3434

Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 1 ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Минск 2008

Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 1 ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов заочного отделения
экономических специальностей

Минск 2008

УДК 51~~9.85 (075.8)~~

~~ББК 18.87я7~~

М 54

Составитель Л.Д. Матвеева

Рецензенты:

В.В. Карпук, Н.А. Шавель

Настоящее издание включает в себя программы и контрольные задания по темам «Элементы линейной алгебры», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной» и «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных».

Каждое задание состоит из 30 контрольных вариантов. Все темы содержат основные теоретические сведения и примеры решения типовых задач.

Издание содержит список экзаменационных вопросов и рекомендуемой литературы.

Методические указания предназначены для студентов экономических специальностей заочного отделения БНТУ. Они могут быть также полезны преподавателям, ведущим практические занятия по данному курсу.

Тема 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Матрицы. Сложение матриц; умножение матрицы на число; произведение матриц. Обратная матрица.

2. Определители n-го порядка и их свойства. Методы вычисления определителей.

3. Обратная матрица.

4. Ранг матрицы.

5. Решение невырожденных систем линейных уравнений.

6. Теорема Кронекера – Капелли. Решение произвольных линейных систем.

1.1. Решение невырожденных систем линейных уравнений

Пусть задана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $a_{ij}, b_i \in R$ – заданные числа, x_j – неизвестные, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.

Решением системы (1.1) называется такое множество значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ..., $x_n = c_n$, при которых каждое уравнение обращается в тождество.

Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**, а система, не имеющая решений – **несовместной**.

Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называются **матрицей системы** и **расширенной** матрицей системы соответственно.

Рассмотрим случай, когда число уравнений m системы совпадает с числом неизвестных n ($m = n$). Тогда матрица системы A является квадратной матрицей порядка n.

Система n уравнений с n неизвестными называется **невырожденной**, если определитель матрицы системы A отличен от нуля ($\det A \ne 0$).

Обозначим

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Невырожденная система имеет единственное решение. Существует два метода решения таких систем.

1. Правило Крамера. Если определитель Δ отличен от нуля, то решение системы находится по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{1.2}$$

где Δ_j $(j = \overline{1,n})$ – определитель, полученный из определителя Δ заменой j–го столбца столбцом свободных членов.

2. Матричный метод. Введем матрицу столбец свободных членов системы $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ и матрицу-столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Тогда систему n уравнений с n неизвестными можно записать в виде

$$A \cdot X = B. \tag{1.3}$$

Эта форма записи системы называется **матричной.**

Матрицей A^{-1}, **обратной к матрице** A размера $n \times n$, называется такая матрица, для которой справедливо равенство

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица n-го порядка.

Матрица, определитель которой не равен нулю, называется **невырожденной**.

Для того чтобы данная матрица имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной.

Рассмотрим уравнение (1.3). Пусть A – невырожденная матрица. Тогда решение системы можно найти по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{1.4}$$

Пример 1.1. Проверить невырожденность системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 7, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$ и решить ее: а) по формулам Крамера; б) матричным методом.

Решение. Запишем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Проверим невырожденность системы. Для этого вычисляем определитель Δ матрицы A:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система невырождена. Решаем ее

а) по формулам Крамера.

Вычисляем определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 11 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 5 & 11 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 5 & -3 & 11 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

По формулам (1.2) находим решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3.$$

Делаем проверку: $3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 7;\ 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 11;\ 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 3$.

б) матричным методом.

Находим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^c,$$

где A^c – союзная матрица, составленная из алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A.

$$A^c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \ A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где M_{ij} – определитель, полученный из определителя Δ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Имеем:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-4 & 4\\ -2 & 2\end{vmatrix}=0,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-4 & 4\\ -3 & 4\end{vmatrix}=-4,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 4\end{vmatrix}=8,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 5 & -3\end{vmatrix}=11.$$

Тогда получаем

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\ -6 & 2 & 8\\ -7 & 2 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -3 & 1 & 4\\ -\frac{7}{2} & 1 & \frac{11}{2}\end{pmatrix}.$$

По формуле (1.4) находим решение:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -3 & 1 & 4\\ -\frac{7}{2} & 1 & \frac{11}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\ 11\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$.

1.2. Решение произвольных систем линейных уравнений

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений (1.1).

Элементарными преобразованиями матрицы называются:

а) перестановка местами любых двух строк;

б) умножение строки на некоторое число $\alpha\neq 0$;

в) прибавление к одной строке матрицы любой другой строки, умноженной на некоторое число;

г) удаление нулевой строки.

Решение системы методом Жордана–Гаусса основано на следующем утверждении: *элементарные преобразования расширенной матрицы системы не изменяют множества решений системы.*

Суть метода заключается в том, чтобы при помощи элементарных преобразований привести расширенную матрицу к наиболее простому виду.

С помощью операции *в)* можно исключить какое-либо неизвестное из всех уравнений, кроме одного.

Переменная x_j называется **базисной** в i-м уравнении, если $a_{ij}=1,\ a_{sj}=0$ при $s\neq i,\ s=1, 2, \dots, m$.

Матрица системы с помощью элементарных преобразований приводится к так называемому базисному виду, если в каждом уравнении системы есть базисная переменная.

Если матрица системы приведена к базисному виду, то переменные, не являющиеся базисными, называются **свободными.**

Решение системы, полученное после приравнивания нулю всех свободных переменных, называется **базисным.**

Опишем одну итерацию метода Жордана–Гаусса.

В первой строке расширенной матрицы находим ненулевой элемент $a_{1j} \neq 0$. Если таковых нет, то в случае $b_1 = 0$ вычеркиваем данную нулевую строку; если $b_1 \neq 0$, то система несовместна.

Элемент a_{1j} называют **ведущим элементом.**

Если $a_{1j} \neq 1$, то делим первую строку расширенной матрицы на этот элемент a_{1j}. Ко всем строкам, кроме первой, прибавляем первую строку, умноженную на ($-a_{ij}$), где i – номер изменяемой строки.

После этой операции коэффициент при x_j в первом уравнении будет равен единице, а во всех остальных уравнениях – нулю. Следовательно, переменная x_j станет базисной.

Описанную итерацию проводим для остальных строк расширенной матрицы, пока не получим m базисных неизвестных (в каждом уравнении – по одной базисной переменной).

После этого находим общее решение и базисное (приравнивая свободные неизвестные нулю).

Пример 1.2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 13x_2 + 13x_3 + 5x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases}$$

методом Жордана–Гаусса. Найти общее и базисное решения.

Решение. Вычисления будем производить в таблице. В исходной части таблицы записываем расширенную матрицу системы.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
$\boxed{1}$	2	3	1	1
3	13	13	5	3
1	5	3	1	7
3	7	7	2	12

В первой строке выберем элемент $a_{11}=1$ ведущим. Выделим ведущий элемент рамкой. Изменяем вторую, третью и четвертую строки: ко второй строке по элементам прибавляем первую строку, умноженную на (-3), к третьей – первую строку, умноженную на (-1), и к четвертой – первую строку, умноженную на (-3). В результате получим таблицу, в которой переменная x_1 стала базисной.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	2	3	1	1
0	7	4	2	0
0	3	0	0	6
0	$\boxed{1}$	−2	−1	9

Выбираем элемент $a_{42}=1$ ведущим. С помощью элементарных преобразований получаем таблицу, в которой переменная x_2 стала базисной.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	7	3	−17
0	0	18	9	−63
0	0	6	$\boxed{3}$	−21
0	1	−2	−1	9

Выбираем, например, элемент $a_{34}=3$ ведущим и делим на него элементы третьей строки. Получаем таблицу

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	7	3	−17
0	0	18	9	−63
0	0	2	$\boxed{1}$	−7
0	1	−2	−1	9

.

Теперь делаем нули в остальных строках четвертого столбца. Получаем таблицу, в которой переменная x_4 стала базисной.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	1	0	4
0	0	0	0	0
0	0	2	1	−7
0	1	0	0	2

Удаляем вторую нулевую строку, получаем таблицу

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	1	0	4
0	0	2	1	–7
0	1	0	0	2

.

Поскольку каждое уравнение теперь содержит по одной базисной переменной, то оставшаяся небазисная переменная x_3 является свободной.

Полагаем $x_3 = c$. Из последней строки таблицы получаем $x_2 = 2$.

Из второй строки следует $2x_3 + x_4 = -7$, откуда находим $x_4 = -7 - 2x_3$ или $x_4 = -7 - 2c$.

Из первой строки следует $x_1 + x_3 = 4$, откуда получаем $x_1 = 4 - x_3$ или $x_1 = 4 - c$.

Выписываем общее решение: $(4 - c;\ 2;\ c;\ -7 - 2c,\ c \in R\ )$.

Найдем базисное решение. Положим $c = 0$. Тогда имеем $x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = -7$.

Сделаем проверку, подставляя найденное решение в исходную систему

$4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 7 = 1; \qquad 3 \cdot 4 + 13 \cdot 2 + 13 \cdot 0 + 5 \cdot (-7) = 3;$

$4 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-7) = 7;\ 3 \cdot 4 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 0 + 2 \cdot (-7) = 12.$

Ответ. Общее решение: $(4 - c;\ 2;\ c;\ -7 - 2c,\ c \in R\ )$, базисное решение: $x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = -7$.

