c = (3; -4; 12)$, $a + b = (4; -2; -6)$.

Тогда $\text{пр}_c(a+b) = \dfrac{4 \cdot 3 + (-2)\cdot(-4) + (-6)\cdot 12}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}} = \dfrac{-52}{13} = -4$.

4. При каком значении λ векторы $\bar{a} = 4\bar{i} + \lambda\bar{j} + 5\bar{k}$ и $\bar{b} = \lambda\,\bar{i} + 2\bar{j} - 6\bar{k}$ взаимно перпендикулярны?

Решение. Условие перпендикулярности в данном случае запишется так: $4\lambda + 2\lambda + 5(-6) = 0$ или $6\lambda - 30 = 0$, откуда $\lambda = 5$.

5. Дан треугольник с вершинами $A(-3; 5; 6)$, $B(1; -5; 7)$, $C(8; -3; -1)$. Найти внутренний угол при вершине A и внешний угол при вершине C.

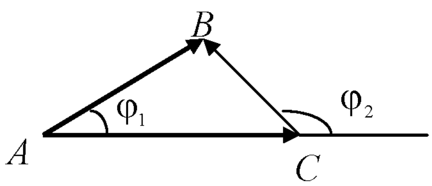

Рис. 2.4

Решение. Внутренний угол треугольника при вершине A равен углу между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а внешний угол при вершине C равен углу между векторами $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (рис. 2.4). Найдем координаты указанных векторов:

$$\overrightarrow{AB} = (4; -10; 1), \quad \overrightarrow{AC} = (11; -8; -7), \quad \overrightarrow{CB} = (-7; -2; 8).$$

Находим косинусы углов по формуле

$$\cos\left(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}\right) = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|},$$

т. е.

$$\cos\varphi_1 = \cos\left(\overline{AB},\overset{\wedge}{}\overline{AC}\right) = \frac{4\cdot 11 + (-10)(-8) + 1(-7)}{\sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2}} = \frac{117}{\sqrt{117}\cdot\sqrt{234}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos\varphi_2 = \cos\left(\overline{CB},\overset{\wedge}{}\overline{AC}\right) = \frac{(-7)\cdot 11 + (-2)(-8) + 8(-7)}{\sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + 8^2}\cdot\sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2}} =$$

$$= \frac{-117}{\sqrt{117}\cdot\sqrt{234}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$.

6. Вычислить работу равнодействующей F сил $F_1 = (1,-3,8)$, $F_2 = (1,2,7)$, $F_3 = (-1,5,9)$, приложенных к материальной точке, которая под их действием перемещается прямолинейно из точки $M_1(7;1;3)$ в точку $M_2(10;4;4)$.

Решение. Так как равнодействующая сил равна $F = F_1 + F_2 + F_3 = (1,4,24)$, а вектор перемещения $\overline{M_1M_2} = S = (3,3,1)$, то работа $A = (F,S) = 1\cdot 3 + 4\cdot 3 + 24\cdot 1 = 39$.

2.6. Задачи для самостоятельного решения

1. Даны два вектора: $a = (1;-2;2)$, $b = (2;-2;-1)$. Найти их скалярное произведение и угол между ними. Чему равно выражение $2a^2 - 4ab + 5b^2$?

2. Векторы a и b взаимно перпендикулярны, вектор c образует с ними углы равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|a| = 3$, $|b| = 5$, $|c| = 8$, вычислить $(3a - 2b, b + 3c)$, $|a + 2b - 3c|^2$.

3. Даны вершины треугольника ABC: $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$, $C(1;-2;1)$. Вычислить его внешний угол при вершине $A\left(\overrightarrow{AB},\overset{\wedge}{}\overrightarrow{CA}\right)$.

4. Даны вершины треугольника ABC: $A(1;2;1)$, $B(3;-1;7)$, $C(7;4;-2)$. Вычислив внутренние углы треугольника, убедиться, что этот треугольник – равнобедренный.

5. Даны три вектора: $a = i - 2j + 2k$, $b = 2i + j - 2k$, $c = 10i + 4j + 2k$. Найти $\text{пр}_a b$, $\text{пр}_a(b + c)$, $\text{пр}_{a+b} c$, $\text{пр}_b(2a - 3c)$.

6. При каком значении m векторы $a = mi + j$ и $b = 3i - 3j + 4k$ перпендикулярны ?

7. Определить работу силы F, если $|F| = 15H$, которая, действуя на тело, вызывает его перемещение на 4 м под углом $\frac{\pi}{3}$ к направлению действия силы.

