Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

Методические указания и задания к контрольной работе № 1 по высшей математике

Минск
БНТУ
2010

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

Методические указания и задания к контрольной работе № 1 по высшей математике для студентов заочного отделения ФТУГ экономических специальностей

Минск
БНТУ
2010

УДК 51 (075.4)
~~ББК 22.1я7~~
М 54

Составители:

З.М. Алейникова, Л.И. Бородич, И.Г. Латышева,
М.Н. Покатилова, А.Ф. Шидловская

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук, доцент Т.С. Яцкевич;
канд. физ.-мат. наук, доцент В.В. Карпук

Настоящее издание включает в себя программы и контрольные задания (30 вариантов) по высшей математике по темам: «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление», «Функции многих переменных».

Авторы постарались кратко и доступно изложить в соответствии с программой весь теоретический материал по указанным темам. Основные теоретические положения наглядно проиллюстрированы решением большого числа примеров и задач.

Если в ходе усвоения материала возникнут некоторые вопросы, то их можно задать на консультациях по высшей математике для студентов-заочников, которые проводятся по субботам на кафедре.

Студент должен выполнить контрольное задание по номеру варианта, который совпадает с двумя последними цифрами зачетной книжки (шифра). Если номер шифра больше тридцати, то следует из него вычесть число тридцать. Полученный результат будет номером варианта.

Авторы искренне надеются, что данные указания помогут студентам самостоятельно выполнить контрольную работу по математике и хорошо сдать экзамен. Желаем вам успехов!

ПРОГРАММА

Тема 1. Линейная алгебра

Матрицы. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц. Транспонирование матриц.

Определитель матрицы. Алгебраические дополнения. Обратная матрица. Правило Крамера. Системы m линейных уравнений с n неизвестными. Ранг матрицы. Методы его вычисления. Теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса. Системы однородных линейных уравнений.

Тема 2. Аналитическая геометрия

Векторы. Линейные операции над векторами. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов. Векторное и смешанное произведение векторов, их геометрический смысл.

Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Уравнение плоскости. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Кривые второго порядка на плоскости: эллипс, гипербола, парабола.

Тема 3. Введение в анализ

Функция. Предел функции. Функция натурального аргумента. Предел числовой последовательности. Основные теоремы о пределах. Раскрытие неопределенностей. Замечательные пределы.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых функций.

Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.

Тема 4. Дифференциальное исчисление

Производная, ее геометрический и физический смысл. Понятие о дифференциале. Правила дифференцирования. Дифференцирование элементарных функций. Предельный анализ в экономике. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой. Производные высших порядков. Дифференцирование неявных функций. Теоремы о среднем. Правило Лопиталя.

Исследование функций на экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Выпуклость и вогнутость. Асимптоты графика функции. Общее исследование функций и построение графиков.

Тема 5. Функции многих переменных

Функции многих переменных. Область определения. Предел. Непрерывность. Частные производные.

Дифференцируемость функции многих переменных, полный дифференциал. Производные от сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Неявные функции и их дифференцирование.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала, функции двух переменных. Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции двух переменных.

Экстремум функции многих переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Производная по направлению. Градиент. Метод наименьших квадратов.

1. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

1.1. Матрицы. Операции над матрицами

Матрицей A размером $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел a_{ij}, состоящая из m строк и n столбцов. Числа a_{ij} называются элементами матрицы; $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

Матрица A с элементами a_{ij} обозначается (a_{ij}) или

$$A_{m\times n} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Квадратичной матрицей n-го порядка называется матрица размера $n \times n$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали (т.е. с индексами $i \neq j$) равны нулю. $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$.

Единичной матрицей Е называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Суммой (разностью) матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ того же размера, причем, $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, $\forall i, j$.

Свойства операции сложения матриц:

Для любых матриц A, B, C одного размера выполняются равенства:

1. $A + B = B + A$ (коммутативность).
2. $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (ассоциативность).

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$ того же размера, что и матрица A, причем $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, $\forall\, i, j$.

Свойства операции умножения матриц на число:

1. $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$ (ассоциативность).
2. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц).
3. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

Матрицы $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ **согласованы**, если число столбцов матрицы A равно число строк матрицы B. Перемножать можно только согласованные матрицы.

Произведением $A \cdot B$ матриц A и B (размеров $m \times n$, $n \times k$ соответственно) называется матрица C размером $m \times k$ такая, что $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Свойства операции умножения матриц

1. $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C) = A\cdot B\cdot C$ (ассоциативность).
2. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ (дистрибутивность).
3. $A\cdot B \neq B\cdot A$ (коммутативность отсутствует).

Транспонированной к матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $A^T = (a_{ij}^{\ T})$ такая, что $a_{ij}^{\ T} = a_{ji}$, $\forall\, i, j$ (т.е. все строки A^T равны соответствующим столбцам матрицы A).

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие операции:

1. Перемена местами двух строк (столбцов).
2. Умножение строки (столбца) на число не равное 0.
3. Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Матрица B, полученная из матрицы A с помощью элементарных преобразований, называется **эквивалентной** матрице A (обозначается $B\sim A$).

Пример 1.1. Найти $A + B$, $A - B$, $3\cdot A$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A + B = C = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+5 & -1-3 \\ 2-2 & 0+1 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A - B = C = \begin{pmatrix} 1-2 & 3-5 & -1-(-3) \\ 2-(-2) & 0-1 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3\cdot A = B = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 3 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 0 & 3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти A^T.

Решение. $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример 1.3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Найти произведение $A\cdot B$ и $B\cdot A$ (если возможно).

Решение. Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, значит $A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 3} = C_{2\times 3}$.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 6+3\cdot 7 & 1\cdot 4+2\cdot 0+3\cdot 1 & 1\cdot 5+2\cdot(-2)+3\cdot 8 \\ 1\cdot 3+0\cdot 6+(-1)\cdot 7 & 1\cdot 4+0\cdot 0+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.2. Определители. Алгебраические дополнения

Для любой квадратной матрицы существует числовая характеристика, которая называется **определителем** и обозначается $|A| = \det A = \Delta$.

Вычисление определителей

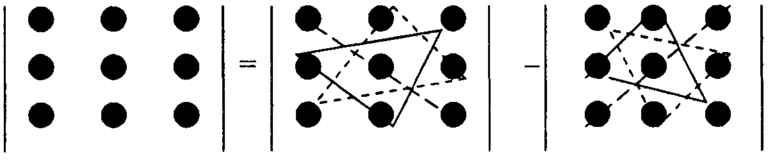
1. Определитель второго порядка равен разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях, т.е. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$. Например, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 2 - 15 = -13$.

2. Для определителей третьего порядка используется правило «треугольников» (правило Саррюса).

$$|A_{3\times3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}.$$

Схематично это правило изображается так:



Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 \cdot (-5) + (-1) \cdot 1 \cdot 4 - \big((-5) \cdot 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot 3\big) = 6 + 0 - 4 + 20 - 0 - 15 = 7.$$

3. Для вычисления определителей более высокого порядка сформулируем некоторые правила и свойства определителей.

Минором элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит этот элемент. Обозначается M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$. Обозначается A_{ij}, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Теорема разложения. Определитель матрицы равен сумме произведение элементов любого ряда на их алгебраические дополнения.

Например, вычислим определитель, разлагая его по элементам второй строки.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 2 \cdot A_{23} = 1 \cdot (-1)^{2+1} M_{21} + 0 \cdot (-1)^{2+2} M_{22} + 2 \cdot (-1)^{2+3} M_{23} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} + 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-30 - 4) - 2(2 - 15) = 34 + 26 = 60.$$

Свойства определителей

1. Если у определителя какая-либо строка (столбец) состоит только из нулей, то $|A| = 0$.
2. Если какие-либо 2 строки (столбца) пропорциональны, то такой определитель равен 0.
3. Если какую-либо строку (столбец) определителя умножить на произвольное число, то и весь определитель умножается на это число.
4. Если две строки (два столбца) поменять местами, то определитель изменит знак.
5. Если к какой-либо строке (столбцу) определителя прибавить какую-либо другую строку (столбец), умноженную на произвольное число, то определитель не изменится.
6. Определитель произведения матриц равен произведению их определителей.

Для вычисления определителя порядка выше третьего удобно пользоваться теоремой разложения. Можно преобразовать определитель к треугольному виду (все элементы определителя ниже или выше главной диагонали равны нулю). Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Пример 1.4. Вычислить определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. Применим свойство (5) к третьей строке определителя. Первый столбец сложим с третьим, затем первый столбец умножим на 2 и сложим с четвертым столбцом, получим

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 6 \\ 5 & 6 & 12 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 8 & 12 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам 3-ей строки, получим

$$|A| = (-1)\cdot A_{31} + 0\cdot A_{32} + 0\cdot A_{33} + 0\cdot A_{34} = (-1)\cdot(-1)^{3+1}M_{31} = -M_{31} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 6 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} \text{На основании свойства 3} \\ \text{вынесем 2 из первой строки,} \\ \text{2 - со второй, 4 - из третьей} \end{matrix}\right| = -2\cdot2\cdot4\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -16(1\cdot6\cdot3 - 1\cdot4\cdot1 + 3\cdot2\cdot3 - 1\cdot6\cdot3 - 2\cdot4\cdot1 - 3\cdot(-1)\cdot3) = -16(18 - 4 + 18 - 18 - 8 + 9) =$$

$$= -16\cdot15 = -240.$$

Пример 1.5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Первый столбец умножим на (-2) и прибавим ко второму столбцу. Затем первый столбец умножим на (-3) и прибавим к третьему столбцу и, наконец, первый столбец умножим на (-4) и прибавим к четвертому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot4\cdot(-2) = -8.$$

1.3. Ранг матрицы

Минором k-го порядка произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов.

Например, в матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & -7 \end{pmatrix}$ можно указать такие миноры:

– для 2-го порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ минор $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 7 & -7 \end{vmatrix}$ минор $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}$ и т.д.;

– для 3-го порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & -7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & -7 \end{vmatrix}$.

Рангом матрицы A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю. Обозначается $r(A)$, rang(A). Например, $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $r(A)=1$, т.к. все миноры 2-го порядка равны нулю.

Базисным минором матрицы называется всякий отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Рассмотрим некоторые методы вычисления ранга матрицы.

Метод окаймляющих миноров. Минор порядка $k+1$, содержащий в себе минор порядка k, называется **окаймляющим минором**. Вычисляя ранг матрицы удобнее переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если найден минор k-го порядка, отличный от нуля, а все окаймляющие его миноры порядка $k+1$ равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Метод элементарных преобразований. Этот метод основан на следующей теореме.

Теорема. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется. К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

1. Перестановка двух строк (столбцов).
2. Умножение какой-либо строки (столбца) на число, отличное от нуля.
3. Прибавление к какой-либо строке (столбцу) матрицы другой строки (столбца), умноженной на произвольное число.

Путем элементарных преобразований исходную матрицу можно привести к трапециевидной форме:

$$\begin{pmatrix}b_{n} & b_{12} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2n}\\ \hline 0 & 0 & \dots & b_{kk} & \dots & b_{kn}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},$$

где элементы b_n, b_{22}, ..., b_{kk} отличны от нуля. Тогда ранг полученной матрицы равен k.

Пример 1.6. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 0\\ 5 & 8 & -2\end{pmatrix}$ методом окаймляющих миноров.

Решение. $M_{2\times2}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq0.$ $\quad M_{3\times3}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 0\\ 5 & 8 & -2\end{vmatrix}=-8+0-24+20-0+12=0.$

Следовательно, $r(A)=2$.

Пример 1.7. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}$ методом элементарных преобразований.

Решение. $\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}\sim$

$\sim\left(\begin{array}{c}\text{Умножаем первую строку на (-2) и прибавляем ко второй,}\\ \text{затем первую строку умножаем на (-1) и прибавляем к третьей строке.}\end{array}\right)\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -3 & -1 & -4\\ 0 & -6 & -2 & -8\end{pmatrix}\sim$

$\sim\left(\begin{array}{l}\text{Умножаем вторую строку на (-2)}\\ \text{и прибавляем к стретьей строке.}\end{array}\right)\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -3 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow r_A=2.$

1.4. Системы линейных уравнений (СЛАУ)

Линейной системой m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ называются **коэффициентами** системы, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – ее свободные члены. Если все b_i, $i = \overline{1,m}$ равны нулю, то система **однородная**, в противном случае – неоднородная.

Линейную систему можно записать в матричной форме: $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица системы; $$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец свободных членов;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец неизвестных.

Матрица A/B называется **расширенной матрицей** системы и имеет вид:

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Решением системы m уравнений с n неизвестными называется совокупность значений неизвестных $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, ..., $x_n = a_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в тождества.

Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае она называется **несовместной**.

Однородная система линейных уравнений всегда совместна, т.к. имеет нулевой решение.

Решение невырожденных систем линейных уравнений

Система n уравнений с n неизвестными называется **невырожденной**, если $|A| \neq 0$.