Задание 1. *Проверить невырожденность системы линейных уравнений и решить ее: а) по формулам Крамера; б) матричным методом.*

1.1. $\begin{cases} x + 3y - z = 1, \\ 2x + 4y - z = 6, \\ 3x - 2y + 5z = 13. \end{cases}$ 1.2. $\begin{cases} 4x + 2y - z = 0, \\ x + 2y + z = 1, \\ y - z = 3. \end{cases}$ 1.3. $\begin{cases} x + y - z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 21, \\ 7x - y - 3z = 6. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 2x + z = 0, \\ -x + 2y - z = 2, \\ x + 2y + z = 3. \end{cases}$ 1.5 $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - z = 4, \\ 3x + y - 4z = 0. \end{cases}$ 1.6. $\begin{cases} 2x - y + 5z = 4, \\ 5x + 2y + 13z = 2, \\ 3x - y + 5z = 0. \end{cases}$

1.7 $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 6, \\ 3x - y + 5z = 10, \\ x + 2y - 4z = -7. \end{cases}$ 1.8. $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 12, \\ x - 4y + 3z = -22, \\ 3x - y - 2z = 0. \end{cases}$ 1.9 $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ x + z = 1, \\ 3x + y + 2z = 0. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} 3x+y=-6, \\ x-2y-z=5, \\ 3x+4y-2z=13. \end{cases}$ 1.11. $\begin{cases} 4x+2y-z=12, \\ x+2y+z=7, \\ y-z=-1. \end{cases}$ 1.12. $\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ 5x+8y-z=7, \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 2x+3y-z=4, \\ x+2y+2z=5, \\ 3x+4y-5z=2. \end{cases}$ 1.14. $\begin{cases} x+5y+z=0, \\ 2x-4y-3z=-1, \\ 3x+4y+2z=8. \end{cases}$ 1.15 $\begin{cases} 2x-y=-1, \\ x-2y-z=-2, \\ y+z=-2. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 3x+y+z=8, \\ x+2y-z=-2, \\ 2x-3y+2z=2. \end{cases}$ 1.17 $\begin{cases} 2x+y-z=0, \\ 3x+4z=6, \\ x+z=1. \end{cases}$ 1.18. $\begin{cases} 3x+2y+5z=-10, \\ 2x+5y-3z=6, \\ x+3y-6z=12. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} x-y-3z=13, \\ 2x+y-z=0, \\ 3x-2y+4z=-15. \end{cases}$ 1.20. $\begin{cases} 3x+4y+2z=8, \\ 2x-4y-3z=-1, \\ x+5y+z=0. \end{cases}$ 1.21. $\begin{cases} 5x+8y-z=7, \\ 2x-3y+2z=9, \\ x+2y+3z=1. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 4x+2y-z=12, \\ x+2y+z=7, \\ y-z=-1. \end{cases}$ 1.23. $\begin{cases} x+3y+3z=13, \\ 2x-3y+3z=-10, \\ x+z=0. \end{cases}$ 1.24. $\begin{cases} 2x+4y+3z=3, \\ 3x-2y+5z=13, \\ x+3y-z=-1. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 2x-4y+5z=4, \\ 5x+2y+13z=2, \\ 3x-y+5z=0. \end{cases}$ 1.26. $\begin{cases} 7x-y-3z=6, \\ 2x+3y-4z=21, \\ x+y-z=6. \end{cases}$ 1.27. $\begin{cases} 3x+y-4z=0, \\ x+2y+3z=6, \\ 2x+3y-z=4. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} 3x+4y+2z=8, \\ x+5y+2z=5, \\ 2x+3y+4z=3. \end{cases}$ 1.29. $\begin{cases} x+2y-4z=7, \\ 2x-3y+5z=11, \\ 3x-y+5z=10. \end{cases}$ 1.30. $\begin{cases} x+3y-6z=12, \\ 3x+2y+5z=-10, \\ 3x+5y-3z=6. \end{cases}$

Задание 2. *Решить систему линейных уравнений методом Жордана–Гаусса. Найти общее и базисное решения.*

2.1. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=5, \\ x_1-2x_2+x_3-4x_4=-4, \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4=2, \\ 4x_1-x_2-5x_4=-2. \end{cases}$ 2.2. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=5, \\ -x_1+3x_2+x_3-2x_4=1, \\ x_1+6x_2-x_4=6. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + x_2 - x_4 = 6. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 8, \\ 4x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 6, \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 5, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = -5, \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 12. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -3, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_4 = -2. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 + x_4 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 + 9x_2 - 9x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3-x_4=6, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=1, \\ 3x_1+x_2+5x_3-2x_4=7, \\ x_1-8x_2+4x_3+x_4=-2. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+3x_4=7, \\ x_1+2x_2-x_3-x_4=1, \\ x_1-x_2+2x_3+4x_4=6, \\ 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 3x_1+3x_2-x_3-2x_4=3, \\ x_1+5x_2+x_3-3x_4=4, \\ 2x_1-2x_2-2x_3+x_4=-1, \\ 3x_1-3x_2+2x_3-x_4=1. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+4x_4=3, \\ 4x_1+x_2+x_3-2x_4=4, \\ 2x_1+5x_2-2x_3-x_4=4, \\ 3x_1+2x_2+2x_3-6x_4=1. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3-x_4=6, \\ x_1-x_2+x_3+3x_4=4, \\ x_1+3x_2+2x_3-4x_4=2, \\ 5x_1+x_2-2x_3+x_4=5. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3-x_4=4, \\ x_1+2x_2+x_3+3x_4=7, \\ x_1-x_2+x_3-4x_4=-3, \\ 2x_1-2x_2+5x_3-x_4=5. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} 2x_1+4x_2-4x_3+x_4=3, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ 3x_1+5x_2-x_3+x_4=8, \\ x_1+x_2+3x_3=5. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} 3x_1-5x_2-x_3+x_4=-2, \\ 2x_1-x_2-2x_3+4x_4=3, \\ 5x_1-6x_2-3x_3+5x_4=1, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4=-1. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} 3x_1+5x_2-8x_3+2x_4=2, \\ x_1-3x_2-2x_3+x_4=-3, \\ 3x_1+x_2+x_3-5x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+3x_3-6x_4=3. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} 2x_1+x_2+6x_3-5x_4=4, \\ x_1+2x_2+2x_3-x_4=4, \\ 2x_1+2x_2-5x_3-x_4=-2, \\ 3x_1+4x_2-3x_3-2x_4=2. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} 4x_1-x_2-x_3-x_4=1, \\ 3x_1-2x_2-2x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3-2x_4=1, \\ 5x_1-3x_4=2. \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} 4x_1+2x_2-3x_3-x_4=2, \\ 5x_1+x_2-2x_3-x_4=3, \\ x_1+8x_2+x_3-5x_4=5, \\ 3x_1-6x_2-4x_3+4x_4=-3. \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+10x_3-6x_4=4, \\ x_1-5x_2+5x_3+x_4=2, \\ x_1-3x_2+x_3-x_4=-2, \\ 2x_1-8x_2+6x_3=0. \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} 7x_1-5x_2+2x_3-8x_4=-4, \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4=3, \\ 2x_1+2x_2-3x_3+x_4=2, \\ 2x_1+x_2-x_3=5. \end{cases}$

Тема 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Векторы на плоскости и в пространстве. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на скаляр. Проекция вектора на ось.

2. Система декартовых прямоугольных координат в пространстве. Проекции вектора на оси координат. Направляющие косинусы вектора. Длина и координаты вектора. Действия над векторами в координатной форме.

3. Скалярное произведение векторов. Его свойства и приложение.

4. Векторное произведение двух векторов. Его свойства и приложение. Условие компланарности трех векторов.

5. Смешанное произведение трех векторов. Его свойства и приложение.

6. Различные уравнения плоскости. Уравнения прямой на плоскости и в пространстве.

7. Взаимное расположение плоскостей и прямых. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

8. Расстояние от точки до прямой и плоскости.

9. Кривые второго порядка. Эллипс, гипербола, парабола. Вывод канонических уравнений.

10. Канонические уравнения поверхностей второго порядка. Исследование формы поверхности методом сечений.

11. Векторное пространство. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Базис векторного пространства.

2.1. Векторы. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **число**, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi .$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a}=\left(a_x,\, a_y,\, a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x, b_y, b_z\right)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$.

Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (2.1)$$

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется **вектор**, обозначаемый символом $\left[\vec{a},\, \vec{b}\right]$ и удовлетворяющий следующим условиям:

а) $\left|\left[\vec{a},\, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, б) $\left[\vec{a},\, \vec{b}\right] \perp \vec{a},\, \vec{b}$,

в) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\left[\vec{a},\, \vec{b}\right]$ образуют правую тройку векторов.

Модуль векторного произведения $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ равен площади S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| \,. \qquad (2.2)$$

В координатной форме векторное произведение $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ находится по формуле

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}$ называется **число**, равное скалярному произведению вектора $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ на вектор $\vec{c}$. Обозначается смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

В векторной форме смешанное произведение $\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}$ находят по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Модуль смешанного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ равен объему V параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}$:

$$V = \left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right|. \qquad (2.3)$$

2.2. Плоскость и прямая в пространстве

Нормальным вектором плоскости называется всякий (отличный от нуля) вектор, перпендикулярный к этой плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ и имеющее нормальный вектор $\vec{n} = (A,\, B,\, C)$, в декартовых координатах имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \text{ или } Ax+By+Cz+D=0, \qquad (2.4)$$

где $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

Уравнение (2.4) называют **общим уравнением плоскости**.

Если все коэффициенты уравнения (2.4) отличны от нуля, то его можно преобразовать к виду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (2.5)$$

где $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$ – величины отрезков, отсекаемых на координатных осях. Уравнение (2.5) называется **уравнением плоскости в отрезках.**

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (2.6)$$

Направляющим вектором прямой называется вектор, лежащий на прямой или параллельный ей.

Пусть $\vec{s}=(m,n,p)$ – направляющий вектор прямой, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит прямой. Тогда уравнения прямой вида

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (2.7)$$

называют **каноническими уравнениями прямой в пространстве.**

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, лежащие на прямой.

Уравнения вида

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (2.8)$$

называют **уравнениями прямой, проходящей через две заданные точки.**

Угол φ между прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (2.9)$$

Пример 2.1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3;\ 4;\ 5)$, $A_2(-2;\ 6;\ 1)$, $A_3(-3;-4;0)$, $A_4(5;-2;-1)$. Требуется найти: а) длину ребра A_1A_2; б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; в) площадь грани $A_1A_2A_3$; г) объем пирамиды; д) уравнение прямой A_1A_4; е) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; ж) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; и) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение. а) Длину ребра A_1A_2 определяем по формуле

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где $\overrightarrow{A_1A_2} = (x;\ y;\ z)$, $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$. В нашем случае $\overrightarrow{A_1A_2} = (-5;\ 2;\ -4)$. Тогда $\overrightarrow{A_1A_2} = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{25+4+16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

б) Угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 находим как угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$ по формуле (2.1): $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}$. Имеем $\overrightarrow{A_1A_2} = (-5;\ 2;\ -4)$, находим $\overrightarrow{A_1A_4} = (2;\ -6;\ -6)$.

