Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ

к выполнению самостоятельных работ
для студентов 1-го курса

Минск 2009

УДК 51 (075.8)
~~ББК 22.1я7~~
М 54

Составители:
Е.В. Емеличева, С.Ю. Лошкарева, Л.Д. Матвеева

Рецензенты:
В.В. Карпук, Н.А. Шавель

В данном издании приводятся примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения по высшей математике по разделам «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве».

Содержание

Тема 1. МАТРИЦЫ, ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Пример 1.1. Даны матрицы A и B.

Найти $A+B,\ 3A,\ A-2B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$

Решение

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix},\ 3A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 9 & 3\\ 6 & -3\end{pmatrix},\ A-2B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}.$$

Задание 1.1. *Даны матрицы A и B. Найти* $2A,\ A-4B,\ 3A+7B.$

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\\ 3 & 8\end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}.$

3. $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & -2\end{pmatrix}.$

4. $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 8\\ 1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$

5. $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 9 & -7\\ 1 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$

Пример 1.2. Найти произведение матриц AB и BA, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Решение. Произведения AB не существует. $BA=\begin{pmatrix}10 & -1\\ 3 & 0\\ -5 & 2\end{pmatrix}.$

Задание 1.2. *Найти произведение матриц* AB и BA, *если они имеют смысл.*

Тема 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Пример 2.1. Вычислить определитель II порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$

Задание 2.1. *Вычислить определитель II порядка.*

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}$. 4. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$. 5. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}$.

Пример 2.2. Вычислить определитель III порядка: $\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

1. $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Ответ. $AB=BA=\begin{pmatrix}10 & 14\\ 7 & 10\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$.

Ответ. $AB=(31)$, $BA=\begin{pmatrix}12 & 0 & -6 & 9 & 3\\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1\\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1\\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5\\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2\end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot(-1)\cdot 7 + 7\cdot 5\cdot 5 + 3\cdot 0\cdot(-2) - (-2\cdot(-1)\cdot 5 + 7\cdot 3\cdot 7 + 5\cdot 0\cdot 4) = -10.$$

Задание 2.2. *а) Вычислить определители III порядка.*

1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$. 4. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & -7 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 7 & 10 & -2 \end{vmatrix}$.

б) Дополнительно вычислить определители методом разложения по элементам строки или столбца.

Тема 3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10.$ $A_{11} = 4;$ $A_{12} = -3;$ $A_{21} = 2;$ $A_{22} = 1.$ $A^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание. *Найти обратную матрицу.*

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$. Ответ. $A^{-1} = \dfrac{1}{62}\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$. 2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. 4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. 7. $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ -1 & 9 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Тема 4. РАНГ МАТРИЦЫ

Пример. Найти ранг матрицы A, если $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

Решение.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-3&-3\\0&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-1&0\\0&-3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-1&0\\0&0&-3\end{pmatrix},\ \operatorname{rang} A=3.$$

Задание. *Найти ранг матрицы A.*

1. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$. Ответ. $\operatorname{rang} A=2$.

2. $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&0&2\\1&0&4\end{pmatrix}$. Ответ. $\operatorname{rang} A=3$.

3. $A=\begin{pmatrix}2&3&1&2\\0&2&-1&1\\4&0&5&1\end{pmatrix}$. Ответ. $\operatorname{rang} A=2$.

4. $A=\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&0&2&0\\2&0&4&0&0\end{pmatrix}$. 5. $A=\begin{pmatrix}1&-3&5&4\\2&-6&4&3\\3&-9&3&2\end{pmatrix}$. 6. $A=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\2&-2&5&1&7\\1&-1&1&8&2\end{pmatrix}$.

Тема 5. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Пример. Даны координаты трех точек $A(2;\ 1;\ 4)$, $B(-1;\ 2;\ 5)$, $C(3;\ -4;\ 3)$. Найти координаты вектора $\overline{AM}$, где точка M – середина отрезка BC.

Решение. Воспользуемся формулой координат середины отрезка:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2},\quad y_M=\frac{y_B+y_C}{2},\quad z_M=\frac{z_B+z_C}{2}.$$

Найдем координаты точки $M(1;\ -1;\ 4)$. Чтобы найти координаты вектора $\overline{AM}$, надо от координат конца вектора (точки M) отнять координаты начала вектора (точки A): $\overline{AM} = (-1;\ -2;\ 0)$.

Задание 5.1. *Даны координаты вершин* $\triangle ABC$. *Найти координаты векторов* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ *и* $\overline{AM}$, *где точка M – середина отрезка BC.*

1. $A(5;\ 0;\ -1)$, $B(2;\ 4;\ 2)$, $C(-4;\ 0;\ 8)$.
2. $A(4;\ 6;\ 9)$, $B(7;\ -1;\ 5)$, $C(0;\ -3;\ 3)$.
3. $A(1;\ -7;\ -3)$, $B(-5;\ 1;\ 4)$, $C(1;\ 3;\ 0)$.
4. $A(5;\ 2;\ 0)$, $B(4;\ -2;\ 3)$, $C(-2;\ 4;\ 3)$.
5. $A(-3;\ 0;\ 3)$, $B(5;\ -2;\ 1)$, $C(-3;\ 8;\ 9)$.

Задание 5.2. *Точки C и D делят отрезок AB на три равные части. Даны координаты точек C и D. Найти координаты точек A и B.*

1. $C(4;\ 3;\ 1)$, $D(1;\ 2;\ 3)$.
2. $C(-1;\ 2;\ 5)$, $D(0;\ 0;\ 4)$.
3. $C(-3;\ 7;\ -6)$, $D(1;\ 2;\ 3)$.
4. $C(5;\ -1;\ -2)$, $D(-1;\ -2;\ 5)$.
5. $C(0;\ 2;\ -2)$, $D(2;\ -3;\ 1)$.

Задание 5.3. *Даны координаты трех последовательных вершин параллелограмма ABCD. Найти координаты его четвертой вершины D.*

1. $A(8;\ 4;\ -1)$, $B(-2;\ -2;\ 4)$, $C(0;\ 5;\ 1)$.
2. $A(-7;\ 3;\ 5)$, $B(4;\ 2;\ 0)$, $C(-1;\ 2;\ 3)$.
3. $A(-1;\ 1;\ 4)$, $B(3;\ 5;\ 7)$, $C(2;\ 0;\ 6)$.
4. $A(-1;\ 8;\ 3)$, $B(2;\ 5;\ -1)$, $C(4;\ 4;\ 0)$.
5. $A(4;\ 2;\ -1)$, $B(5;\ -1;\ 0)$, $C(-3;\ -2;\ 4)$.

Тема 6. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ

Пример. Дано: $\overline{a} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = -\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$. Найти координаты вектора $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.

Решение. $\overline{c} = (3-1)\overline{i} + (-4+3)\overline{j} + (1+2)\overline{k} = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$.

Задание 6.1. *Дано:* $\overline{a}=(3;\ -1;\ 2)$, $\overline{b}=(-2;\ 1;\ 3)$. *Найти координаты вектора* $\overline{c}$.

1. $\overline{c}=3\overline{a}-\overline{b}$. 2. $\overline{c}=2\overline{b}-\overline{a}$. 3. $\overline{c}=\overline{a}-2\overline{b}$. 4. $\overline{c}=2\overline{a}+\overline{b}$. 5. $\overline{c}=3\overline{b}-\overline{a}$.

Задание 6.2. *Даны координаты вершин* $\triangle ABC$. *Найти длину его медианы AM.*

1. $A(3;0;2)$, $B(1;\ -4;\ 2)$, $C(-1;\ 2;0)$.
2. $A(4;\ 8;\ 5)$, $B(-3;\ 0;\ 1)$, $C(1;\ 2;\ 3)$.
3. $A(-2;\ 4;\ 1)$, $B(2;\ -3;\ 5)$, $C(-4;\ 1;\ 1)$.
4. $A(7;\ 5;\ 0)$, $B(-4;\ 1;\ -2)$, $C(0;\ -3;\ 2)$.
5. $A(-3;\ 2;\ 1)$, $B(-2;\ -4;\ 2)$, $C(-4;\ 2;\ 6)$.

Задание 6.3. *Дано:* $\overline{a}=2\overline{i}-\overline{j}+4\overline{k}$, $\overline{b}=-\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$. *Найти координаты вектора* $\overline{c}$.

1. $\overline{c}=\overline{a}+2\overline{b}$. 2. $\overline{c}=-\overline{a}+3\overline{b}$. 3. $\overline{c}=2\overline{a}-3\overline{b}$. 4. $\overline{c}=3\overline{a}-\overline{b}$. 5. $\overline{c}=\overline{b}-2\overline{a}$.

Тема 7. КОЛЛИНЕАРНОСТЬ ВЕКТОРОВ

Задание 7.1. *Доказать, что точки A, B, C, D являются вершинами трапеции, и найти длину ее параллельных сторон.*

1. $A(2;-1;1)$, $B(1;\ -3;\ -1)$, $C(-5;\ 3;3)$, $D(-1;\ 2;\ 3)$.
2. $A(5;7;1)$, $B(4;\ 2;\ 0)$, $C(-1;\ 3;5)$, $D(-5;\ 9;\ 11)$.
3. $A(4;2;2)$, $B(3;\ 0;\ 0)$, $C(-3;\ 6;4)$, $D(-1;\ 5;\ 4)$.