8. Вычислить работу равнодействующей F сил $F_1 = (3; -4; 5)$, $F_2 = (2; 1; -4)$, $F_3 = (-1; 6; 2)$, приложенных к материальной точке, которая под их действием перемещается прямолинейно из точки $M_1(4; 2; -3)$ в точку $M_2(7; 4; 1)$.

9. Сила $F = (1; 8; -7)$ разложена по трем взаимно перпендикулярным направления, одно из которых задано вектором $a = (2; -2; -1)$. Найдите составляющую силы в направлении вектора a.

10. Тело движется прямолинейно под действием силы F, удовлетворяющей условию $2F = 3F_1 + 5F_2$. Известны проекции сил F_1 и F_2 на направление перемещения тела: $\text{пр}_S F_1 = 4_1$, $\text{пр}_S F_2 = \frac{4}{7}$. Найдите работу силы F, измеряемой в ньютонах, затраченную на преодоление пути, равного 8 м.

11. На прямолинейно движущееся тело действуют силы F_1, F_2, F_3, F_4, проекции которых на направление движения равны соответственно 7, – 3, 5, – 9. Определите работу этой системы сил.

12. Точка, двигаясь прямолинейно, перемещается из $B(5; 3; -7)$ в $C(4; 1; 4)$ под действием сил $M = (3; -4; 2)$, $N = (2; 3; -5)$ и $P = (-3; -2; 4)$, приложенных в этой точке. Найдите угол между направлением равнодействующей данных сил и вектором перемещения $\overline{BC}$, а также совершаемую при этом работу.

13. Под действием силы $F = (2; 4; 6)$ точка перемещается параллельно вектору $S = (3; 2; -1)$ на отрезок, равный длине вектора S. Вычислите работу силы F и угол, составленный векторами силы и перемещения.

14. Пусть $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – углы, образуемые вектором соответственно с осями $Ox,\ Oy,\ Oz$. Найти угол γ, если известно, что $\alpha=\dfrac{\pi}{6},\quad \beta=\dfrac{\pi}{4}$.

15. Даны точки $A(1;-2;5),\ B(3;-1;4),\ C(1;2;2),\ D(-1;1;3)$. Показать, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, и вычислить его углы.

16. Дан треугольник с вершинами в точках $A(-1;1;3),\ B(3;3;-4),\ C(2;1;-1)$. Найти проекцию стороны $\overrightarrow{AB}$ на сторону $\overrightarrow{AC}$.

17. Найти вектор b, ортогональный вектору $a=i+2j-k$ и удовлетворяющий условиям $(b,i)=3,\ (b,\ j)=2$.

18. Дан вектор $a=5i+2j+3k$. Найти вектор b, удовлетворяющий условиям $(b,i)=2,\ (b,k)=-1,\ (a,b)=3$.

Ответы

1) $4,\ 4/9,\ 47$. 2) $-72{,}373$. 3) $\arccos(-4/9)$. 5) $-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{26}{10},\ -\dfrac{68}{3}$. 6) $m=1$. 7) 30 Дж. 8) 30 Дж. 9) $R_a=\left(-\dfrac{14}{3};\dfrac{14}{3};\dfrac{7}{3}\right)$. 10) $59\dfrac{3}{7}$ Дж. 11) 0 12) $A=15$ Дж, $\cos\left(R,\hat{}\,BC\right)=5/14$. 13) $A=8$ Дж, $\cos\left(F,\hat{}\,S\right)=\dfrac{2}{7}$. 14) $j_1=\dfrac{\pi}{3}$, $j_2=\dfrac{2\pi}{3}$. 15) $\arccos\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{102}}\right)$. 16) 8. 17) $b=3i+j+5k$. 18) $b=2i-2j-k$.

2.7. Векторное произведение векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $a,\ b,\ c$ с общим началом в точке O называется *правой*, если кратчайший поворот от вектора a к вектору b наблюдается из конца вектора c происходящим против движения часовой стрелки (рис. 2.5, а). Если же указанный поворот совершается по часовой стрелке (рис. 2.5, б), то данная тройка векторов называется *левой*.

