УДК 51-7

В. М. РОМАНЧАК

ИЗМЕРЕНИЕ НЕФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Белорусский национальный технический университет

Физическая величина отличается от нефизической величины способом измерения. Кроме того, при измерении физических величин рассматривают понятие одинаковых по величине объектов. Например, равновероятные исходы в классической теории вероятности или равенство цены деления измерительной шкалы. Для нефизической величины мы предлагаем проводить измерения путем субъективного оценивания в шкале порядка, а кроме того использовать понятие последовательности одинаково отличающихся объектов. Такой подход успешно используется в некоторых исследованиях для субъективной характеристики величины объектов. К примеру, последовательность звезд на небе различной яркости или уровни сложности теста. Номера членов такой последовательности назовем рейтингом. Определив рейтинг, можно найти значения величины, если считать, что одинаково отличающимся объектам соответствует одинаковый результат парного сравнения. Поскольку эксперт сравнивает объекты, не определяя величину объектов, то естественно предположить, что способ сравнения ему не известен. Это означает, что в качестве математической модели мы определили косвенный способ нахождения значений нефизической величины при неизвестном способе сравнения. Выбрав способ сравнения, каждому объекту можно поставить в соответствие число, которое будем называть субъективным размером объекта. В метрологии способов численного сравнения физических величин всего два – это разность и отношение. Поэтому при оценке субъективных величин ограничимся двумя способами – разностью и отношением размеров величин.

В качестве примера применения теории анализируется функциональная связь, между физической величиной и нефизической величиной, устанавливаемая эмпирическими законами. Отмечается, что эмпирические законы Фехнера и Стивенса используют разность или отношение субъективных величин. Но разницу или отношения величин можно выразить через разность рейтингов. Поэтому есть возможность для каждого закона получить соотношение между разностью рейтингов и физической величиной. Совпадение двух законов Фехнера и Стивенса, после перехода к рейтингу, подтверждает адекватность нашей модели.

Ключевые слова: *законы Фехнера, Стивенса; функция полезности; нечеткие множества.*

Введение

Под величиной в метрологии понимают нематериальное свойство, общее в качественном отношении ко многим объектам, но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них [1].

Измерить нефизическую величину можно в шкале порядка [2]. Недостатком такой шкалы является то, что арифметические операции в порядковой шкале недопустимы. У нефизических величин, которые существуют только в сознании людей, нет размеров – поэтому их нельзя делить или вычитать [3]. Размер нефизической величины мы определим косвенно. Для этого вводится понятие последовательности одинаково отличающихся объектов. Номер объекта в такой последовательности мы называем рейтингом. Используя рейтинг можно построить математическую модель для нахождения нефизической величины, причем значения ее уже можно будет вычитать или делить.

Измерение величины

Любое измерение представляет собой сравнение размеров опытным путем [1]. В метрологии числовому результату сравнения соответствуют только два способа – разность и отношение размеров величин [1].

Замечание. Вместо отношения нам будет удобно рассматривать логарифм отношения.

Определим функцию для сравнения размеров измеряемой величины [1].

Пусть $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, ...,$ – конечное или счетное множество объектов, для которых существуют значения $x_1, x_2, ..., x_i, ...,$ – величины X, i – порядковый номер объекта ω_i. *Определение*. Результат сравнения для величины X – это числовая функция $R(i, j)$, определенная на множестве пар (i, j) такая, что

1. Каждой паре объектов (ω_i, ω_j) поставлено в соответствие число $R(i, j)$, $i, j = 1, 2, 3, ...$

2. В зависимости от способа сравнения: $R(i, j) = x_i - x_j$, или $R(i, j) = \ln(x_i/x_j)$, $x_i, x_j > 0$.

Для физической величины способ сравнения считается известным. Для нефизической величины, по мнению метрологов, единственным способом измерения является оценка ее проявления по шкале порядка [2]. Значения нефизической величины нельзя вычитать или делить [3]. Это означает, что способ измерения нефизической величины не определен. Получить значения нефизической величины мы сможем косвенно. Для этого нам понадобится новое понятие – последовательность одинаково отличающихся объектов.