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{-5\cdot 2 + 2\cdot(-6) + (-4)\cdot(-6)}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-6)^2}} = \frac{-10-12+24}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{4+36+36}} = \frac{2}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{76}} = \frac{1}{3\sqrt{95}}.$$

в) Площадь грани $A_1A_2A_3$ вычисляем как площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ (формула (2.2)): $S_{A_1A_2A_3} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2},\ \overrightarrow{A_1A_3}\right]\right|$. Имеем $\overrightarrow{A_1A_2} = (-5;\ 2;\ -4)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (-6;\ -8;\ -5)$,

$$\left[\overrightarrow{A_1A_2},\ \overrightarrow{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 2 & -4 \\ -6 & -8 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -8 & -5 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = -42\vec{i} - \vec{j} + 52\vec{k}.$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(-42)^2 + (-1)^2 + 52^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4469}\ \text{ед}^2.$$

г) Объем пирамиды найдем по формуле (2.3): $V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|$.

Имеем $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix}-5 & 2 & -4\\ -6 & -8 & -5\\ 2 & -6 & -6\end{vmatrix}=-390$.

Отсюда $V=\frac{1}{6}\left|-390\right|=65$ *(ед³)*.

д) Уравнения прямой A_1A_4 найдем по формуле (2.8):

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-4}{-2-4}=\frac{z-5}{-1-5}\text{ или }\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z-5}{-6}.$$

е) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ определяем по формуле (2.6):

$$\begin{vmatrix}x-3 & y-4 & z-5\\ -2-3 & 6-4 & 1-5\\ -3-3 & -4-4 & 0-5\end{vmatrix}=0\text{ или }\begin{vmatrix}x-3 & y-4 & z-5\\ -5 & 2 & -4\\ -6 & -8 & -5\end{vmatrix}=0.$$

Отсюда

$$\begin{vmatrix}2 & -4\\ -8 & -5\end{vmatrix}\cdot(x-3)-\begin{vmatrix}-5 & -4\\ -6 & -5\end{vmatrix}\cdot(y-4)+\begin{vmatrix}-5 & 2\\ -6 & -8\end{vmatrix}\cdot(z-5)=0,$$

$-42(x-3)-(y-4)+52(z-5)=0,\quad -42x+126-y+4+52z-260=0,$

$42x+y-52z+130=0.$

ж) Угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ находим как угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ по формуле (2.9). В нашем случае $\vec{s}=\overrightarrow{A_1A_4}=(2;-6;-6)$, $\vec{n}=(42;1;-52)$. Тогда

$$\sin\varphi=\frac{\left|42\cdot 2+1\cdot(-6)+(-52)\cdot(-6)\right|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+(-6)^2}\sqrt{42^2+1^2+(-52)^2}}=\frac{\left|84-6+312\right|}{\sqrt{76}\cdot\sqrt{4469}}=\frac{390}{2\sqrt{19}\cdot\sqrt{4469}}.$$

и) Уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, определяем как уравнение прямой, проходящей через $A_4(5;-2;-1)$ перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$. Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$42x+y-52z+130=0$. Тогда имеем $\vec{s}=(42; 1; -52)$. По формуле (2.7) получаем $\dfrac{x-5}{42}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-52}$.

Задание 3. *Даны координаты* $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$ *вершин пирамиды. Найти: 1) длину ребра* A_1A_2*; 2) угол между ребрами* A_1A_2 *и* A_1A_4*; 3) угол между ребром* A_1A_4 *и гранью* $A_1A_2A_3$*; 4) площадь грани* $A_1A_2A_3$*; 5) объем пирамиды; 6) уравнение высоты, опущенной из вершины* A_4 *на грань* $A_1A_2A_3$*; 7) уравнение плоскости* α*, проходящей через высоту пирамиды, опущенную из вершины* A_4 *на грань* $A_1A_2A_3$ *и вершину* A_1 *пирамиды; 8) расстояние от вершины* A_3 *до плоскости* α*.*

3.1. $A_1(7; 1; 2)$, $A_2(-5; 3; -2)$, $A_3(3; 3; 5)$, $A_4(4; 5; -1)$.

3.2. $A_1(-2; 3; -2)$, $A_2(2; -3; 2)$, $A_3(2; 2; 0)$, $A_4(1; 5; 5)$.

3.3. $A_1(3; 1; 1)$, $A_2(2; 4; 1)$, $A_3(1; 1; 7)$, $A_4(3; 4; -1)$.

3.4. $A_1(4; -3; -2)$, $A_2(2; 2; 3)$, $A_3(2; -2; -3)$, $A_4(-1; -2; 3)$.

3.5. $A_1(5; 1; 0)$, $A_2(7; 0; 1)$, $A_3(2; 1; 4)$, $A_4(5; 5; 3)$.

3.6. $A_1(4; 2; -1)$, $A_2(3; 0; 4)$, $A_3(0; 0; 4)$, $A_4(5; -1; 3)$.

3.7. $A_1(0; 1; 2)$, $A_2(3; 0; 5)$, $A_3(1; 1; 2)$, $A_4(4; 1; 2)$.

3.8. $A_1(4; 1; -2)$, $A_2(1; 2; 1)$, $A_3(3; 0; 5)$, $A_4(1; 1; 0)$.

3.9. $A_1(1; 1; 2)$, $A_2(2; 1; 3)$, $A_3(0; 2; 1)$, $A_4(5; 1; 3)$.

3.10. $A_1(3; 1; 0)$, $A_2(0; 7; 2)$, $A_3(-1; 0; -5)$, $A_4(4; 1; 5)$.

3.11. $A_1(1; -1; 1)$, $A_2(0; 2; 4)$, $A_3(1; 3; 3)$, $A_4(5; 2; 3)$.

3.12. $A_1(1; -1; 2)$, $A_2(2; 1; 1)$, $A_3(7; 1; 2)$, $A_4(4; 2; -3)$.

3.13. $A_1(1; -3; 1)$, $A_2(4; 1; 0)$, $A_3(1; 0; -5)$, $A_4(5; 2; 1)$.

3.14. $A_1(3; 2; 1)$, $A_2(5; 4; 0)$, $A_3(2; -1; 4)$, $A_4(2; 2; 3)$.

3.15. $A_1(2; 1; 1)$, $A_2(-4; 0; 2)$, $A_3(3; 1; 1)$, $A_4(5; 2; 2)$.

3.16. $A_1(1; 0; 1)$, $A_2(3; 2; 1)$, $A_3(-3; 1; -1)$, $A_4(0; 1; 5)$.

3.17. $A_1(2; 2; 3)$, $A_2(2; -1; 1)$, $A_3(0; 2; 2)$, $A_4(5; 1; 3)$.

3.18. $A_1(2; 1; -3)$, $A_2(3; 1; -2)$, $A_3(7; 0; 1)$, $A_4(3; -2; 0)$.

3.19. $A_1(3; 3; 9)$, $A_2(6; 9; 0)$, $A_3(1; 7; 4)$, $A_4(8; 5; 7)$.

3.20. $A_1(3; 5; 4)$, $A_2(5; 8; 2)$, $A_3(1; 9; 7)$, $A_4(6; 4; 3)$.

3.21. $A_1(2; 4; 3)$, $A_2(7; 6; 2)$, $A_3(4; 9; 1)$, $A_4(3; 6; 8)$.

3.22. $A_1(0; 7; 1)$, $A_2(4; 1; 4)$, $A_3(4; 6; 3)$, $A_4(6; 9; 1)$.

3.23. $A_1(5; 5; 3)$, $A_2(3; 8; 1)$, $A_3(3; 5; 8)$, $A_4(5; 8; 1)$.

3.24. $A_1(6; 1; 1)$, $A_2(4; 6; 8)$, $A_3(3; 5; 10)$, $A_4(1; 2; 8)$.

3.25. $A_1(7;\ 0;\ 3)$, $A_2(9;\ 4;\ 3)$, $A_3(4;\ 5;\ 0)$, $A_4(-2;\ 0;\ -4)$.
3.26. $A_1(0;\ 0;\ 2)$, $A_2(9;\ 3;\ 1)$, $A_3(5;\ 7;\ 2)$, $A_4(3;\ 6;\ 1)$.
3.27. $A_1(1;\ -3;\ 1)$, $A_2(7;\ 6;\ 0)$, $A_3(4;\ 2;\ 0)$, $A_4(1;\ 2;\ 0)$.
3.28. $A_1(0;\ 0;\ 1)$, $A_2(-2;\ 11;\ -5)$, $A_3(1;\ 2;\ 4)$, $A_4(0;\ 6;\ 4)$.
3.29. $A_1(3;\ 2;\ 2)$, $A_2(1;\ 2;\ 1)$, $A_3(2;\ 0;\ 3)$, $A_4(4;\ 1;\ 5)$.
3.30. $A_1(3;\ 5;\ 3)$, $A_2(0;\ 7;\ 2)$, $A_3(1;\ 1;\ 4)$, $A_4(3;\ 2;\ 1)$.

Тема 3. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Понятие числовой последовательности и ее предела.
2. Предел функции в точке. Основные теоремы о пределе суммы, произведения и частного.
3. Замечательные пределы.
4. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация.
5. Понятие производной, ее геометрический смысл.
6. Производная суммы, произведения, частного.
7. Дифференциал и его геометрический смысл.
8. Производная функции, заданной неявно и параметрически.
9. Производные и дифференциалы высших порядков.
10. Возрастание и убывание графика функции. Экстремум.
11. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба.
12. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

3.1. Предел функции. Основные способы вычисления пределов

Число A называют **пределом функции** $y = f(x)$ при $x \to a$ (или в точке a), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначают предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы в точке $x = a$, то:

$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\quad \lim_{x\to a} g(x)\neq 0.$$

Функция $y=f(x)$ называется **бесконечно малой** в точке $x=a$, если ее предел в этой точке равен нулю: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Функция $y=f(x)$ называется **бесконечно большой** в точке $x=a$, если для любого числа $M>0$ существует такое число $\delta(M)>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$. При этом записывают $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

При нахождении предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в случае, когда $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми (бесконечно большими) функциями в точке $x=a$, говорят, что отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$ представляет собой **неопределенность вида** $\dfrac{0}{0}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Аналогично вводятся неопределенности вида $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, которые встречаются при нахождении соответственно пределов $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))$ и $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$. Отыскание предела в таких случаях называют раскрытием неопределенности.