Правило Крамера. Невырожденная система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = \overline{1,n}$, где $\Delta = |A|$, Δ_i – определитель, полученный из Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Пример 1.8. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + \ x_3 = 17, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$

Решение. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Определитель $\Delta = -15 + 8 + 6 + 2 - 9 - 40 = -48$.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}17&4&1\\0&1&-1\\8&3&5\end{vmatrix}=85-32+0-8+51-0=96;\ \Delta_2=\begin{vmatrix}-3&17&1\\2&0&-1\\-2&8&5\end{vmatrix}=0+34+16-0-24-170=-144;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}-3&4&17\\2&1&0\\-2&3&8\end{vmatrix}=-24+0+102+34-0-64=48.$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{96}{-48}=-2;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-144}{-48}=3;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{48}{-48}=-1.$$

Решение произвольных систем линейных уравнений

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы $r(A) = r(A/B)$.

При этом возможны 3 варианта: 1) если $r(A)<r(A/B)$ – система несовместна; 2) $r(A)=r(A/B)=n$ (n – число неизвестных), то система имеет единственное решение; 3) если $r(A)=r(A/B)<n$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Для исследования систем линейных уравнений и нахождения их решений можно использовать метод Гаусса. С помощью элементарных преобразований над строками приведем расширенную матрицу системы (A/B) к трапециевидной форме. Такой матрице соответствует система, которую легко решить, начиная с последнего уравнения.

Пример 1.9. Исследовать систему уравнений $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-4;\\x_1+2x_2-3x_3=0;\\-2x_1\quad\ -2x_3=16.\end{cases}$ и в случае совместности решить ее.

Решение. Приведем к трапециевидной форме расширенную матрицу системы. Первую строку умножим на (-1) и прибавим ко второй; первую строку умножим на 2 и прибавим к третьей. Вторую строку умножим на (-2) и прибавим к третьей.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-4\\1&2&-3&0\\-2&0&-2&16\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-4\\0&1&-2&4\\0&2&-4&8\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-4\\0&1&-2&4\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

В результате элементарных преобразований над строками получим систему равносильную исходной. Выберем в качестве базисного минора минор, стоящий в первых двух строках и столбцах: $\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1.$

Тогда x_1 и x_2 – базисные переменные, а x_3 – свободная переменная. Придадим свободной переменной произвольное значение $x_3=C$, тогда со второго уравнения $x_2-2x_3=4$ следует, что $x_2=2C+4$. Из первого уравнения $x_1+x_2-x_3=-4$ следует, что $x_1=-x_2+x_3-4$. Следовательно, $x_1=-2C-4+C-4=-C-8$. Общее решение системы (-С - 8; 2С + 4; С).

Для существования нетривиального решения однородной системы линейных уравнений необходимо и достаточно, чтобы $r(A) = k < n$ (n – число неизвестных). Тогда общее решение однородной системы может быть записано в виде

$$X=C_1E_1+C_2E_2+...+C_{n-k}E_{n-k},$$

где E_i – матрицы-столбцы, которые называются **фундаментальной системой решений**.

Пример 1.10. Найти фундаментальную систему решений $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-3x_4+x_5=0;\\x_1-3x_2+x_3-2x_4+x_5=0;\\x_1+7x_2+x_3-4x_4+x_5=0.\end{cases}$

Решение. Как в предыдущем примере, проведя элементарные преобразования над строками, получим решение системы

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}17&4&1\\0&1&-1\\8&3&5\end{vmatrix}=85-32+0-8+51-0=96;\ \Delta_2=\begin{vmatrix}-3&17&1\\2&0&-1\\-2&8&5\end{vmatrix}=0+34+16-0-24-170=-144;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}-3&4&17\\2&1&0\\-2&3&8\end{vmatrix}=-24+0+102+34-0-64=48.$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{96}{-48}=-2;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-144}{-48}=3;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{48}{-48}=-1.$$

Решение произвольных систем линейных уравнений

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы $r(A)=r(A/B)$.

При этом возможны 3 варианта: 1) если $r(A)<r(A/B)$ – система несовместна; 2) $r(A)=r(A/B)=n$ (n – число неизвестных), то система имеет единственное решение; 3) если $r(A)=r(A/B)<n$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Для исследования систем линейных уравнений и нахождения их решений можно использовать метод Гаусса. С помощью элементарных преобразований над строками приведем расширенную матрицу системы (A/B) к трапециевидной форме. Такой матрице соответствует система, которую легко решить, начиная с последнего уравнения.

Пример 1.9. Исследовать систему уравнений $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-4;\\x_1+2x_2-3x_3=0;\\-2x_1-2x_3=16.\end{cases}$ и в случае совместности решить ее.

Решение. Приведем к трапециевидной форме расширенную матрицу системы. Первую строку умножим на (-1) и прибавим ко второй; первую строку умножим на 2 и прибавим к третьей. Вторую строку умножим на (-2) и прибавим к третьей.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-4\\1&2&-3&0\\-2&0&-2&16\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-4\\0&1&-2&4\\0&2&-4&8\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-4\\0&1&-2&4\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

В результате элементарных преобразований над строками получим систему равносильную исходной. Выберем в качестве базисного минора минор, стоящий в первых двух строках и столбцах: $\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$.

Тогда x_1 и x_2 – базисные переменные, а x_3 – свободная переменная. Придадим свободной переменной произвольное значение $x_3=C$, тогда со второго уравнения $x_2-2x_3=4$ следует, что $x_2=2C+4$. Из первого уравнения $x_1+x_2-x_3=-4$ следует, что $x_1=-x_2+x_3-4$. Следовательно, $x_1=-2C-4+C-4=-C-8$. Общее решение системы (-C - 8; 2C + 4; C).

Для существования нетривиального решения однородной системы линейных уравнений необходимо и достаточно, чтобы $r(A)=k<n$ (n – число неизвестных). Тогда общее решение однородной системы может быть записано в виде

$$X=C_1E_1+C_2E_2+...+C_{n-k}E_{n-k},$$

где E_i – матрицы-столбцы, которые называются **фундаментальной системой решений**.

Пример 1.10. Найти фундаментальную систему решений $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-3x_4+x_5=0;\\x_1-3x_2+x_3-2x_4+x_5=0;\\x_1+7x_2+x_3-4x_4+x_5=0.\end{cases}$

Решение. Как в предыдущем примере, проведя элементарные преобразования над строками, получим решение системы

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-C_1+2,6C_2-C_3\\0,2C_2\\C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}2,6\\0,2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

где $C_1,\ C_2,\ C_3$ – произвольные постоянные.

Тогда матрицы-столбцы $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2,6\\0,2\\0\\1\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

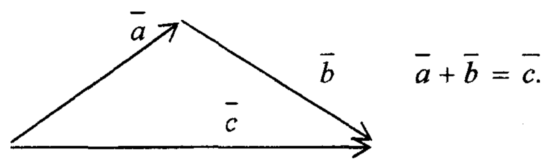
2.1. Векторы. Операции над векторами

Вектором называется направленный отрезок. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overline{AB}$ (или одной буквой $\overline{a}, \overline{b}$, …). Длина отрезка AB называется **длиной** или **модулем** вектора $\overline{AB}$ и обозначается $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым** вектором и обозначается $\overline{0}$ или просто 0. Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным** вектором и обозначается $\overline{e}$.

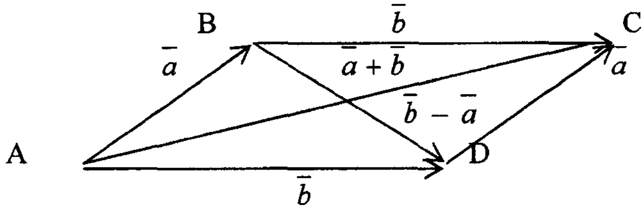
Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, называется **ортом** вектора $\overline{a}$ и обозначается $\overline{a}^{\circ}$. Два ненулевых вектора называются **противоположными**, если они имеют одинаковую длину и противоположные направления. Вектор, противоположный $\overline{a}$, обозначается $-\overline{a}$ (вектор, противоположный $\overline{AB}$ будет $\overline{BA}$, т.е. $\overline{BA}=-\overline{AB}$).

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых, записывают $\overline{a}\parallel\overline{b}$. Три вектора называют **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, соединяющий начало вектора $\overline{a}$ с концом вектора $\overline{b}$, отложенного от конца вектора $\overline{a}$ (**правило треугольника**).

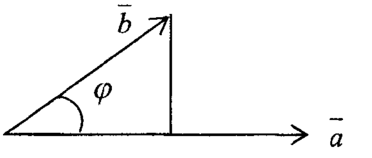


Замечание. На векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно построить параллелограмм, в котором одна диагональ будет их суммой $\overline{AC}=\overline{a}+\overline{b}$, вторая – разностью $\overline{BD}=\overline{b}-\overline{a}$. Такой способ сложения и вычитания векторов называется **правилом параллелограмма**.



Произведением вектора $\bar{a} \neq 0$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор $\lambda\bar{a}$, который имеет длину $|\lambda| \cdot |\bar{a}|$ и вектор $\lambda\bar{a}$ имеет направление вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположное направление, если $\lambda < 0$.

Углом между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется наименьший угол ϕ, на который нужно повернуть один вектор, чтобы он совпал по направлению с другим вектором.



пр$_a b$

Проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется число, равное длине $|\bar{a}|$ умноженное на $\cos\varphi$. Обозначается пр$_a b = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$.

Для ненулевых векторов возможны три варианта произведений.

1. **Скалярное произведение** – $(\bar{a},\ \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b}$.
2. **Векторное произведение** – $[\bar{a},\ \bar{b}] = \bar{a} \times \bar{b}$.
3. **Смешанное произведение трех векторов** – $\overline{abc} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла ϕ между ними, т.е. $(\bar{a},\ \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{(\bar{a},\ \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$.

Таким образом $(\bar{a},\ \bar{b}) = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b}$. Например, $(\bar{a},\ \bar{a}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\bar{a}|^2$.

Векторным произведение неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$ $\left(\bar{c} = [\bar{a},\ \bar{b}]\right)$, определяемый условиями:

1) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;
2) длина вектора $\bar{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах, т.е. $\bar{c} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$;
3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правую тройку, т.е. при наблюдении из конца вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ виден против часовой стрелки.

Пример 2.1. Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, для которых $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 6$ и угол между ними равен $\dfrac{\pi}{6}$ Найти площадь параллелограмма, построенного на этих векторах

Решение. $S = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi = 2 \cdot 6 \cdot \sin\dfrac{\pi}{6} = 6$ (кв.ед.).

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению $[\bar{a},\ \bar{b}]$ на вектор c. Обозначается $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ $\left(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \left([\bar{a},\ \bar{b}],\ \bar{c}\right)\right)$.

Геометрически модуль смешанного произведения интерпретируется как число, равное объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ как на ребрах ($\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} > 0$, если данные векторы образуют правую тройку, $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} < 0$, если – левую). Объем пирамиды равен $\dfrac{1}{6}\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|$.

Два вектора **ортогональны**, если угол между ними равен 90°. Нулевой вектор ортогонален любому вектору.

Необходимое и достаточное условие ортогональности. Два ненулевых вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$(\bar{a},\ \bar{b}) = 0 \Leftrightarrow |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Необходимое и достаточное условие коллинеарности. 1). Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, где λ - произвольное число, отличное от нуля. 2). Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их $\left[\bar{a},\ \bar{b}\right] = \bar{0}$ (площадь параллелограмма равна нулю).

Необходимое и достаточное условие компланарности векторов. Три ненулевых вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю (объем параллелепипеда равен нулю).

2.2. Действия над векторами, заданными в координатах

Если $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ – орты координатных осей прямоугольной системы координат $Oxyz$, то любой вектор $\bar{a}$ единственным образом можно представить в виде их суммы (линейной комбинации) с коэффициентами $a_x,\ a_y,\ a_z$: $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$ (рис. 1)

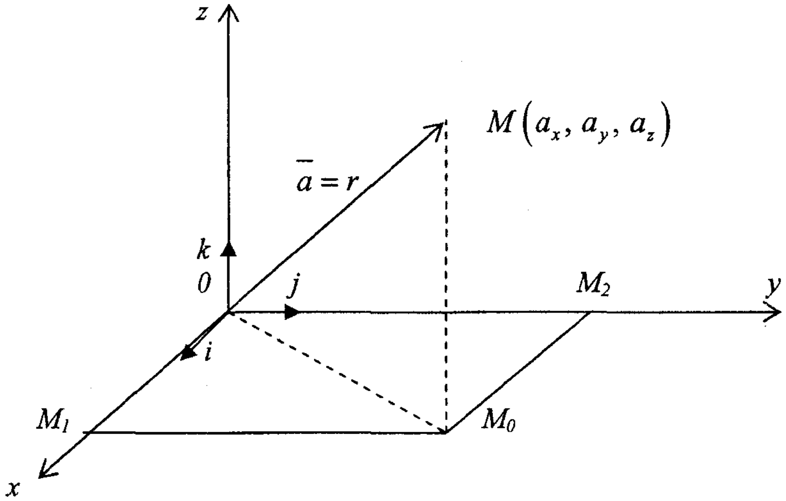


Рис. 1

$$\overline{OM} = \overline{OM_o} + \overline{M_oM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{M_oM} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k};$$

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}.$$

Здесь $a_x,\ a_y,\ a_z$ - координаты вектора $\bar{a} = \overline{OM} = \bar{r}$ ($\bar{r}$ – радиус-вектор точки M).