Последовательность одинаково отличающихся объектов

Понятие равновероятных исходов является неопределяемым при оценке вероятностной меры и принимается на основании мнения эксперта. Например, при подбрасывании монеты эксперт может интуитивно считать, что стороны монеты достаточно симметричны и будут выпадать с одинаковой вероятностью. Классическое определение вероятности сводит вычисление вероятности к понятию «одинаковых» объектов, которое считается основным и не подлежит формальному определению. В нашем случае априорно определяемым понятием будет последовательность одинаково отличающихся объектов. Это означает, что эксперт может построить или указать последовательность объектов, которые одинаково отличаются друг от друга. Так, например:

1. Астроном Гиппарх [7], наблюдая за звездами, разделил их по яркости на шесть величин, где первая величина – самый яркий объект, а шестая – наиболее тусклый. Промежуточные величины он распределил равномерно между оставшимися звёздами.

2. Фехнер [6] рассматривал «едва заметные различия» субъективных ощущений. Например, эксперт сравнивает вес двух объектов. Вес второго объекта увеличивается до тех пор, пока эксперт не говорит «стал больше». Так последовательно строятся объекты, которые упорядочены по возрастанию веса и едва заметно различаются. «Едва заметные различия» Фехнер считал равными потому, что эксперт просто отмечает, когда наступает едва заметное различие и субъективно для него все различия одинаковы.

3. Терстоун [4] использовал шкалу равнокажущихся интервалов для измерения исследуемых психологических и социальных характеристик. Отличительной особенностью шкалы Терстоуна является то, что интервалы между показателями соседних высказываний субъективно примерно одинаковы. Такое свойство шкалы достигается за счет метода ее построения.

В разобранных примерах рассматривается нефизическая величина и последовательность объектов, которые интуитивно оцениваются как одинаково отличающиеся. Одинаково отличающиеся объекты могут служить опорными точками для оценки значения величины произвольного объекта.

Будем считать, что если объекты кажутся эксперту одинаково отличающимися, то результат сравнения последовательных пар должен быть постоянной величиной. Определим основное свойство (аксиому) последовательности одинаково отличающихся объектов.

Свойство С1. Если $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, ...$, – последовательность одинаково отличающихся объектов, то результат сравнения последовательных пар объектов является постоянной величиной, $R(i, i + 1) = C$, где $C = \text{const}$.

Измерение нефизической величины

Пусть $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, ...$, – конечная или счетная последовательность объектов, которые характеризует нефизическая величина X.

Определение. Если $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, ...$, – последовательность одинаково отличающихся объектов, то порядковый номер i будем называть значением рейтинга.

Выясним теперь, каким образом рейтинг связан с величиной. Из Свойства С1 следует, что разности или отношения значений постоянны. Поэтому

$$x_{i+1} - x_i = a, \tag{1}$$

или

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} = b. \tag{2}$$

где $I = 1, 2, 3, ..., a, b$ – некоторые постоянные.

Тогда

$$x_i - x_j = a(i - j), \qquad (3)$$

или

$$\frac{x_i}{x_j} = b^{i-j}. \qquad (4)$$

Функцию результат сравнения $R(i, j)$, определенную на множестве последовательных пар, можно продолжить естественным образом на множество произвольных пар. Удобно считать, что $R(i, i + 1) = 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, тогда $R(i, j) = i - j$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots$

Таким образом, результат сравнения одинаково отличающихся объектов $R(i, j)$ равен разности рейтингов и действительно не зависит от способа сравнения. Выражения (3) и (4) можно записать, используя функцию $R(i, j)$:

$$x_i - x_j = aR(i, j), \qquad (5)$$

или

$$\ln(x_i/x_j) = b_1 R(i, j). \qquad (6)$$

где a, b_1 – постоянные, i и j – значения рейтинга.