Задание 7.2. *При каких значениях m и n векторы* $\overline{a}$ и $\overline{b}$ *коллинеарны?*

1. $\overline{a}(m,\ 2,\ n)$; $\overline{b}(4;\ -1;\ 5)$.
2. $\overline{a}(3,\ m,\ -1)$; $\overline{b}(n;\ 6;\ -2)$.
3. $\overline{a}(3,\ 2,\ -1)$; $\overline{b}(6;\ m;\ n)$

Задание 7.3. *Векторы* $\overline{AB}$ *и* $\overline{c}$ *коллинеарны и противоположно направлены. Вектор* $\overline{AB}$ *вдвое длиннее вектора* $\overline{c}$. *Известны координаты точки* $A(-2;\ 3;\ 0)$ *и координаты вектора* $\overline{c}(2;\ -1;\ 3)$. *Найти координаты точки B.*

Пример. При каких значениях x и z вектор $\overline{AB}$ будет коллинеарен вектору $\overline{a}(2;\ -1;\ 5)$, если координаты точки $A=(1;\ 3;\ 2)$, а координаты точки $B=(x;\ 5;\ z)$?

Решение. Найдем координаты вектора $\overline{AB}=(x-1,\ 2,\ z-2)$. Так как у коллинеарных векторов координаты пропорциональны, то $\frac{x-1}{2}=\frac{2}{-1}=\frac{z-2}{5}$. Решив эту пропорцию, найдем $x=-3;\ z=-8$.

Тема 8. КОМПЛАНАРНОСТЬ ВЕКТОРОВ

Пример. Найти координаты вектора $\overline{c}=\overline{i}+2\overline{j}$ в базисе из векторов $\overline{a}=4\overline{i}-3\overline{j}$ и $\overline{b}=-\overline{i}+4\overline{j}$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$\overline{c}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b},$$

где α и β – неизвестные координаты вектора $\overline{c}$ в базисе из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Сравнивая по координатам, получим систему уравнений

$$\begin{cases}1=\alpha\cdot 4+\beta\cdot(-1),\\ 2=\alpha\cdot(-3)+\beta\cdot 4.\end{cases}$$

Решив систему, найдем, что $\alpha=\frac{6}{13},\ \beta=\frac{11}{13}\Rightarrow \overline{c}=\frac{6}{13}\overline{a}+\frac{11}{13}\overline{b}.$

Задание.

1. Даны векторы $\overline{d}=(1;\ 1;\ 2),\ \overline{a}=(2;\ 2;\ -1);\ \overline{b}=(0;\ 4;\ 8);\ \overline{c}=(-1;\ -1;\ 3)$. *Разложить вектор* $\overline{d}$ *по базису из векторов* $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$.

2. Даны три вектора $\overline{a}=(3,\ -1),\ \overline{b}=(1,\ -2)$ и $\overline{c}=(-1,\ 7)$. *Найти разложение вектора* $\overline{c}$ *по базису* (a, b).

3. Разложить вектор $\overline{d}=(3;\ 3;\ 2)$ *по базису из векторов* $a=(1;\ 0;\ 5),\ \overline{b}=(7;\ -1;\ 4),\ \overline{c}=(4,\ 0,\ 2)$.

4. Найти разложение вектора $\overline{d}=(2;\ -1;\ 4)$ *по базису из векторов* $\overline{a}=(1;\ 1;\ 5),\ \overline{b}=(3;\ -1;\ 4),\ \overline{c}=(4;\ 0;\ 2)$.

5. Даны координаты трех векторов $\overline{a}=-3\overline{i}+4\overline{j},\ \overline{b}=\overline{i}+3\overline{j},\ \overline{c}=3\overline{i}-\overline{j}$. *Найти координаты вектора* $\overline{c}$ *в базисе из векторов* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$.

Тема 9. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пример 9.1. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если известна длина векторов $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=3$ и угол между ними $\varphi=60°$.

Решение. Воспользуемся формулой $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$.

Имеем $\bar{a}\cdot\bar{b}=2\cdot3\cdot\cos60°=2\cdot3\cdot\frac{1}{2}=3.$

Задание 9.1. *Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если известны длины этих векторов и угол между ними.*

1. $|\bar{a}|=1,\ |\bar{b}|=4,\ \varphi=\frac{\pi}{3}.$
2. $|\bar{a}|=5,\ |\bar{b}|=2,\ \varphi=\frac{2\pi}{3}.$
3. $|\bar{a}|=\sqrt{2},\ |\bar{b}|=6,\ \varphi=45°.$
4. $|\bar{a}|=3,\ |\bar{b}|=8,\ \varphi=120°.$
5. $|\bar{a}|=4,\ |\bar{b}|=2,\ \varphi=60°.$

Пример 9.2. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если известны координаты этих векторов: $\bar{a}=(3;\ 5;\ -1)$, $\bar{b}=(-2;\ 4;\ -0)$.

Решение. Воспользуемся формулой $\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Получаем $\bar{a}\cdot\bar{b}=3\cdot(-2)+5\cdot4+(-1)\cdot0=14$.

Задание 9.2. *Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если известны их координаты.*

1. $\bar{a}=(2;\ -1;\ 7)$, $\bar{b}=(5;\ 0;\ -2)$.
2. $\bar{a}=(4;\ -3;\ 5)$, $\bar{b}=(1;\ 2;\ 6)$.
3. $\bar{a}=(-2;\ 3;\ 1)$, $\bar{b}=(3;\ 2;\ 1)$.
4. $\bar{a}=(5;\ -7;\ 0)$, $\bar{b}=(2;\ 1;\ 11)$.
5. $\bar{a}=(-3;\ 1;\ 4)$, $\bar{b}=(2;\ -7;\ 1)$.

Применение скалярного произведения

Для решения задач используются формулы:

- длина вектора $\bar{c}$: $|\bar{c}|=\sqrt{\bar{c}\cdot\bar{c}}$;
- косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$.

В частности, если $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$, то $\varphi=90°$, т.е. векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны.

- проекция вектора $\bar{a}$ на направление вектора $\bar{b}$: $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=\dfrac{\overline{ab}}{|b|}$;

- работа силы $\overline{F}$ по перемещению материальной точки из положения A в положение B: $A = \overline{F} \cdot \overline{AB}$.

Задание 9.3

1. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если вектор $\overline{a}+2\overline{b}$ перпендикулярен вектору $5\overline{a}-4\overline{b}$ и длина векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равна 1.

2. Длина вектора $\overline{a}$ равна 4, длина вектора $\overline{b}$ равна 1; угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен 60°. Найти угол между векторами $\left(2\overline{a}-\overline{b}\right)$ и $\left(\overline{a}+2\overline{b}\right)$.

3. Длина вектора $\overline{a}$ равна 2; длина вектора $\overline{b}$ равна 1; угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $\frac{\pi}{3}$. Найти длину вектора $\left(3\overline{a}+2\overline{b}\right)$.

4. Длина вектора $\overline{a}$ равна 4; длина вектора $\overline{b}$ равна 3; угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $\frac{\pi}{3}$. Найти длину вектора $\left(3\overline{a}-2\overline{b}\right)$.

5. Длина вектора $\overline{a}$ равна 3, длина вектора $\overline{b}$ равна 2; угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен 60°. Найти угол между векторами $\left(3\overline{a}-\overline{b}\right)$ и $\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)$.

6. Найти косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если вектор $\overline{a}+2\overline{b}$ перпендикулярен вектору $\overline{a}-\overline{b}$, длина вектора $\overline{a}$ равна 2 и длина вектора $\overline{b}$ равна 1.

7. Найти косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если вектор $\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)$ перпендикулярен вектору $\overline{a}+\overline{b}$ и длина векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равна 1.

Задание 9.4

1. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ = (3, -5, 8) и $\overline{b}$ = (-1; 1; -4).

2. Даны координаты вершин треугольника: A(3; 3; 9), B(6; 9; 1), C(1; 7; 3). Найти косинус угла A.

3. Даны координаты вершин треугольника: A(3; 3; 9), B(6; 9; 1), C(1; 7; 3). Найти длину медианы AM.

4. Даны координаты вершин треугольника A(-2; 1; -1), B(4; -3; 1), C(1; 0; -3). Найти косинус угла C.

5. В треугольнике с вершинами A(-1; 2; -1), B(-3; 1; 1), C(0; 4; 1). Найти косинус угла A.

6. Даны координаты трех вершин параллелограмма: A(2; 0; -4); B(-1; 3; 3); C(0; -2; 1). Найти косинус угла между диагоналями параллелограмма.

Задание 9.5

1. *Дано:* $\overline{a} = (2;\ 1\ 3)$; $\overline{b} = (0;\ -2;\ -1)$. *При каких значениях* λ *вектор* $\lambda\overline{a} - \overline{b}$ *будет перпендикулярен вектору* $\overline{b} - \overline{a}$?

2. *Дано:* $\overline{a} = (1;\ -1\ 3)$; $\overline{b} = (0;\ 2;\ -1.)$ *При каких значениях* λ *вектор* $\lambda\overline{a} + 2\overline{b}$ *будет перпендикулярен вектору* $\overline{b}$?

3. *Дано:* $\overline{a} = (1;\ 0\ 3)$; $\overline{b} = (1;\ 2;\ -1)$. *При каких значениях* λ *вектор* $\lambda\overline{a} + \overline{b}$ *будет перпендикулярен вектору* $\overline{b} + 2\overline{a}$?

4. *Дано:* $\overline{a} = (1;\ -1\ -1)$; $\overline{b} = (1;\ 2;\ 0)$. *При каких значениях* λ *вектор* $\lambda\overline{a} - 2\overline{b}$ *будет перпендикулярен вектору* $2\overline{b} - \overline{a}$?

5. *При каком значении y вектор* $\overline{AC}$ *будет перпендикулярен вектору* $\overline{AB}$, *если* $A(1;\ 4;\ 7)$, $B(5;\ 6;\ -5)$ *и* $C(0;\ y;\ 0)$?