Если $A(a_x,\ a_y,\ a_z)$ и $B(b_x,\ b_y,\ b_z)$, то **координаты вектора** $\overline{AB}$ вычисляются по формуле

$$\overline{AB} = (b_x - a_x,\ b_y - a_y,\ b_z - a_z).$$

Орты (единичные векторы) $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ называются **базисными (ортонормированными)** векторами ($|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1,\ \bar{i} \perp \bar{j},\ \bar{i} \perp \bar{k},\ \bar{j} \perp \bar{k}$).

Пусть даны два вектора $\bar{a}(a_x,\ a_y,\ a_z)$ и $\bar{b}(b_x,\ b_y,\ b_z)$, тогда:

1) $\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z)$;

2) $\bar{a} - \bar{b} = (a_x - b_x,\ a_y - b_y,\ a_z - b_z)$;

3) $\lambda\bar{a} = (\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z)$;

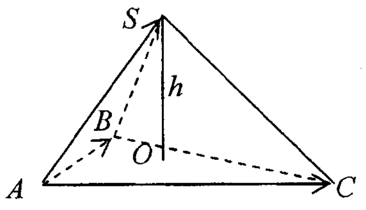
4) $(\bar{a},\ \bar{b}) = (a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z)$.

Следовательно, $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{a},\ \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \dfrac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}} \cdot \sqrt{b_x^{\,2} + b_y^{\,2} + b_z^{\,2}}}$.

5) $\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\bar{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\bar{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\bar{k}$;

6) $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Пример 2.2. Даны вершины пирамиды $A(5; 1; -4)$, $B(1;\ 2;\ -1)$, $C(3;\ 3;\ -4)$, $S(2;\ 2;\ 2)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины S на грань ABC.



Решение. Так как объем V пирамиды равен $\frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$, то $h = \frac{3V}{S_{\text{осн.}}}$, где $h = |SO|$ – высота пирамиды, $S_{\text{осн.}}$ – площадь основания.

$\overline{AB} = (1-5;\ 2-1;\ -1+4) = (-4;\ 1;\ 3)$,

$\overline{AC} = (-2;\ 2;\ 0)$,

$\overline{AS} = (-3;\ 1;\ 6)$.

Находим объем пирамиды

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AS}\right| = \frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left|-48 + 0 - 6 + 18 - 0 + 12\right| = \frac{1}{6}\,|-24| = 4 \text{ (куб.ед.)}.$$

Находим площадь основания

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|-6\bar{i} - 6\bar{j} - 6\bar{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = \frac{1}{2}6\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ (кв.ед.)}$$

Подставляем в формулу $h = \frac{3V}{S_{\text{осн.}}} = \frac{3 \cdot 4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

2.3. Прямая

Нормальным вектором прямой называется любой вектор, перпендикулярный прямой.
Направляющим вектором прямой называется любой вектор, лежащий на этой прямой.

2.3.1. Прямая на плоскости. Различные виды прямой

Каждая прямая на плоскости Oxy определяется **линейным уравнением первой степени** с двумя неизвестными.

1. **Общее уравнение прямой**. На плоскости Oxy составим уравнение прямой l, проходящей через точку $M_o(x_o,\ y_o)$, с нормальным вектором $\bar{n} = (A,\ B)$ (рис.2).

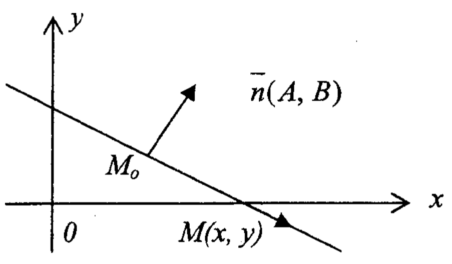


Рис. 2

Возьмем произвольную точку *M(x, y)*, лежащую на прямой *l*.

$\overline{M_oM}\left(x-x_o,\ y-y_o\right)$. $\overline{M_oM} \perp \bar{n}$ (по определению нормального вектора).

Следовательно, их скалярное произведение $(\bar{n},\ \overline{M_oM}) = 0$. В координатной форме это равенство пример вид:

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)=0 \Leftrightarrow Ax+By+Ax_o-Ay_o=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Ax+By+C=0, \text{ где } C=-Ax_o-By_o.$$

Уравнение $Ax+By+C=0$ называется **общим уравнением прямой,** где A и B не равны одновременно нулю ($A^2+B^2 \neq 0$).

Если $B \neq 0$, то уравнение можно представить в виде **уравнения с угловым коэффициентом** $y=kx+b$, где $k=-\dfrac{A}{B}$; $b=-\dfrac{C}{B}$ ($k=tg\varphi$, где ϕ – угол наклона прямой к оси Ox).

2. **Уравнение прямой, проходящей через точку** $M_o(x_o,\ y_o)$, с направляющим вектором $\bar{s}=(m,\ n)$

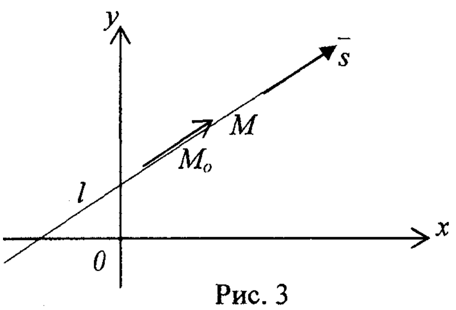


Рис. 3

Строим чертеж (рис.3).

Пусть *M(x, y)* – произвольная точка прямой *l*. Тогда вектор $\overline{M_oM}\left(x-x_o,\ y-y_o\right)$ коллинеарен вектору $\bar{s}=(m,\ n)$. Следовательно, их координаты пропорциональны, т.е.

$$\frac{x-x_o}{m}=\frac{y-y_o}{n}.$$

Такое уравнение называется **каноническим уравнением прямой**.

Из этого уравнения следует **параметрическое уравнение прямой**

$$\frac{x-x_o}{m}=\frac{y-y_o}{n}=t \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_o+mt; \\ y=y_o+nt. \end{cases}$$

3. **Уравнение прямой, проходящей через две точки** $M_1(x_1,\ y_1),\ M_2(x_2,\ y_2)$. В качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\bar{s}=\overline{M_1M_2}\left(x_2-x_1,\ y_2-y_1\right)$. Тогда искомое уравнение примет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Пример 2.3. Вершины треугольника находятся в точках $A(2;\ 2),\ B(1,\ -2),\ C(-1,\ 0)$. Найти проекцию точки A на BC.

Решение. Строим чертеж (рис.4). Проекция точки A на BC есть точка пересечения основания BC с высотой AH. Составим уравнение прямой BC по двум точкам

$$\frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B} \Rightarrow \frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-(-2)}{0-(-2)} \Rightarrow \frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{2} \Rightarrow 2(x-1)=-2(y+2) \Rightarrow x-1=-y-2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x+y+1=0$ – общее уравнение прямой BC.

Так как $AH \perp CB$, следовательно, скалярное произведение $(BC,\ AH)=0$.

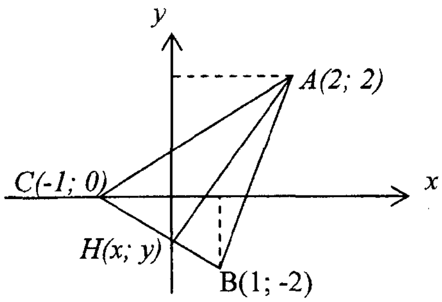


Рис.4

$\overline{AH}(x-2,\ y-2)$ и $\overline{BC}(-1-1;\ 0-(-2))=\overline{BC}(-2;\ 2)$.

$(BC;\ AH)=0$, следовательно,

$-2(x-2)+2(y-2)=0 \Rightarrow -2x+2y=0 \Rightarrow -x+y=0$

– общее уравнение AH.

Для нахождения координат точки H решим систему

$$\begin{cases} x+y=-1; \\ -x+y=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=-1; \\ x=y. \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{1}{2};\ y=-\frac{1}{2}.$$

Ответ. $H\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

2.3.2. Прямая в пространстве. Различные виды прямой

Уравнение прямой l, проходящей через $M_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$, с направляющим вектором $\bar{s}=(m,\ n,\ p)$ в пространстве $Oxyz$ составляются аналогично прямой в пространстве Oxy.

Строим чертеж (рис.5). Пусть $M(x,\ y)$ – произвольная точка прямой l. Тогда вектор $\overline{M_oM} \parallel \bar{s} \Rightarrow \frac{x-x_o}{m}=\frac{y-y_o}{n}=\frac{z-z_o}{p}$. Такое уравнение называется **каноническим уравнением прямой**.

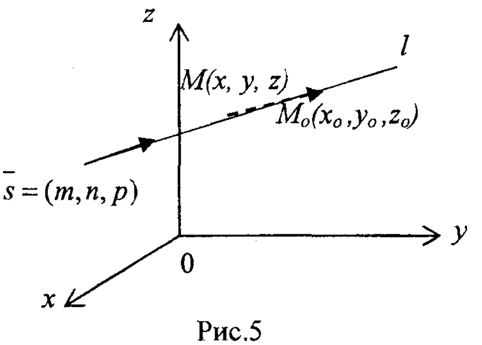


Рис.5

Параметрическое уравнение прямой примет вид

$$\frac{x-x_o}{m}=\frac{y-y_o}{n}=\frac{z-z_o}{p}=t \Leftrightarrow \frac{x-x_o}{m}=t;\ \frac{y-y_o}{n}=t;$$

$$\frac{z-z_o}{p}=t \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_o+mt; \\ y=y_o+nt; \\ z=z_o+pt. \end{cases}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Общее уравнение прямой в пространстве задается как линия пересечения двух плоскостей.

2.4. Плоскость

Плоскость в пространстве можно задать разными способами: тремя точками; точкой и вектором, перпендикулярным плоскости. В зависимости от этого рассматриваются различные виды ее уравнение.

1. В пространстве $Oxyz$ составим уравнение плоскости p, проходящей через точку $M_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$ перпендикулярно нормальному вектору плоскости $\bar{n}=(A,\ B,\ C)$ (рис.6).

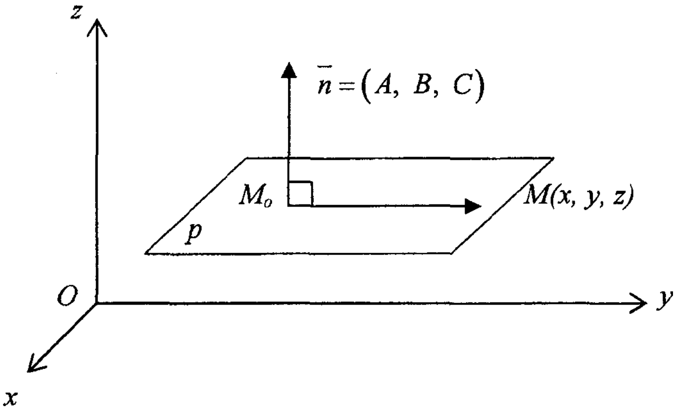


Рис. 6

Возьмем любой точку $M(x,\ y,\ z)$, лежащую на плоскости p. Векторы $\overline{M_oM}$ и $\bar{n}$ перпендикулярны. Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно нулю, т.е. $(\overline{M_oM},\ \bar{n})=0$ или в координатной форме $A(x-x_0)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0$. Уравнение $Ax+By+Cz+D=0$, где $A,\ B,\ C$ не равны одновременно нулю ($A^2+B^2+C^2\neq 0$) называется **общим уравнением плоскости**.

2. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $M_3(x_3,\ y_3,\ z_3)$, **не лежащие на одной прямой.**

Пусть $M(x,\ y,\ z)$ – произвольная точка плоскости, тогда векторы $\overline{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1)$, $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\ )$ $\overline{M_2M_3}=(x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1\ )$ компланарны, а, следовательно, их смешанное произведение равно нулю, т.е. $\overline{M_1M}\ \overline{M_1M_2}\ \overline{M_2M_3}=0$. В координатной форме запишется так:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Это и есть **уравнение плоскости, проходящей через три точки.**

Задачи на прямую и плоскость: пусть заданы две непараллельные плоскости, заданные общими уравнениями. В этом случае плоскости пересекаются по прямой, определяемой **общими уравнениями прямой.**

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Замечание. Одна и та же прямая может быть задана различными системами двух линейных уравнений, т.к. через одну прямую можно провести бесчисленное множество плоскостей.

Пример 2.4. Общие уравнения прямой $\begin{cases} x+2y-3z+2=0, \\ 2x-2y+z-5=0. \end{cases}$ привести к каноническому виду.

