

Псевдослучайная двоичная последовательность  $g(t - \tau)$  вырабатывается в генераторе (ГПСП). Одновременно с псевдослучайной последовательностью, сгенерированной генератором, подаётся на фазовый манипулятор (ФМн<sub>2</sub>) случайная последовательность  $X(t)$ , вырабатываемая в генераторе (ГШ) и преобразованная в компараторе в клипированный шум. На фазовом манипуляторе (ФМн<sub>2</sub>) осуществляется операция перемножения  $g(t - \tau)$  и  $X(t)$  и образуется двоичная скремблирующая последовательность:

$$Y(t - \tau) = g(t - \tau) \cdot X(t), \quad (1)$$

где полоса спектра последовательности  $X(t)$  определяется тактовой частотой  $f_T = 1/\tau_0$ , а также формирующим фильтром, включенным в ГШ и меньше полосы спектра ПСП,  $\tau_0$  – длительность элемента ПСП.

Сформированный скремблированный частотно-модулированный сигнал, полученный в результате перемножения в (ФМн<sub>1</sub>), усиливается в усилителе мощности (УМ), подаётся в на модуль

антенно-фидерного устройства (АФУ) и далее в эфир.

Скремблированный частотно-модулированный сигнал можно представить:

$$S(t) = a_0 Y(t - \tau) \cdot \cos[(\omega_0 t + \Psi(t) + \beta)], \quad (2)$$

где  $a_0$  и  $\omega_0$  – известные амплитуда и частота сигнала;

$Y(t) = g(t - \tau) \cdot X(t) = \{\pm 1\}$  – скремблирующая последовательность;

$\beta$  – случайная начальная фаза, равномерно распределенная в интервале  $[0, 2\pi]$ ;

$\Psi(t)$  – частота сигнала, медленно изменяющаяся в соответствии с передаваемым сообщением  $\lambda(t)$ , где  $\lambda(t) = d\Psi(t)/dt$ .

Литература

1. Хорошко В.А., Чекатков А.А. Методы и средства защиты информации. – М.: Юниор, 2010. – 501 с.
2. Чердынцев В.А., Деев Н.А. Подавление комплекса помех в каналах связи / В.А. Чердынцев, Н.А. Деев // Известия Белорусской инженерной академии. – 2002. – № 2. – С. 31–36.

УДК 380.001+530.182

## ОЦЕНКА ЭНЕРГИИ СОЛИТОНА ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА

Князев М.А., Русакевич Д.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь

Проблема изучения квантовых солитонных состояний, соответствующих одиночным электронам, является весьма перспективной с точки зрения задач нанoeлектроники [1]. Такие состояния могут быть описаны при помощи решений уравнения Шредингера, учитывающего нелинейное взаимодействие электрона, находящегося у поверхности металла, с мнимыми зарядами, расположенными внутри металла. Модели с мнимыми зарядами широко применяются при изучении квантовых точек. В настоящей работе с использованием подхода, развитого в работе [2], получено приближенное выражение для энергии рассматриваемого солитонного состояния.

Известно, что кулоновское отталкивание электронов не позволяет формировать солитонные состояния. Однако для одного электрона такое отталкивание отсутствует, что позволяет построить самосогласованное решение так, чтобы исключить взаимодействие электрона с его собственным полем. Это можно сделать путем введения потенциала мнимого заряда, предполагая, что такой заряд вблизи поверхности металла (электрода) распределяется в соответствии с распределением плотности заряда электрона  $e^2 |\Psi(\vec{r}, t)|^2$ , где  $e$  – заряд электрона. Тогда соответствующее уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + V_c(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t), \quad (1)$$

где потенциальная энергия взаимодействия электрона с мнимыми зарядами (интегрирование ведется по координатам всех мнимых зарядов) определяется соотношением

$$V_c(\vec{r}, t) = -\frac{e^2}{2\kappa} \int \frac{|\Psi(\vec{r}', t)|^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}', \quad (2)$$

$|\vec{r} - \vec{r}'|$  – расстояние от мнимого заряда до точки наблюдения,  $d$  – расстояние от заряда (действительного или мнимого) до поверхности электрода,  $\kappa$  – диэлектрическая проницаемость,  $m^*$  – эффективная масса электрона,  $a$  – размер солитона.