6. *При каком значении x вектор* $\overline{AB}$ *будет перпендикулярен вектору* $\overline{AD}$, *если* $A(3;\ 3;\ 9)$, $B(6;\ 9;\ 1)$, $C(1;\ 7;\ 3)$ *и* $D(x;\ 1;\ 2)$?

7. *Найти единичный вектор перпендикулярный векторам* $\overline{a} = (-1;\ -1;\ 2)$ *и* $\overline{b} = (2;\ -2;\ 1)$.

Задание 9.6

1. *Найти проекцию вектора* $\overline{a} + 2\overline{b}$ *на направление вектора* $\overline{b}$, *если* $\overline{a} = (-4;\ 3)$, $\overline{b} = (1,-5)$.

2. *Найти проекцию вектора* $\overline{a} - 2\overline{b}$ *на направление вектора* $\overline{a} + \overline{b}$, *если* $\overline{a} = (4;\ -3)$, $\overline{b} = (1,4)$.

3. *Найти проекцию вектора* $\overline{AB}$ *на направление вектора* $\overline{AC}$, *если* $A(4;\ 3;\ 0)$, $B(6;\ 5;\ 1)$, $C(8;\ 0;\ 4)$.

4. *Найти проекцию вектора* $2\overline{a} + \overline{b}$ *на направление вектора* $\overline{a}$, *если* $\overline{a} = (3;\ 1)$, $\overline{b} = (1,-3)$.

5. *Найти проекцию вектора* $\overline{a} + \overline{b}$ *на направление вектора* $\overline{a} - 2\overline{b}$, *если* $\overline{a} = (-2;\ -1)$, $\overline{b} = (2,-3)$.

Задание 9.7. *Найти работу равнодействующей сил* $\vec{F}_1$ *и* $\vec{F}_2$ *по перемещению материальной точки из положения A в положение B.*

1. $\vec{F}_1 = 2\overline{i} - 5\overline{j} + \overline{k}$; $\vec{F}_2 = \overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}$; $A(4;\ 2;\ -3)$; $B(3;\ -3;\ -5)$.
2. $\vec{F}_1 = 2\overline{i} - 5\overline{j} + \overline{k}$; $\vec{F}_2 = \overline{i} + 3\overline{j} - 2\overline{k}$; $A(1;\ 2;\ -3)$; $B(3;\ -3;\ -1)$.
3. $\vec{F}_1 = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$; $\vec{F}_2 = \overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$; $A(4;\ 2;\ -3)$; $B(3;\ 0;\ -5)$.
4. $\vec{F}_1 = \overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$; $\vec{F}_2 = \overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}$; $A(4;\ 2;\ -3)$; $B(3;\ -2;\ -5)$.

Тема 10. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пример 10.1. Вычислить векторное произведение векторов

$$\bar{a}=(3;\ 5,\ -1);\ \bar{b}=(2;\ 0;\ 1).$$

Решение.

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 0\end{vmatrix}\bar{k}=5\bar{i}-5\bar{j}-10\bar{k}.$$

Задание 10.1. *Вычислить векторное произведение векторов* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$, *если*

1. $\bar{a}=(5;\ -3;\ 4),\ \bar{b}=(2;\ 1;\ -1).$
2. $\bar{a}=(-3;\ 0;\ 6),\ \bar{b}=(1;\ -5;\ 2).$
3. $\bar{a}=(1;\ -2;\ 3),\ \bar{b}=(4;\ 1;\ 1).$
4. $\bar{a}=2\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k},\ \bar{b}=5\bar{i}+4\bar{j}-2\bar{k}.$
5. $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k},\ \bar{b}=\bar{j}+2\bar{k}.$

Пример 10.2. Даны координаты вершин треугольника $A(3;\ 2;\ -5)$, $B(4;\ 0;\ -7)$, $C(5;\ 2;\ 4)$. Вычислить площадь треугольника.

Решение. Площадь треугольника ABC численно равна $1/2$ модуля векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Вычислим координаты векторов:

$$\overline{AB}=(1;\ -2;\ -2),\ \overline{AC}=(2;\ 0;\ 9)\Rightarrow\bar{c}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & -2\\ 2 & 0 & 9\end{vmatrix}=-18\bar{i}-13\bar{j}+4\bar{k}.$$

Тогда площадь треугольника ABC

$$S=\frac{1}{2}|\bar{c}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-18)^2+(-13)^2+4^2}=\frac{\sqrt{509}}{2}.$$

Задание 10.2.

1. *Даны координаты вершин треугольника: A(3;3;9), B(6;9;1), C(1; 7; 3). Найти площадь треугольника ABC.*
2. *Даны координаты вершин треугольника A(1,0,6), B(7,3,4) и C(4,5,2). Вычислить площадь треугольника ABC.*
3. *Даны координаты вершин треугольника A(-1,1,0), B(2,3,-2) и C(4,5,2). Вычислить площадь треугольника ABC.*
4. *Даны координаты вершин треугольника: A(3;-3;0), B(6;0;1), C(-1;2;3). Найти площадь треугольника ABC.*
5. *Даны координаты вершин треугольника: A(3;3;9), B(6;9;1), C(1; 7; 3). Найти длину высоты BD.*

6. Даны координаты вершин треугольника: A(1;-2;4), B(0;3;6), C(-1;4;4). Найти длину высоты AD.

7. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ и $\bar{c} = -3\bar{i} - 12\bar{j} + 6\bar{k}$.

Тема 11. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пример 11.1. Вычислить смешанное произведение векторов $\bar{a} = (-3;\ 5;1)$, $\bar{b} = (4;\ -1;\ 2)$, $\bar{c}(3;\ 2;\ 4)$.

Решение

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 8 + 30 + 3 - 80 + 12 = -15.$$

Задание 11.1. *Вычислить смешанное произведение векторов* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

1. $\bar{a} = (2;\ 0;1)$, $\bar{b} = (-3;\ -1;\ 1)$, $\bar{c}(-2;\ 4;\ 5)$.
2. $\bar{a} = (9;\ -1;2)$, $\bar{b} = (0;\ 2;\ 7)$, $\bar{c}(-1;\ 1;\ 1)$.
3. $\bar{a} = (5;\ 4;3)$, $\bar{b} = (-2;\ 1;\ -1)$, $\bar{c}(-4;\ 3;\ 2)$.
4. $\bar{a} = (-3;\ 5;1)$, $\bar{b} = (3;\ 0;\ -1)$, $\bar{c}(-1;\ -2;\ 2)$.
5. $\bar{a} = (-3;\ 5;1)$, $\bar{b} = (3;\ 0;\ -1)$, $\bar{c}(-1;\ -2;\ 2)$.

Применение смешанного произведения векторов

Пример 11.2. Вычислить объем пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(1;\ -3;\ 1)$, $B(0;\ -1;\ 0)$, $C(2;\ -1;\ -3)$, $D(3;\ 0;\ 2)$.

Решение. Воспользуемся формулой $V = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|$,

где $\bar{a} = \overline{AB} = (-1;\ 2;\ -1)$, $\bar{b} = \overline{AC} = (1;\ 2;\ -4)$, $\bar{c} = \overline{AD} = (2;\ 3;\ 1)$.

Тогда $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -31;\quad V = \frac{31}{6}.$

Задание 11.2. *Вычислить объем пирамиды, вершины которой находятся в точках:*

1. $A(3;\ -3;\ 1)$; $B(0;\ -1;\ 4)$; $C(-2;\ 1;\ -2)$; $D(5;\ 0;\ 8)$.
2. $A(2;\ 4;\ 0)$; $B(0;\ 1;\ -2)$; $C(2;\ 0;\ -2)$; $D(3;\ 0;\ -1)$.
3. $A(1;\ 0;\ 1)$; $B(-1;\ 1;\ 5)$; $C(2;\ 2;\ -2)$; $D(0;\ 3;\ 6)$.

4. $O(0;\ 0;\ 0)$; $A(5;\ -1;\ 0)$; $B(2;\ 3;\ 0)$; $C(1;\ 0;\ 4)$.
5. $A(2;\ -3;\ 1)$; $B(0;\ 1;\ 4)$; $C(-2;\ 1;-1)$; $D(5;\ 0;\ 6)$.
6. $A(1;\ -3;\ 1)$; $B(0;\ -1;\ 0)$; $C(2;\ -1;\ -2)$; $D(5;\ 0;\ 2)$.

Задание 11.3. *В 1–6 проверить, компланарны ли векторы*:

1. $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k}$.
2. $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} - 12\vec{j} + 6\vec{k}$.
3. $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} - 12\vec{j} + 6\vec{k}$.
4. $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$.
5. $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
6. $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} - 2\vec{k}$.

7. Образуют ли базис векторы $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$?

Задание 11.4. *Проверить, лежат ли точки A, B, C и D в одной плоскости.*

1. $A(2;\ 3;\ 1)$; $C(4;\ 1;\ -2)$; $B(6;\ 3;\ 7)$; $D(-5;\ -4;\ 8)$.
2. $A(-1;\ 1;\ -1)$; $B(2;\ -2;\ 3)$; $C(0;\ -0;\ 1)$; $D(2;\ 1;\ -2)$.
3. $A(3;\ 1;\ -1)$; $C(2;\ -2;\ 3)$; $B(0;\ -1;\ 0)$; $D(2;\ 1;\ 2)$.
4. $A(-2;\ 0;\ 1)$; $B(-1;\ -2;\ 3)$; $C(0;\ -1;\ -1)$; $D(2;\ 1;\ 0)$.
5. $A(3;\ 0;\ -3)$; $B(2;\ -2;\ 3)$; $C(0;\ -1;\ 0)$; $D(-1;\ 1;\ 2)$.