А1. Теперь мы можем сформулировать аксиому нефизического измерения.

А2. Результат сравнения $R(i, j)$ для нефизической величины X не зависит от способа сравнения.

Выражения (5) и (6) можно рассматривать в качестве обоснования аксиомы измерения нефизической величины. Аксиома А1 отражает особенность измерения нефизических величин. Нефизическая величина существует только в сознании людей. У нее нет измеряемых размеров и, соответственно, нельзя определить способ сравнения. Эксперт может только построить последовательность одинаково отличающихся объектов и определить ранг объекта. Кроме того, мы приходим к выводу, что значения нефизической величины X зависят от способа сравнения. Здесь нет логического противоречия, поскольку размер величины в данном случае – это следствие математической обработки; числа, которые исследователь для удобства приписывает объектам.

Замечание. Способов сравнения можно предложить много, но в теории измерений в качестве основных используют только два – разность и отношение размеров [2]. Если придумать еще какой-либо способ сравнения, то в наших рассуждениях ничего не изменится.

Пример нефизического измерения

Исследователь просит эксперта сравнить площади кругов (таблица). В первой строке таблицы находится рейтинг объекта. Эксперт считает, что данные круги являются последовательностью одинаково отличающихся объектов.

Одинаково отличающиеся объекты

r_i	1	2	3	4	5	6
x_i	●	●	●	●	●	●

Значит, если во время эксперимента, исследователь просит сравнить отношение площадей, то эксперт ответит, что площадь второго круга в b раз больше площади первого, площадь третьего в b раза больше площади второго и так далее. Здесь b – некоторое число, которое постоянно для каждого сравнения (свойств С1). В данном случае исследователь выбрал операцию сравнения – отношение значений. Поэтому должно выполняться (2) и (4).

Пусть теперь исследователь просит оценить насколько площадь второго круга больше площади первого. Это означает, что исследователь выбрал в качестве операции сравнения разность значений. Эксперт не сравнивает площади (напомним, что субъективная площадь – это число, которое исследователь приписывает каждому объекту). Тем не менее, он может провести сравнение площадей двух объектов без учета способа сравнения (аксиома А1). Ориентируясь на рейтинг объекта, эксперт должен ответить, что площадь второго круга на величину a больше площади первого, площадь третьего на величину a больше площади второго и так далее, поскольку все результаты парных сравнений равны (свойств С1). Если ответы эксперта непротиворечивы, то они должны удовлетворять соотношению (3) и (5).

В итоге, для одних и тех же объектов получены различные размеры для субъективного ощущения площади. Это происходит потому, что эксперт не выполняет операцию деления или вычитания значений величины, а строит последовательность одинаково отличающихся объектов и находит их рейтинг. Более того, эксперт ничего не знает и про способ сравнения (способ сравнения ему указывает исследователь). Дополнительно исследователь определяет значения субъективных величин – эти значения уже можно делить или вычитать. Поскольку в законе Фехнера участвуют разности значений субъективных величин, а в законе Стивенса отношение значений, то эти законы выберем для проверки адекватности модели субъективных измерений.

Законы Стивенса и Фехнера

Для проверки модели измерения нефизической величины нам понадобятся законы Фехнера и Стивенса [4]. Законы Стивенса и Фехнера связывают физические и соответствующие нефизические величины. Например, вес груза, измеряемый прибором, и вес, оцениваемый человеком.

Закон Фехнера [5] устанавливает связь между разностью значений нефизической величины x_i, x_j и значениями физической величины q_i, q_j:

$$x_i - x_j = c \ln\left(\frac{q_i}{q_j}\right), \tag{7}$$

где $i, j = 1, ..., n$, c – постоянная.

Закон Стивенса [6] предложен для замены закона Фехнера. По мнению Стивенса зависимость нефизической величины от физической величины описывается степенной функцией:

$$\frac{x_i}{x_j} = \left(\frac{q_i}{q_j}\right)^{\alpha}, \tag{8}$$

где $i, j = 1, ..., n$, x_i, x_j – значения нефизической величины, q_i – значение физической величины сигнала, α – постоянная.