Решение. Для решения этой задачи надо знать какую-либо точку прямой и ее направляющий вектор $\bar{s}$. Выберем точку на прямой следующим образом: положим $z=0$, тогда для определения абсциссы x и ординаты y этой точки получим систему уравнений $\begin{cases} x+2y+2=0; \\ 2x-2y-5=0. \end{cases}$

Решая систему, находим $x=1,\ \ y=-\dfrac{3}{2}$. Итак, на прямой известна точка $(1;\ -\dfrac{3}{2};\ 0)$. Направляющий вектор прямой находим по формуле $\bar{s}=\left[\overline{n_1};\overline{n_2}\right]$ ($\overline{n_1};\overline{n_2}$ – векторы нормалей плоскостей), так как он принадлежит обеим плоскостям и, следовательно, удовлетворяет условиям $\bar{s}\perp\overline{n_1},\ \ \bar{s}\perp\overline{n_2}$.

$\overline{n_1}=(1;\ 2;\ -3)$; $\overline{n_2}=(2;\ -2;\ 1)$,

$$\bar{s}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+\bar{j}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-4\bar{i}-7\bar{j}-6\bar{k}\text{, т.е. } \bar{s}=(-4;\ -7;\ -6).$$

Тогда канонические уравнения прямой имеют вид: $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-\frac{3}{2}}{-7}=\dfrac{z-0}{-6}$ или $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+\frac{3}{2}}{7}=\dfrac{z}{6}$ – искомые уравнения прямой.

2.5. Угол между двумя прямыми на плоскости и в пространстве

Пусть $\overline{s_1}=(m_1,\ n_1,\ p_1)$ и $\overline{s_2}=(m_2,\ n_2,\ p_2)$ – направляющие векторы двух прямых в пространстве. **Угол между двумя прямыми** есть угол между их направляющими векторами, т.е.

$$\cos\varphi=\frac{\overline{s_1 s_2}}{|\overline{s_1}|\cdot|\overline{s_2}|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Тогда на плоскости $\overline{s_1}=(m_1,\ n_1,\ p_1)$ и $\overline{s_2}=(m_2,\ n_2,\ p_2)$

$$\cos\varphi=\frac{m_1\,m_2+n_1,\ n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}.$$

Условие параллельности двух прямых: $\overline{s_1}\parallel\overline{s_2}$, т.е. $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

Условие перпендикулярности двух прямых: $\overline{s_1}\perp\overline{s_2}\Leftrightarrow(\overline{s_1},\overline{s_2})=0$, т.е. $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Угол между двумя плоскостями есть угол между их нормальными векторами. Пусть $\overline{n_1}=(A_1,\ B_1,\ C_1)$ и $\overline{n_2}=(A_2,\ B_2,\ C_2)$ – нормальные векторы двух плоскостей в пространстве, тогда

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{n_1},\overline{n_2})}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|}=\frac{A_1\,A_2+B_1B_2+C_1\,C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Условие параллельности двух плоскостей. $\overline{n_1}\parallel\overline{n_2}$, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности двух плоскостей. $\overline{n_1}\perp\overline{n_2}\Leftrightarrow(\overline{n_1},\overline{n_2})=0$, т.е. $A_1\,A_2+B_1B_2+C_1\,C_2=0$.

2.6. Угол между прямой и плоскостью в пространстве

Пусть прямая l задана каноническими уравнениями $\dfrac{x-x_o}{m}=\dfrac{y-y_o}{n}=\dfrac{z-z_o}{p}$, а плоскость р – общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$.Углом между прямой и плоскостью называется острый угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Он является дополнительным до $\frac{\pi}{2}$ к углу между векторами $\bar{s}=(m,\ n,\ p)$ и $\bar{n}=(A,\ B,\ C)$ (рис. 7).

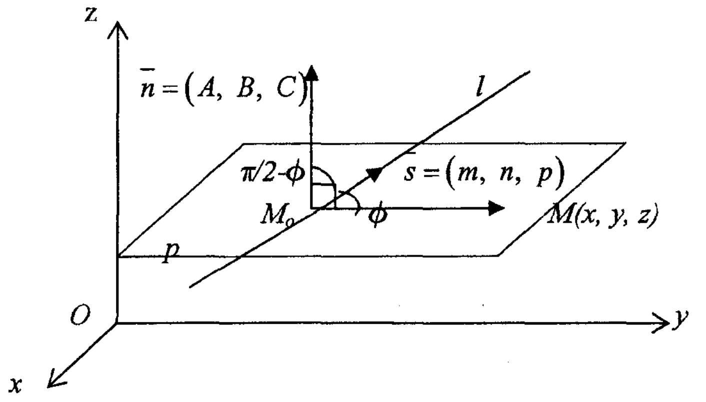


Рис. 7

Тогда $\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{(\bar{n},\bar{s})}{|\bar{n}|\cdot|\bar{s}|}=\frac{A\cdot m+B\cdot n+C\cdot p}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости. $\bar{n}\parallel\bar{s}$, т.е. $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.

Условие параллельности прямой и плоскости. $\bar{n}\perp\bar{s}\Leftrightarrow(\bar{n},\ \bar{s})=0\ \Leftrightarrow\ A\cdot m+B\cdot n+C\cdot p=0.$

Пример 2.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(1;\ -2;\ 3)$ и перпендикулярной к прямым $\frac{x-5}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-3}{-2}$, $\frac{x+2}{2}=\frac{y+4}{-5}=\frac{z-1}{4}$.

Решение. Искомое уравнение прямой будет $\frac{x-1}{m}=\frac{y+2}{n}=\frac{z-3}{p}$, где $\bar{s}=(m,\ n,\ p)$ – направляющий вектор прямой. Так как искомая прямая перпендикулярна двум заданным прямым, то

$$\bar{s}\perp\bar{s}_1,\ \bar{s}\perp\bar{s}_2\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}3\cdot m+1\cdot n-2\cdot p=0;\\ 2\cdot m-5\cdot n+4\cdot p=0.\end{cases}$$

Выразим две неизвестные через третью. Первое уравнение умножим на 2 и сложим со вторым уравнением, получим $8m-3n=0\ \Rightarrow\ m=\frac{3}{8}n$. Подставим m в любое уравнение (пусть во второе), получим

$$2\cdot\frac{3}{8}n-5n+4p=0\ \Rightarrow\ \frac{3}{4}n-5n+4p=0\ \Rightarrow\ p=\frac{17}{16}n.$$

Тогда искомое уравнение пример вид : $\frac{x-1}{\frac{3}{8}n}=\frac{y+2}{n}=\frac{z-3}{\frac{17}{16}n}\ \Rightarrow\ \frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{16}=\frac{z-3}{17}$.

Пример 2.6. Найти величину угла между прямой $\frac{x-3}{1}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+7}{-2}$ и плоскостью $4x-2y-2z-3=0$.

Решение. $\sin\varphi=\frac{4\cdot1-2\cdot1-2\cdot(-2)}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{16+4+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \varphi=\frac{\pi}{6}.$

3. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

3.1. Функция. Предел функции

Пусть даны два непустых множества X и Y. Если каждому элементу $x \in X$ по определенному правилу (закону) поставлен в соответствии единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X определена функция $y = f(x)$, где x – аргумент или независимая переменная, а y – функция или зависимая переменная. Относительно самих x и y говорят, что они находятся в функциональной зависимости.

Множество X называется **областью определения функции** и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется **множество значений функции** f и обозначается $E(f)$.

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$, можно указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Тот факт, что A является пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 записывается в виде $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Если функция $f(x)$ определена в точке $x_0 \in X$ и в некоторой ее окрестности существует предел функции при $x \to x_0$, равный значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x_0 \in X$. Функция непрерывна на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Всякая элементарная функция непрерывна в области определения. Следовательно, для нахождения предела непрерывной функции в любой точке области определения, достаточно вычислить значение функции в этой точке. Под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу: $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)\right)$.

Пример 3.1. Найти $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4} = \dfrac{(-1)^2 + 3(-1) + 2}{2(-1)^2 + 2(-1) - 4} = \dfrac{0}{-4} = 0.$

3.2. Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Предел постоянной равен самой постоянной $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

Теорема 2. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, тогда

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B.$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B.$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = (c \cdot f(x)) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \cdot A.$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B} \ (B \neq 0).$

Из 2) теоремы 2 следует, что если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = A^n, \ n \in N; \quad \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A} (A > 0, \ n - \text{четное})$

Пример 3.2. Найти предел $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x + 5}$.

Решение. Воспользовавшись теоремами о пределах частного, суммы, произведения, получим

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x + 5} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}(x^2 + 3x + 2)}{\lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 2x + 5)} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} x^2 + 3\lim\limits_{x \to 1} x + \lim\limits_{x \to 1} 2}{\lim\limits_{x \to 1} x^2 - 2\lim\limits_{x \to 1} x + \lim\limits_{x \to 1} 5} = \frac{1 + 2 + 3}{1 - 2 + 5} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Непосредственное применение теорем о пределах, однако, не всегда приводит к цели. Если вычисление пределов приводит к неопределенным выражениям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, необходимо тождественно преобразовать функцию, предел которой ищем, т.е. «раскрыть неопределенность». Как это делается покажем на конкретных примерах.

Пример 3.3. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-3x}-1}{5x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$; д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

Решение. а) При $x = 1$ числитель и знаменатель обращается в нуль, т.е. получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем дробь, разложив числитель и знаменатель на множители и сократив на множитель $x-1\neq 0$, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{4(x-1)\left(x-\frac{1}{4}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}{4\left(x-\frac{1}{4}\right)}=\frac{3\left(1+\frac{2}{3}\right)}{4\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{5}{3}.$$

б) Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Избавимся от иррациональности в числителе, умножив числитель и знаменатель дроби на сопряженное к числителю выражение $\sqrt{1-3x}+1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-3x}-1}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-3x}-1\right)\left(\sqrt{1-3x}+1\right)}{5x\left(\sqrt{1-3x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-3x-1}{5x\left(\sqrt{1-3x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{5x\left(\sqrt{1-3x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-3}{5\left(\sqrt{1-3x}+1\right)}=-\frac{3}{10}.$$

в) Числитель и знаменатель дроби конечного предела не имеют. Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель дроби на высшую степень x, т.е. на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{6+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{5+0+0}{6+0+0}=\frac{5}{6}.$$

г) Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на x^4:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\lim_{x\to 1}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=\frac{3}{1}=3.$$

д) Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Умножим и разделим выражение в сколках на сопряженное:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=-\frac{5}{2}.$$

е) Неопределенность вида $\infty-\infty$ преобразуется к неопределенности $\frac{0}{0}$ привидением функции к общему знаменателю.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-\frac{3}{3}=-1.$$

3.3. Замечательные пределы

При вычислении пределов, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, который называют **первым замечательным пределом**. Этот предел применяется для раскрытия некоторых неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Из данного равенства вытекает:

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot1=1;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{bmatrix}\arcsin x=y\ \Rightarrow\ x=\sin y\\ x\to0\ \Rightarrow y\to0\end{bmatrix}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin y}=1;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1\ \text{(аналогично).}$$

Пример 3.4. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$;б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-\operatorname{arctg}x}{2x+\arcsin x}$

Решение. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}\cdot1=\frac{1}{6}.$

б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-\operatorname{arctg}x}{2x+\arcsin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{2-\frac{\operatorname{arctg}x}{x}}{2+\frac{\arcsin x}{x}}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}.$

Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ называют **вторым замечательным пределом.** Если в этом равенстве положить $\frac{1}{x}=\alpha$ ($\alpha\to0$ при $x\to\infty$), получим другую форму записи второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

Число e называют **неперовым числом**. Это иррациональное число (e = 2,718281828… ($e\approx2,72$). Логарифмы по основанию e называют **натуральными логарифмами** и обозначают ln$x$, т.е. $\ln x=\log_e x$. Второй замечательный предел применяется для раскрытия неопределенностей вида 1^∞.

Пример 3.5. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-tg3x}$; в) $\lim\limits_{x\to2}(5-2x)^{\frac{3x}{x^2-4}}$.

Решение. а) Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1$, имеем неопределенность вида 1^∞. Для ее раскрытия воспользуемся вторым замечательным пределом, выделив предварительно у дробей целую часть:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3+5}{x-3}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}}\right]^{\frac{5x}{x-3}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{5x}{x-3}} = e^5.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-\mathrm{tg}3x} = \lim_{x\to 0}\left(1-\mathrm{tg}3x\right)^{\frac{1}{x}} = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to 0}\left[\left(1-\mathrm{tg}3x\right)^{-\frac{1}{\mathrm{tg}3x}}\right]^{\frac{-\mathrm{tg}3x}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-\mathrm{tg}3x}{3x}\cdot 3} = e^{-3}.$$

в) $$\lim_{x\to 2}\left(5-2x\right)^{\frac{3x}{x^2-4}} = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to 2}\left(1+(4-2x)\right)^{\frac{3x}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2}\left[\left(1+(4-2x)\right)^{\frac{3x}{4-2x}}\right]^{\frac{3x(4-2x)}{x^2-4}} =$$

$$= \lim_{x\to 2} e^{\frac{-6x(x-2)}{(x+2)(x-2)}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{-6x}{x+2}} = e^{-\frac{12}{4}} = e^{-3}.$$

3.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых функций

Функция $y=f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x\to x_0$ (или $x\to\infty$), если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Функция $y=f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x\to x_0$ (или $x\to\infty$), если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями существует связь. Если $f(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая функция при $x\to x_0$ и наоборот.

Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x\to x_0$ есть функция бесконечно малая при $x\to x_0$.

Произведение бесконечно малой при $x\to x_0$ функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция при $x\to x_0$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to x_0$. Для сравнения двух бесконечно малых находят предел их отношения при $x\to x_0$, т.е. находят $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A.$

При этом, если:

1. $A\neq 0$, $A\in R$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **бесконечно малыми одного порядка** малости;
2. $A=0$, то $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем $\beta(x)$.
3. $A=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными бесконечно малыми** при $x\to x_0$ и пишут $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$. Например, $\sin x\sim x$, так как $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Если $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x\to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то справедливы следующие асимптотические соотношения:

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\qquad \mathrm{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x),\qquad \sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{1}{n}\alpha(x),$$

$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x),\qquad \mathrm{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x),\qquad \ln\left(1+\alpha(x)\right)\sim\alpha(x).$$

При вычислении предела отношения двух бесконечно малых функций каждую из них можно заменить бесконечно малой, ей эквивалентной, т.е. если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Пример 3.6. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-3x}-1}{\mathrm{arctg} 5x}$; б) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{\sin(1-2x)}{4x^2-1}$.

Решение. а) Так как $\sqrt{1-3x}-1 \sim \frac{1}{2}\cdot(-3x)$, $\mathrm{arctg} 5x \sim 5x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-3x}-1}{\mathrm{arctg} 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{3}{2}x}{5x} = -\frac{3}{10}.$$

б) При $x \to \frac{1}{2}$ $\sin(1-2x) \sim 1-2x$. Поэтому $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{\sin(1-2x)}{4x^2-1} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{1-2x}{(2x-1)(2x+1)} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{-1}{2x+1} = -\dfrac{1}{2}$.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определение производной. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности фиксированной точки x_0 и пусть x – произвольная точка этой окрестности. Тогда $x - x_0 = \Delta x$ – приращение аргумента (положительное или отрицательное) такое, что $x + \Delta x$ принадлежит окрестности этой точки и приращение функции в точке x_0 выразится формулой $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. Обозначение производной в точке x_0: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$. Следовательно, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Таким образом, производная функции в точке $x = x_0$ (если существует) – есть определенное число. Если же производная существует в произвольной точке x, то она является функцией от x и обозначается:

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx}.$$

Операция нахождения производной от функции *f(x)* называется **дифференцированием** этой функции. **Дифференцируемой** называется функция, которая имеет производную.

Геометрический смысл производной. Пусть кривая L является графиком функции $y = f(x)$, а точка $M_0(x_0, y_0) \in L$. Тогда значение производной функции $f(x)$ при $x = x_0$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой, т.е. $f(x_0) = \mathrm{tg}\alpha = k$ (k – угловой коэффициент касательной).

Экономический смысл производной. Пусть $\mu = \mu(t)$ – объем продукции, произведенной за время t. Тогда отношение $\dfrac{\Delta\mu}{\Delta t}$ является средней производительностью за время Δt. Производная

$\mu'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\mu}{\Delta t}$ называется **производительностью** в момент времени t. В экономических моделях наряду с отношением $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ рассматривают отношение относительных приращений $\dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$.

Эластичностью функции $y=f(x)$ в точке x называется предел

$$E_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}=f'(x)\cdot\frac{x}{y}.$$

Эластичность $E_x(y)$ задает приближенный процент прироста функции при изменении независимой переменной на 1%.

4.1. Основные правила дифференцирования

Пусть c – постоянная, $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда

1. $c'=0$.
2. $(u+v)'=u'+v'$.
3. $(uv)'=u'v+uv'$.
4. $(c\cdot u)'=cu'$.
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$.

Если $y=f(u)$, $u=u(x)$, где $u(x)$ – дифференцируема в точке x, а функция $f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u=u(x)$, то сложная функция $y=f(u(x))$ дифференцируема в точке x и ее производная $y'=f_u'(u)u'(x)$.

4.2. Таблица производных основных элементарных функций

1. $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, $n\in R$.
2. $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$, $a>0$, $a\neq 1$.
3. $(e^u)'=e^u\cdot u'$.
4. $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\cdot\ln a}$, $a>0$, $a\neq 1$.
5. $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.
6. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$.
7. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$.
8. $(\mathrm{tg}u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$.
9. $(\mathrm{ctg}u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.
10. $(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
11. $(\arccos u)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
12. $(\mathrm{arctg}u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$.
13. $(\mathrm{arcctg}u)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Пример 4.1. Применяя правила и формулы дифференцирования, найти производные следующих функций: а) $y=x^5\mathrm{arctg}x$; б) $y=\sqrt[3]{2+x^4}$; в) $y=e^x\mathrm{arctg}e^x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$; г) $y=\arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}$.

Решение. а) $y'=(x^5)'\mathrm{arctg}x+x^5(\mathrm{arctg}x)'=5x^4\mathrm{arctg}x+x^5\dfrac{1}{1+x^2}=5x^4\mathrm{arctg}x+\dfrac{x^5}{1+x^2}$.

б) $y'=\left((2+x^4)^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}(2+x^4)^{-\frac{2}{3}}(2+x^4)'=\dfrac{4x^3}{3\sqrt[3]{(2+x^4)^2}}$.

в) Запишем данную функцию в виде $y=e^x\mathrm{arctg}e^x-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)$, получим

$$y'=e^x\mathrm{arctg}e^x-e^x\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^x-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^{2x}\cdot 2=e^x\mathrm{arctg}e^x+\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}-\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}=e^x\mathrm{arctg}e^x.$$

г)

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}}\cdot\frac{4x\left(1+x^4\right)-2x^2\cdot 4x^3}{\left(1+x^4\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-2x^4+x^8}}\cdot\frac{4x\left(1+x^4-2x^4\right)}{1+x^4}=\frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{4x\left(1-x^4\right)}{1+x^4}=\frac{4x}{1+x^4}.$$

4.3. Производные высших порядков

Производная $y'=f'(x)$ функции $y=f(x)$ является функцией от x и называется **первой производной** (или производной первого порядка) этой функции.

Второй производной (или производной второго порядка) функции $y=f(x)$ называется производная от ее первой производной и обозначается y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Таким образом, $y''=(y')'$.

Производная от второй производной, если она существует, называется **производной третьего порядка** и обозначается y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$. Итак, $y'''=(y'')'$. Аналогично определяются производные более высоких порядков.

Производной *n*-го порядка (или *n*-ой производной) функции $y=f(x)$ называется производной от производной (n-1)-го порядка, т.е. $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$. Первые три производные обозначаются штрихами, последующие – римскими цифрами или числами в скобках ($y^{(4)}$ или $y^{(\mathrm{IV})}$ – производная четвертого порядка).

Пример 4.2. Найти производную четвертого порядка функции $y=\ln x$.

Решение.

$y'=(\ln x)'=ke^{kx}$; $y''=(\ln x)''=\left(ke^{kx}\right)'=k^2e^{kx}$; $y'''=\left(ke^{kx}\right)''=\left(k^2e^{kx}\right)'=k^3e^{kx},\ldots$; $y^n=k^ne^{kx}$.

4.4. Неявная функция и ее дифференцирование

Пусть функция $y=f(x)$ задана уравнением $F\left(x,y\right)=0$, т.е. уравнением, связывающим независимую переменную x с функцией y, не разрешенным относительно y. В этом случае говорят, что функция $y=f(x)$ задана **неявно**.

Производную от функции $F\left(x,y\right)=0$ можно найти дифференцированием по x обеих частей этого уравнения с учетом того, что y – функция от x. Полученное после дифференцирования уравнение будет содержать x, y, y'. Разрешая его относительно y', найдем производную y' функции $y=f(x)$, которая в общем случае зависит от x и y.

Продифференцировав по x первую производную, рассматривая y как функция от x, получим вторую производную от неявной функции, в которую войдут x, y, y'. Подставляя уже найденное значение y' в выражение второй производной, выразим y'' через x и y.

Аналогично поступаем для нахождения y^{III}, y^{IV} и более высоких порядков.

Пример 4.3. Найти производную второго порядка неявной функции $y+x=e^{x-y}$.

Решение. Найдем первую производную $1+y'=e^{x-y}(1-y')$. Следовательно, $y'=\frac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}=\frac{x+y-1}{x+y+1}$.

Дифференцируем последнее равенство по x, получаем

$$y''=\frac{(1+y')(x+y+1)-(1+y')(x+y-1)}{(x+y+1)^2}=\frac{2(1+y')}{(x+y+1)^2}.$$

Подставим в выражение для y'' значение y': $y''=\dfrac{2\left(1+\dfrac{x+y-1}{x+y+1}\right)}{(x+y+1)^2}=\dfrac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$.

4.5. Дифференциал функции

С понятием производной теснейшим образом связано фундаментальное понятие математического анализа – дифференциал функции.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0. Производная этой функции в точке x_0 определяется равенством $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$.

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\Delta x+\alpha(x)$, $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(x)\Delta x$ где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x\to 0$.

Приращение функции представлена в виде суммы двух слагаемых, первое из которых $f'(x_0)\Delta x$ называется главной частью приращения функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется главная часть ее приращения, линейная относительно Δx и обозначается $dy,\ df(x_0)$ $(dy=f'(x_0)\Delta x)$. Но дифференциал и приращение независимой переменной x равны между собой, т.е. $\Delta x=dx$, поэтому $dy=f'(x_0)dx$. Следовательно, дифференциал функции $y=f(x)$ в точке x_0 равен произведению производной функции в этой точке на дифференциал независимой переменной.

Пример 4.4. Найти дифференциал функции $y=\cos^4 5x$ в точке x.

Решение. Дифференциал в произвольной точке x находится по формуле $dy=f(x)dx$. Для нашего примера $dy=-4\cos^3 5x\sin 5x\cdot 5dx=-20\cos^3 5x\sin 5xdx$.

4.6. Правило Лопиталя

Ранее нами были рассмотрены элементарные способы нахождения предела функции для случаев, когда аргумент неограниченно возрастает или стремится к значению, которое не входит в область определения функции. Весьма эффективным средством нахождения предела для указанных случаев, является способ, основанный на применении производной. Этот способ получил название правила Лопиталя.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$. Пусть $\varphi'(x_0)\neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Полученную формулу сформулируем в виде **правила Лопиталя**: предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если этот предел существует или равен ∞.

Это правило остается верным и в случае, если

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\pm\infty, \text{ т.е. } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Правило Лопиталя справедливо и в случае, если $x\to\pm\infty$.

Если частное $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точке x_0 вновь будет представлять неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ и $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют условиям, сформулированным для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, то можно снова применять правило Лопиталя и т.д.

Пример 4.5. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{5^{2x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}2x$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2.$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sin ax}{b\sin bx}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^2\cos ax}{b^2\cos bx}=\dfrac{a^2}{b^2}.$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{5^{2x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{5^{2x}\ln 5\cdot 2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{5^{2x}\ln 5}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{5^{2x}\ln^2 5\cdot 2}=0.$

Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ сводятся к неопределенностям $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ путем преобразования функции к виду дроби.

г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\ln x-x\cdot\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x\ln x}{x\ln x+x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}}{\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}+1}=-\frac{1}{2}.$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}2x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2}=\dfrac{1}{2}.$

В случае неопределенностей вида 1^∞, ∞^0, 0^0 следует воспользоваться логарифмическим тождеством $f(x)=e^{\ln f(x)}$ и свести указанные неопределенности к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}=(\infty^0)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\ln(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{2\cos x\ln\operatorname{tg}x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}2\cos x\ln\operatorname{tg}x}$. Вычислим предел степени.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}2\cos x\ln\operatorname{tg}x=(0\cdot\infty)=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\dfrac{1}{\cos x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\sin x}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}=0.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}=e^0=1.$

5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

На практике часто приходится рассматривать величины, значения которых зависят от нескольких изменяющихся независимо друг от друга переменных. Для изучения таких величин вводят понятие функции нескольких переменных.

5.1. Основные понятия

Определение. Переменная u называется функцией n переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$, если каждой системе значений $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ из области их изменения соответствует одно вполне определённое значение величины u и обозначается ($u = f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$).

Рассмотрим функцию двух переменных ($n = 2$). Практически все понятия и теоремы, сформулированные для $n = 2$, легко переносятся на случай $n > 2$. Рассмотрение функций двух переменных позволяет использовать геометрическую иллюстрацию основных понятий.

Определение. Переменная z называется функцией двух переменных x и y, если каждой упорядоченной паре допустимых значений (x, y) соответствует единственное значение z ($z = f\left(x, y\right)$; x, y – независимое переменные (аргументы); z – зависимая переменная (функция)).