Задание 11.5. *Какую тройку образуют векторы*:

1. $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{c} = -3\bar{i} - \bar{j} + 6\bar{k}$.
2. $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\bar{b} = -3\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$.

Тема 12. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ). МАТРИЧНЫЙ МЕТОД. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА. МЕТОД ГАУССА

Пример. Решить тремя способами СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение. I) Решим СЛАУ матричным методом.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{29}\begin{pmatrix} -15 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 5 & -10 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

II) Решим СЛАУ по формулам Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -87;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = -145; \qquad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5.$$

III) Решим СЛАУ методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -6 & -27 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -6 & -27 \\ 0 & 0 & 29 & 145 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 16 \\ x_2 - 6x_3 = -27 \\ 29x_3 = 145 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1, \ x_2 = 3, \ x_3 = 5.$$

Ответ. $x_1 = 1, \ x_2 = 3, \ x_3 = 5.$

Задание. *Решить СЛАУ тремя способами.*

$$1. \begin{cases} x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 14 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}. \quad 2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}.$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -6 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}. \quad 4. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}.$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = -2 \end{cases}. \quad 6. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = -6 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

Тема 13. ПЛОСКОСТЬ В R^3

Пример 13.1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;\ -1;\ 4)$ с нормальным вектором $\overline{n}=(1;\ 2;\ 3)$.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ с заданным нормальным вектором $\overline{n}=(A;\ B;\ C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (13.1)$$

Подставляя данные, получаем $1\cdot(x-2)+2\cdot(y-(-1))+3\cdot(z-4)=0$ или $x+2y+3z-12=0$.

Задание 13.1. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и имеющей нормальный вектор $\overline{n}$ в каждом из следующих случаев:*

1. $M_0(-2;\ 3;\ 5)$, $\overline{n}=(2;\ -7;\ 3)$.
2. $M_0(1;\ 0;\ 1)$, $\overline{n}=(1;\ -3;\ 5)$.
3. $M_0(2;\ 2;\ -7)$, $\overline{n}=(0;\ 2;\ -1)$.
4. $M_0(5;\ -1;\ 8)$, $\overline{n}=(4;\ 2;\ -4)$.
5. $M_0(6;\ 2;\ -2)$, $\overline{n}=(3;\ -5;\ 1)$.
6. $M_0(1;\ -2;\ -1)$, $\overline{n}=(5;\ 3;\ 4)$.
7. $M_0(4;\ 1;\ 1)$, $\overline{n}=(2;\ -1;\ -2)$.
8. $M_0(2;\ 1;\ 2)$, $\overline{n}=(3;\ 2;\ 4)$.
9. $M_0(4;\ 2;\ 7)$, $\overline{n}=(2;\ -4;\ 3)$.
10. $M_0(1;\ -5;\ 3)$, $\overline{n}=(3;\ 0;\ -3)$.

Пример 13.2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;\ -7;\ 6)$ и параллельной двум неколлинеарным векторам $\overline{a}_1(-3;\ 1;\ -4)$, $\overline{a}_2(2;\ -1;\ 5)$.

Решение. Вектор нормали $\bar{n}$ перпендикулярен (по определению) плоскости, а векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ параллельны ей. Поэтому в качестве нормального вектора $\bar{n}$ возьмем вектор, равный векторному произведению $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$. Имеем

$$\bar{n} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \bar{i} + 7\bar{j} + \bar{k}.$$

Воспользуемся уравнением (13.1):

$1 \cdot (x-2) + 7(y-(-7)) + 1 \cdot (z-6) = 0$ или $x + 7y + z + 41 = 0$.

Задание 13.2. *Составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку M_0 и параллельной двум неколлинеарным векторам $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, в каждом из следующих случаев:*

1. $M_0(3;\ -1;\ 2)$, $\bar{a}_1 = (4;\ 1;\ 1)$, $\bar{a}_2 = (5;\ 3;\ 4)$.
2. $M_0(4;\ 1;\ -3)$, $\bar{a}_1 = (2;\ 5;\ -1)$, $\bar{a}_2 = (-1;\ 4;\ 2)$.
3. $M_0(1;\ 2;\ 1)$, $\bar{a}_1 = (1;\ -3;\ 4)$, $\bar{a}_2 = (7;\ 0;\ -1)$.
4. $M_0(0;\ 4;\ -2)$, $\bar{a}_1 = (5;\ 0;\ 2)$, $\bar{a}_2 = (2;\ 3;\ -2)$.
5. $M_0(3;\ 2;\ -4)$, $\bar{a}_1 = (4;\ -6;\ 1)$, $\bar{a}_2 = (0;\ -3;\ 1)$.
6. $M_0(1;\ 0;\ 2)$, $\bar{a}_1 = (2;\ -1;\ -2)$, $\bar{a}_2 = (1;\ 3;\ 0)$.
7. $M_0(4;\ 1;\ -2)$, $\bar{a}_1 = (3;\ 2;\ 0)$, $\bar{a}_2 = (1;\ 1;\ -3)$.
8. $M_0(3;\ 4;\ 2)$, $\bar{a}_1 = (3;\ 3;\ 1)$, $\bar{a}_2 = (1;\ 0;\ 2)$.
9. $M_0(1;\ 1;\ 0)$, $\bar{a}_1 = (3;\ -3;\ 2)$, $\bar{a}_2 = (2;\ 1;\ 4)$.
10. $M_0(9;\ 0;\ 3)$, $\bar{a}_1 = (0;\ 5;\ 1)$, $\bar{a}_2 = (2;\ 4;\ -3)$.

Пример 13.3. Записать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(3;\ -5;\ 6)$, $M_2(2;\ 3;\ -1)$, $M_3(-2;\ 4;\ 6)$.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $M_3(x_3,\ y_3,\ z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (13.2)$$

Подставим в уравнение (13.2) координаты заданных точек:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-(-5) & z-6 \\ 2-3 & 3-(-5) & -1-6 \\ -2-3 & 4-(-5) & 6-6 \end{vmatrix} = 0.$$

Имеем $\begin{vmatrix} x-3 & y+5 & z-6 \\ -1 & 8 & -7 \\ -5 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Вычисляя определитель, получаем
$63(x-3)+35(y+5)+31(z-6)=0$ или $63x+35y+31z-200=0$.

Задание 13.3. *Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки в каждом из следующих случаев:*

1. $M_1(5;\ 1;\ 3)$, $M_2(2;\ 0;\ 1)$, $M_3(4;\ 1;\ 8)$.
2. $M_1(8;\ 0;\ 2)$, $M_2(1;\ 5;\ -6)$, $M_3(1;\ 0;\ 2)$.
3. $M_1(3;\ -1;\ 4)$, $M_2(-5;\ 1;\ 4)$, $M_3(3;\ 1;\ 1)$.
4. $M_1(2;\ 1;\ 1)$, $M_2(0;\ 2;\ 3)$, $M_3(5;\ -1;\ 7)$.
5. $M_1(1;\ -3;\ 4)$, $M_2(2;\ 0;\ 5)$, $M_3(1;\ -2;\ 3)$.
6. $M_1(8;\ 0;\ 7)$, $M_2(2;\ 2;\ 4)$, $M_3(3;\ 1;\ 2)$.
7. $M_1(3;\ -2;\ 1)$, $M_2(4;\ 4;\ 1)$, $M_3(5;\ -2;\ 4)$.
8. $M_1(5;\ -3;\ 8)$, $M_2(2;\ 3;\ 0)$, $M_3(8;\ -1;\ 2)$.
9. $M_1(4;\ 3;\ 0)$, $M_2(1;\ -1;\ 2)$, $M_3(7;\ 0;\ -8)$.
10. $M_1(9;\ -3;\ 1)$, $M_2(7;\ 0;\ 1)$, $M_3(8;\ 1;\ 3)$.

Пример 13.4. Найти отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостью $2x-3y-5z-30=0$.

Решение. Приведем уравнение плоскости к уравнению в отрезках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, где a, b, c – величины отрезков, отсекаемых на осях координат. Преобразуем уравнение $2x-3y-5z-30=0$ к виду $2x-3y-5z=30$. Разделим почленно обе части уравнения на 30:

$$\frac{x}{15}+\frac{y}{-10}+\frac{z}{-6}=1 \ \Rightarrow\ a=15,\ b=-10,\ c=-6.$$

Задание 13.4. *Найти отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостью, в каждом из следующих случаев:*

1. $3x-y+5z-2=0$;
6. $5x+y-2z+20=0$;

2. $2x+y-z-10=0$;

3. $4x-y+2z-8=0$;

4. $x+5y-z+15=0$;

5. $3x-8y+6z-24=0$;

7. $x-2y+3z-6=0$;

8. $8x+4y-z-40=0$;

9. $6x+2y-5z+30=0$;

10. $x+7y+3z-21=0$.