Спор о том, какой из законов является более точным, продолжается в течение длительного времени с привлечением эмпирических данных. Мы применим к законам аксиому измерения нефизической величины и докажем эквивалентность законов.

Пусть нефизическая величина X связана с физической величиной Q законом Фехнера (7). Выберем последовательность одинаково отличающихся объектов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Подставив разность значений (3), в закон Фехнера (7), получим:

$$(i - j)a = c \ln\left(\frac{q_i}{q_j}\right), \tag{9}$$

где c – известная постоянная, a – постоянная, q_i, q_j – значения физической величины $i, j = 1, 2, ..., n$.

Из закона Стивенса (8) на основании (4) получим

$$(i - j)\ln(b) = \alpha \ln\left(\frac{q_i}{q_j}\right) \tag{10}$$

где $i, j = 1, 2, ..., n$, α – известная постоянная, b – постоянная.

Мы видим, что законы Стивенса (10) и Фехнера (9) перехода к рейтингу совпадают и могут быть записаны в едином виде

$$mR(i, j) = \ln\left(\frac{q_i}{q_j}\right), \tag{11}$$

где $i, j = 1, 2, ..., n$, $R(i, j)$ – результат сравнения, m – постоянная, q_i, q_j – значения физической величины.

Совпадение законов Фехнера и Стивенса подтверждает нашу модель и гипотезу, что «... природа не наделила человека способностью сравнивать между собой разные свойства или их проявления в числовом формате» [3]. Следовательно, есть основания считать, что эксперт оценивает разность значений и отношение значений, имея в виду рейтинг, а не размер величины. Таким образом, мы подтвердили модель нефизического измерения.

Замечание. Мы пришли к выводу, что оба закона, в определенном смысле, эквивалентны. Обычно считается, что законы Фехнера и Стивенса это два различных закона. Поясним, почему так происходит, используя упрощенный числовой пример. Пусть мы сравниваем одинаково отличающиеся объекты из Таблицы. Будем считать, что с точки зрения эксперта, площадь первого круга равна единицы и площади рядом стоящих кругов отличаются в два раза. Тогда получим следующую последовательность значений для площади круга:

$$1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5. \tag{12}$$

Конечно, мы можем сравнивать не только рядом стоящие пары объектов. Чтобы быть адекватным, эксперт должен бы ответить, что третий круг на два порядка больше первого (2^2), а четвертый круг на три порядка (2^3) больше первого. На самом деле, когда Стивенс просил своих испытуемых сообщать во сколько раз одно ощущение больше другого, то испытуемый делал то, что он может делать – оценивал величину объекта в порядковой шкале и сообщал отношение рейтингов объектов, а не размеров. Например, что второй круг в два раза больше первого, третий в три раза больше первого и так далее. В этом случае последовательность субъективных оценок площади

$$1, 2, 3, 4, 5, 6. \tag{13}$$

Оценки (12) – сроятся на основании рейтинга объектов, оценки (13) являются рейтингом объектов. Оценки (13) соответствуют закону Стивенса, оценки (12) – модели нефизического измерения величины (11).

Заключение

В работе сформулирована рейтинговая модель измерения, которая включает в себя постулат нефизического измерения: результат сравнения не должен зависеть от способа сравнения. В качестве обоснования приводится доказательство эквивалентности законов Фехнера и Стивенса.

Предложенная в статье модель измерения нефизической величины может применяться при экспертном анализе систем [8], [9], [10] для измерения полезности [11], качества объектов [12], субъективной вероятности [13], [14] в теории нечетких множеств [15].