При решении задач используют:

а) **первый замечательный предел:**

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1;$$

б) **второй замечательный предел:**

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$$

или

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;$$

в) **некоторые важные пределы:**

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\ln a,\qquad \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=1,$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1,\qquad \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{(1+\alpha(x))^p-1}{\alpha(x)}=p.$$

г) **эквивалентность бесконечно малых функций.**

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции в точке $x = a$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми функциями, что обозначается так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Т е о р е м а. Предел отношения двух бесконечно малых функций при $x \to a$ не изменится, если каждую из них или только одну заменить другой эквивалентной бесконечно малой функцией.

При замене бесконечно малой функции эквивалентной используют таблицу эквивалентных бесконечно малых функций при $x \to a$:

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 2. $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 3. $\mathrm{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
4. $\mathrm{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 5. $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$; 6. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$.

Рассмотрим основные методы раскрытия неопределенностей $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример 3.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 7}{x^4 + 6x^2 - 8}$.

Решение. Имеем неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{7}{x^4}\right)}{x^4\left(1 + \dfrac{6}{x^2} - \dfrac{8}{x^4}\right)} = 2.$$

Пример 3.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = 0$.

Пример 3.3.Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - 12x + 16}$.

Решение. Имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Выделим в числителе и в знаменателе одинаковый множитель $x-2$. Для этого разложим числитель и знаменатель на сомножители. Имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 12x + 16} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)^2(x+4)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{(x-2)(x+4)} = \frac{3}{0} = \infty.$$

Пример 3.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{5x}$.

Решение. Имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Умножаем числитель и знаменатель на сопряженное выражение $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{5x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{5x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{5\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{1}{20}.$$

Пример 3.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$.

Решение. Имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Используем первый замечательный передел. В нашем случае $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}=1,\left(\alpha(x)=x-2\to 0\right)$.

Следовательно, получаем $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$.

Пример 3.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-5)}{2x-10}$.

Решение. Имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Заменим бесконечно малую функцию $\operatorname{arctg}(x-5)$ при $x\to 5$ эквивалентной бесконечно малой функцией $\alpha(x)=x-5$. Получаем

$$\lim_{x\to 5}\frac{\operatorname{arctg}(x-5)}{2x-10}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\operatorname{arctg}(x-5)\sim x-5\right|=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{2(x-5)}=\frac{1}{2}.$$

Неопределенности вида $\infty-\infty$ и $0\cdot\infty$ преобразуются к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 3.7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Приведем две дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{-(x-1)(x+1)}=$$
$$=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 3.8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразуем выражение:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\operatorname{ctg}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sim\frac{\pi}{2}-x\right|=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\frac{\pi}{2}-x}=1.$$

Для раскрытия неопределенности вида 1^{∞} применяют второй замечательный предел. Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$, а $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. Тогда имеем

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=(1^{\infty})=\lim_{x\to a}\left[\left(1+(f(x)-1)\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{(f(x)-1)\cdot g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)}.$$

Приходим к неопределенности вида $0\cdot\infty$.

Пример 3.9. Вычислить

$$\lim_{x\to2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}=(1^{\infty})=\lim_{x\to2}\left[\left(1+(2x-4)\right)^{\frac{1}{2x-4}}\right]^{\frac{(2x-4)\cdot x}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{2(x-2)\cdot x}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to1}2x}=e^{4}.$$

Пример 3.10. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2-5}\right)^{3x}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5+9}{x^2-5}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{x^2-5}\right)^{3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-5}{9}}\right)^{\frac{x^2-5}{9}}\right]^{\frac{9}{x^2-5}\cdot3x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{27x}{x^2-5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{27}{x}}{1-\frac{5}{x^2}}}=e^{0}=1.$$

Производной функции $y=f(x)$ **в точке** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной называется **дифференцированием**.

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ и имеют производные в некоторой точке x, то **основные правила дифференцирования** выражаются формулами:

$(cu)'=c\cdot u'$; $\quad \left(\dfrac{u}{c}\right)'=\dfrac{u'}{c}$ $\quad (c=\text{const})$;

$(u+v)'=u'+v'$; $\quad (u\cdot v)'=u'\cdot v+v'u$; $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$, $v\neq 0$.

Таблица основных производных

1. $\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$ $\quad (\alpha\in R)$
2. $\left(a^{u}\right)'=a^{u}\cdot\ln a\cdot u'$
3. $\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'$
4. $\left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$
5. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
6. $\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$
7. $(\operatorname{tg} u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
8. $\left(\operatorname{ctg} u\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
9. $(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
10. $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
11. $(\operatorname{arctg} u)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
12. $\left(\operatorname{arcctg} u\right)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Правило дифференцирования сложной функции

Если $y=f(u)$ и $u=g(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная функции от функции (или сложной функции) $y=f(\varphi(x))$ существует и равна произведению производной данной функции y по промежуточному аргументу и производной промежуточного аргумента u по независимой переменной x:

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

Пример 3.11. Найти производную функции $y=\sin^3\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

Это сложная степенная функция, аргумент которой является сложной тригонометрической функцией.

Первый промежуточный аргумент $u=\sin z$, второй $z=\dfrac{x}{3}$.

Так как $y'_u=\left(u^3\right)'=3u^2=3\sin^2\dfrac{x}{3}$, $u'_z=\left(\sin z\right)'=\cos z=\cos\dfrac{x}{3}$,

$z'_x=\left(\dfrac{x}{3}\right)'=\dfrac{1}{3}$, то $\left(\sin^3\dfrac{x}{3}\right)'=3\sin^2\dfrac{x}{3}\cdot\cos\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\sin^2\dfrac{x}{3}\cdot\cos\dfrac{x}{3}$.

Дифференцирование неявных функций

Пусть функция $y=y(x)$ задана уравнением $F(x,y)=0$. В этом случае говорят, что функция y задана неявно.

Производная $y'=y'(x)$ может быть найдена из уравнения $F'_x=0$, где $F=F(x,y)$ рассматривается как сложная функция от переменной x.

<u>**Пример 3.12.**</u> Найти производную функции $x^3-4xy+3y^2-2=0$, заданной неявно.

Дифференцируем это равенство по x, считая, что y – функция от x: $3x^3-4y-4x\cdot y'+6y\cdot y'=0$. Отсюда $y'=\dfrac{4y-3x^2}{6y-4x}$.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция $y=y(x)$ задана параметрически: $x=x(t),\ y=y(t), t\in T$.

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ - дифференцируемые функции и $x'(t)\neq 0$. Тогда имеем:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (3.1)$$

<u>**Пример 3.13.**</u> Найти производную функции $\begin{cases} x=\sin^2 t \\ y=\cos t \end{cases}$.

Решение. Находим $x'_t=\left(\sin^2 t\right)'=2\sin t\cdot\cos t$, $y'_t=\left(\cos t\right)'=-\sin t$. Тогда по формуле (3.1) получаем

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-\sin t}{2\sin t\cos t}=\frac{-1}{2\cos t}.$$

Дифференцирование степенно-показательной функции

Пусть $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x) > 0$, $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции по x.

Производная степенно-показательной функции находится с помощью предварительного логарифмирования.

Пример 3.14. Найти производную функции $y = (\text{arcctg } x)^{x^2}$

Логарифмируем данное равенство по основанию e:

$$\ln y = x^2 \cdot \ln(\text{arcctg } x).$$

Дифференцируя обе части последнего равенства по x как сложную функцию получаем:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2x \cdot \ln(\text{arcctg}x) + x^2 \cdot \frac{1}{\text{arcctg}x}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right).$$

Откуда находим

$$y' = y \cdot \left(2x \cdot \ln(\text{arcctg}x) - \frac{x^2}{\text{arcctg}x(1+x^2)}\right),$$

или

$$y' = (\text{arcctg}x)^{x^2} \cdot \left(2x \cdot \ln(\text{arcctg}x) - \frac{x^2}{\text{arcctg}x(1+x^2)}\right).$$

3.2. Производные высших порядков

Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $y' = f'(x)$ (которую называют первой производной).

Рассмотрим функцию $y = y(x)$ заданную параметрически: $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in T$. Имеем $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. Тогда по формуле (3.1) получаем

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \qquad (3.2)$$

Пример 3.15. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Решение. Находим $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a \cdot \sin t$. По формуле (3.1) получаем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

Находим

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)' = \frac{\cos t(1-\cos t) - \sin t \cdot \sin t}{(1-\cos t)^2} = \frac{\cos t - (\cos^2 t + \sin^2 t)}{(1-\cos t)^2} =$$

$$= \frac{\cos t - 1}{(\cos t - 1)^2} = \frac{1}{\cos t - 1}.$$

По формуле (3.2) получаем

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{\cos t - 1}}{a(1-\cos t)} = \frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

3.3. Исследование функций и построение графиков

Если для двух любых значений аргумента x_1 и x_2 $(x_1 \neq x_2)$, взятых из области определения функции, из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что

а) $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется **возрастающей**;

б) $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция называется **неубывающей**;

в) $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется **убывающей**;

г) $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функция называется **невозрастающей**.

Возрастающие, неубывающие, убывающие и невозрастающие функции называются **монотонными**. Возрастающие и убывающие функции называются **строго монотонными**.