Тема 14. ПРЯМАЯ В R^2

Пример 14.1. Дан треугольник с вершинами $A(-2;-2)$, $B(-1;2)$, $C(6;2)$. Составить уравнения сторон треугольника, уравнения медианы и высоты, проведенных из вершины B.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{14.1}$$

Найдем уравнение стороны AB, полагая $x_1=-2$, $y_1=-2$, $x_2=-1$, $y_2=2$:

$$\frac{x+2}{-1+2}=\frac{y+2}{2+2},\quad \frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{4}\Rightarrow 4x-y+6=0.$$

Найдем уравнение стороны BC, полагая $x_1=-1$, $y_1=2$, $x_2=6$, $y_2=2$:

$$\frac{x+1}{6+1}=\frac{y-2}{2-2},\quad \frac{x+1}{7}=\frac{y-2}{0}\Rightarrow y-2=0.$$

Найдем уравнение стороны AC, полагая $x_1=-2$, $y_1=-2$, $x_2=6$, $y_2=2$:

$$\frac{x+2}{6+2}=\frac{y+2}{2+2},\quad \frac{x+2}{8}=\frac{y+2}{4}\Rightarrow 4x-8y-8=0.$$

Найдем уравнение медианы, проведенной из вершины B. Медиана делит сторону AC пополам. Найдем координаты точки K – середины отрезка AC по формулам:

$$x_K=\frac{x_A+x_C}{2},\quad y_K=\frac{y_A+y_C}{2}.$$

Имеем $x_K=\dfrac{-2+6}{2}$, $y_K=\dfrac{-2+2}{2}\Rightarrow K(2;\ 0)$.

По формуле (14.1) составим уравнение медианы BK:

$$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{0-2},\quad \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}\Rightarrow 2x+3y-4=0.$$

Высота BL, проведенная из вершины B, перпендикулярна стороне AC. Используем условие перпендикулярности двух прямых

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}. \qquad (14.2)$$

Из уравнения стороны AC находим

$$y = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow k_{AC} = \frac{1}{2}.$$

По формуле (14.2) получаем $k_{BL} = -\frac{1}{1/2} = -2.$

Теперь воспользуемся уравнением прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (14.3)$$

Отсюда находим $y - 2 = -2(x+1)$ или $2x + y = 0$.

Задание 14.1. *Дан треугольник ABC. Составить уравнения его сторон, медианы и высоты, проведенных из вершины B в каждом из следующих случаев:*

1. $A(1;\ -2;\ 0)$, $B(2;\ 2;\ 1)$, $C(3;\ 1;\ 1)$.
2. $A(0;\ -2;\ 4)$, $B(1;\ -2;\ 5)$, $C(7;\ 1;\ 8)$.
3. $A(4;\ 0;\ -2)$, $B(3;\ 8;\ 7)$, $C(10;\ 5;\ -3)$.
4. $A(5;\ -7;\ 1)$, $B(2;\ 10;\ 4)$, $C(8;\ 1;\ 1)$.
5. $A(6;\ 3;\ 4)$, $B(5;\ 0;\ -2)$, $C(10;\ -2;\ 3)$.
6. $A(8;\ 1;\ 2)$, $B(-3;\ 4;\ 5)$, $C(0;\ -2;\ 7)$.
7. $A(9;\ 3;\ -1)$, $B(10;\ -4;\ 5)$, $C(8;\ 1;\ 1)$.
8. $A(7;\ -9;\ 10)$, $B(1;\ -3;\ 1)$, $C(2;\ 2;\ 0)$.
9. $A(-4;\ 5;\ 0)$, $B(1;\ -2;\ 1)$, $C(4;\ -8;\ 1)$.
10. $A(-5;\ -2;\ 0)$, $B(2;\ 3;\ 1)$, $C(10;\ -5;\ 7)$.

Пример 14.2. Через точку пересечения прямых $l_1: 3x + 2y - 2 = 0$, $l_2: 6x + 9y - 24 = 0$ провести прямую, параллельную прямой $l: 2x + y - 7 = 0$.

Решение. Найдем точку M_0 пересечения прямых l_1 и l_2:

$$\begin{cases} 3x+2y-\ 2=0, \\ 6x+9y-24=0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем точку $M_0(-2;\ 4)$. Приведем уравнение прямой l к виду $y=-2x+7$. Отсюда находим угловой коэффициент $k_1=-2$. Используя условие параллельности двух прямых $k_1=k_2$, составляем уравнение искомой прямой по формуле (14.3): $y-4=-2(x+2)$ или $2x+y=0$.

Задание 14.2. *Через точку пересечения прямых l_1, l_2 провести прямую, параллельную прямой l, в каждом из следующих случаев*:

1. l_1: $3x+5y-7=0$, l_2: $2x+y-7=0$, l: $x+5y-2=0$.
2. l_1: $2x+7y-8=0$, l_2: $x-5y+3=0$, l: $2x+7y-1=0$.
3. l_1: $4x+y-1=0$, l_2: $3x-5y+1=0$, l: $x+7y+2=0$.
4. l_1: $5x-y-2=0$, l_2: $x+6y-2=0$, l: $3x-y+7=0$.
5. l_1: $3x+5y-1=0$, l_2: $8x-y+7=0$, l: $4x-5y+1=0$.
6. l_1: $2x+y+5=0$, l_2: $3x+4y-7=0$, l: $5x-7y+2=0$.
7. l_1: $x-7y+1=0$, l_2: $4x+y+5=0$, l: $7x-y+3=0$.
8. l_1: $7x-2y+3=0$, l_2: $2x+5y-1=0$, l: $8x+2y-5=0$.
9. l_1: $10x+y-1=0$, l_2: $x+6y-2=0$, l: $x+5y-1=0$.
10. l_1: $x+6y-3=0$, l_2: $2x+4y-7=0$, l: $3x+8y+2=0$.

Пример 14.3. Найти точку Q, симметричную точке $N(4;\ 5)$ относительно прямой l: $8x+4y-36=0$.

Решение. Составим уравнение прямой l_1, проходящей через точку N и перпендикулярной прямой l.

Найдем угловой коэффициент k_1 прямой l_1 из условия перпендикулярности двух прямых (14.2): $k_1=-\frac{1}{k_2}=\frac{1}{2}$.

Составляем уравнение прямой l_1 по формулам (14.3): $y-4=\frac{1}{2}(x-5)$ или $x-2y+3=0$.

Находим точку P пересечения прямых l_1 и l: $\begin{cases} 8x+4y-36=0, \\ x-2y+\ 3=0. \end{cases}$

Решая систему получаем точку $P(3;\ 3)$, которая является серединой отрезка NQ.

Следовательно, имеем $x_Q = 2x_P - x_N$, $y_Q = 2y_P - y_N$ или $x_Q = 2\cdot 3 - 4 = 2$, $y_Q = 2\cdot 3 - 5 = 1 \Rightarrow Q(2;\ 1)$.

Задание 14.3. *Найти точку Q, симметричную точке N относительно прямой l, в каждом из следующих случаев:*

1. $N(2;\ -2)$, $l: 3x + y - 5 = 0$.
2. $N(1;\ -5)$, $l: x + 5y - 7 = 0$.
3. $N(5;\ 0)$, $l: 2x + y - 8 = 0$.
4. $N(-2;\ 4)$, $l: 3x - y + 5 = 0$.
5. $N(6;\ 1)$, $l: 4x + 2y - 5 = 0$.
6. $N(0;\ 7)$, $l: 8x + y - 1 = 0$.
7. $N(2;\ 7)$, $l: 2x + 5y - 2 = 0$.
8. $N(1;\ 4)$, $l: 4x + 2y + 3 = 0$.
9. $N(4;\ -2)$, $l: x + 7y - 3 = 0$.
10. $N(5;\ 5)$, $l: x - y - 2 = 0$.

Пример 14.4. Через точку пересечения прямых $l_1:\ 2x - y + 4 = 0$, $l_2:\ 2x + 4y - 1 = 0$ провести прямую, образующую угол $\varphi = 45^\circ$ с прямой $l:\ 3x - 17y + 5 = 0$.

Решение. Найдем точку M пересечения прямых l_1 и l:

$$\begin{cases} 2x - \ \ y + 4 = 0, \\ 2x + 4y - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем точку $M\left(-\frac{3}{2};\ 1\right)$. Уравнение искомой прямой имеет вид: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Зная, что $\varphi = 45^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = 1$, по формуле $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$ находим угловой коэффициент k искомой прямой, полагая $k_2 = k$, $k_1 = \frac{3}{17}$.

Имеем $\frac{k - 3/17}{1 + 3/17\,k} = 1 \Rightarrow k - \frac{3}{17} = 1 + \frac{3}{17}k \Rightarrow k = \frac{10}{7}$.

Составляем уравнение искомой прямой: $y - 1 = \frac{10}{7}\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)$ или $10x - 7y + 22 = 0$.

Задание 14.4. *Через точку пересечения прямых l_1 и l_2 провести прямую, образующую угол φ с прямой l в каждом из следующих случаев*:

1. $l_1:\ 2x - y + 5 = 0$, $l_2:\ x - y + 7 = 0$, $\varphi = 135^\circ$, $l:\ 2x + y - 1 = 0$.
2. $l_1:\ x + 5y - 7 = 0$, $l_2:\ 3x + y - 2 = 0$, $\varphi = 0^\circ$, $l:\ 4x - y + 2 = 0$.
3. $l_1:\ 3x - y - 8 = 0$, $l_2:\ x + 7y - 5 = 0$, $\varphi = 45^\circ$, $l:\ x + 5y - 1 = 0$.

4. $l_1:\ 8x+y-2=0,\ l_2:\ 3x-y+1=0,\ \varphi=60°,\ l:\ 4x+y+7=0.$
5. $l_1:\ 2x-y-5=0,\ l_2:\ 8x-y-2=0,\ \varphi=30°,\ l:\ 2x+5y+1=0.$
6. $l_1:\ x-4y-2=0,\ l_2:\ 5x+3y-4=0,\ \varphi=45°,\ l:\ x-7y-8=0.$
7. $l_1:\ 4x+y-3=0,\ l_2:\ 8x+y+5=0,\ \varphi=135°,\ l:\ 2x-y+1=0.$
8. $l_1:\ 7x-2y+4=0,\ l_2:\ 2x+4y-1=0,\ \varphi=0°,\ l:\ x+y-2=0.$
9. $l_1:\ x-5y+2=0,\ l_2:\ 4x-5y+3=0,\ \varphi=45°,\ l:\ 4x-y+8=0.$
10. $l_1:\ 3x+y-4=0,\ l_2:\ 11x-2y-7=0,\ \varphi=60°,\ l:\ x+7y+2=0.$

Пример 14.5. Найти угол между прямыми $l_1:\ 2x-2y+5=0$, $l_2:\ x+5y-7=0$ и расстояние от точки $M(2;\,5)$ до прямой l_2.