Литература

1. **Шишкин, И. Ф.** Теоретическая метрология. Ч. 1. Общая теория измерений: Учебник для вузов. /И. Ф. Шишкин.– СПб.: Издательство «Питер», 2010. – 192 с.
2. **Шишкин, И. Ф.** Субъективные измерения / И. Ф. Шишкин // Экономика качества. – 2015. – №. 11–12. – С. 48–58.
3. **Шишкин, И. Ф.** Измерения нефизических величин (измерения в ноосфере) / И. Ф. Шишкин // Электронный журнал ≪Экономика качества≫. Режим доступа: www.eq-journal.ru. – 2016. – № 2 (14).
4. **Гусев, А. Н.** Психологические измерения: Теория. Методы: Общепсихологический практикум / А. Н. Гусев, И. С. Уточкин. – М.: Аспект Пресс, 2011. – 317 с.
5. **Фехнер, Г. Т.** О формуле измерения ощущений / Г. Т. Фехнер // Проблемы и методы психофизики/ Под ред. А. Г. Асмолова, М. Б. Михалевской. М.: Изд-во МГУ, 1974. С. 13–19.
6. **Стивенс, С. С.** О психофизическом законе / С. С. Стивенс // Проблемы и методы психофизики / Под ред. А. Г. Асмолова, М. Б. Михалевской. М.: Изд-во МГУ, 1974. С. 56–102.
7. Берри, А. Краткая история астрономии. М.: Гостехиздат, 1946. Пер. с англ. Займовского С. Г. /А. Берри. – ОГИЗ, М-Л., 1946. – 363 с.
8. **Черноруцкий, И. Г.** Методы принятия решений / И. Г. Черноруцкий. – БХВ-Петербург–2005. – 416 с.
9. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий: Пер. с англ. / Т. Саати. – М.: Радио и связь, 1989. – 316 с.
10. **Дэвид, Г.** Метод парных сравнений: с приложением к русскому переводу / Г. Дэвид. – М.: Статистика, 1978. – 144 с.
11. **Кини, Р. Л.** Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. / Р. Л. Кини, Х. Райфа. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
12. **Методы** менеджмента качества. Методология управления риском стандартизации П. С. Серенков, В. Л. Гуревич, В. М. Романчак, и др./ П. С. Серенков[и др.]. – Минск: Новое знание; Москва: ИНФРА-М, 2011. – 491 с.
13. **Крокер, Л.** Введение в классическую и современную теорию тестов / Л. Крокер; Д. Алгина. – М.: Логос, 2010. – 668 с.
14. **Тулупьев, А. Л.** Байесовские сети: Логико-вероятностный подход./ А. Л. Тулупьев, С. И. Николенко, А. В. Сироткин. – СПб.: Наука, 2006. – 607 с.
15. **Штовба, С. Д.** Проектирование нечетких систем средствами MATLAB / С. Д. Штовба.– М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.

References

1. **Shishkin I. F.** P. 1. Common theory of measurements: The textbook for higher education institutions. – 4 prod., reslave. and additional / I. F. Shishkin. – SPb.: St. Petersburg publishing house, 2010. – 192 pages.
2. **Shishkin I. F.** Subjective measurements // Ekonomik of quality. – 2015. – No. 11–12. – Page 48–58.
3. **Shishkin I. F.** Measurements of nonphysical sizes (measurements in a noosphere)// the Online magazine of a «Ekonomik of quality ≫. Access mode: www.eq-journal.ru. – 2016. – No. 2 (14).
4. **Gusev A. N.,** Utochkin I. S. Psychological measurements: Theory. Methods: All-psychological practical work / A. N. Gusev, I. S. Utochkin. – M.: Aspect Press, 2011. – 317 pages.
5. **Fekhner G. T.** About a formula of measurement of feelings // Problems and methods of psychophysis / Under the editorship of A. G. Asmolov, M. B. Mikhalevskaya. M.: MSU publishing house, 1974. Page 13–19.
6. **Stephens S. S.** About the psychophysical law // Problems and methods of psychophysis / Under the editorship of A. G. Asmolov, M. B. Mikhalevskaya. M.: MSU publishing house, 1974. Page 56–102.
7. **Berri A.** Short history of astronomy. M.: Gostekhizdat, 1946. The lane from English Zaymovsky S. G. / A. Berri. – OGIZ, M-l., 1946. – 363 pages.