Признак монотонности и строгой монотонности функции. Функция $f(x)$, дифференцируемая на $(a\,;\,b)$, возрастает (убывает) на $(a\,;\,b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) \ge 0$ $(f'(x) \le 0)$ $\forall\, x \in (a\,;\,b)$; если при этом не существует интервала $(\alpha;\ \beta) \subset (a\,;\,b)$, такого, что $f'(x) = 0$ $\forall\, x \in$ $(\alpha;\ \beta)$, то $f(x)$ строго возрастает (убывает) на $(a\,;\,b)$.

Значение $f(x_0)$ называется **локальным максимумом (минимумом) функции** $f(x)$, если существует такая δ – окрестность точки x_0, что $\forall\, x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ и $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием **локальный экстремум**.

Необходимое условие экстремума: если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет локальный экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Внутренние точки множества $D(f)$, в которых $f(x)$ непрерывна, а ее производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются **критическими точками** функции $f(x)$.

Первое достаточное условие локального экстремума. Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой δ – окрестности критической точки x_0, кроме, может быть самой точки x_0, а $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ при $x_0 - \delta < x < x_0$, и $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то в точке x_0 функция имеет локальный максимум (минимум).

Второе достаточное условие локального экстремума. Если в критической точке x_0 функция $f(x)$ дважды дифференцируема и $f''(x_0) < 0$ $(f''(x_0) > 0)$, то в этой точке функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум).

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется **выпуклым (вогнутым)** на $(a\,;\,b)$, если он на этом интервале расположен ниже (выше) касательной, проведенной в любой его точке $M(x\,;\,f(x))$, где $x \in (a\,;\,b)$.

Если функция $f(x)$ в интервале $(a\,;\,b)$ дважды дифференцируема и $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ $\forall x \in (a\,;\,b)$, то график функции в этом интервале выпуклый (вогнутый).

Точка M_0 графика непрерывной функции, отделяющая его выпуклую (вогнутую) часть от вогнутой (выпуклой), называется **точкой перегиба**.

Достаточное условие существования точки перегиба. Если вторая производная $f''(x)$ функции $f(x)$ в точке x_0 равна нулю или не существует и меняет знак при переходе через эту точку, то $M_0(x_0\,;\,f(x_0))$ – точка перегиба графика функции $y = f(x)$.

Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка этой кривой при неограниченном удалении от начала координат.

Различают вертикальные и невертикальные асимптоты. Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции, если хотя бы один из односторонних пределов функции $y = f(x)$ в точке a равен бесконечности: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Прямая $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Если существуют пределы: $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \dfrac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (f(x) - kx) = b$,

то уравнение $y = kx + b$ определяет наклонную асимптоту.

Если $k = 0$, то $y = b$ – горизонтальная асимптота.

Построение графика функции

Исследование функции и построение ее графика можно проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность (нечетность) и периодичность. Найти точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти точки разрыва функции и асимптоты кривой.
4. Определить интервалы монотонности и локальные экстремумы функции.
5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции.
6. Построить график функции.

Пример 3.16. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ и построить ее график.

Решение. 1. Находим область определения $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Поскольку $f(-x)\neq -f(x)$, $f(x+T)\neq f(x)$, то функция не является четной, нечетной и периодической.

Находим точки пересечения с осями координат:

а) так как $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}\neq 0$, то график функции не пересекает ось Ox;

б) при $x=0$ график функции пересекает ось Oy в точке $y=-1$.

3. Функция не определена в точке $x=1$. Поскольку $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2+1}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2+1}{x-1}=+\infty$, то $x=1$ – точка разрыва второго рода. Так как $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\pm\infty$, то прямая $x=1$ есть вертикальная асимптота.

Далее находим

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x-1)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=1.$$

Следовательно, прямая $y=x+1$ есть наклонная асимптота.

4. Вычислим $y'=\dfrac{2x(x-1)-x^2-1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.

Первая производная не существует в точке $x=1$, которая не принадлежит области определения $D(y)$ и, следовательно, не является критической точкой.

При $y'=0$ получаем $x^2-2x-1=0$ или $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=1+\sqrt{2}$. Точки x_1 и x_2 являются критическими (стационарными) точками.

Определим интервалы монотонности из неравенств $y'>0$ и $y'<0$ $\forall x \in D(y)$:

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}>0 \text{ при } x\in\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2};+\infty\right);$$

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}<0 \text{ при } x\in\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right).$$

Следовательно, функция возрастает при $x\in\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$ и убывает при $x\in\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$.

В точке $x=1-\sqrt{2}$ функция имеет максимум $y_{\max}=y\left(1-\sqrt{2}\right)=$ $=-2\sqrt{2}+2\approx-0{,}83$.

В точке $x=1+\sqrt{2}$ функция имеет минимум $y_{\min}=y\left(1+\sqrt{2}\right)=$ $=2\sqrt{2}+2\approx 4{,}83$.

5. Находим

$$y''=\left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}=$$

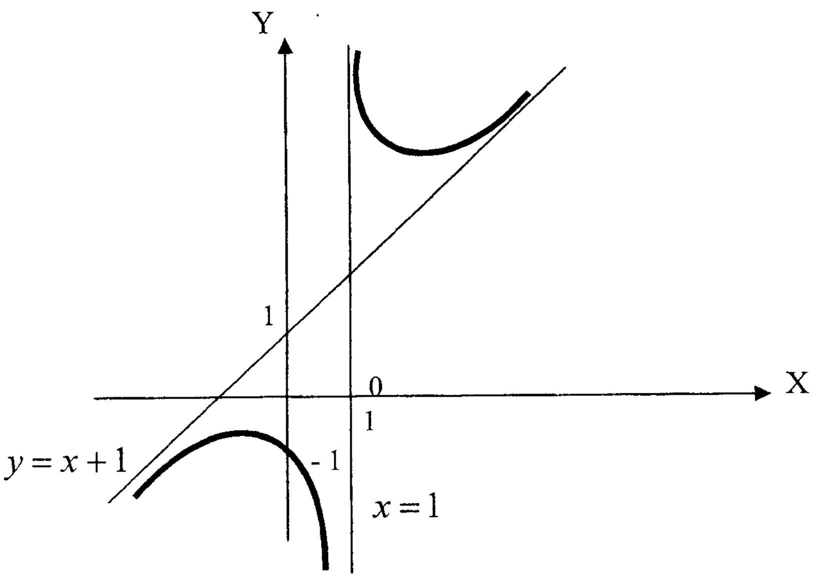
$$=\frac{(x-1)(2x^2-4x+2-2x^2+4x+2)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}.$$

Определяем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции из неравенств $y''>0$, $y''<0$, $\forall x\in D(y)$. Имеем $y''>0$ при $x\in(1;+\infty)$, $y''<0$ при $x\in(-\infty;1)$. Следовательно, кривая выпукла на $(-\infty;1)$ и вогнута на $(1;+\infty)$. Так как $x=1$ не принадлежит области определения функции и $y''\neq 0$, $\forall x\in D(y)$, то точек перегиба нет.

Результаты исследования функции $y=f(x)$ заносим в таблицу.

x	$(-\infty;1-\sqrt{2})$	$1-\sqrt{2}$	$(1-\sqrt{2};1)$	1	$(1;1+\sqrt{2})$	$1+\sqrt{2}$	$(1+\sqrt{2};+\infty)$
y'	+	0	–	не сущ.	–	0	+
y''	–	–	–	не сущ.	+	+	+
y	↗	- 0,83 max	↘	не сущ.	↘	4,83 min	↗

6. Исходя из результатов таблицы строим график данной функции.



Задание 4. *Вычислить пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя–Бернулли.*

4.1. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x(x-1)}{4(x^2-1)}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{5x^2}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{10x}$.

4.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{3x^2+10x-8}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{8x^2}$, в) $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{4}{x}}$.

4.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-4x})$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 8x}{4x^3}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x-8}\right)^{2x+4}$.

4.4. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{4-4x}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{4x}}$.

4.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)^3}{8x^3+x-8}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{\sin 3x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}\right)^{3x+5}$.

4.6. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8x^2(x-2)}{3x^2-12}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}10x}{1-\cos 5x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{4}{7x}}$.

4.7. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^4-16}$, б) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{1-\dfrac{x^2}{\pi^2}}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}2x\cdot(\ln(3+x)-\ln x)$.

4.8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3-3x^2+7x}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(2-x)}{x^2-4}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+1}{6x-1}\right)^{4x}$.

4.9. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+3x-9}{x+3}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-4x}{\sin 7x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+4}{2x^2-7}\right)^{6x^2}$.

4.10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{2x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x^2+2\pi x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-2}\right)^{4x^3}$.

4.11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-5x^2+4x-1}{(x+2)^3}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{5x(1-\cos 8x)}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{4x^2}}$.

4.12. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+12}-4}{2x-8}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 10x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 5x)^{\frac{2}{x}}$

4.13. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{\sqrt{x+20}-5}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{\sqrt{9-x}-3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2x)^{\frac{4}{x^2}}$

4.14. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{9(x^2-9)}{x^3(x+3)}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{1-\cos 2x}$, в) $\lim\limits_{x\to+\infty}3x\cdot(\ln(5+2x)-\ln(2x))$.

4.15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9})$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\arcsin 8x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 6x)^{\frac{1}{5x^2}}$.

4.16. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^4-81}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x)}{2x}$.

4.17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4-5x^3+12x^2}{4x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x\cdot\operatorname{tg}8x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}4x)^{\frac{2}{x^2}}$.

4.18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-3x+5}{2x^2+6}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{5x\cdot \mathrm{tg}3x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}\right)^{4x}$.

4.19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{\sqrt{1-\cos 6x}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}^2 4x)^{\frac{4}{3x^2}}$.

4.20. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-17x+10}{x-5}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 8x}}{2x\cdot\sin 5x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^{2x}$.

4.21. а) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{2-\sqrt[4]{x}}{4-\sqrt{x}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{\sin\pi(x+4)}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 3x)^{\frac{1}{1-\cos 2x}}$.

4.22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^3}{3x^3+8}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x\cdot e^{5x}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-8x)}{4x}$.

4.23. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cdot e^{8x}}{\mathrm{tg}7x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3x}\cdot\ln\sqrt{1+2x}$.