Построение точного решения уравнения (1) является очень сложной задачей. Однако, можно найти приближенное решение уравнения (1). В этом случае удастся достаточно просто получить приближенную оценку энергии состояния в зависимости от размера солитона, используя соотношение

$$E(a) = \frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla \Psi(\vec{r}, a)|^2 d\vec{r} + \int |\Psi(\vec{r}, a)|^2 V_c(\vec{r}, t) d\vec{r}. \quad (3)$$

С целью упрощения вычислений рассмотрим задачу в случае одной пространственной переменной. Для электронов, локализованных в квантовом проводе, потенциальная энергия взаимодействия  $V_c(x, t)$  приближенно может быть представлена в виде

$$V_c(x, t) \approx -\frac{e^2}{\kappa} |\Psi(x, t)|^2 \ln\left(\frac{a}{d}\right). \quad (4)$$

Если в соотношении (4) опустить множитель, содержащий логарифм, и подставить полученное выражение для  $V_c(x, t)$  в уравнение (1), то последнее можно привести к виду нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [3]

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} - \frac{e^2}{\kappa} |\Psi|^2 \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (5)$$

Солитонное решение нелинейного уравнения (5), описывающее локализованное в пространстве состояние, известно [4]. Оно имеет вид

$$\Psi(x, t) = \frac{\sqrt{2\alpha/v} \exp[i(kx - Et/\hbar)]}{\cosh[\sqrt{\alpha}(x - \hbar kt/m^*)]} \quad (6)$$

где  $\alpha = k^2 - 2m^*E/\hbar^2$ ,  $v = 2m^*e^2/\kappa\hbar^2$ . Нормировка волновой функции  $\Psi(x, t)$  позволяет записать соотношение  $a = 1/\sqrt{\alpha}$  и тем самым установить связь между размером солитона, описывающего заряд, с параметрами электрона.

Чтобы оценить кинетическую энергию солитонного состояния, подставим соотношение (6) в первое слагаемое в правой части соотношения (3). Вычисления носят достаточно громоздкий характер, но в результате интеграл удается свести к двум табличным интегралам [5]:

$$E_K = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d}{dx} \Psi(x, a, t) \right|^2 dx = \\ = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{va^2 \cosh^4\left(\frac{x}{a} - \frac{\hbar kt}{a}\right)} \left[ \frac{1}{a^2} \sinh^2\left(\frac{x}{a} - \frac{\hbar kt}{a}\right) + \right. \\ \left. + k^2 \cosh^2\left(\frac{x}{a} - \frac{\hbar kt}{a}\right) \right] dx = \frac{2\hbar^2(a^2k^2 + 1)}{m^*va^3} - \frac{4\hbar^2}{3m^*va^3} = \\ = \frac{6\hbar^2(a^2k^2 + 2)}{3m^*va^3}. \quad (7)$$

Вычисление потенциальной энергии состояния осуществляется аналогичным образом, для чего необходимо подставить во второй член в правой части соотношения (3) выражения (4) и (6). Интеграл также удается свести к табличному. В результате получаем выражение вида

$$E_{II} = \int |\Psi(x, a, t)|^2 V_c(x, t) dx = \\ = \frac{4e^2}{a^4v^2\kappa} \ln \frac{a}{d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^4\left(\frac{x}{a} - \frac{\hbar kt}{a}\right)} = -\frac{16e^2}{3a^3v^2\kappa} \ln \frac{a}{d}. \quad (8)$$

Решение (6) уравнения (5) является точным. В тоже время, чтобы получить уравнение (5) из уравнения (1) в работе [2] было сделано предположение о том, что множитель  $\ln(a/d)$ , входящий в соотношение (4), является несущественным, т.е. по порядку величины сравним с единицей. На этом основании данный множитель был отброшен также и при вычислении приближенного значения энергии солитонного состояния. Однако указанные допущения позволяют рассматривать соотношение (6) как приближенное решение уравнения (1). Это означает, что, если учесть указанный логарифмический множитель при вычислении энергии, то точность полученного значения энергии должна быть выше по сравнению с точностью результата, полученного без учета этого множителя.