8. **I. G. Chernorutsky.** Decision-making methods. SPb.: BHV-Petersburg, 2005–416 p.
9. **Saaty T.** Decision making. Method of the analysis of hierarchies: The lane with English – M.: Radio and communication, 1989. – 316 pages.
10. **The method** of paired comparison: with the annex to Russian translation / H. A. David. – Moscow: Statistics, 1978. – 144 pages.
11. **Kinney R. L.,** Rayfa H. A decision making at many criteria: preferences and replacements. M.: Radio and communication, 1981. – 560 pages.
12. **Quality** management methods. Methodology of management of risk of standardization P. S. Serenkov, V. L. Gurevich, V. M. Romanchak, etc. / P. S. Serenkov. – Minsk: New knowledge; Moscow: INFRA-M, 2011. – 491 p.
13. Introduction to the classical and modern theory of tests/L. Crocker; Algina J. – Moscow: Lagos, 2010. – 668 pages.
14. **Tulupyev A. L.,** Nikolenko S. I., Sirotkin A. V. Bayesian Networks: A Probabilistic Logic Approach. – St. Petersburg: Nauka, 2006. – 607 p.
15. **Shtovba S. D.** Fuzzy systems designing by means of MATLAB. M: Goryachaya liniya – Telekom. M., 2007. – 288 p.

Поступила *20.09.2017* *После доработки* *24.10.2017* *Принята к печати* *15.12.2017*

Romanchak V. M.

MODEL OF RATING OF NON PHYSICAL QUANTITY

Belarusian National Technical University

Physical quantities are distinguished from non-physical quantities the method of measurement. In addition, when measuring physical quantities, the concept of identical objects is considered. For example, is equally likely outcomes in classical probability theory or equality of scale interval of a measuring scale. For nonphysical size we will take measurements by subjective estimation in an order scale, but also to use an undefined notion of the sequence of equally different objects. This approach has been used successfully in some researches for subjective characteristics of the objects. For example, the sequence of stars in the sky of various brightness or levels of difficulty of the test. The numbers of members of such a sequence are called ratings. Having defined rating, it is possible to find values of size if to consider that to equally different objects there corresponds the identical result of paired comparison. As the expert compares objects, without determining the sizes of objects, it is natural to assume that the way of comparison is not known to him. It means that as mathematical model we defined an indirect way of finding of values of nonphysical size at an unknown way of comparison. Having chosen a way of comparison, each object can put number which we will call the subjective size of an object in compliance. In a metrology of ways of numerical comparison of physical quantities only two is a difference and the relation. Therefore at assessment of subjective sizes we will be limited in two ways – a difference and the relation of the sizes of sizes.

As an example of application of the theory the functional communication, between physical quantity and nonphysical size, established by empirical laws is analyzed. It is noted that Fekhner and Stephens's empirical laws use a difference or the relation of subjective sizes. But the difference or the relations of sizes can be expressed through the difference of ratings. Therefore there is an opportunity for each law to receive a ratio between the difference of ratings and physical quantity. Coincidence of two laws of Fekhner and Stephens, after transition to rating, confirms reliability of our model.

Keywords: *Fekhner, Stephens's laws; utility function; fuzzy sets.*

Романчак Василий Михайлович – доцент кафедры инженерной математики БНТУ, кандидат физ.-мат. наук (1987), доцент (1991). Научные интересы в области обработки экспертных оценок и методов непараметрической аппроксимации (метод сингулярных вейвлетов). Опубликовано более 20 журнальных публикаций и монография.

Ramanchak Vasily Mikhaylovich is the associate professor of engineering mathematics of BNTU, the candidate of physical and mathematical sciences (1987), associate professor (1991). Scientific interests in the field of processing of expert estimates and methods of nonparametric approximation (method of singular wavelet). More than 20 journal publications and the monograph are published.