Геометрическим изображением функции $z = f(x, y)$ является некоторая поверхность в пространстве, а проекция этой поверхности на плоскость XOY является областью определения функции – $D(f)$. Это может быть вся плоскость или её часть, ограниченная линиями. Линии, ограничивающие область D, называют её **границей**.

Точки, не лежащие на границе, но принадлежащие области, называются **внутренними точками** этой области.

Область, состоящая только из внутренних точек, называется **открытой**. Если же в область входят точки, принадлежащие границе, она называется **замкнутой**.

$E(f)$ – множество значений функции $z = f(x, y)$.

Частное значение функции при $x = x_0$, $y = y_0$ - $f(x_0, y_0)$ – число. Функция $z = f(x, y)$ может быть задана таблицей, аналитически, графиком. Чаще используется аналитический способ – формулой.

Пример 5.1. Найти область определения функции $z = \sqrt{25 - 16x^2 - 9y^2}$.

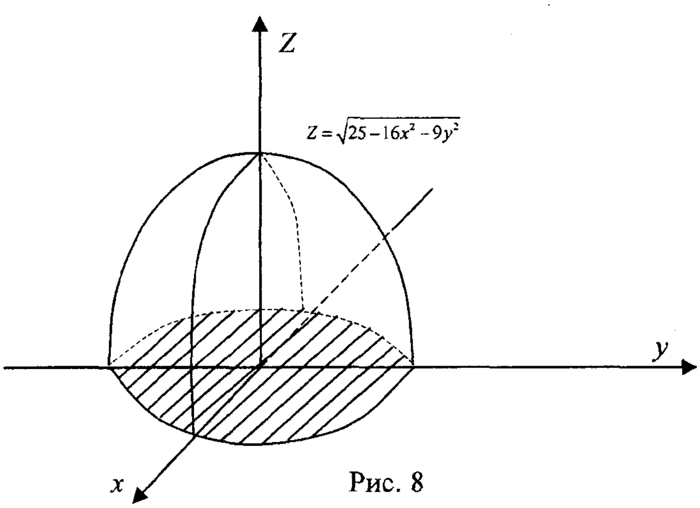


Рис. 8

Решение. Данная функция определена лишь для неотрицательных значений подкоренного выражения, т.е. для тех значений (x, y), для которых $25 - 16x^2 - 9y^2 \geq 0$, Значит для всех точек, лежащих на эллипсе

$$\frac{x^2}{\frac{25}{16}} + \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1$$ и внутри его (рис.8).

5.2. Частные производные

Частные производные первого порядка и их геометрический смысл. Пусть задана функция $z = f(x; y)$. Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, другая сохранять своё значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется частным приращением z по x и обозначается $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f\left(x + \Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)$$

Аналогично получаем частное приращение по y: $\Delta_y z = f\left(x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right)$

Полное приращение Δz определяется равенством: $\Delta z = f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right)$

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x}$, то он называется **частной производной** функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x, y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x, f'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частная производная по x в точке $M_0(x_0, y_0)$ – число, которое обозначается $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_x\big|_{M_0}$.

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функция одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $f(x,y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функций одной переменной.

Пример 5.2. Найти частные производственные функции $z = tg^5\left(e^x + y^3\right)$

Решение.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y-const} = 5tg^4\left(e^x + y^3\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(e^x + y^3\right)}\cdot e^x$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x-const} = 5tg^4\left(e^x + y^3\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(e^x + y^3\right)}\cdot 3y^2$$

Итак, все формулы и правила нахождения производной функции одного переменного без изменений переносятся на функции нескольких переменных.

5.3. Полный дифференциал функции нескольких переменных

Если полное приращение Δz функции $z = f\left(x;y\right)$ в точке $M(x;y)$ можно представить в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial z\left(x;y\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z\left(x;y\right)}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где; $\alpha(\Delta x, \Delta y)\to 0$, $\beta(\Delta x, \Delta y)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, то функция $z = f(x; y)$, называется дифференцируемой в точке $M(x;y)$, а выражение $\frac{\partial z\left(x;y\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z\left(x;y\right)}{\partial y}\Delta y$ называется полным дифференциалом функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$. Так как $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то полный дифференциал записывают в виде

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy} \qquad (5.1)$$

Формула (5.1) справедлива и для функции n переменных ($n > 2$).

Например, при $n = 3$, $u = f(x, y, z)$ имеем:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Формула (5.1) может быть записана в виде $dz = d_x z + d_y z$

где $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx$, $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy$ - частные дифференциалы функции $z = f(x; y)$.

Пример 5.3. Найти дифференциал функции $u = x^{yz}$, $x > 0$, в произвольной точке $M(x; y)$ и в точке $M_0(2; 1; 4)$.

Решение. $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$, $\frac{\partial u}{\partial x} = yzx^{yz-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^{yz}\cdot\left(\ln x\right)z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = x^{yz}\left(\ln x\right)y$.

Тогда $du = yzx^{yz-1}dx + x^{yz}\left(\ln x\right)zdy + x^{yz}\left(\ln x\right)ydz$.

Заменяя в последнем выражении x,y,z их значениями в точке $M_0(2,1,4)$, получим

$$du\left(2,1,4\right) = 16\left(2dx + 4\ln 2dy + \ln 2dz\right).$$

Теоремы и соответствующие формулы для дифференциалов, установленные для функций одной переменной, остаются справедливыми и для функций n переменных x.

5.4. Частные производные высших порядков

Рассмотрим функцию $z = f(x_0;\ y)$. Её частные производные первого порядка $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$ - функции двух переменных $(x,y)\in D$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются **частными производными второго порядка**:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(z''xx, f''_{x^2},(x,y)\right); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\left(z''_{xy}, f''_{xy}(x,y)\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{y^2}(x,y) \text{ ю}$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го, …, n-го порядков:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}\right); \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^k\partial y^{n-k}}.$$

Частная производная второго и более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной частной производной.

Пример 5.4. Показать, что функция $z=\sin^2(y-ax)$ удовлетворяют уравнению $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Решение:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x-const}=2\sin(y-ax)\cos(y-ax)=\sin 2(y-ax); \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{x-const}=2\cos 2(y-ax);$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y-const}=2\sin(y-ax)\cos(y-ax)(-a)=-a\sin 2(y-ax); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a^2\cos 2(y-ax)\Rightarrow\frac{a^2\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Пример 5.5. Найти частные производные второго порядка функции $z=x^3+xy^2-5xy^3+y^5$.

Решение: $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+y^2-5y^3$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2xy-15xy^2+5y^4$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x-30xy+20y^3$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2y-15y^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2y-15y^2$, получили, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. Этот результат не случаен.

Теорема. Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

5.5. Экстремум функции двух переменных

Основные определения. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D, точка $M_0(x_0, y_0) \in D$. Точка (x_0,y_0) называется **точкой максимума (минимума)** функции $z = f(x, y)$, если существует такая δ-окрестность точки (x_0, y_0), что для каждой точки (x, y), отличной от (x_0, y_0), из этой окрестности выполняется неравенство.

$$f(x,y)<f(x_0,y_0) \qquad \left(f(x,y)>f(x_0,y_0)\right).$$

Значение функции в точке максимума (минимума) называется **максимумом (минимумом) функции**. Максимум и минимум функции называют её **экстремумами**.

Замечание. В силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют ***локальный*** *характер: значение функции в точке (x_0, y_0) сравнивается с её значениями в точках, достаточно близких к (x_0, y_0). В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.*

Необходимые и достаточные условия экстремума. Рассмотрим условия существования экстремума.

Теорема 1. (**необходимое условие экстремума**). Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ дифференцируемая функция

$z = f(x, y)$ имеет экстремум, то её частные производные в этой точке равны нулю:

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Геометрические равенства $f'_x(x_0; y_0) = 0$ и $f'_y(x_0; y_0) = 0$ означают, что в точке экстремума функции $z = f(x, y)$ касательная плоскость к поверхности, изображающей функцию $f(x, y)$, параллельна плоскости Oxy, т.к. уравнение касательной плоскости $z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0)$ принимает вид $z = z_0$.

Замечание. Функция может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует .

Например, функция $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет максимум в точке $O(0, 0)$, но не имеет в этой точке частных производных.

Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$ равны нулю, называется **стационарной** точкой функции $z = f(x, y)$.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная не существует, называются **критическими точками.**

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума.

Например, функция $z = xy$. Для неё точка $O(0, 0)$ – критическая точка, так как $z'_x = y$ и $z'_y = x$ обращаются в нуль в этой точке. Однако экстремума в ней функция $z = xy$ не имеет по определению: в достаточно малой окрестности точки $O(0, 0)$ найдутся точки для которых $z > 0$ (точки I и III четвертей) и $z < 0$ (точки II и IV четвертей).

Таким образом, для нахождения экстремумов функции в данной области необходимо каждую критическую точку функции исследовать на экстремум.

Теорема 2. (**достаточное условие экстремума**). Пусть в стационарной точке (x_0, y_0) и некоторой её окрестности функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке (x_0,y_0) значения $A = f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0,y_0)$. Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тогда:

1)если $\Delta > 0$, то функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум: максимум, если $A < 0$;минимум, если $A > 0$;

2)если $\Delta < 0$, то функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) экстремума не имеет.

3)если $\Delta = 0$ экстремум в точке (x_0,y_0) может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Исследование функции $z = f(x, y)$ на экстремуме проводится по схеме:

1) Найти область определения функции.

2) Найти частные производные функции $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3) Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$ и найти критические точки функции.

4) Найти частные производные второго порядка, вычислить их значения в каждой критической точке и с помощью достаточного условия сделать правильный вывод о наличии экстремумов.

5) Найти экстремальные значения функции

Пример 5.6. Исследовать функцию $z = x^3 + y^3 - 6xy$ на экстремум.

Решение. Исследуем функцию по схеме:

1) Функция $z = x^3 + y^3 - 6xy$ определена для всех точек плоскости.

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 6x$, Точек, в которых частные производные не существуют, нет.

3) Найдём стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases}; \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ y^2 - 2x = 0 \end{cases}; \begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^4}{4} - 2x = 0 \end{cases}; \ x^4 - 8x = 0;\ x(x^3 - 8) = 0;\ x_1 = 0,\ y_1 = 0;\ x_2 = 2,\ y_2 = 2.$$

Стационарные точки функции $M_1(0, 0)$, $M_2(2, 2)$.

4) Находим частные производные второго порядка: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$ и их значения в стационарных точках:

a) $M_1(0;0)$. $A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 0,\ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = -6,\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = 0,\ \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = -36 < 0,$

экстремума в точке $M_1(0,0)$ – нет.

b) $M_2(2;2)$. $A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 12,\ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_2} = -6,\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2} = 12,\ \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = 108 > 0,$ точка

$M_2(2; 2)$ – точка экстремума, а так как $A = 12 > 0$, то точка $M_2(2; 2)$ является точкой минимума.

5) Находим экстремум функции $z_{min} = z(2; 2) = -8$.

Пример 5.7. Исследовать функцию $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, при $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ на экстремум.

Решение. 1) Находим частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x + \cos(x+y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + \cos(x+y)$.

2) Находим стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos x + \cos(x+y) = 0 \\ \cos y + \cos(x+y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = \cos y \Rightarrow x = y.$$

$\cos x + \cos 2x = 0$, так как $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, то $\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2} = 0$;

$\cos x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}}$; $\Rightarrow$ если $\cos x = \frac{1}{2}$, то $x_1 = \frac{\pi}{3}$; если $\cos x = -1$, то $x_2 = \pi$ – не подходит так как $x = \pi \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, стационарная точка – $M_0\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$.

3) Проверим выполнение в точке $M_0\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ достаточного условия экстремума:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x - \sin(x+y);\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y);\ \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} = -\sin y - \sin(x+y).$$

Подсчитаем значения этих производных в стационарной точке $M_0\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$.

$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial X^2}\right|_{M_0} = -\sin\frac{\pi}{3} - \sin(2\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$. $B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y}\right|_{M_0} = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $C = A = -\sqrt{3}$.

Так как $\Delta = AC - B^2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} > 0$, то в точке $M_0\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$ есть экстремум. А так как А= $-\sqrt{3} < 0$, то точка $M_0\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$ - точка максимума.

4) Находим значение экстремума функции $z_{\max} = \bar{z}\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

5.6. Скалярное поле

Рассмотрим функцию $u = u(x, y, z)$, определённую и дифференцируемую в некоторой области D.

Скалярное поле – это всё пространство (или его часть), в каждой точке которого задана некоторая скалярная величина $u = u(x, y, z)$.

Если рассматриваемая величина $u = u(x, y)$ задана в плоской области, то поле называется плоским.

Характеристики скалярного поля $u = u(x, y, z)$:

1. Множество точек, в которых функция $u(x, y, z)$ (или $u(x, y)$) принимает постоянное значение, называется **поверхностью уровня (линией уровня)**: $u(x,y,z)= c$, $(u(x,y=c))$.

Пример 5.8. Найти поверхности уровня функции $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Решение. Приравняем значение функции к постоянной c: $x^2 + y^2 + z^2 = c$, получим:

а) если $c < 0$, поверхностями уровня является семейство двуполостных гиперболоидов $\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c} - \frac{z^2}{c} = 1$.