Решение. Угол между прямыми находим по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}.$$

Для нахождения k_1 и k_2 запишем уравнения прямых в виде

$$l_1:\ y=x+\frac{5}{2},\ l_2:\ y=-\frac{1}{5}x+\frac{7}{5}\ \Rightarrow\ k_1=1,\ k_2=-\frac{1}{5}.$$

После подстановки получаем

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-\frac{1}{5}-1}{1+1\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)}=-\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ \varphi=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}.$$

Расстояние от точки $M(2;\,5)$ до прямой $l_2:\ x+5y-7=0$ найдем по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Получаем $d=\dfrac{|2+5\cdot5-7|}{\sqrt{1^2+5^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{26}}.$

Задание 14.5. *Найти угол между прямыми l_1 и l_2 и расстояние от точки M до прямой l_2 в каждом из следующих случаев:*

1. $l_1:\ 11x-2y-7=0,\ l_2:\ 3x+y-4=0,\ M(2;\,2).$
2. $l_1:\ x+7y+2=0,\ l_2:\ 4x-y+8=0,\ M(-1;\,5).$
3. $l_1:\ 3x-y+5=0,\ l_2:\ 2x+5y-1=0,\ M(-5;\,2).$
4. $l_1:\ x-y+7=0,\ l_2:\ 5x-y-7=0,\ M(3;\,4).$
5. $l_1:\ 3x+2y-8=0,\ l_2:\ 4x+2y-5=0,\ M(4;\,-1).$
6. $l_1:\ 4x-y+7=0,\ l_2:\ 3x+y-1=0,\ M(5;\,1).$
7. $l_1:\ 2x+5y-1=0,\ l_2:\ 4x-y-2=0,\ M(-4;\,2).$

2. $M_0(1;\ -2;\ 4)$, $l_1:\ x+5y+z-8=0,\ 2x-y+4z-2=0.$

3. $M_0(3;\ -2;\ 6)$, $l_1:\ 3x-y-2z+7=0,\ x+5y-z-9=0.$

4. $M_0(-2;\ 1;\ 8)$, $l_1:\ -3x+y+4z-10=0,\ 5x-y+2z=0.$

5. $M_0(1;\ 0;\ -9)$, $l_1:\ 4x+y-8z+2=0,\ 2x+y-5z+10=0.$

6. $M_0(10;\ 1;\ -2)$, $l_1:\ 5x-y+7z-10=0,\ 4x-3y-2z+7=0.$

7. $M_0(-2;\ 4;\ 8)$, $l_1:\ 2x+7y-z-9=0,\ 5x-2y+6z=0.$

8. $M_0(-3;\ 8;\ 1)$, $l_1:\ x-y+2z-8=0,\ 3x+y-z+12=0.$

9. $M_0(-4;\ 5;\ 7)$, $l_1:\ 7x+y-5z-3=0,\ 2x-y+4z+5=0.$

10. $M_0(5;\ -6;\ 8)$, $l_1:\ x+y-z-2=0,\ 3x+3y-z+8=0.$

Пример 15.4. Найти расстояние от точки $M(2;\ -3;\ 5)$ до прямой $l: x=5+2t,\ y=-4-t,\ z=6-2t$ и угол между прямыми l и $l_1:\ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+1}{1}$.

Решение. Расстояние от точки $M(x_1,\ y_1,\ z_1)$ до прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, с заданным направляющим вектором $\bar{s}=(m;\ n;\ p)$ находим по формуле

$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ m & n & p\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (15.2)$$

Прямая $l: x=5+2t,\ y=-4-t,\ z=6-2t$ проходит через $M_0(5;\ -4;\ 6)$ и имеет направляющий вектор $\bar{s}=(2;\ -1;\ -2)$. Подставляя данные в уравнение (15.2), получаем

$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2-5 & -3-(-4) & 5-6\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{\left|\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -3 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{9}}=\frac{\left|-3\bar{i}-8\bar{j}+\bar{k}\right|}{3}=$$

$$=\frac{\sqrt{(-3)^2+(-8)^2+1^2}}{3}=\frac{\sqrt{74}}{3}.$$

Угол между двумя прямыми определяется как угол между направляющими векторами $\overline{s}_1=(m_1;\ n_1;\ p_1)$ и $\overline{s}_2=(m_2;\ n_2;\ p_2)$ этих прямых по формуле

$$\cos\varphi=\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\ . \qquad (15.3)$$

В нашем случае имеем: $\overline{s}_1=(2;\ -1;\ -2)$, $\overline{s}_2=(3;\ 4;\ 1)$. Подставляя данные в (15.3), получаем

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot3+(-1)\cdot4+(-2)\cdot1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2+1^2}}=0\ \Rightarrow\ \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Задание 15.4. *Найти расстояние от точки M_0 до прямой l и угол между прямыми l и l_1 в каждом из следующих случаев:*

1. $M_0(4;\ 3;\ -2)$, $l:\ x=5+2t,\ y=-4-t,\ z=6-2t;\ l_1:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-5}{1}.$
2. $M_0(1;\ -6;\ 8)$, $l:\ x=-8+6t,\ y=t+2t,\ z=-4-3t;\ l_1:\ \dfrac{x+8}{6}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z+4}{-3}.$
3. $M_0(1;\ -7;\ 5)$, $l:\ x=7-12t,\ y=9+5t,\ z=4;\ l_1:\ \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+6}{7}=\dfrac{z+2}{8}.$
4. $M_0(2;\ 1;\ -2)$, $l:\ x=1+3t,\ y=9-2t,\ z=8+4t;\ l_1:\ \dfrac{x-8}{1}=\dfrac{y+6}{2}=\dfrac{z-1}{2}.$
5. $M_0(1;\ 2;\ -6)$, $l:\ x=-7+6t,\ y=2-4t,\ z=1+8t;\ l_1:\ \dfrac{x+5}{-8}=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z+4}{7}.$
6. $M_0(3;\ -5;\ 6)$, $l:\ x=8+t,\ y=9+2t,\ z=6+2t;\ l_1:\ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-5}=\dfrac{z-8}{-4}.$
7. $M_0(2;\ 1;\ 1)$, $l:\ x=5+2t,\ y=-4-t,\ z=6-2t;\ l_1:\ \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{3}.$
8. $M_0(7;\ -4;\ 3)$, $l:\ x=9-t,\ y=8+2t,\ z=-5-3t;\ l_1:\ \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z+3}{1}.$
9. $M_0(5;\ -8;\ 1)$, $l:\ x=2-3t,\ y=5+6t,\ z=9+4t;\ l_1:\ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z}{-2}.$
10. $M_0(-2;\ 4;\ 6)$, $l:\ x=1+t,\ y=2-3t,\ z=3+2t;\ l_1:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z}{6}.$

Тема 16. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Пример 16.1. Найти точку пересечения прямой $l: \dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y+8}{-1}=\dfrac{z-5}{-1}$ с плоскостью $\alpha: 2x+2y-4z-2=0$.

Решение. Составим параметрические уравнения прямой l. Из канонических уравнений этой прямой $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y+8}{-1}=\dfrac{z-5}{-1}$ имеем $M_0(7;\,-8;\,5)$, $\bar{s}=(2;\,-1;\,-1)$. Тогда параметрические уравнения имеют вид $x=7+2t,\ y=-8-t,\ z=5-t$.

Подставим выражения для x, y, z в уравнение плоскости α: $2(7+2t)+2(-8-t)-4(5-t)-2=0 \ \Rightarrow 6t-24=0$ или $t=\dfrac{11}{3}$.

Подставив полученное значение параметра t в уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения:

$x=7+2\cdot4=15,\ y=-8-4=-12,\quad z=5-4=1.$

Непосредственно проверкой можно убедиться, что точка пересечения $M(15;\,-12;\,1)$ принадлежит плоскости α.

Задание 16.1. *Найти точку пересечения прямой l с плоскостью α в каждом из следующих случаев:*

1. $l: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-3},\quad \alpha: 5x+7y+13z-13=0.$
2. $l: \dfrac{x-1}{-7}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z-1}{-5},\quad \alpha: x-2y-6=0.$
3. $l: \dfrac{x}{-3}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-1}{0},\quad \alpha: 3x+3y+4z=0.$
4. $l: \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{13}=\dfrac{z-1}{11},\quad \alpha: 3x-2y+z-2=0.$
5. $l: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{-2},\quad \alpha: x+4y+7z-5=0.$
6. $l: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{-2},\quad \alpha: 7x-2y-z-5=0.$
7. $l: \dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z-11}{1},\quad \alpha: 4x+y+3z-5=0.$
8. $l: \dfrac{x-5}{-6}=\dfrac{y-9}{4}=\dfrac{z-10}{-2},\quad \alpha: 3x+5y+11z=0.$
9. $l: \dfrac{x+7}{8}=\dfrac{y-4}{5}=\dfrac{z}{2},\quad \alpha: 2x-y-z-1=0.$
10. $l: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{7}=\dfrac{z-2}{2},\quad \alpha: x+y+2z-2=0.$

Пример 16.2. Найти угол между прямой $l: x=5+11t$, $y=4-8t$, $z=3-7t$ и плоскостью $\alpha: 7x+8y-8z-10=0$.