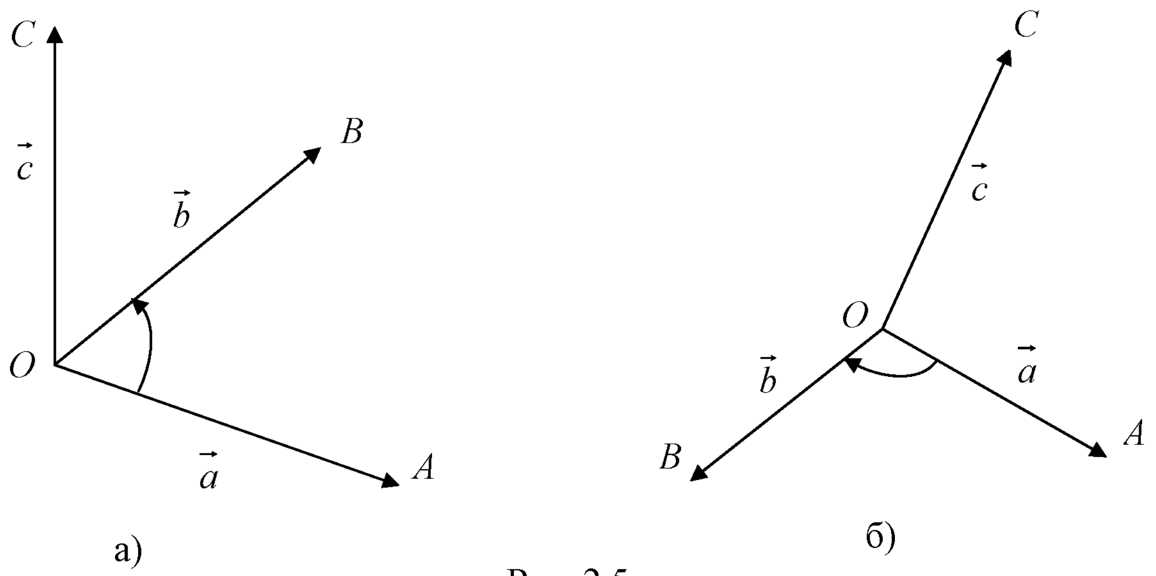

Рис. 2.5

Векторным произведением векторов a и b называется вектор, обозначаемый $c=[a,b]$ или $c=a\times b$ и удовлетворяющий следующим трем условиям:

1) длина вектора c равна площади параллелограмма, построенного на векторах a и b, т. е.

$$\left|[a,b]\right| = |a|\cdot|b|\cdot\sin(a\hat{,}b).$$

2) вектор $[a,b]$ перпендикулярен к плоскости векторов a и b, т. е. $c\perp a$, $c\perp b$.

3) упорядоченная тройка векторов a, b, c – правая.

Основные свойства векторного произведения векторов:

1) $a\times b=-(b\times a)$;

2) $(\lambda a)\times b=\lambda(a\times b)=a\times(\lambda b)$;

3) $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$;

4) $(a\times b=0 \Leftrightarrow a\,||\,b)$ – есть необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов a и b;

5) $|a\times b|=S$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b, имеющих общее начало в точке O (см. рис. 2.6).

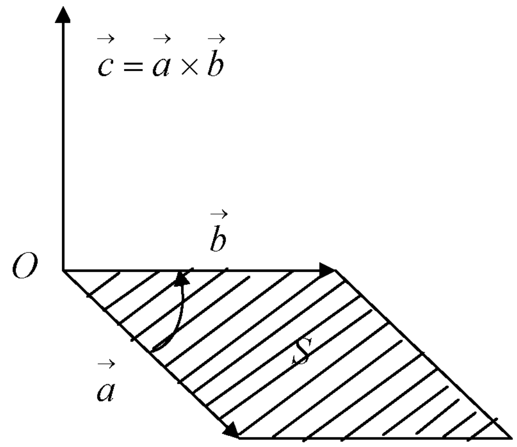

Рис. 2.6

Если $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2)$, то векторное произведение $a \times b$ в координатной форме выражается следующим образом:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \left(y_1 z_2 - y_2 z_1 \right) \vec{i} + \left(x_2 z_1 - x_1 z_2 \right) \vec{j} + \left(x_1 y_2 - x_2 y_1 \right) \vec{k}\,.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах a и b, определяется формулой

$$S = \frac{1}{2} |\,[a,b]\,|,$$

а *синус угла* между ними равен

$$\sin\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right) = \frac{|\,[a,b]\,|}{|\,a\,| \cdot |\,b\,|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}\,.$$

С помощью векторного произведения можно вычислить *вращающий момент* M силы F, приложенной к точке B тела, закрепленного в точке A:

$$M = \overrightarrow{AB} \times F$$

Примеры

1. Даны векторы $m = a + 2b$, $n = 3a - b$. Найти $[m,n]$, если $[a,b] = p$.

Решение. Используя свойства и определение векторного произведения, имеем

$$[m,n] = [a + 2b, 3a - b] = 3[a,a] - [a,b] + 6[b,a] - 2[b,b] = 3 \cdot 0 - p - 6p - 2 \cdot 0 = -7p.$$

2. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$.

