

Секция 3. ФИЗИЧЕСКИЕ, ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ, МАТЕРИАЛОВЕДЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

УДК 534-16:534-8:621.9.048.6

РАСЧЕТ КОЛЬЦЕВЫХ КОНЦЕНТРАТОРОВ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ПЕРЕДАТОЧНЫХ МАТРИЦ

Степаненко Д.А., Емельянова А.С., Плескач М.А., Солодка Н.В.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Возможность усиления ультразвуковых колебаний по амплитуде с помощью неоднородных кольцевых концентраторов, состоящих из нескольких последовательно соединенных сегментов из материалов с различной плотностью и/или модулем упругости, была ранее теоретически обоснована авторами [1, 2]. Преимуществами таких концентраторов являются простота изготовления, малые габаритные размеры и масса. Расчет основных эксплуатационных характеристик кольцевых концентраторов, таких как резонансные частоты колебаний и коэффициент усиления колебаний по амплитуде, может осуществляться путем решения дифференциальных уравнений их колебаний с учетом граничных условий [1, 2], однако такой подход является достаточно трудоемким. Более простым с инженерной точки зрения является расчет с помощью метода передаточных матриц, который ранее применялся авторами для стержневых концентраторов [3].

Передаточная матрица $T(\varphi)$ позволяет выразить вектор параметров колебаний $u(\varphi)$ в произвольно взятом поперечном сечении концентратора через вектор параметров колебаний $u(0)$ в его входном сечении:

$$u(\varphi) = T(\varphi)u(0).$$

В случае изгибных колебаний кольцевого сегмента вектор параметров колебаний состоит из 6 переменных: амплитуда тангенциальных колебательных смещений $V(\varphi)$, амплитуда радиальных колебательных смещений $W(\varphi)$, амплитуда угла поворота поперечного сечения $\psi(\varphi) = (1/R)(dW/d\varphi + V)$, амплитуда продольной силы $N(\varphi) = (ES/R)(dV/d\varphi - W)$, амплитуда момента $M(\varphi) = (EJ/R^2)(dV/d\varphi + d^2W/d\varphi^2)$, амплитуда поперечной силы $Q(\varphi) = -(EJ/R^3)(d^3W/d\varphi^3 + d^2V/d\varphi^2)$. Здесь R – радиус средней линии сегмента, E – продольный модуль упругости материала сегмента, S – площадь поперечного сечения сегмента, J – осевой момент инерции поперечного сечения сегмента. Приведенные определения переменных даны для уравнений колебаний типа Эйлера-Бернулли, не учитывающих сдвиговых деформаций и инерционного момента, связанного с вращением попе-

речного сечения. При учете этих факторов (использовании уравнений колебаний типа Тимошенко) амплитуда угла поворота ψ становится независимой переменной, а амплитуды момента и поперечной силы определяются выражениями

$$M(\varphi) = (EJ/R)d\psi/d\varphi,$$

$$Q(\varphi) = (K_s GS/R)(dW/d\varphi + V - \psi R),$$

где K_s – коэффициент сдвига, зависящий от формы поперечного сечения сегмента, G – модуль сдвиговой упругости материала сегмента.

Для однородного кольцевого сегмента с $S = \text{const}$ и $R = \text{const}$ передаточную матрицу можно представить в виде

$$T(\varphi) = \exp(A\varphi),$$

где матрица A входит в уравнение колебаний сегмента $du/d\varphi = Au$, записанное относительно вектора параметров колебаний, и в случае уравнений типа Эйлера-Бернулли имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & R/ES & 0 & 0 \\ -1 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R/EJ & 0 \\ -EJ\xi/R^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R \\ 0 & -EJ\xi/R^3 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь $\xi = \omega^2 \rho SR^4 / EJ$ – безразмерный частотный параметр, ω – круговая частота колебаний, ρ – плотность материала сегмента.

В случае уравнений типа Тимошенко в матрице A добавляются два дополнительных ненулевых элемента: $A_{26} = R/K_s GS$ и $A_{33} = -EJ^2\xi/SR^3$.

С помощью теоремы о спектральном разложении (формулы Лагранжа-Сильвестра) передаточную матрицу можно представить в виде

$$T(\varphi) = \sum_{k=1}^6 \exp(\lambda_k \varphi) \prod_{i=1, i \neq k}^6 \frac{A - \lambda_i I}{\lambda_k - \lambda_i},$$

где λ_k – собственные числа матрицы A , I – единичная матрица.

Передаточная матрица концентратора, состоящего из двух сегментов с центральными углами $2\varphi_0$ и $2(\pi - \varphi_0)$, будет определяться как

произведение передаточных матриц составляющих его сегментов:

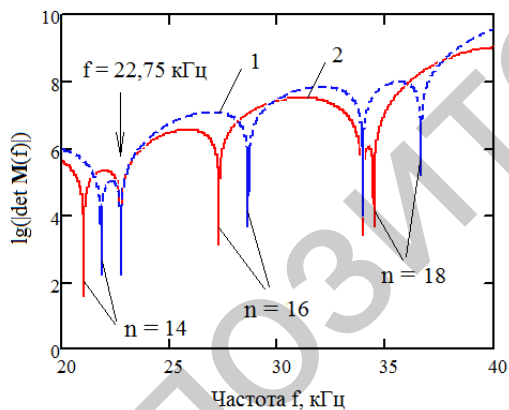
$$\mathbf{T}(\mathbf{g}, f) = \mathbf{T}_2(\mathbf{g}_2, f, \pi - \varphi_0) \mathbf{T}_1(\mathbf{g}_1, f, \varphi_0),$$

где $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ – векторы геометрических параметров сегментов, \mathbf{g} – вектор геометрических параметров концентратора, f – частота колебаний.

