

ISSN 0134-9635

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный технический университет

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Международный научно-технический сборник

Основан в 1975 году

Выпуск 33

*Сборник включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь
для опубликования результатов диссертационных исследований
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук*

Минск
БНТУ
2018

УДК [531+621.01:531.8](082)

ББК 22.21я43

30.12я43

Т 33

РЕДАКЦИЯ СБОРНИКА

Президиум редакции:

С.А. Чижик, Б.М. Хрусталеv, М.А. Журавков,
Ю.М. Плескачевский, Ф.И. Пантелеенко, А.М. Маляревич,
Л.Г. Красневский, А.С. Калиниченко, В.М. Трепачко

Международный совет редакции:

Ј. Awrejcewicz (Польша), А.А. Буренин (Россия), Ј. Grabski (Польша),
Р.А. Васин (Россия), G. Gudehus (Германия), Р.И. Непершин (Россия),
В.В. Лобода (Украина), Б.Д. Аннин (Россия), А.Ф. Ревуженко (Россия)
Н.Ф. Морозов (Россия), А.Ф. Ревуженко, Н.К. Мышкин (Беларусь),
К. Циммерман (Германия), А.И. Шашкин (Россия), Г.П. Черепанов (США),
Ю.В. Немировский (Россия), С.В. Харитончик (Беларусь), В.С. Бондарь (Россия)

Редакционная коллегия:

А.В. Чигарев (председатель, главный редактор), Ю.В. Василевич (зам. председателя),
П.И. Ширвель (уч. секретарь, технический редактор), С.Е. Карпович, И.С. Куликов,
В.С. Вихренко, М.О. Теляк (эл. макет), А.В. Побегайло (компьютерная верстка)

Теоретическая и прикладная механика: А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, М.А. Журавков
Механика конструкций: А.Н. Борисевич, С.В. Босаков, Т.М. Пецольд, Э.И. Старовойтов,
И.С. Куликов, Д.В. Леоненко, В.М. Хвисевич, А.И. Дудяк, Г.В. Смирнов, В.А. Кукареко
Механика материалов и структур: Ю.В. Василевич, М.И. Кулак, Н.В. Спиридонов, П.Н. Конон
Электромеханика: С.А. Чижик, М.Г. Киселев, В.Л. Соломахо, В.Т. Минченя, В.В. Баркалин
Механика машин: Ю.М. Плескачевский, В.Б. Альгин, А.И. Сафонов, А.Т. Скойбеда, В.К. Шелег
Мехатроника и интеллектуальные системы: Л.Г. Красневский, В.М. Колешко, В.В. Баркалин
Биомеханика и роботы: Г.И. Михасев, А.В. Чигарев, С.А. Чижик, С.Е. Карпович, В.Т. Минченя

Адрес редакции:

220013 Минск, проспект Независимости, 65
БНТУ, кафедра «Теоретическая механика»
Тел.: (+375 17) 292 74 25, 292 22 63, 299 92 52
E-mail: seminar.mechatronics@gmail.com

В сборнике печатаются научные статьи по механике, компьютерному моделированию, мехатронике и смежным вопросам. Содержатся научно-методические работы преподавателей, научных сотрудников вузов и исследовательских учреждений. Включены также материалы докладов, обсуждавшиеся на международной конференции «Моделирование и инжиниринг механических и мехатронных систем» и на республиканском научно-методическом семинаре «Применение методов компьютерной механики в инженерии, науке, образовании» (по рекомендации оргкомитета).

Тематика статей охватывает широкий круг вопросов: общая механика, МДТТ, механика жидкости и газа, мехатроника, био- и наномеханика, математическое и компьютерное моделирование физических и технических процессов, дифференциальные уравнения и их приложения в механике, дизайн-конструирование мехатронных систем, конструирование деталей машин и др. Рассматриваются различные подходы к внедрению информационных технологий в преподавании курсов «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Механика деформируемых тел», «Теория механизмов и машин» и др. Излагаются новые точки зрения на преподавание этих курсов в высшей и средней школе.

Взгляды отдельных авторов статей могут не совпадать с общей позицией редакции научного издания.

Научно-технический сборник будет полезен для преподавателей высших учебных заведений, научно-инженерных работников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов технических вузов.

УДК [531+621.01:531.8](082)

ББК 22.21я43

30.12я43

© Белорусский национальный
технический университет, 2018

СОВРЕМЕННАЯ НАУКА И МУЛЬТИДИСЦИПЛИНАРНАЯ СИСТЕМА ОБРАЗОВАНИЕ–НАУКА–ПРОИЗВОДСТВО: НЕКОТОРЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ

¹Сосновский Л.А., ²Щербаков С.С., ²Богданович А.В.