Решение. $[a,b] = \left[\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}\right)\left(4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}\right)\right] = 8\left[\vec{i},\vec{i}\right] + 4\left[\vec{i},\vec{j}\right] - 12\left[\vec{i},\vec{k}\right] -$

$$-12\left[\vec{j},\vec{i}\right] - 6\left[\vec{j},\vec{j}\right] + 18\left[\vec{j},\vec{k}\right] + 20\left[\vec{k},\vec{i}\right] + 10\left[\vec{k},\vec{j}\right] - 30\left[\vec{k},\vec{k}\right] = 4\left[\vec{i},\vec{j}\right] - 12\left[\vec{i},\vec{k}\right] -$$

$$-12\left[\vec{j},\vec{i}\right] + 18\left[\vec{j},\vec{k}\right] + 20\left[\vec{k},\vec{i}\right] + 10\left[\vec{k},\vec{j}\right] = 16\left[\vec{i},\vec{j}\right] - 8\left[\vec{k},\vec{j}\right] + 32\left[\vec{k},\vec{i}\right] = 8\vec{i} + 32\vec{j} + 16\vec{k}.$$

При решении данной задачи были использованы следующие соотношения, вытекающие из определения векторного произведения:

$$i \times i = 0, \quad i \times j = k, \quad i \times k = -j,$$

$$j \times i = -k, \quad j \times j = 0, \quad j \times k = i,$$

$$k \times i = j, \quad k \times j = -i, \quad k \times k = 0.$$

3. Показать, что векторы $[a,b]$ и $[2a,(3a - 5b)]$ коллинеарны.

Решение. Упростим второе векторное произведение:

$$[2a,(3a - 5b)] = [2a,3a] + [2a,(-5b)] = 6[a,a] - 10[a,b] = -10[a,b].$$

Следовательно, векторы $[a,b]$ и $-10[a,b]$ коллинеарны.

4. Даны векторы a, b, c, удовлетворяющие условию $a+b+c=0$. Доказать, что $[a,b]=[b,c]=[c,a]$.

Решение. Умножим векторно a на $a+b+c=0$.

$$[a,a]+[a,b]+[a,c]=0 \text{ или } [a,b]=-[a,c]=[c,a].$$

Умножая векторно $a+b+c=0$ на b, находим $[a,b]+[b,b]+[c,b]=0$ или $[a,b]=-[c,b]=[b,c]$. Из двух равенств $[a,b]=[c,a]$ и $[a,b]=[b,c]$ следует доказываемое равенство.

5. Вычислить площадь параллелограмма, три вершины которого находятся в точках $A(4;3;2)$, $B(2;3;4)$, $C(1;1;1)$.

Решение. Пусть $\vec{AB}\in\vec{a}$ и $\vec{AC}\in\vec{b}$, тогда $\vec{a}=-2\vec{i}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=-3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$. Площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения $a\times b$.

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}=4i-8j+4k.$$

Следовательно, площадь параллелограмма

$$S=|a\times b|=\sqrt{4^2+(-8)^2+4^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6} \text{ (кв.ед.)}$$

6. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(-1;0;2)$, $B(1;-2;5)$, $C(3;0;-4)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\vec{a}=\vec{AB}$ и $\vec{b}=\vec{AC}$: $\vec{a}=(2,-2,3)$, $\vec{b}=(4,0,-6)$.

Площадь треугольника вычисляют по формуле $S=\frac{1}{2}\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$.

$$[a,b]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix}=12i+24j+8k .$$

Следовательно $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{12^2+24^2+8^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{784}=\dfrac{28}{2}=14$ (кв.ед.).

7. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Определить длину высоты, опущенной из B на сторону AC, и площадь треугольника ABC (рис. 2.7).

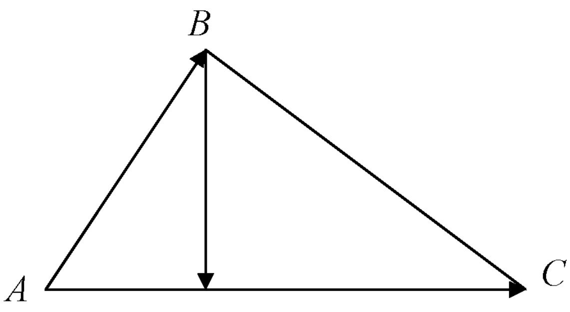

Рис. 2.7

Решение. Площадь треугольника ABC вычислим по формуле $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\vec{AB},\vec{AC}\right]\right\|$.