4.24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{2}\cos x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{\frac{1}{3x^2}}$.

4.25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-5x+6}{x+3x^3-8}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\arcsin 5x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{3x^2-8}\right)^{10x^2}$.

4.26. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{16+x}-4}{1-\cos 5x}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$, в) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.

4.27. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x})$, б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3^x-1}$.

4.28. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^2-x}{x-3}-\dfrac{5x^2-4}{x-1}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+7}{5x^2-2}\right)^{2x^2}$.

4.29. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{tg}6x}{\sqrt{1-\cos 4x}}$, в) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$.

4.30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-2x+7}{2-5x+3x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\mathrm{tg}3x\cdot\mathrm{ctg}^2 2x$, в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)(\ln(x+2)-\ln x)$.

Задание 5. *Найти производные* $\dfrac{dy}{dx}$.

5.1. а) $y=\ln\cos(4x+5)$, б) $y=\sin x^2\cdot e^{\sin 4x}$, в) $y=(\arcsin x)^{\frac{1}{x}}$, г) $y^3=\dfrac{x-y}{x+y}$.

5.2. а) $y=\arccos 2^x$, б) $y=\dfrac{xe^{-x^2}}{\ln 5x}$, в) $y=(\arccos 2^x)^{5x}$, г) $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=2$.

5.3. а) $y=\ln\left(e^{-x}+x\cdot e^x\right)$, б) $y=\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{1+x^2}$, в) $y=(\operatorname{tg}3x)^{\operatorname{ctg}x}$, г) $\ln y+\dfrac{x}{y}=1$.

5.4. а) $y=\arcsin^2\dfrac{x}{2}$, б) $y=\dfrac{\left(1-x^2\right)\cdot e^{2x-1}}{\arccos^2 x}$, в) $y=\left(1+x^2\right)^{\operatorname{arcctg}x}$, г) $\operatorname{tg}x=x\cdot y$.

5.5. а) $y=\operatorname{arctg} e^{2x}$, б) $y=\dfrac{e^x+\sin 5x}{x\cdot e^x}$, в) $y=(\sin 10x)^{\ln^2 x}$,

г) $\sqrt{x^2+y^2}=2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

5.6. а) $y=\ln\ln x$, б) $y=\dfrac{x^2\cdot\sqrt{x+1}}{\sin(1-x)}$, в) $y=\left(\arcsin 5x\right)^{\frac{x^2}{2}}$, г) $\cos^2(x+y)=x\cdot y$.

5.7. а) $y=\ln\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, б) $y=\dfrac{\sin 10x}{\cos(\sin 5x)}$, в) $y=\left(\ln 10x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$,

г) $1+x=\dfrac{1}{2}\ln(2y+x)$.

5.8. а) $y=e^{\arcsin x}\cdot\sqrt{1-x^2}$, б) $y=\dfrac{\arccos\sqrt[3]{x^2-2}}{tg^2x}$, в) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\left(x^2+y^2\right)$,

г) $y=\left(x^2-1\right)^{e^{2x}}$.

5.9. а) $y=\cos\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, б) $y=\ln\left(\sin^2 x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)$, в) $y=\left(\sin 2x\right)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$,

г) $y=x+\operatorname{arcctg}\dfrac{y}{x}$.

5.10. а) $y=\operatorname{arctg}\left(e^{2x}+1\right)^2$, б) $y=\dfrac{x-\sin 2x}{e^{5x}}$, в) $y=\left(\arcsin 5x\right)^{\frac{1}{x}}$, г) $x=y+e^{xy}$.

5.11. а) $y=\ln^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{3}$, б) $y=\frac{e^{2x}}{\log_2\left(3x^2+1\right)}$, в) $y=(2x)^{e^{3x}}$, г) $\ln y+\frac{x}{y}=x+y$.

5.12. а) $y=\operatorname{arctg}\ln(1-x)$, б) $y=\frac{\left(1-x^2\right)\cdot\cos 3x}{\arccos 5x}$, в) $y=\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$,

г) $\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{x+y}=y^2$.

5.13. а) $y=3^{-\frac{\ln x}{\sin x}}$, б) $y=\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$, в) $y=\left(\ln x^2\right)^{\cos^2 x}$, г) $\arcsin x\cdot y+\frac{x}{y}=x$.

5.14. а) $y=\arccos\frac{1}{1+x}$, б) $y=3^{-\frac{\ln x}{\sin 2x}}$, в) $y=\left(1+x^2\right)^{\operatorname{arcctg} x}$, г) $y^2=x\cdot e^{-xy}$.

5.15. а) $y=4^{\frac{1}{\cos^2 x}}$, б) $y=\frac{\cos^5\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}{e^{2x-1}}$, в) $y=(\sin 10x)^{\frac{1}{\ln x}}$,

г) $\sin(x+y)-2x\cdot y=0$.

5.16. а) $y=\left(\arcsin(8x+3)\right)^5$, б) $y=\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$, в) $y=(2x)^{\arcsin^2(x-3)}$,

г) $x\ln y-y\ln x=8$.

5.17. а) $y=\ln\left(x^2+e^{-x}\right)$, б) $y=\frac{1+\sin^2 x}{\cos x^2}$, в) $y=(\operatorname{arctg}2x)^{\frac{1}{3x}}$,

г) $\sin(x+2y)+2x-3y=0$.

5.18. а) $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\operatorname{ctg}^3 x$, б) $y=2^{\frac{1-x}{1+x}}$, в) $y=\left(x^2+3\right)^{\sqrt{x}}$,

г) $(x+y)^2+(x-3y)^3=0$.

5.19. а) $y=\ln\sqrt[4]{x^2+10}$, б) $y=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$, в) $y=\left(\frac{1}{5+x}\right)^{\arccos 7x}$,

г) $x\cdot\sin y-y\cdot\cos x=0$.

5.20. а) $y=e^{x^3}\cdot\cos\sqrt{1+x^2}$, б) $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$, в) $y=(\operatorname{arctg}2x)^{\sin 3x}$,

г) $e^{x+y}=\sin\frac{y}{x}$.

5.21. а) $y=\sqrt{1-\frac{1}{x}}\cdot\operatorname{tg}(2x+1)$, б) $y=10^{\frac{1}{\sin^2 x}}$, в) $y=(1+x)^{\frac{2}{x}}$,

г) $\cos(xy)=x-y$.

5.22. а) $y=\cos 5x\cdot e^{-x^2}$, б) $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{\sin 2x}}$, в) $y=(x)^{e^{\frac{1}{x}}}$, г) $xe^y+ye^x=x\cdot y$.

5.23. а) $y=3^{\frac{1}{x}}+\sin^2 5x$, б) $y=\frac{1+x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}$, в) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\cos 5x}$, г) $\operatorname{tg}y=x+3y$.

5.24. а) $y=\ln\cos\sqrt{e^{x^2}-2}$, б) $y=\frac{3^{\frac{1}{x}}}{\sin^2 x}$, в) $y=(\operatorname{ctg}2x)^{\sqrt{1-x}}$,

г) $e^{xy}=\cos^2(x+y)$.

5.25. а) $y=4^{\sqrt{1+2x}}$, б) $y=\frac{(x+2)^2}{\operatorname{tg}^3 10x}$, в) $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=x\cdot y$, г) $y=(\operatorname{arctg}x)^{\frac{1}{1+x^2}}$.

5.26. а) $y=e^{\cos^2 x}$, б) $y=\frac{\sin^2 x-2\operatorname{tg}x}{1+\cos 4x}$, в) $y=\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{x^2}$, г) $y\operatorname{tg}x=1+xe^y$.

5.27. а) $y=\arcsin\sqrt{1-3x}$, б) $y=\frac{x\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x}$, в) $y=(x+x^2)^{\frac{1}{7x}}$,

г) $x^2+y^2+7xy=0$.

5.28. а) $y=\cos\ln x+\sin\ln x$, б) $y=\frac{\arcsin^3 x}{\cos^3 x+\sin^2 x}$, в) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$,

г) $y=(2x)^{\frac{x}{\ln x}}$.

5.29. а) $y=\sin^2\left(1+\frac{1}{x}\right)$, б) $y=\operatorname{arctg}\frac{1-2x}{1+2x}$, в) $y=(\operatorname{ctg}10x)^{tg2x}$,

г) $\operatorname{tg}(x+y)-x\cdot y=0$.

5.30. а) $y=\frac{e^{x^2+1}}{\sqrt[5]{1-x^3}}$, б) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$, в) $y=(\cos 5x)^{e^{tgx}}$, г) $x\cdot y+e^{x+y}=x^3$.

Задание 6. *Найти производные второго порядка* y''_{xx} *для параметрической функции.*

6.1. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sin t}, \\ y=\cos^2 t. \end{cases}$ 6.2. $\begin{cases} x=\ln\sin t, \\ y=e^{\cos t}. \end{cases}$ 6.3. $\begin{cases} x=3t\cdot\cos t, \\ y=3t\cdot\sin t. \end{cases}$ 6.4. $\begin{cases} x=e^{2t+1}, \\ y=e^{3t-2}. \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sin t}, \\ y=\mathrm{ctg}\,t. \end{cases}$ 6.6. $\begin{cases} x=e^{t}+1, \\ y=e^{3t}. \end{cases}$ 6.7. $\begin{cases} x=e^{t^2}, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$ 6.8. $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3-t^2. \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} x=\mathrm{arctg}\,t, \\ y=\dfrac{1}{2}t^2. \end{cases}$ 6.10. $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{2}\sin 2t, \\ y=\cos^3 t. \end{cases}$ 6.11. $\begin{cases} x=\dfrac{2-t}{2+t^2}, \\ y=\dfrac{t^2}{2+t^2}. \end{cases}$ 6.12. $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} x=e^{2t}, \\ y=\ln 5t. \end{cases}$ 6.14. $\begin{cases} x=\mathrm{arcctg}\,t, \\ y=5\left(1+t^2\right). \end{cases}$ 6.15. $\begin{cases} x=\ln 10t, \\ y=t^3+2. \end{cases}$ 6.16. $\begin{cases} x=\mathrm{tg}\,t, \\ y=\cos^2 t. \end{cases}$