Решение. Угол между прямой $l: x=x_0+mt$, $y=y_0+nt$, $z=z_0+pt$ и плоскостью $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (16.1)$$

В нашем случае $m=11$, $n=-8$, $p=-7$, $A=7$, $B=8$, $C=-8$. Применяя формулу (16.1), получаем

$$\sin\varphi=\frac{|7\cdot11+8\cdot(-8)+(-8)\cdot(-7)|}{\sqrt{7^2+8^2+(-8)^2}\cdot\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}}=\frac{69}{\sqrt{177}\cdot\sqrt{234}}.$$

Задание 16.2. *Найти угол между прямой l и плоскостью α в каждом из следующих случаев:*

1. $l: x=2-t,\ y=5+2t,\ z=-3+t,\ \ \alpha: 3x-y+5z-7=0.$
2. $l: x=3+4t,\ y=-t,\ z=1-t,\ \ \alpha: x+2y-z+10=0.$
3. $l: x=-1-2t,\ y=5+t,\ z=4t,\ \ \alpha: 2x-2y-2z-8=0.$
4. $l: x=5+t,\ y=-4-t,\ z=1+2t,\ \ \alpha: 5x+y-4z=0.$
5. $l: x=4t,\ y=2+t,\ z=3-t,\ \ \alpha: x+7y-z+10=0.$
6. $l: x=2+t,\ y=1-4t,\ z=8-t,\ \ \alpha: 3x-y+5z+8=0.$
7. $l: x=1+3t,\ y=3+7t,\ z=2t,\ \ \alpha: 4x+y-z-6=0.$
8. $l: x=7-t,\ y=5+t,\ z=4-t,\ \ \alpha: x-2y+5z-3=0.$
9. $l: x=8t,\ y=2+2t,\ z=-3-t,\ \ \alpha: 3x-4y-z+7=0.$
10. $l: x=1+4t,\ y=5-t,\ z=7t,\ \ \alpha: 7x-y+5z=0.$

Пример 16.3. Найти проекцию точки $M(1;\,4;\,-2)$ на прямую $l: x=5-2t,\ y=2+t,\ z=-t$.

Решение. Проекцией точки M на прямую l является основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l.

Составим уравнение плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой l, по формуле (16.1). В качестве вектора нормали $\vec{n}$ возьмем направляющий вектор $\vec{s}$ прямой l. Имеем $\vec{n}=\vec{s}=(-2;\,1;\,-1)$. Тогда получаем

$$-2(x-1)+1\cdot(y-4)-1(z-(-2))=0 \text{ или } 2x-y+z+4=0.$$

Проекцию точки M на прямую l найдем как точку пересечения построенной плоскости с данной прямой. Имеем

$$2(5-2t)-(2+t)+(-t)+4=0 \text{ или } 6t-12=0 \Rightarrow t=2.$$

Подставив значение параметра t в уравнение прямой l получим координаты точки Q, которая является проекцией точки M на прямую l:

$$x=5-2\cdot 2=1, \quad y=2+2=4, \quad z=-2.$$

Итак, имеем $Q(1;\ 4;\ -2)$.

Задание 16.3. *Найти проекцию точки M на прямую l в каждом из следующих случаев:*

1. $M(2;\ 1;-3)$; $\quad l: x=7-t,\ y=2t,\ z=4+t.$
2. $M(2;\ 2;-1)$; $\quad l: x=1+2t,\ y=-1-t,\ z=2t.$
3. $M(4;\ 0;1)$; $\quad l: x=5+t,\ y=1+2t,\ z=-1-t.$
4. $M(-1;\ 1;4)$; $\quad l: x=6-2t,\ y=2-t,\ z=1-3t.$
5. $M(2;\ 2;2)$; $\quad l: x=7+4t,\ y=3+t,\ z=-2+4t.$
6. $M(1;-2;5)$; $\quad l: x=-3-2t,\ y=4-t,\ z=5+6t.$
7. $M(3;\ 0;1)$; $\quad l: x=8t,\ y=-2+t,\ z=6+2t.$
8. $M(1;\ 1;-2)$; $\quad l: x=-3+t,\ y=4+2t,\ z=7t.$
9. $M(-4;\ 0;2)$; $\quad l: x=1-3t,\ y=7+t,\ z=-2+4t.$
10. $M(-2;\ 3;1)$; $\quad l: x=3+t,\ y=1-5t,\ z=6+t.$

Пример 16.4. Найти проекцию точки $M(1;\ 2;-1)$ на плоскость $\alpha: 3x-y+5z-31=0.$

Решение. Составим параметрические уравнения прямой l, проходящей через точку M и перпендикулярной плоскости α. В качестве направляющего вектора $\vec{s}$ прямой l возьмем вектор нормали $\vec{n}$ плоскости α. Имеем $\vec{s}=\vec{n}=(3;-1;\ 5)$. По формуле (16.1) получаем

$$x=1+3t,\ y=2-t,\ z=-1+5t.$$

Находим точку Q пересечения прямой l и плоскости:

$$3(1+3t)-(2-t)+5(-1+5t)-31=0 \text{ или } 35t-35=0 \Rightarrow t=1.$$

Координаты точки Q будут равны:

$$x=1+3\cdot 1=4,\ y=2-1=1,\ z=-1+5\cdot 1=4.$$

Следовательно, получаем $Q(4;\ 1;\ 4)$.

Задание 16.4. *Найти проекцию точки M на плоскость в каждом из следующих случаев:*

1. $M(1;\ 2;-1)$; $\alpha: 3x+y-z=0$.
2. $M(1;\ 5;\ 7)$; $\alpha: 2x+y-5z+7=0$.
3. $M(2;\ 0;1)$; $\alpha: x-2y-3z+6=0$.
4. $M(4;\ 1;3)$; $\alpha: 2x+7y-z-8=0$.
5. $M(1;\ -2;1)$; $\alpha: 4x+2y+z-5=0$.
6. $M(-2;\ -2;3)$; $\alpha: 5x+y-z+7=0$.
7. $M(1;\ -2;-1)$; $\alpha: 8x-y+5z-1=0$.
8. $M(-3;\ 4;\ 2)$; $\alpha: 3x-y+z-4=0$.
9. $M(-5;\ 1;1)$; $\alpha: x+7y-z+5=0$.
10. $M(-2;\ 1;3)$; $\alpha: 4x+y-2z+7=0$.

Пример 16.5. Найти точку P, симметричную точке $M(2;\ 5;\ 1)$ относительно прямой $l: 7x+y+z-8=0,\ 6x+y+2z-7=0$, и вычислить длину отрезка MP.

Решение. Составим уравнение плоскости α, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой l. В качестве вектора нормали $\vec{n}$ плоскости α возьмем вектор, равный векторному произведению $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ – векторов нормали плоскостей $7x+y+z-8=0,\ 6x+y+2z-7=0$.

Имеем $\vec{n}_1=(7;\ 1;\ 2)$, $\vec{n}_2=(6;\ 1;\ 2)$.

Получаем $\bar{n}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 7 & 1 & 2\\ 6 & 1 & 2\end{vmatrix}=-2\bar{j}+\bar{k}$.

Уравнение плоскости α имеет вид $-2(y-5)+z-1=0$ или $2y-z-9=0$.

Находим точку Q пересечения прямой l и плоскости α. Для этого от общих уравнений прямой l переходим к параметрическим.

Найдем точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, принадлежащую прямой l:

$$\begin{cases}7x+y+z-8=0,\\ 6x+y+2z-7=0.\end{cases}$$

Положим $x_0=0$. Решая полученную систему $\begin{cases}y+z=8\\ y+2z=7\end{cases}$, находим $y_0=9,\ z_0=-1$.

Полагаем $\vec{s}=\vec{n}=(0;-2;1)$, $M_0(0;\ 9;\ -1)$. Составляем параметрические уравнения прямой l $x=0,\ y=9-2t,\ z=-1+t$.

Подставляем в уравнение плоскости $2(9-2t)-(-1+t)-9=0 \Rightarrow t=2$. Точка Q имеет координаты $Q(0;\ 5;\ 1)$.

Расстояние от точки M до точки Q равно расстоянию от точки Q до точки P. Поэтому координаты точки P находим по формулам:

$x_P = 2x_Q - x_M$, $y_P = 2y_Q - y_M$, $z_P = 2z_Q - z_M$ или

$x_P = 2\cdot 0 - 2 = -2$, $y_P = 2\cdot 5 - 5 = 5$, $z_P = 2\cdot 1 - 1 = 1$.

Получаем точку $P(-2;\ 5;\ 1)$. Вычислим длину отрезка MP по формуле

$$|MP| = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2 + (z_M - z_P)^2} =$$
$$= \sqrt{(2-(-2))^2 + (5-5)^2 + (1-1)^2} = 4.$$

Задание 16.5. *Найти точку P, симметричную точке M относительно прямой l, и вычислить длину отрезка MP в каждом из следующих случаев.*

1. $M(1;\ 8;\ 1)$; $l:\ x-y+z=0,\ 2x-y+2z+1=0.$
2. $M(2;\ 2;\ -3)$; $l:\ 2x+y-z-6=0,\ 3x+y-z+5=0.$
3. $M(-1;\ 2;\ -1)$; $l:\ 2y-5z+3=0,\ 2x-y+3z=0.$
4. $M(1;\ -2;\ 3)$; $l:\ 3x+2y-z+7=0,\ x+5y-z-10=0.$
5. $M(2;\ 2;\ 2)$; $l:\ 4x-z+8=0,\ 5x+2y+7z=0.$
6. $M(-5;\ 0;\ 3)$; $l:\ x+2y-3z=0,\ x+5y-z-7=0.$
7. $M(1;\ 1;\ -7)$; $l:\ 5x-y+8z-10=0,\ 2x-y+z-1=0.$
8. $M(-2;\ 3;\ 5)$; $l:\ x+2y-7z+1=0,\ 3x+4y-8=0.$
9. $M(-8;\ 0;\ 3)$; $l:\ 3x+5y-z-1=0,\ x+5y-z+7=0.$
10. $M(3;\ -1;\ 2)$; $l:\ 4x+y-z+5=0,\ 2x-y+4z=0.$

Тема 17. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пример 17.1. Записать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M(3;\ \sqrt{15})$, $N(-3\sqrt{3};\ \sqrt{5})$. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет.