Найдем координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ и длину вектора $\vec{AC}$. Имеем:

$$\vec{AB}=(4;-5;0),\ \vec{AC}=(0;4;-3),\ \left|\vec{AC}\right|=\sqrt{16+9}=5,$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}|15i+12j+16k|=\frac{1}{2}\sqrt{225+144+256}=\frac{25}{2}=12{,}5 \text{ (кв. ед.)}$$

Здесь $\mathrm{mod}|A|$ − модуль определителя матрицы A.

Так как $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\vec{BD}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|$, то $\left|\vec{BD}\right|=\dfrac{2S}{\left|\vec{AC}\right|}=\dfrac{25}{5}=5$.

8. Даны векторы $a=4i+4k$, $b=-i+3j+2k$. Проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы a и b.

Решение. Так как $a(4, 0, 4)$, $b(-1, 3, 2)$, то выясним вопрос о пропорциональности соответствующих координат: $\frac{4}{-1} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{4}{2}$. Следовательно, векторы a и b не коллинеарны.

Зная, что векторы коллинеарны, если их векторное произведение равно нулю, получим этот же результат другим способом:

$$[a,b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4i - 12j + 12k \neq 0.$$

Следовательно, данные векторы не коллинеарны. Векторы ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю. Поскольку $(a,b) = 4(-1) + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \neq 0$, то векторы a и b не ортогональны.

9. Найти модуль момента силы $F = 3i + 2j + k$ относительно точки $A(1; 2; -1)$, если $B(2; -1; 3)$ – точка приложения силы F.

Решение. Из механики известно, что момент M силы F относительно точки A равен $S \times F$, где S – вектор, определяемый направленным отрезком $\vec{AB}$. Следовательно, $S = i - 3j + 4k$. Поэтому

$$M = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -11i + 11j + 11k.$$

Следовательно, $|M| = \sqrt{(-11)^2 + 11^2 + 11^2} = \sqrt{363}$.

10. Три силы $\vec{F_1} = (2; 4; 6)$, $\vec{F_2} = (1; -2; 3)$, $\vec{F_3} = (1; 1; -7)$ приложены в точке $A(3; -4; 8)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(4; -2; 6)$.

Решение. Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, приложенную в точке M, а вектор $\vec{a} = \vec{NM}$, то вектор $[a, F]$ представляет собой момент силы $\vec{F}$ относительно точки N. Найдем равнодействующую трех данных сил

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 .$$

Следовательно,

$$\vec{F} = (2+1+1,\ 4+(-2)+1,\ 6+3+(-7)) = (4, 3, 2) .$$

Определим координаты вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \vec{BA} = (3-4, -4-(-2), 8-6) = (-1, -2, 2) .$$

Далее, найдем координаты $\left[\vec{a}, \vec{F}\right]$:

$$\left[\vec{a}, \vec{F}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -10i + 10j + 5k ,$$

то есть $\left[\vec{a}, \vec{F}\right] = (-10, 10, 5)$.

Следовательно, величина модуля момента равнодействующей равна

$$\left\|\left[\vec{a}, \vec{F}\right]\right\| = \sqrt{(-10)^2 + 10^2 + 5^2} = \sqrt{225} = 15 .$$

Направляющие косинусы момента силы равны:

$$\cos\alpha = \frac{-10}{15} = -\frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} .$$

2.8. Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть векторы a, b, c образуют правую тройку. Какую тройку образуют векторы: а) b, a, c; б) b, c, a; в) c, b, a?

2. Найти $\left|[a,b]\right|$, если $|a|=2$, $|b|=3$, $(\widehat{a,b})=\dfrac{\pi}{6}$.

3. Показать, что векторы $[b,a]$ и $[3b,(4a+5b)]$ коллинеарны.

4. Упростить выражение $[a+b, 2c-a]+[b+2c, a-b]$.

5. Вычислить площадь параллелограмма $ABCD$, если $\vec{AB}\in a$, $\vec{AD}\in b$, где $a=3m-2n$, $b=m+4n$ и $|m|=2$, $|n|=1$, $(\widehat{m,n})=\dfrac{\pi}{6}$.

6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b, если известно, что $|a|=15$, $|b|=8$, $(a,b)=96$.

7. Вычислить площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы $a=2i+3j-k$, $b=i-j+k$.

8. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $a=3m-n$, $b=m+5n$, если $|m|=2$, $|n|=3$, $(\widehat{m,n})=\dfrac{\pi}{6}$.

9. Найти длину высоты AD треугольника ABC, если $\vec{AB}=2i-j+k$, $\vec{AC}=3i-4j+k$.