6.17. $\begin{cases} x=e^{t}, \\ y=\arcsin t. \end{cases}$ 6.18. $\begin{cases} x=\cos\dfrac{t}{2}, \\ y=t-\sin t. \end{cases}$ 6.19. $\begin{cases} x=\arcsin\left(t^2-1\right), \\ y=\arccos(2t). \end{cases}$

6.20. $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{2}\sin 2t, \\ y=\cos^2 t. \end{cases}$ 6.21. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2-3t+2}, \\ y=\dfrac{2}{t^2-5t+4}. \end{cases}$ 6.22. $\begin{cases} x=\ln\mathrm{tg}\,t, \\ y=\mathrm{ctg}\,t. \end{cases}$

6.23. $\begin{cases} x=2\cos^2 2t, \\ y=3\sin^2 2t. \end{cases}$ 6.24. $\begin{cases} x=2t-\sin 2t, \\ y=\sin^3 t. \end{cases}$ 6.25. $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right), \\ y=t^2. \end{cases}$

6.26. $\begin{cases} x=\arcsin 2t, \\ y=\sqrt{1-4t^2}. \end{cases}$ 6.27. $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\dfrac{1}{1-t}. \end{cases}$ 6.28. $\begin{cases} x=\arcsin\left(t^2-1\right), \\ y=\arccos 2t. \end{cases}$

6.29. $\begin{cases} x=e^{-t^2}, \\ y=\mathrm{arctg}(2t+1). \end{cases}$ 6.30. $\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2}, \\ y=2\mathrm{arctg}\,t. \end{cases}$

Задание 7. *Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить ее график.*

7.1. $y = x^2 \cdot \ln x$. 7.2. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$. 7.3. $y = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$. 7.4. $y = x^3 \cdot e^{-4x}$.

7.5. $y = \frac{x^3 - 1}{x^4}$. 7.6. $y = \frac{e^x}{x+1}$. 7.7. $y = 4e^{-x^2+8x}$. 7.8. $y = x + \frac{4}{x+2}$.

7.9. $y = \frac{\ln x}{x}$. 7.10. $y = \frac{3 - x^2}{x+2}$. 7.11. $y = \frac{x-2}{x^2 - 4x + 5}$. 7.12. $y = x^2 - 2\ln x$.

7.13. $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. 7.14. $y = \ln\left(4 - x^2\right)$. 7.15. $y = \left(2 + x^2\right)e^{-x^2}$.

7.16. $y = \frac{x^2 - 2x - 7}{x+2}$. 7.17. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$. 7.18. $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$.

7.19. $y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2}$. 7.20. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$. 7.21. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

7.22. $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$. 7.23. $y = x + \ln\left(x^2 + 4\right)$. 7.24. $y = x \cdot e^{-x}$.

7.25. $y = \ln\frac{x-1}{x-2}$. 7.26. $y = \frac{1 - 2x}{x^2 - x - 2}$. 7.27. $y = \frac{x}{e^{2x}}$.

7.28. $y = \ln\left(9 - x^2\right)$. 7.29. $y = \frac{x^2}{2 - x}$. 7.30. $y = x - \frac{1}{x^2}$.

Тема 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Понятие функции нескольких переменных. Область определения. Частное и полное приращение.

2. Предел функции нескольких переменных. Непрерывность.

3. Частные производные функции нескольких переменных. Геометриический смысл частных производных функции нескольких переменных.

4. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.

5. Дифференцирование сложной функции и неявно заданной функции. Полный дифференциал.

6. Производная по направлению. Градиент функции нескольких переменных. Свойства градиента.

7. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

8. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия существования экстремума.

9. Условный экстремум функции нескольких переменных. Метод множителей Лагранжа.

10. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в области.

4.1. Понятие функции нескольких переменных и ее предела

Пусть D – множество точек $X(x_1, x_2, ..., x_m)$ пространства E^m. Если каждой точке X по определенному закону f ставится в соответствие некоторое число z, то говорят, что на множестве D определена **функция** m **переменных** $z = f(x_1, x_2,..., x_m)$; $z = f(x)$.

При этом $x_1, x_2, ..., x_m$ называются **независимыми переменными** или **аргументами**.

Множество D точек X, для которых существует z, называют **областью определения функции** и обозначают $D(f)$, а множество значений z обозначают $E(f)$.

$z = f(x,y)$ – функция двух переменных.

Пусть функция $z = f(x_1, x_2,..., x_m)$ определена на множестве D.

Число b называют **пределом** функции $z = f(X)$ **в точке** $A(a_1, a_2, ..., a_m)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $X \in D$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(X,A) < \delta$, выполняется неравенство $|f(X) - b| < \varepsilon$.

Обозначение:

$$\lim_{X \to A} f(X) = b \text{ или } \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, ..., x_m) = b.$$

Частным приращением по переменной x_k $(k = \overline{1, m})$ функции $z = f(x_1, x_2,..., x_m)$ в точке $X \in D$ называется разность

$$\Delta_{x_k} z = f(x_1, x_2, ..., x_k + \Delta x_k, ..., x_m) - f(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_m),$$

где Δx_k – приращение переменной x_k.

Если существует $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_{x_k} z}{\Delta x_k}$, то он называется **частной производной функции** z по переменной x_k в точке X и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial x_k}$ (или z'_{x_k}, $f'_{x_k}(x_1, x_2, ..., x_m)$).

При нахождении частной производной по одной из переменных пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, считая все остальные переменные постоянными.

Пример 4.1. Найти частные производные функции $z = \ln \sin \dfrac{x+2}{y}$.

Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = |y = \text{const}| = \frac{1}{\sin \frac{x+2}{y}} \cdot \cos \frac{x+2}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \text{ctg} \frac{x+2}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = |x = \text{const}| = \frac{1}{\sin \frac{x+2}{y}} \cdot \cos \frac{x+2}{y} \cdot \left(\frac{x+2}{y} \right)'_y = \text{ctg} \frac{x+2}{y} \cdot (x+2) \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right) =$$

$$= -\frac{x+2}{y^2} \cdot \text{ctg} \frac{x+2}{y}.$$

Рассмотрим функцию трех переменных $u = u(x, y, z)$ на множестве D.

Полным дифференциалом функции $\boldsymbol{u}$ в точке $M(x, y, z)$ называется главная часть полного приращения функции

$$\Delta u = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + o(\Delta x) + o(\Delta y) + o(\Delta z),$$

линейная относительно приращений переменных Δx, Δy и Δz (A , B, C – постоянные числа).

Полный дифференциал находят по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz, \qquad (4.1)$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$.

Производной по направлению вектора $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$ функции $u = u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z) \in D$ называется предел

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \lim_{t \to 0+0} \frac{u(x+ts_x, y+ts_y, z+ts_z)}{t}$$, если этот предел существует.

Обозначим через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ направляющие косинусы вектора $\vec{s}$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos\gamma \tag{4.2}$$

Градиентом функции $u = u(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ называется вектор, проекциями которого на оси координат являются значения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ в этой точке:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{k}. \tag{4.3}$$

При этом: 1) $\text{Пр}_{\vec{s}}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$, 2) $\max \frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \left| \overrightarrow{\text{grad}}\, u \right|$.

Пример 4.2. Дана функция $u = x^{y^2 z}$, точка $M(e,\ 2,\ -1)$, вектор $\vec{s} = (0;\ 3;\ 4)$. Найти: а) полный дифференциал du, б) производную по направлению вектора $\vec{s}$ $\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right)$, в) градиент функции $\overrightarrow{\text{grad}}\, u$ в точке M.

Решение. Найдем частные производные функции $u = u(x,y,z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{vmatrix} y = \text{const} \\ z = \text{const} \end{vmatrix} = y^2 z \cdot x^{y^2 z - 1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \begin{vmatrix} x = \text{const} \\ z = \text{const} \end{vmatrix} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot 2yz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \begin{vmatrix} x = \text{const} \\ y = \text{const} \end{vmatrix} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot y^2.$$

Вычислим значения производных в точке M:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 4 \cdot (-1) \cdot e^{4\cdot(-1)-1} = -\frac{4}{e^5}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = e^{4\cdot(-1)} \cdot \ln e \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -\frac{4}{e^4},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = e^{4\cdot(-1)} \cdot \ln e \cdot 4 = \frac{4}{e^4}.$$

а. Находим полный дифференциал функции в точке M по формуле (4.1):

$$du|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot dx + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot dy + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot dz = -\frac{4}{e^5} dx - \frac{4}{e^4} dy + \frac{4}{e^4} dz.$$

б. Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{s}$. Имеем $|\vec{s}|=\sqrt{0^2+3^2+4^2}=5$,

$$\cos\alpha=\frac{x_s}{|\vec{s}|}=\frac{0}{5}=0,\ \cos\beta=\frac{y_s}{|\vec{s}|}=\frac{3}{5},\ \cos\gamma=\frac{z_s}{|\vec{s}|}=\frac{4}{5}\ .$$

По формуле (4.2) вычисляем производную:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_M=-\frac{4}{e^5}\cdot 0-\frac{4}{e^4}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{e^4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5e^4}.$$

в. Вычисляем градиент функции в точке M по формуле (4.3):

$$\left.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u\right|_M=-\frac{4}{e^5}\cdot\vec{i}-\frac{4}{e^4}\cdot\vec{j}+\frac{4}{e^4}\cdot\vec{k}.$$

4.2. Частные производные и дифференциал высших порядков

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и непрерывна вместе со своими первыми частными производными в некоторой точке $P(x,y)\in D(f)$.

Частные производные по переменным x, y от производных первого порядка называются **частными производными второго порядка** и обозначаются

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ называются **смешанными** производными.

Если смешанные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ непрерывны, то справедливо равенство $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Полным дифференциалом второго порядка функции $z=f(x,y)$ называется дифференциал от ее полного дифференциала, который обозначается

$$d^2z=d(dz)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2.$$

4.3. Экстремум функции нескольких переменных

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в области D. Функция $z=f(x,y)$ имеет в точке $P_0(x_0,y_0)\in D$ **локальный максимум (минимум)**, равный $f(x_0,y_0)$, если существует такая δ – окрестность этой точки, что для всех отличных от P_0 точек $P(x,y)$ из этой окрестности имеет место неравенство $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ $\left(f(x,y)>f(x_0,y_0)\right)$.