Решение. Каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Так как точки M и N лежат на эллипсе, то их координаты удовлетворяют его уравнению: $\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{15}{b^2}=1,\ \dfrac{27}{a^2}+\dfrac{5}{b^2}=1 \ \Rightarrow\ a^2=36,\ b^2=20.$

Таким образом, получено следующее каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$.

Найдем полуоси: $a=\sqrt{36}=6$, $b=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ и фокусы $F_1(c;\ 0)$, $F_2(-c;\ 0)$, где $c^2=a^2-b^2=36-20=16 \Rightarrow c=4$.

Следовательно, фокусы эллипса находятся в точках $F_1(4;\ 0)$, $F_2(-4;\ 0)$. Эксцентриситет эллипса вычислим по формуле $\varepsilon=c/a=4/6=2/3$.

Задание 17.1. *Записать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки M, N. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет в каждом из следующих случаев:*

1. $M(3;\ 3)$, $N(5;\ 9)$.
2. $M(3;\ 5)$, $N(5;\ -2)$.
3. $M(0;\ 7)$, $N(4;\ -1)$.
4. $M(1;\ 7)$, $N(-2;\ 5)$.
5. $M(1;\ 3)$, $N(2;\ 4)$.
6. $M(4;\ 3)$, $N(3;\ -6)$.
7. $M(6;\ -1)$, $N(4;\ 6)$.
8. $M(4;\ -6)$, $N(-3;\ 3)$.
9. $M(6;\ 6)$, $N(5;\ 3)$.
10. $M(-3;\ 2)$, $N(-2;\ -4)$.

Пример 17.2. Записать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если: 1) действительная ось равна 10, а мнимая ось – 14; 2) расстояние между фокусами равно 28, эксцентриситет равен 2; 3) действительная ось равна 6, эксцентриситет равен 5/3; 4) расстояние между фокусами равно 10, мнимая ось равна 8; 5) мнимая ось равна 16, эксцентриситет равен 5/3.

Решение. 1) По условию задачи $2a=10$, $2b=14 \Rightarrow a=5$, $b=7$. Подставляя эти данные в каноническое уравнение гиперболы, получаем

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{49}=1.$$

2) Имеем $2c=28$, $\varepsilon=2$. Так как $\varepsilon=\frac{c}{a}$, то находим действительную ось $a=\frac{c}{\varepsilon}=\frac{14}{2}=7$. По формуле $b^2=c^2-a^2$ получаем $b^2=196-49=147$. Следовательно, каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{147}=1$.

3) Согласно условию имеем

$2a=6 \Rightarrow a=3$, $\varepsilon=5/3$, $c=\varepsilon\cdot a=5/3\cdot 3=5$, $b^2=c^2-a^2=25-9=16$.

Составляем каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

4) Имеем $2c=10 \Rightarrow c=5,\ 2b=8 \Rightarrow b=4,\ a^2=c^2-b^2=25-16=9$.

Получаем каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

5) По условию задачи $2b=16 \Rightarrow b=8,\ \varepsilon=5/3,\ \frac{c}{a}=\frac{5}{3}$. Тогда $c=\frac{5}{3}a$.

Так как $b^2=c^2-a^2=64 \Rightarrow a^2=36$.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

Задание 17.2. *Записать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, в каждом из следующих случаев:*

1. *Мнимая ось равна 16, действительная ось равна 20.*
2. *Расстояние между фокусами равно 14, мнимая ось равна 3.*
3. *Действительная ось равна 18, эксцентриситет равен 4/3.*
4. *Мнимая ось равна 20, эксцентриситет равен 5/2.*
5. *Расстояние между фокусами равно 10, эксцентриситет равен 2.*
6. *Расстояние между фокусами равно 26, сумма полуосей равна 17.*
7. *Расстояние между вершинами равно 4, уравнения асимптот* $y=\pm\frac{3}{4}x$.
8. *Гипербола проходит через две точки* $M\left(\sqrt{6},1\right)$ *и* $N\left(\sqrt{5},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
9. *Точка* $M(6,2)$ *лежит на гиперболе, действительная ось* $a=2\sqrt{2}$.
10. *Точка* $M\left(8;\ 3\sqrt{3}\right)$ *лежит на гиперболе, эксцентриситет* $\varepsilon=1{,}25$.

Пример 17.3. Записать каноническое уравнение параболы, если известно, что: 1) фокус находится в точке $F(4;0)$; 2) фокус находится в точке $F(0;3)$; 3) директриса имеет уравнение $x-3=0$; 4) директриса имеет уравнение $y-2=0$; 5) парабола проходит через точку $A(6;2)$ и симметрична относительно оси Ox; 6) парабола проходит через точку $B(1;-2)$ и симметрична относительно оси Oy.

Решение. 1) По условию задачи фокус $F(4;0)$ расположен на оси Ox. Следовательно, парабола симметрична относительно оси Ox и имеем каноническое уравнение $y^2=2px$. Так как $\frac{p}{2}=4$, то $p=8$. Следовательно, имеем $y^2=16x$.

2) Так как фокус параболы находится в точке $F(0;3)$, то парабола симметрична относительно оси Оу и ее каноническое уравнение имеет вид $x^2 = 2qy$. Находим $\frac{q}{2} = 3$ или $q = 6$. Отсюда получаем $x^2 = 12y$.

3) По условию задачи парабола симметрична относительно оси Ох. Так как уравнение директрисы имеет вид $x - 3 = 0$, то $p = -6$. Следовательно, каноническое уравнение параболы запишем в виде $y^2 = -12x$.

4) Из уравнения директрисы следует, что парабола симметрична относительно оси Оу. Следовательно, так как $q = -4$, получаем каноническое уравнение параболы $x^2 = -8y$.

5) Подставим в каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$, симметричной относительно оси Ох, координаты точки A: $4 = 2p \cdot 6 \Rightarrow 2p = \frac{2}{3}$. Следовательно, каноническое уравнение параболы будет $y^2 = \frac{2}{3}x$.

6) Подставим в уравнение параболы $x^2 = 2qy$, симметричной относительно оси Оу, координаты точки B: $1 = 2q(-2) \Rightarrow 2q = -\frac{1}{2}$. Записываем каноническое уравнение параболы: $x^2 = -\frac{1}{2}y$.

Задание 17.3. *Записать каноническое уравнение параболы в каждом из следующих случаев:*

1. *Фокус находится в точке* $F(0;-3)$.
2. *Фокус находится в точке* $F(-5;0)$.
3. *Директриса имеет уравнение* $x + 6 = 0$.
4. *Директриса имеет уравнение* $y + 8 = 0$.
5. *Парабола симметрична относительно оси Ох и проходит через точку* $A(3;4)$.
6. *Парабола симметрична относительно оси Оу и проходит через точку* $B(2;-10)$.

Пример 17.4. Установить вид кривой второго порядка, определяемой уравнением: а) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$; б) $y^2 - 6x + 8y - 8 = 0$.

Решение. а) Вынося за скобки коэффициенты при квадратах координат и выделяя полные квадраты, получаем

$$4(x^2 - 4x + 4) - 16 - 9(y^2 - 2y + 1) + 9 - 29 = 0;$$

$$\Rightarrow 4(x-2)^2 - 9(y-1)^2 = 36 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Переходя к новым координатам по формуле $X = -2, Y = y-1$, получаем $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1$.

Это уравнение определяет уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(2;1)$ и полуосями $a = 3$, $b = 2$.

б) Преобразуем левую часть уравнения:

$y^2 - 6x + 8y - 8 = 0 \Rightarrow (y^2 + 8y + 16) - 16 - 6x - 8 = 0 \Rightarrow (y+4)^2 = 6(x+4)$.

Положим $X = x+4, Y = y+4$. Получим уравнение $Y^2 = 6X$, которое определяет параболу с вершиной в точке $O_1(-4;-4)$, а ось параллельна оси Ox.

Задание 17.4. *Установить вид кривой второго порядка, определяемой уравнением, в каждом из следующих случаев*:

1. $x^2 + 8x + 2y + 20 = 0$.
2. $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 7 = 0$.
3. $3x^2 - 4y + 18x + 15 = 0$.
4. $5x^2 + 9y - 30x + 18 = 0$.
5. $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$.
6. $9x^2 - 16y^2 - 5x - 64y - 127 = 0$.
7. $4x^2 + 8x - y + 7 = 0$.
8. $y^2 + 8y - x^2 + 4x + 3 = 0$.
9. $x - 2y^2 + 12y - 14 = 0$.
10. $y^2 + 2y + 4x - 11 = 0$.

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ
к выполнению самостоятельных работ
для студентов 1-го курса

Составители:
ЕМЕЛИЧЕВА Елена Владимировна
ЛОШКАРЕВА Светлана Юрьевна
МАТВЕЕВА Людмила Дмитриевна

Редактор Т.Н. Микулик

Подписано в печать 09.09.2009.
Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 4,53. Уч.-изд. л. 1,77. Тираж 200. Заказ 698.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.