10. Определить синус угла между векторами a и b:

1) $a=(11,10,2)$, $b=(2,2,1)$;

2) $a=(-2,2,1)$, $b=(2,3,-2)$;

3) $a=6j+k$, $b=i+3j$;

4) $a=i+2j-3k$, $b=2k$.

11. Вычислить расстояние между параллельными сторонами параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах $\vec{AB}(6;0;2)$ и $\vec{AC}(3/2;2;1)$.

12. Сила $F = 2i - 4j + 3k$ приложена в точке $A(4; 5; -2)$. Найдите момент силы относительно начала координат.

13. Сила $P(2; 2; 9)$ приложена в точке $A(4; 2; -3)$. Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки $B(2; 4; 0)$.

14. Даны силы $M(2; -1; -3)$, $N(3; 2; -1)$ и $P(-4; 1; 3)$, приложенные в точке $C(-1; 4; -2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2; 3; -1)$.

15. Дан треугольник с вершинами $A(4; -14; 8)$, $B(2; -18; 12)$, $C(12; -8; 12)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

Ответы

1) а) Левую; б) правую; в) левую. 2) 3. 4) $4[b, c]$. 5) 14 кв. ед. 6) 72 кв. ед. 7) $\sqrt{38} \approx 6.16$ кв. ед. 8) 24 кв. ед. 9) $\frac{\sqrt{786}}{6} = 4.67$. 10) 1) $\frac{\sqrt{89}}{45}$; 2) 1; 3) $\sqrt{\frac{23}{185}}$; 4) $\sqrt{\frac{5}{14}}$. 11) $\frac{3\sqrt{10}}{20}$, $\frac{26}{\sqrt{101}}$. 12) $M = (7; -16; -26)$. 13) $M = 28$, $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$, $\cos\beta = -\frac{6}{7}$, $\cos\gamma = \frac{2}{7}$. 14) $M = \sqrt{66}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{66}}$, $\cos\beta = -\frac{4}{\sqrt{66}}$, $\cos\gamma = -\frac{7}{\sqrt{66}}$. 15) $h = 10$.

2.9. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов a, b, c называется число, обозначаемое (a, b, c) и определяемое как скалярное произведение вектора $[a, b]$ и вектора c:

$$(a, b, c) = ([a, b], c).$$

Алгебраические свойства смешанного произведения векторов:

1) $(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b)$;

2) $(b, a, c) = -(a, b, c)$, $(c, b, a) = -(a, b, c)$, $(a, c, b) = -(a, b, c)$;

3) $(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b, c) = \alpha_1 (a_1, b, c) + \alpha_2 (a_2, b, c)$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in R$;

4) $(i, j, k) = 0$;

5) $(a,b,c) = ([a,b],c) = (a,[b,c])$.

Если векторы a, b, c заданы своими координатами $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2)$, $c = (x_3, y_3, z_3)$, то их смешанное произведение вычисляется по формуле $(a,b,c) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$. Смешанное произведение $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на некомпланарных векторах a, b, c, взятому со знаком плюс, когда векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеют одинаковую ориентацию, и со знаком минус – в противном случае:

$$(a,b,c) = \begin{cases} V, & \text{если тройка векторов } a,b,c \text{ – правая,} \\ -V, & \text{если тройка векторов } a,b,c \text{ – левая.} \end{cases}$$

Объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|.$$

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов a, b, c является равенство нулю их смешанного произведения:

$$(a,b,c) = 0.$$

Примеры

1. Найти смешанное произведение векторов $a = 3i + j - k$, $b = 2i - 3k$, $c = i + j + k$.

Решение. Используя формулу для вычисления смешанного произведения, имеем $(a \times b) \cdot c = (a,b,c) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10$.

2. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(5;5;6)$, $B(4;5;4)$, $C(4;3;3)$, $D(2;2;2)$.

Решение. Найдем направленные отрезки $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, совпадающие с ребрами пирамиды, сходящимися в точке A:

$$\vec{AB} = (-1,0,-2);\ \vec{AC} = (-1,-2,-3);\ \vec{AD} = (-3,-3,-4).$$

Так как $V = \frac{1}{6}\left|\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD}\right|$, то

$$V = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left|(-8-6+12+9)\right| = \frac{7}{6}\ \text{(куб.ед.)}$$

3. Проверить, будут ли компланарны векторы: $a = 4i + 4k$; $b = -i + 3j + 2k$ и $c = 3i + 5j$.

Решение. Векторы a, b, c компланарны, если $abc = 0$.

$$abc = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 - 36 - 40 \neq 0,$$

Следовательно, данные векторы a, b, c не компланарны.