б) $c > 0$ $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ – семейство однополостных гиперболоидов.

в) $c = 0$, $\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c} - \frac{z^2}{c} = 1$ – круговой конус второго порядка с вершиной в начале координат.

2. Производная функции поля $u = u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ по направлению $\vec{l}$ равна

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

где α, β, γ – углы, образованные вектором $\vec{l}_0$ с координатными осями; $\vec{l}_0$ – единичный вектор направления $\vec{l}$, т.е. $\vec{l}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Производная по направлению не зависит от длины вектора $\vec{l}$, а только от направления этого вектора.

Частные случаи: а) $\vec{l} = \vec{l}(1,0,0), \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial z}$; б) $\vec{l} = \vec{j}(0,1,0), \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial y}$; в) $\vec{l} = \vec{k}(0,0,1), \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial z}$,

т.е. частные производные выражают скорость изменения функции в направлении осей координат.

Градиент скалярного поля – вектор, координаты которого есть значения частных производных функции поля в точке $M(x, y, z)$.

$$grad\, u(M) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Это означает, что в области V определено векторное поле – поле градиентов данной функции поля.

Связь производной функции поля $u = u(x, y, z)$ по направлению $\vec{l}$ с градиентом этого поля:

1. $\frac{\partial u}{\partial l} = (qrad\, u, \vec{l}_0)$
2. $\frac{\partial u}{\partial l} = |qrad\, u|\cos\varphi = np_{\vec{l}}\, qrad\, u$, φ - угол между векторами $grad\, u$ и $\vec{l}_0$.

3. Производная функции в точке по направлению $\vec{l}$ имеет наибольшее значение, если направление $\vec{l}$ совпадает с направлением градиента данной функции, которое равно модулю вектора $grad\,u$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=|grad\,u|\cos\varphi=|\varphi=0|=|grad\,u|=\sqrt{(u'_x)^2+(u'_y)^2+(u'_z)^2}\,.$$

Пример 5.9. Найти скорость изменения скалярного поля, заданного функцией $u=5x^2yz-7xy^2z+5xyz^2$ в направлении вектора $\vec{a}=8\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k}$ в точке $M_0(1,1,1)$.

Решение: 1. Найдём значения частных производных в точке $M_0(1,1,1)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=(10xyz-7y^2z+5yz^2)\big|_{M_0}=8,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=(5x^2z-14xyz+5xz^2)\big|_{M_0}=-4,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=(5x^2z-7xy^2+10xyz)\big|_{M_0}=8$$ и направляющие косинусы:

если $\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$, то $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$, $\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}$.

Вычислим косинусы углов вектора $\vec{a}$ с осями координат:

$$\cos\alpha=\frac{8}{\sqrt{64+16+64}}=\frac{2}{3};\ \cos\beta=\frac{-1}{3};\ \cos\gamma=\frac{2}{3}.$$

Скорость изменения поля в точке $M(x, y, z)$ равна: $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma$.

Тогда в точке $M_0(1,1,1)$ имеем: $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0}=8\cdot\frac{2}{3}+(-4)\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)+8\frac{2}{3}=12$.

Пример 5.10. Найти величину и направление градиента поля $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ в точке $M_0(2,\ 1,\ 1)$. Определить, в каких точках grad u перпендикулярен оси OZ.

Решение.

1) $\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.\quad \frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3yz;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3xz;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=3z^2-3yx;$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=9;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=-3;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=-3;\ \Rightarrow\ \operatorname{grad}u(M_0)=9\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}.$$

2) $|\operatorname{grad}u(M_0)|=\sqrt{81+9+9}=3\sqrt{11}.$

3) $\operatorname{grad}u\perp OZ$, если $(\operatorname{grad}u,\vec{k})=0$, $\vec{k}(0,0,1)$. $(\operatorname{grad}u,\vec{k})=3(z^2-xy)$, $z^2-xy=0$, $z^2=xy$.

То есть в точках лежащих на гиперболическом параболоиде $z^2=xy$ $\operatorname{grad}u\perp 0Z$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. Доказать совместность данных систем и решить по формулам Крамера.

1.1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -5; \\ x_1 - x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 7; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 2; \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -2; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 13. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8; \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -11; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -6; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -6; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7; \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -2; \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -2; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

$$1.19.\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -3. \end{cases} \qquad 1.20.\ \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 = -2; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

$$1.21.\ \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{cases} \qquad 1.22.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4; \\ -x_1 - -2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

$$1.23.\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1; \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 1. \end{cases} \qquad 1.24.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

$$1.25.\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 3; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 13; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases} \qquad 1.26.\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -3; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1.27.\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9; \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases} \qquad 1.28.\ \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 14; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

$$1.29.\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5. \end{cases} \qquad 1.30.\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9; \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Задание 2. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

$$2.1.\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1; \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases} \qquad 2.2.\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1; \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 12x_4 = 1; \\ x_1 - 5x_3 = 3. \end{cases}$$

$$2.3.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1; \\ 4x_1 - 7x_2 - 18x_3 + 11x_4 = -13; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases} \qquad 2.4.\ \begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -15; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3; \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = -6; \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$$

$$2.5.\ \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ -2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0; \\ 5x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases} \qquad 2.6.\ \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$$

2.7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3; \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_4 = -3; \\ x_1 - 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4; \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 10; \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 16; \\ 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 - x_4 = 18. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2; \\ -5x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 12x_4 = -4; \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 12x_4 = -1; \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 1; \\ 4x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 = 8; \\ 6x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 11; \\ 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 11; \\ 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7; \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 6. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4; \\ -5x_1 + 2x_2 - x_4 = 6. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0; \\ x_1 - 5x_2 - x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -3; \\ 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 13; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2; \\ 4x_1 + 9x_2 + x_3 + 8x_4 = -3; \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 4. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -3; \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1; \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -2; \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 6. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 14; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -7. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4; \\ 7x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8. \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1; \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4; \\ 7x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -7. \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 3x_1 + 5x_2 = 3; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -4; \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -3; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -3. \end{cases}$

Задание 3. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках A_1, A_2, A_3, A_4. Найти, используя векторы (a, b): а) косинус угла между ребрами A_1A_2, A_1A_4; б) длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; в) уравнение ребра A_1A_4; г) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; д) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$; е) угол между ребром A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

3.1. $A_1(7; 2; 4)$, $A_2(7; -1; -2)$, $A_3(3; 3; 1)$, $A_4(-4; 2; 1)$.

3.2. $A_1(1; 3; 6)$, $A_2(2; 2; 1)$, $A_3(-1; 0; 1)$, $A_4(-4; 6; -3)$.

3.3. $A_1(1; 2; 0)$, $A_2(3; 0; -3)$, $A_3(5; 2; 6)$, $A_4(8; 4; -9)$.

3.4. $A_1(5; 1; -4)$, $A_2(1; 2; -1)$, $A_3(3; 3; -4)$, $A_4(2; 2; 2)$.

3.5. $A_1(1; 1; 1)$, $A_2(-1; 2; 4)$, $A_3(2; 0; 6)$, $A_4(-2; 5; -1)$.

3.6. $A_1(6; 1; 4)$, $A_2(2; -2; -5)$, $A_3(7; 1; 3)$, $A_4(1; -3; 7)$.

3.7. $A_1(1; 2; 6)$, $A_2(0; 3; 8)$, $A_3(-5; -1; 4)$, $A_4(-3; 2; -6)$.

3.8. $A_1(1; 2; 3)$, $A_2(3; 3; 2)$, $A_3(2; 3; 1)$, $A_4(12; 0; 0)$.

3.9. $A_1(2; -3; 5)$, $A_2(0; 2; 1)$, $A_3(-2; -2; 3)$, $A_4(3; 2; 4)$.

3.10. $A_1(1; 1; 1)$, $A_2(2; 0; 2)$, $A_3(2; 2; 2)$, $A_4(3; 4; -3)$.

3.11. $A_1(3; 1; 4)$, $A_2(-1; 6; 1)$, $A_3(-1; 1; 6)$, $A_4(0; 4; -1)$.

3.12. $A_1(1; 4; 2)$, $A_2(3; 1; 2)$, $A_3(5; 2; 4)$, $A_4(2; 3; 4)$.

3.13. $A_1(1; 1; 5)$, $A_2(2; 5; 1)$, $A_3(1; 4; 3)$, $A_4(5; 3; 2)$.

3.14. $A_1(1; 1; 3)$, $A_2(3; 5; 4)$, $A_3(3; 2; 4)$, $A_4(0; 4; 1)$.

3.15. $A_1(4; 2; 5)$, $A_2(0; 7; 2)$, $A_3(0; 2; 5)$, $A_4(1; 4; 0)$.

3.16. $A_1(1; -1; 5)$, $A_2(4; 4; -1)$, $A_3(-1; 2; 0)$, $A_4(5; 1; 5)$.

3.17. $A_1(9;5;5)$, $A_2(-3;7;1)$, $A_3(5;7;8)$, $A_4(6;9;2)$.

3.18. $A_1(1;1;1)$, $A_2(4;4;4)$, $A_3(3;5;5)$, $A_4(2;4;7)$.

3.19. $A_1(0;0;1)$, $A_2(2;3;5)$, $A_3(6;2;3)$, $A_4(3;7;2)$.

3.20. $A_1(1;2;3)$, $A_2(-2;4;1)$, $A_3(7;6;3)$, $A_4(4;-3;-1)$.

3.21. $A_1(0;0;0)$, $A_2(5;2;0)$, $A_3(2;5;0)$, $A_4(1;2;4)$.

3.22. $A_1(2;4;3)$, $A_2(7;6;3)$, $A_3(4;9;3)$, $A_4(3;6;7)$.

3.23. $A_1(3;5;4)$, $A_2(5;8;3)$, $A_3(1;9;9)$, $A_4(6;4;8)$.

3.24. $A_1(3;3;9)$, $A_2(6;9;1)$, $A_3(1;7;3)$, $A_4(8;5;8)$.

3.25. $A_1(6;6;2)$, $A_2(5;4;7)$, $A_3(2;4;7)$, $A_4(7;3;0)$.

3.26. $A_1(1;2;3)$, $A_2(9;6;4)$, $A_3(3;0;4)$, $A_4(5;2;6)$.

3.27. $A_1(0;0;0)$, $A_2(3;0;5)$, $A_3(1;1;0)$, $A_4(4;1;2)$.

3.28. $A_1(3;1;4)$, $A_2(-1;6;1)$, $A_3(-1;1;6)$, $A_4(0;4;-1)$.

3.29. $A_1(0;6;4)$, $A_2(3;5;3)$, $A_3(-2;11;-5)$, $A_4(1;-1;4)$.

3.30. $A_1(0;0;0)$, $A_2(3;4;-1)$, $A_3(2;3;5)$, $A_4(6;0;-3)$.

Задание 4. Вычислить пределы.

1. *а*) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-11x+5}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{3x}$.

4.2. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x+5}{3x^6+1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x(1-x)}{\sqrt{x}-1}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{3x+2}$.

4.3. *а*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{-x+5}$.

4.4. *а*) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-7x+10}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x+\operatorname{tg}5x}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+41}\right)^{-5x+3}$.

4.5. *а*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 7x}{3x^3}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

4.6. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-3x}{\sin 5x}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^{3x-5}$.

4.7. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{2}\cos x}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{4x}{1+4x}\right)^{-x+50}$.

4.8. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)^3}{7x^3-5x^2+4x-1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 4x}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-3}\right)^{5x^2}$.

4.9. *а*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{7x}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{5x^2}}$.

4.10. *а*) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{x^3-125}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\cos 3x-\cos x}$; *в*) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x(\ln(3+x)-\ln x)$.

4.11. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}\right)$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos^3 2x}{3x^2}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 1}(5-4x)^{\frac{3x}{2-2x}}$.

4.12. *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{3x\mathrm{tg}3x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$.

4.13. *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^3-27}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.

4.14. *а)* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{8x^2(x-2)}{3x^2-12}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}10x}{1-\cos 5x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{7}{x}\right)^{4x-5}$.

4.15. *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-x}-3}{\mathrm{arctg}2x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{2x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3x}\ln\sqrt{1+2x}$.

4.16. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-5x^2+4x-1}{(x+2)^3}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{xe^{7x}}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\mathrm{tg}^2 3x\right)^{\frac{3}{x^2}}$.

4.17. *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{16+x}-4}{\sin\pi(x+4)}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 10x}{x^2+2\pi x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to+\infty}3x\left(\ln(5+2x)-\ln 2x\right)$.

4.18. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$; *б)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{2}\cos x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$.

4.19. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{1-\cos 5x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 3x\right)^{\frac{1}{1-\cos 2x}}$.

4.20. *а)* $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}tg6x}{\sqrt{1-\cos 4x}}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 6x)^{\frac{1}{5x^2}}$.

4.21. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{3x^2}{15x+1}\right)$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x\mathrm{tg}2x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{8+x}{x}}$.

4.22. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^5-3x^2+5x}{x+4x^4-3x^5}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)\left(\ln(x+5)-\ln x\right)$.