Необходимые условия экстремума. Если функция $f(x,y)$ в точке $P_0(x_0,y_0)$ имеет локальный экстремум, то в этой точке обе частные производные, если они существуют, равны нулю или хотя бы одна из них в этой точке не существует.

Если $P_0(x_0,y_0)$ – точка экстремума дифференцируемой функции

$$z=f(x,y),\ \text{то}\qquad f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0. \qquad (4.4)$$

Из этой системы уравнений находят **стационарные точки.**

Сформулируем **достаточные условия существования экстремума.**

Пусть $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$, где $P_0(x_0,y_0)$ – стационарная точка дважды дифференцируемой функции $z=f(x,y)$. Тогда:

1) если $B^2-AC>0$, то $f(x,y)$ имеет в точке $P_0(x_0,y_0)$ локальный экстремум (при $A<0$ – локальный максимум, при $A>0$ – минимум);

2) если $B^2-AC<0$, экстремума в точке $P_0(x_0,y_0)$ нет;

3) если $B^2-AC=0$, функция может иметь, а может и не иметь локальный экстремум.

Пример 4.3. Найти локальные экстремумы функции $z=x^2-2xy+4y^3$.

Решение. Областью определения данной функции является вся плоскость.

Находим частные производные первого порядка и составляем систему уравнений (4.4):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2x+12y^2=0.$$

Решая эту систему, получим две стационарные точки $P_1(0;0)$ и $P_2\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{6}\right)$.

Находим частные производные второго порядка: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=24y$. Вычисляем их значения в точках P_1 и P_2.

В точке $P_1(0;0)$: $A=2,\ B=-2,\ C=0$. Тогда имеем $AC-B^2=-4<0$. Следовательно, точка $P_1(0;0)$ не является точкой экстремума.

В точке $P_2\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{6}\right)$: $A=2,\ B=-2,\ C=4$. Тогда $AC-B^2=4>0$. Так как $A>0$, то точка $P_2\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{6}\right)$ – точка локального минимума.

Вычисляем $z_{\min}=z(P_2)=-\frac{1}{108}$.

Задание 8. *Дана функция $u=u(x,y,z)$, точка $M(x_0,y_0,z_0)$ и вектор $\vec{s}$. Найти в точке М: а) дифференциал du; б) производную $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ по направлению вектора $\vec{s}$; в) градиент $\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}$.*

8.1. $u=\cos\frac{2x}{yz}-y^2x^2,\quad \vec{s}=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k},\quad M(0;\ 4;\ -5)$.

8.2. $u=x^2\ln\left(\frac{y}{z}\right)+zy,\quad \vec{s}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k},\quad M(2;\ 1;\ 1)$.

8.3. $u=\arcsin\left(z^2+2x\right)+xy^2,\quad \vec{s}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k},\quad M(-1;\ 2;\ 1)$.

8.4. $u=\frac{2y}{x-z}-y^x,\quad \vec{s}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k},\quad M(1;\ 5;\ 2)$.

8.5. $u=\mathrm{ctg}\frac{x}{2y}-y^2z,\quad \vec{s}=5\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\quad M\left(\frac{\pi}{2};\ 1;\ 0\right)$.

8.6. $u=e^{xy}+\frac{2y}{z^2},\quad \vec{s}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},\quad M(1;\ 2;\ -1)$.

8.7. $u=x^{yz}+x^2z,\quad \vec{s}=\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k},\quad M(2;\ 2;\ 1)$.

8.8. $u=y\cdot\ln\left(x^2\cdot z\right)+2x^2y,\quad \vec{s}=-\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k},\quad M(1;\ 1;\ 2)$.

8.9. $u=y\cdot\arccos\frac{z}{x}+y^3x,\quad \vec{s}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k},\quad M(2;\ 5;\ 2)$.

8.10. $u = \mathrm{ctg}(y \cdot z) - \frac{y}{x^2}$, $\vec{s} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, $M\left(1;\ \frac{\pi}{4};\ 1\right)$.

8.11. $u = \frac{x - 2y}{z + x} + e^{xy}$, $\vec{s} = 4\vec{i} + 7\vec{j} - 6\vec{k}$, $M(0;\ 2;\ 1)$.

8.12. $u = \mathrm{arctg}\sqrt{x - 2y^2} \cdot z^3$, $\vec{s} = \vec{i} + 10\vec{j} - 2\vec{k}$, $M(5;\ 1;\ 3)$.

8.13. $u = zy^2 + \ln\frac{x}{y - x}$, $\vec{s} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $M(3;\ 4;\ 1)$.

8.14. $u = \frac{y}{x^2} - x^{2yz^2}$, $\vec{s} = 5\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $M(2;\ 5;\ 0)$.

8.15. $u = 2^{xz} - \cos\frac{y}{2z}$, $\vec{s} = \vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$, $M\left(2;\ \frac{\pi}{2};\ 1\right)$.

8.16. $u = \sqrt{2xy - y^2z^2} + \frac{z}{x}$, $\vec{s} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $M(2;\ 2;\ 0)$.

8.17. $u = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y + 2x}\right) - 5z^2x$, $\vec{s} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, $M(1;\ 2;\ 1)$.

8.18. $u = \sin^2(z \cdot y) + 2x^2y$, $\vec{s} = 5\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $M\left(3;\ 1;\ \frac{\pi}{4}\right)$.

8.19. $u = x^3y^2 - \ln(5xz + y^2)$, $\vec{s} = 4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $M(2;\ 1;\ 1)$.

8.20. $u = 9^{\frac{x}{2z}} + y^2x^2$, $\vec{s} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $M(1;\ 1;\ -1)$.

8.21. $u = z^{yx} - \frac{2y - 3z}{4z - 5x}$, $\vec{s} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $M(-1;\ 2;\ 2)$.

8.22. $u = y \cdot \sin(z \cdot e^{-x}) + y^2x$, $\vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $M(1;\ -1;\ \pi e)$.

8.23. $u = \arccos\frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2y^2}} - \frac{z}{y}$, $\vec{s} = 5\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $M(0;\ 1;\ 2)$.

8.24. $u = e^{\frac{x}{yz}} + \sin\left(z^2 \cdot y\right)$, $\vec{s} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $M\left(4;\ \frac{\pi}{2};\ 1\right)$.

8.25. $u = \operatorname{arctg}\frac{2x + y - x^2 y}{1 - 2xy - x^2} + z^2$, $\vec{s} = 5\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $M(1;\ 2;\ 1)$.

8.26. $u = x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2z^2$, $\vec{s} = \vec{i} + 8\vec{j} - 5\vec{k}$, $M(2;\ 2;\ -1)$.

8.27. $u = xyz - \ln\frac{x}{2z}$, $\vec{s} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $M(-4;\ 1;\ -2)$.

8.28. $u = \operatorname{arctg}\frac{xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + e^{zx}$, $\vec{s} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $M(1;\ 2;\ -2)$.

8.29. $u = e^{xyz} - \cos\left(\frac{x}{y^2}\right)$, $\vec{s} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$, $M\left(\frac{\pi}{2};\ 1;\ \frac{2}{\pi}\right)$.

8.30. $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}\frac{z}{x}$, $\vec{s} = 5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $M(2;\ 2;\ 4)$.

Задание 9. Найти локальные экстремумы функции $z = f(x,y)$.

9.1. $z = (x-2)^2 + 4y^2$. 9.2. $z = (x-3)^2 + (y+5)^2$. 9.3. $z = x^2 + 2y^2 - 4x + 12y$.

9.4. $z = 2x^2 + (y-6)^2$. 9.5. $z = x^2 + 4xy - 2x$. 9.6. $z = 5xy - y^2 + 6y$.

9.7. $z = x^3 + 3xy^2 - 51x$. 9.8. $z = 4(x-5)^2 + 8(y+2)^2$. 9.9. $z = 3x^2 - 4xy - 8y$.

9.10. $z = x^4 + y^4 - 4xy$. 9.11. $z = xy^2(2 - x - y)$ 9.12. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x$.

9.13. $z = 2xy - \frac{4}{x} - \frac{2}{y}$. 9.14. $z = (2x+4)^2 - (3y-6)^2$. 9.15. $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

9.16. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$. 9.17. $z = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} - xy$. 9.18. $z = 3x^2 - 4xy - 8y$.

9.19. $z = xy^2 - yx^2 - 4x$. 9.20. $z = 5x^2y - 4xy$. 9.21. $z = xy + 2y^2 - 2x$.

9.22. $z = xy + 4x - 3y$. 9.23. $z = x^2 + y^2 + y$. 9.24. $z = 3x^2 + 2xy + y^2$.

9.25. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$. 9.26. $z = x^2 + xy - x - y$. 9.27. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$.

9.28. $z = 5x^2 + y^2 - 25xy$. 9.29. $z = 4x - x^2 + 2xy - y^2$.

9.30. $z = 4x^2 - 5xy + 3y^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карасев, А.И. Курс высшей математики для экономических вузов: учебное пособие для студентов экономических специальностей: в 2 ч. / А.И. Карасев, З.М. Аксютина, Т.И. Савельева. – М.: Высшая школа, 1982. – Ч. 1, 2.

2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов: учебное пособие для студентов вузов: в 2 ч. /Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – Ч. 1, 2.

3. Герасимович, А.И. Математический анализ: в 2 ч. / А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1, 2.

4. Апатенок, Р.Ф. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии/Р.Ф. Апатенок [и др]. – Минск: Вышэйшая школа, 1986.

5. Апатенок, Р.Ф. Сборник задач по линейной алгебре / Р.Ф. Апатенок [и др]. – Минск: Вышэйшая школа, 1986.

6. Гусак, А.А. Задачи и упражнения по высшей математике: в 2 ч. / А.А. Гусак: для вузов. – Минск: Вышэйшая школа, 1988.

СОДЕРЖАНИЕ