4. Найти смешанное произведение трех векторов $a=(1,1,2)$, $b=(2,1,1)$, $c=(1,-2,3)$. Какую тройку образуют векторы a, b, c?

Решение. $abc=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&-2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&-3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-3\\-3&1\end{vmatrix}=-10$.

Так как смешанное произведение отрицательно, то векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и орты $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ имеют противоположную ориентацию, то есть a,b,c – левая тройка.

5. Доказать, что четыре точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Возьмем три вектора, выходящие из одной вершины: $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ и докажем, что они компланарны, то есть $\left(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}\right)=0$.

Так как $\vec{AB}=(-1,-1,6)$, $\vec{AC}=(-2,0,2)$, $\vec{AD}=(1,-1,4)$, то

$$\left(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}\right)=\begin{vmatrix}-1&-1&6\\-2&0&2\\1&-1&4\end{vmatrix}=0-2+12-2-8=0.$$

Следовательно, четыре данные точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

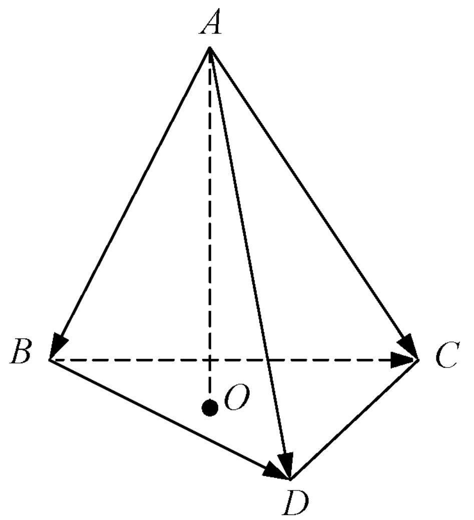

Рис. 2.8.

6. Найти длину высоты пирамиды, опущенной на грань BCD, если известно, что ее вершинами являются точки $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$ (рис. 2.8).

Решение. Так как $V=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}|AO|$, то

$$h=|AO|=\frac{3V}{S_{\Delta BCD}}.$$

Определим векторы AB, AC, AD:

$\vec{AB} = (2, 3, 4)$, $\vec{AC} = (6, 2, 2)$, $\vec{AD} = (3, 7, 1)$.

Объем пирамиды, построенной на этих векторах равен

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 120 = 20 \text{ (куб.ед.)}.$$

Вычислим площадь основания пирамиды, которой является треугольник BCD. Определив векторы $\vec{BC} = (4, -1, -2)$, $\vec{BD} = (1, 4, -3)$ и, используя свойства векторного произведения векторов, имеем

$$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{BC}, \vec{BD}\right]\right| = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|11i + 10j + 17k\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{121 + 100 + 289} = \frac{1}{2}\sqrt{510}.$$

Тогда искомая высота AO равна $|AO| = \dfrac{3V}{S_{\text{осн.}}} = \dfrac{3\cdot 20\cdot 2}{\sqrt{510}} = \dfrac{4\cdot\sqrt{510}}{17}$.

2.10. Задачи для самостоятельного решения

1. Какой тройкой (правой или левой) является тройка векторов (a, b, c):

а) $a = j, \quad b = i, \quad c = k$;

б) $a = i + j, \quad b = j - k, \quad c = k$;

в) $a = i + k, \quad b = j + 2k, \quad c = 2i$;

г) $a = j - 2k, \quad b = i + k, \quad c = 2i$?

2. Выясните, компланарны ли векторы a, b, c:

а) $a = i + 2j - k, \quad b = 9i - 11j + 13k, \quad c = 2i + 4j - 2k$;

б) $a = 8i - 3j + 2k, \quad b = 2j - k, \quad c = i + 2j + 3j$;

в) $a=(-2,-1,1)$, $b=(4,-4,1)$, $c=(4,-6,2)$;

г) $a=(1,1,1)$, $b=(1,0,1)$, $c=(0,1,1)$.

3. Вычислите смешанное произведение $a\,b\,c$ и укажите, какой тройкой (правой или левой) является тройка векторов (a,b,c):

а) $a=i+2j+k$, $b=i+2j-k$, $c=8i+6j+4k$;

б) $a=i+2j+3k$, $b=3i+j+2k$, $c=2i+3j+k$;

в) $a=(13,12,11)$, $b=(24,23,22)$, $c=(35,34,33)$;

г) $a=(1,3,5)$, $b=(2,4,6)$, $c=(8,9,7)$.

4. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах a,b,c, отложенных от некоторой точки:

а) $a=8i+3j-2k$, $b=3j-k$, $c=4i$;

б) $a=i-5j+3k$, $b=-5i+2j+5k$, $c=-3i-2j-2k$;

в) $a=(5,-3,2)$, $b=(-6,3,4)$, $c=(-8,6,-5)$;

г) $a=(-1,3,4)$, $b=(2,5,2)$, $c=(1,2,3)$.

5. Выясните, при каком значении α компланарны векторы a,b,c, если:

а) $a=(\alpha+1)i+7j-3k$, $b=i+\alpha j-k$, $c=8i+3j-7k$;

б) $a=i+\alpha j+k$, $b=i+(\alpha+1)j+k$, $c=i+\alpha j-k$;

в) $a=i-2j+k$, $b=7i+\alpha j-13k$, $c=3i+j-2k$.

6. Вычислить объем треугольной пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;-2;-7)$, $C(5;1;-1)$, $D(1;4;-3)$.

7. Вычислить длину высоты H_D треугольной пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(3;2;1)$, $B(4;0;-1)$, $C(2;-1;0)$, $D(4;2;5)$.

8. Определите длину высоты параллелепипеда $ABCD\,A'B'C'D'$, если $\vec{AB}\in a=(-1,2,5)$, $\vec{AD}\in b=(4,-3,2)$, $\vec{AA'}\in c=(2,1,-1)$ и основанием его служит параллелограмм $ABCD$.

9. В треугольной пирамиде $ABCD$ $\vec{AB} \in a = (3, 2, -1)$, $\vec{AC} \in b = (1, 4, -2)$, $\vec{AD} \in c = (-2, 3, 4)$. Вычислите:

а) объем пирамиды;

б) площади граней;

в) длину высоты D_H;

г) косинус угла, образованного гранями (ABC) и (ABD).

10. Проверить, лежат ли точки A, B, C, D в одной плоскости, если:

а) $A(0; 2; -1)$, $B(3; 1; 1)$, $C(2; -1; 0)$, $D(-4; 1; 2)$;

б) $A(5; 5; 4)$, $B(3; 8; 4)$, $C(3; 5; 10)$, $D(5; 8; 2)$;

в) $A(3; 1; 4)$, $B(-1; 1; 6)$, $C(5; 2; 2)$, $D(-1; 6; 1)$.

11. Объем пирамиды с вершинами точках $A(4; 1; -2)$, $B(6; 3; 7)$, $C(2,3,1)$, $D(x; -4; 8)$ равен $51\frac{1}{3}$ куб. ед. Найти x.

12. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $a = 3e_1 + 2e_2$, $b = 4e_1 - 5e_2$, $c = [a, b]$, если $|e_1| = 2$, $|e_2| = 1$, $(e_1 \hat{,} e_2) = \pi/6$.

13. Доказать, что $|(a, b, c)| \leq |a| \cdot |b| \cdot |c|$. В каком случае имеет место равенство?

14. Упростить выражение:

а) $(a + b, b + c, c)$;

б) $(a + b + c, a - b + c, a - b - c)$.

15. Объем треугольной пирамиды равен 9 куб. ед. Три его вершины находятся в точках $A(4; -1; 2)$, $B(5; 1; 4)$ и $C(3; 2; -1)$. Найдите координаты четвёртой вершины D, если она находится на оси OZ.

Ответы

1) а), в) – левая; б), г) – правая. 2) а), в) – компланарны; б), г) – нет. 3) а) –20; б) 18; в) 0; г) 6. 4) а) 12 куб. ед.; б) 179 куб.ед.; в) 33 куб. ед.; г) 27 куб.ед. 5) а) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 13/7$; б) ни при каком α; в) $\alpha = 14$. 6) 12 куб. ед.

7) $\frac{12\sqrt{2}}{5}$. 8) $\frac{65}{\sqrt{870}}$. 9) а) $\frac{55}{6}$; б) $S_{ABC}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$, $S_{ABD}=\frac{1}{2}\sqrt{390}$, $S_{ACD}=\frac{11\sqrt{5}}{2}$, $S_{BCD}=\frac{1}{2}\sqrt{410}$; в) $\frac{11\sqrt{5}}{5}$; г) $\cos\left((ABC)\hat{,}(ABD)\right)=\frac{8\sqrt{78}}{195}$. 10) а) Да; б) нет; в) да. 11) $x_1=-5$, $x_2=46\frac{1}{3}$. 12) 529 куб. ед. 13) Равенство имеет место тогда и только тогда, когда a, b, c попарно ортогональны. 14) а) (a,b,c); б) $4(a,b,c)$. 15) $D(0,0,3)$

.

Оглавление