4.23. *а)* $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2+7x-4}{10x-5}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$.

4.24. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{1-\cos 3x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{4}{x-3}}$.

4.25. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{x+5}-3}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 6x-1}{x\sin 5x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{1+3x}\right)^{4x}$.

4.26. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+5}-x\right)$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}x^2\mathrm{ctg}^2 5x$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

4.27. *а)* $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{30-x}}{5-\sqrt{5x}}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$; *в)* $\lim\limits_{x\to+\infty}3x\left(\ln(5+2x)-\ln 2x\right)$.

4.28. *а)* $\lim\limits_{x\to 16}\frac{2-\sqrt[4]{x}}{4-\sqrt{x}}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-8x)}{4x}$.

4.29. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+2)^3}{3x^3+8}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{\sqrt{1-\cos 6x}}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.

4.30. *а)* $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}10x}{1-\cos 5x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{4}{7x}}$.

Задание 5 . Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$.

5.1. а) $y=5^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}+\ln \mathrm{tg}^2 x$; б) $y\sin x=\cos(x-y)$.

5.2. а) $y=\sqrt{3x^4+2x-5}+\dfrac{\sin^2 x}{(x-2)^5}$; б) $y^2=xe^{-xy}$.

5.3. а) $y=\arcsin\sqrt{x^2-1}+\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$; б) $(x+y)^2+(x-3y)^2=0$.

5.4. а) $y=\sqrt{x}\arccos\sqrt{x}+\ln \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$; б) $x\ln y-y\ln x=8$.

5.5. а) $y=\mathrm{tg}^3(x^2+1)-\ln\sqrt{x^5+4}$; б) $x-y+\mathrm{arctg} y=0$.

5.6. а) $y=\ln\dfrac{\cos^2 ax}{\sin^3 ax}$; б) $y^2x=\mathrm{acrtg}\dfrac{y}{x}$.

5.7. а) $y=\ln\left(\cos^2 \mathrm{arctg}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2-x}\right)$; б) $x^3+y^3-3axy=0$.

5.8. а) $y=\dfrac{\arcsin 4x}{\cos x}+\ln^3\sqrt{x^4+1}$; б) $\sin(x+y)-2xy=0$.

5.9. а) $y=e^{2x}\sin\left(\cos^2\left(\mathrm{tg}^3 x\right)\right)$; б) $\ln y+\dfrac{x}{y}=x+y$.

5.10. а) $y=\dfrac{2^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x^2+3}}$; б) $\arcsin xy+\dfrac{x}{y}=x$.

5.11. а) $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$; б) $e^{2y}-e^{3x}+\dfrac{y}{x}=0$.

5.12. а) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; б) $xy=\ln(1+y)$.

5.13. а) $y=tg^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\ln\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $x^2+x\sin y=0$.

5.14. а) $y=\sqrt{4-x^2}+e^{x^2}\arcsin\dfrac{x}{2}$; б) $\ln y+\dfrac{x}{y}=1$.

5.15. а) $y=(1+\ln\sin 2x)^2+2^{\cos 3x}$; б) $\dfrac{y}{x}=\mathrm{acrtg}\dfrac{x}{y}$.

5.16. а) $y=\ln \mathrm{tg}\sqrt{x^3-5}+\dfrac{1}{x^2+4x-6}$; б) $x\sin y-y\cos x=0$.

5.17. а) $y=5^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}+\ln \mathrm{tg}^2 x$; б) $e^{x+y}=\sin\dfrac{y}{x}$.

5.18. а) $y=\ln\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{a+x}-\dfrac{a}{a+x}+\arccos\sqrt{x}$; б) $e^y+x^2e^{-y}=2x$.

5.19. а) $y=\mathrm{ctg}^2(x+1)\cdot\arccos\dfrac{1}{x}$; б) $e^{xy}-x^2+y^3=0$.

5.20. а) $y=2^{-\sin x}\arcsin^3 2x$; б) $\sin(x+y)+2x-3y=0$.

5.21. а) $y=\ln^2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; б) $x^4+y^4-2y=0$.

5.22. *а)* $y=\operatorname{arctg}^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; *б)* $\cos^2(x+y)=xy$.

5.23. *а)* $y=\ln\ln\left(e^x\cos x+e^{-x}\sin x\right)$; *б)* $y-x+\operatorname{arctg}xy=0$.

5.24. *а)* $y=\frac{1}{3}\sin^3\sqrt{x}-\frac{2}{5}\sin^5\sqrt{x}+\frac{1}{7}\sin^7\sqrt{x}$; *б)* $1+x=\frac{1}{2}\ln(x+2y)$.

5.25. *а)* $y=e^{x^3}\cos\sqrt{1+x^2}$; *б)* $y-x+\operatorname{arctg}y=0$.

5.26. *а)* $y=\dfrac{\arccos\sqrt[3]{x^2-2}}{\operatorname{tg}^2x}$; *б)* $x=y+e^{xy}$.

5.27. *а)* $y=\dfrac{\left(1-x^2\right)\cos 3x}{\arccos 5x}$; *б)* $e^x+e^y-2^{xy}=1$.

5.28. *а)* $y=\dfrac{e^{-tg\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{4x^2+3x+1}}$; *б)* $\cos^2(x+y)=xy$.

5.29. *а)* $y=\ln\cos^3\sqrt{\operatorname{arctg}e^{3x}}$; *б)* $\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=0$.

5.30. *а)* $y=-\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}-2\ln\sin\dfrac{x}{2}$; *б)* $\sqrt{x^2+y^2}=2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Задание 6. Найти производные второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

6.1. $y=\frac{1}{4}x^2(2\ln x-3)$;

6.2. $y=e^{2x}\cos^2 x$;

6.3. $y=e^{ax^2+bx+c}$;

6.4. $y=\left(x^2+1\right)e^{-3x}$;

6.5. $y=\operatorname{ctg}x+x^2e^x$;

6.6. $y=x\ln\left(1+x^2\right)$;

6.7. $y=\ln\operatorname{ctg}^2x$;

6.8. $y=x\cos\left(x^2+1\right)$;

6.9. $y=\sqrt{x^2-a^2}$;

6.10. $y=x^2\sin x+x\cos x$;

6.11. $y=\dfrac{3x+2}{x^2-2x+5}$;

6.12. $y=\arcsin^2 x$;

6.13. $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$;

6.14. $y=\operatorname{arctg}\left(e^{-x^2}\right)$;

6.15. $y=x^2e^{3x}$;

6.16. $y=x^2\sin 3x$;

6.17. $y=\cos\left(4x^2+x\right)$;

6.18. $y=(x+1)\cos 2x$;

6.19. $y=e^{\operatorname{ctg}3x}$;

6.20. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x^2+1}$;

6.21. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

6.22. $y=-\frac{1}{9}x\sin 3x-\frac{2}{27}\cos 3x$;

6.23. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$;

6.24. $y=\ln\left(x^2+5x+6\right)$;

6.25. $y=\arcsin^2\dfrac{x}{2}$;

6.26. $y=\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}x$;

6.27. $y=\ln\sqrt[3]{1+x^2}$;

6.28. $y=e^{3x}\cos\dfrac{x}{3}$;

6.29. $y=x^2\ln\dfrac{1}{x}$;

6.30. $y=2x\operatorname{arctg}x$.

Задание 7. Дана функция $u = u(x,\ y,\ z)$, **точка** $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ **и вектор** $\bar{s}$. **Найти в точке М:**

а) производную по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{s}}$ **по направлению вектора** $\bar{s}$; **б) градиент** $\operatorname{grad} u$.

7.1. $u = 5^{xy-z} + \sin\dfrac{z}{2y}$;	$\bar{s} = \bar{j} - \bar{k}$;	$M_0(1;\ 1;\ 0)$.
7.2. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;	$\bar{s} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$;	$M_0(3;\ -4;\ 5)$.
7.3. $u = x^2 \ln\dfrac{y}{z} + zy$;	$\bar{s} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$;	$M_0(2;\ 1;\ 1)$.
7.4. $u = x^3 z + \sin\dfrac{x}{z} - y^5$;	$\bar{s} = 3\bar{i} + 6\bar{j} + 2\bar{k}$;	$M_0\left(\dfrac{\pi}{2};\ ;\ \right)$.
7.5. $u = \ln(5x^2 + xy + z)$;	$\bar{s} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \sqrt{3}\bar{k}$;	$M_0(1;\ 2;\ 4)$.
7.6. $u = x^2 yz^2 + 2x + 1$;	$\bar{s} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$;	$M_0(1;\ -2;\ 2)$.
5.7. $u = 3x^4 - y + 4z^2 x$;	$\bar{s} = -3\bar{i} + 4\bar{k}$;	$M_0(1;\ 1;\ 2)$.
5.8. $u = \operatorname{arctg}(xyz) - \ln(x + y + z)$;	$\bar{s} = \bar{i} - \bar{k}$;	$M_0(1;\ 0;\ 1)$.
5.9. $u = \sin\dfrac{x}{y} + z^2 y$;	$\bar{s} = -2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$;	$M_0\left(\dfrac{\pi}{2};\ 1;\ 2\right)$.
7.10. $u = x\ln(x^2 + y) - z^2 y$;	$\bar{s} = -8\bar{i} + 4\bar{j} - 8\bar{k}$;	$M_0(1;\ 0;\ 1)$.
7.11. $u = \cos^2 xy + 3z$;	$\bar{s} = \bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}$;	$M_0\left(\dfrac{\pi}{4};\ -1;\ 2\right)$.
7.12. $u = \arcsin\dfrac{z^2}{y} + x^2$;	$\bar{s} = 5\bar{i} + 12\bar{k}$;	$M_0(-1;\ 2;\ 1)$.
7.13. $u = e^{\frac{z}{y}} + \ln x$;	$\bar{s} = 12\bar{j} - 5\bar{k}$;	$M_0(2;\ 1;\ 0)$.
7.14. $u = \operatorname{ctg} yz - \dfrac{y}{x^2}$;	$\bar{s} = \bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$;	$M_0\left(1;\ \dfrac{\pi}{4};\ 1\right)$.
7.15. $u = 2^{xz} - \cos\dfrac{y}{2z}$;	$\bar{s} = \bar{i} + 8\bar{j} - 4\bar{k}$;	$M_0\left(2;\ \dfrac{\pi}{2};\ 1\right)$.
7.16. $u = \sin^2 yz + 2x^2 y$;	$\bar{s} = 5\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$;	$M_0\left(3;\ 1;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.
7.17. $u = \sqrt{2xy - y^2 z} + \dfrac{z}{x}$;	$\bar{s} = -\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$;	$M_0(2;\ 2;\ 0)$.
7.18. $u = x^3 y^2 - \ln(5xz + y^2)$;	$\bar{s} = 4\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$;	$M_0(2;\ 1;\ 1)$.
7.19. $u = 5^{\frac{x}{2z}} + y^2 x^2$;	$\bar{s} = -\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$;	$M_0(1;\ 1;\ -1)$.
7.20. $u = x^{xz} + x^2 z$;	$\bar{s} = \bar{i} + 5\bar{j} - 2\bar{k}$;	$M_0(2;\ 2;\ 1)$.
7.21. $u = xe^y + ye^x - z^2$;	$\bar{s} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$;	$M_0(3;\ 0;\ 2)$.
7.22. $u = e^{xy} + \dfrac{2y}{z^2}$;	$\bar{s} = 4\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$;	$M_0(1;\ 2;\ -1)$.

7.23. $u = y\ln(x^2z) + 2x^2y;$ $\bar{s} = -\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k};$ $M_0(1;\ 1;\ 2).$

7.24. $u = xyz - \ln\dfrac{x}{2z};$ $\bar{s} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k};$ $M_0(-4;\ 1;\ -2).$

7.25. $u = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2};$ $\bar{s} = 2\bar{i} - \sqrt{3}\bar{j} + 3\bar{k};$ $M_0(4;\ -2;\ 1).$

7.26. $u = e^{3x^2+2y^2-xyz^3};$ $\bar{s} = 6\bar{i} + 8\bar{j};$ $M_0(1;\ -1;\ -1).$

7.27. $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - \dfrac{z}{x};$ $\bar{s} = 3\bar{i} + 6\bar{j} + 2\bar{k};$ $M_0(-1;\ 1;\ 2).$

7.28. $u = \operatorname{ctg}\dfrac{y}{z} + x^2;$ $\bar{s} = 2\bar{i} + 11\bar{j} + 10\bar{k};$ $M_0(1;\ \pi;\ 2).$

7.29. $u = \dfrac{z}{x^2} - yx^2;$ $\bar{s} = 4\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k};$ $M_0(1;\ -2;\ 1).$

7.30. $u = \cos xy + z^2y;$ $\bar{s} = -\bar{j} + \bar{k};$ $M_0(0;\ 2;\ 3).$

ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика. Общий курс / под ред. С.А. Самоля. – Минск: Вышэйшая школа, 2000.

2. Высшая математика для экономистов / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 1998.

3. Шипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 1985.

4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учебное пособ.: в 3 ч. / под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 1991.

СОДЕРЖАНИЕ