При заданном значении вектора \mathbf{g} геометрических параметров концентратора (задача расчета концентратора) резонансные частоты колебаний могут быть определены из условия резонанса

$$\det \begin{pmatrix} T_{12}(\mathbf{g}, f) & T_{14}(\mathbf{g}, f) & T_{15}(\mathbf{g}, f) \\ T_{32}(\mathbf{g}, f) & T_{34}(\mathbf{g}, f) & T_{35}(\mathbf{g}, f) \\ T_{62}(\mathbf{g}, f) & T_{64}(\mathbf{g}, f) & T_{65}(\mathbf{g}, f) \end{pmatrix} = 0$$

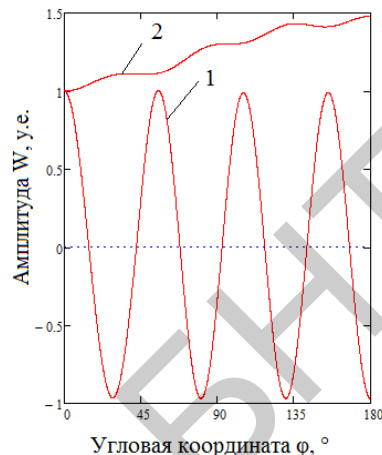
В качестве численного примера был рассмотрен расчет концентратора со следующими параметрами: радиус средней линии $R = 29$ мм; толщина в радиальном направлении $h = 2$ мм; модули упругости материалов сегментов $E_1 = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па (сталь), $E_2 = 1,3 \cdot 10^{11}$ Па (бронза); плотности материалов сегментов $\rho_1 = 7800$ кг/м³, $\rho_2 = 8300$ кг/м³; центральный угол стального сегмента $2\varphi_0 = \pi/2$. Были рассмотрены частоты колебаний f в диапазоне от 20 до 40 кГц. На рисунке 1 приведены расчетные резонансные кривые концентратора, представляющие собой графики зависимости $\lg(|\det \mathbf{M}(f)|)$, где $\mathbf{M}(f)$ – матрица, входящая в условие резонанса, от частоты f .



1 – расчет по уравнениям типа Эйлера-Бернулли,
2 – расчет по уравнениям типа Тимошенко
Рисунок 1 – Расчетные резонансные кривые
кольцевого концентратора

Резонансным частотам соответствуют точки, в которых $\lg(|\det \mathbf{M}(f)|) \rightarrow -\infty$. Резонансные кривые, рассчитанные с использованием различных уравнений колебаний, имеют качественно сходный внешний вид, однако более точные значения резонансных частот получаются при использовании уравнений типа Тимошенко. Расчет собственных форм (мод) колебаний показывает, что их можно разделить на два типа

(рисунок 2): 1) моды со знакопеременной амплитудой W ; 2) моды со знакопостоянной амплитудой W . При этом усиление колебаний по амплитуде обеспечивают только моды второго типа. На рисунке 1 число узловых точек амплитуды W для мод со знакопеременной амплитудой обозначено как n .



1 – $f = 21,03$ кГц, 2 – $f = 22,75$ кГц,
Рисунок 2 – Расчетные собственные формы
колебаний кольцевого концентратора

Резонансные кривые и собственные формы колебаний, рассчитанные методом передаточных матриц с использованием уравнений типа Эйлера-Бернулли, с высокой точностью совпадают с резонансными кривыми и собственными формами, рассчитанными путем прямого решения дифференциальных уравнений колебаний [1, 2], что подтверждает корректность полученных результатов.

Таким образом, метод передаточных матриц позволяет производить простые инженерные расчеты кольцевых концентраторов ультразвуковых колебаний и определять резонансные частоты, на которых возникают моды со знакопостоянной амплитудой, обеспечивающие усиление колебаний по амплитуде.

1. Степаненко, Д.А. Усиление ультразвуковых колебаний с помощью составных кольцевых концентраторов / Д.А. Степаненко // Международная научная конференция «Техническая акустика: разработки, проблемы, перспективы»: материалы конференции. – Витебск, 2016. – С. 140–142.
2. Теоретическое обоснование возможности усиления ультразвуковых колебаний с помощью составных кольцевых упругих элементов / Д.А. Степаненко [и др.] // Электронный журнал «Техническая акустика». – 2017, 2. – 13 с.
3. Исследование продольных колебаний гибких ультразвуковых волноводов с помощью метода передаточных матриц / Д.А. Степаненко [и др.] // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 2 (15). – С. 71–75.