Известно, что потенциальная энергия электростатического взаимодействия в принципе зависит от размера солитона следующим образом:  $E_{II} \sim 1/a^2$  [6]. В тоже время, как видно из соотношения (8), в данной работе получена зависимость вида  $\ln(a/d)/a^3$ . Однако данный результат не противоречит известному и может быть корректно объяснен следующим образом. Уравнение (5) является нелинейным относительно неизвестной функции, в то время как уравнение Шредингера (1) является линейным. Если же представить логарифмический множитель  $\ln(a/d)$  в виде ряда Тейлора и ограничиться только первым членом разложения (т.е. рассмотреть линейное приближение), то в ведущем порядке разложения зависимость энергии взаимодействия от размера солитона принимает вид  $1/a^2$ .

Можно заключить, что оценка энергии, соответствующей решению в виде солитонного состояния, описывающего одиночный электрон вблизи поверхности металла, реализованная в работе [2], имеет меньшую область применимости, чем полученная в данной работе.

Данный вывод имеет и прямое отношение к оценке размера солитона  $a$  в сравнении с расстоянием до электрода  $d$ . Если положить, как это сделано в работе [2], что  $\ln(a/d) \sim 1$ , то тогда получаем  $a \sim ed$ , где  $e$  – основание натурального логарифма. Таким образом, получается, что размер солитона в 2–3 раза больше, чем расстояние до электрода. Этот результат согласуется с полученным в вышеупомянутой работе утверждением о том, что размер солитона должен превышать расстояние до электрода. Однако, такая оценка размера солитона является достаточно грубой. Если не требовать выполнения вышеуказанного ограничения на  $\ln(a/d)$ , то можно, применить различные разложения для функции логарифма в ряды. Это в принципе позволяет, во-первых, находить размер солитона в тех диапазонах значений аргумента  $a/d$ , при которых допустимо то или иное такое разложение, а во-вторых, определять размер с требуемой точностью. В последнем случае будет достаточно учесть необходимое количество членов ряда более высоких порядков. В тоже время, поскольку рассматриваемые вычисления носят приближенный характер, очень высокая точность определения размера солитона не может быть получена, так как в некоторый момент точность используемого приближения окажется ниже точности разложения в ряд.

#### Литература

1. Ткалич, В.Л. Физические основы наноэлектроники / В.Л. Ткалич, А.В. Макеева, Е.Е. Оборина – СПб: СПбГУ ИТМО, 2011. – 83 с.
2. Vyurkov, V. Quantum single electron soliton near metal surface / V. Vyurkov, D. Svintsov //

http://xxx.lanl.gov (arXiv.org/cond-mat. mes-hall / 1308.3460).

3. Додд, Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис – М.: Мир, 1988. – 694 с.

4. Zakharov, V.E. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media / Zakharov V.E.,

Shabat A.B. // Sov. Phys. JETP – 1972. – V. 34, № 1. – P. 62-69.

5. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт – М.: Наука, 1978. – 228 с.

6. Chiao, R.Y. Self-trapping of optical beams / R.Y. Chiao, E. Garmire and C.H. Townes // Phys. Rev. Letters – 1964. – V. 13, № 15. – P. 479-481.

УДК 530.182

## УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОПРАВКИ ВТОРОГО ПОРЯДКА К ПЛОТНОСТИ КОНДЕНСАТА БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА

Князев М.А., Блинкова Н.Г.

Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь

Исследование конденсата Бозе–Эйнштейна (БЕС) находит широкое применение при решении задач в таких областях физики как атомная физика, физика магнитных явлений, оптика, физика конденсированных состояний [1–3]. Существенно нелинейный характер модели, применяемой для описания свойств данной формы материи, обуславливает появление в ней решений в виде локализованных состояний типа солитонов или солитоноподобных объектов. Для описания солитонов в БЕС применяется уравнение Гросс-Питаевского, которое допускает представление в виде уравнений гидродинамики [4]. Поскольку решение нелинейных уравнений в общем случае является сложной задачей, для получения аналитического решения применяют различные приближения. Так, в работе [5] для получения решений типа светлого солитона в квази-одномерном БЕС использована построенная в работе [6] система уравнений квантовой гидродинамики с учетом третьего порядка по радиусу взаимодействия. Эта система для атомов, находящихся во внешнем потенциале  $V_{ext}(\vec{r}, t)$  и взаимодействующих между собой с потенциалом  $U(r)$ , имеет вид

$$\partial_t n(\vec{r}, t) + \partial^\alpha (n(\vec{r}, t) v^\alpha(\vec{r}, t)) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} mn(\vec{r}, t) \partial_t v^\alpha(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} mn(\vec{r}, t) \partial^\alpha v^2(\vec{r}, t) - \\ - \frac{\hbar^2}{4m} \partial^\alpha \Delta n(\vec{r}, t) + \frac{\hbar^2}{4m} \partial^\beta \left( \frac{\partial^\alpha n(\vec{r}, t) \partial^\beta n(\vec{r}, t)}{n(\vec{r}, t)} \right) - \\ - \Upsilon n(\vec{r}, t) \partial_\alpha n(\vec{r}, t) - \frac{1}{16} \Upsilon_2 \partial_\alpha \Delta n^2(\vec{r}, t) = \\ = -n(\vec{r}, t) \partial^\alpha V_{ext}(\vec{r}, t), \quad (2) \end{aligned}$$

где  $n(\vec{r}, t)$  – концентрация частиц,  $v^\alpha(\vec{r}, t)$  – полевая скорость,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $m$  – масса частицы,  $\Upsilon = \frac{4\pi}{3} \int r^3 \frac{\partial U(r)}{\partial r} dr$ ,  $\Upsilon_2 = \frac{4\pi}{15} \int r^5 \frac{\partial U(r)}{\partial r} dr$ .

В работе [5] в (1+1)-мерном случае для системы уравнений (1)–(2) получено явное выражение для поправки  $n_1 = n_1(x, t)$  к величине равновесной

концентрации частиц БЕС  $n_0$ . Вычисления проведены на основе теории возмущений с использованием подхода, предложенного в работе [7].

В рамках данного подхода удобно ввести новые независимые переменные, используя следующие формулы:

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(z - ut), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}ut, \quad (3)$$

где  $u$  – фазовая скорость волны,  $\varepsilon$  – малый безразмерный параметр. Выражения для концентрации частиц и полевой скорости записываются в виде следующих разложений:

$$n = n_0 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots, \quad (4)$$

$$v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots. \quad (5)$$

Считается, что равновесная концентрация  $n_0$  является постоянной величиной.

Вследствие особенностей нелинейного характера задачи обычный прием теории возмущений, основанный на подстановке соотношений (4) и (5) в уравнения (1) и (2) и последующем приравнении друг другу выражений с одинаковыми степенями  $\varepsilon$ , не приводит к искомому результату. Если выписать уравнения первого порядка по  $\varepsilon$ , то удастся найти только связь между поправками  $n_1$  и  $v_1$ , которая имеет вид  $n_1 = n_0 v_1 / u$ . Для того, чтобы получить явное выражение для  $n_1$ , понадобятся также уравнения второго порядка по  $\varepsilon$ . Однако эти уравнения уже будут включать поправки  $n_2$  и  $v_2$ . Тем не менее, рассматриваемая задача такова, что из первого уравнения второго порядка можно выразить поправки второго порядка через поправки первого порядка, а затем подставить их во второе уравнение второго порядка. В результате получается уравнение, которое содержит только  $n_1$ . Это уравнение имеет вид уравнения Кортевега-де Фриза и его решение хорошо известно [8]. Имея выражение для  $n_1$ , можно найти поправку  $v_1$ .

Представляет интерес дальнейшее изучение поведения БЕС в гидродинамическом