¹ООО «НПО ТРИБОФАТИКА», Гомель

²УО «Белорусский государственный университет», Минск

Современная наука не знает организационных границ: она успешно развивается, и в академических институтах (сфера науки), и университетах (сфера образования), и на предприятиях (сфера производства), и в частных организациях (негосударственная сфера). И, по нашему мнению, наиболее значимые результаты достигаются при мультидисциплинарных исследованиях, когда силы и средства сосредотачиваются на главных направлениях вне зависимости от сферы деятельности ученых и организаций. Приведем лишь один пример, который, по-видимому, носит несколько субъективный характер, поскольку он основывается на интересах авторов доклада.

В 1986 г. ИНДМАШ АНБ опубликовал тезисы докладов на Республиканской научно-технической конференции [1], в одном из которых впервые прозвучал (и был напечатан) новый термин *трибофатика*. А уже через 7 лет, в 1993 г., в Гомеле состоялся первый Международный симпозиум по трибофатике [2], на открытии которого выдающийся ученый-механик XX века вице-президент РАН и директор ИМАШ РАН им. Благоднарова Константин Васильевич Фролов, академик РАН и АНБ, признал: «Именно в Белоруссии родилась и успешно развивается новая наука – трибофатика, один из наиболее перспективных разделов механики». Министр образования и науки РБ доктор физико-математических наук профессор Василий Иванович Стражев так оценил это достижение: «Рождение новой науки случается не так часто в наше время, поэтому оно, несомненно, составляет честь для любого государства... Республика Беларусь является колыбелью трибофатики. Это было признано крупными учеными нашего времени». А вице-президент НАНБ академик Михаил Степанович Высоцкий уточнил: «Большая наука делается в Гомеле» [3].

Годом ранее, в 1992 г., в Гомеле было организовано ООО «НПО ТРИБОФАТИКА», главной задачей которого стало развитие исследований в этой новой области знания. И вот минуло ровно 25 лет, четверть столетия – и в августе 2017 г. мы отметили юбилей, и наш юбилей укладывается в Год науки в Республике Беларусь. На рисунках 1 и 2 кратко представлены основные результаты комплекса работ, которые выполнены ООО «НПО ТРИБОФАТИКА» при тесном и творческом сотрудничестве с организациями науки, производства и образования 4-х стран [4]. Нам кажется уместным здесь добавить, что директор головной организации по трибофатике (ООО «НПО ТРИБОФАТИКА») стал Заслуженным деятелем науки и техники РБ, Лауреатом Государственной премии Украины, Почетным железнодорожником России, членом Российского Национального Комитета по теоретической и прикладной механике, Сопредседателем Международного координационного Совета по трибофатике и др., а также получил высшие награды Президиума НАН Б, Министерства образования и науки РБ, ОАО «РЖД», других ведомств [5].

Хотели бы кратко охарактеризовать здесь прорывные достижения, которые легли в основу фундаментальной триады Наука–Образование–Производство (см. рисунок 2):

- это трибофатика – новый раздел механики (рисунок 3) [6–13 и др.];
- это механотермодинамика – новый раздел физики (рисунок 4) [14–24 и др.];

- это трансдисциплинарная методология подготовки специалистов по механике в университетах РБ и КНР (рисунок 5) [25–32 и др.];
- это оригинальное периферийное устройство РТС для ПК (рисунок 6) [4, 33 и др.];
- это новый конструкционный материал МОНИКА с особыми механическими свойствами и высоким сопротивлением усталости (рисунок 7) [34–37 и др.].

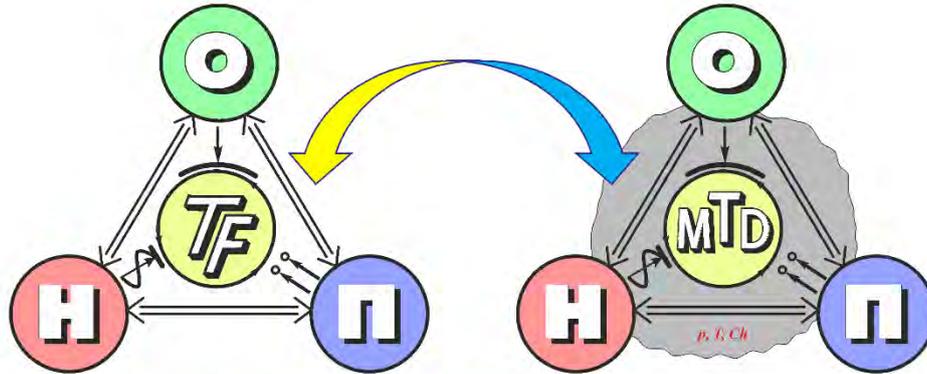
ТРИБОФАТИКА И МЕХАНОТЕРМОДИНАМИКА: 1992-2017

Более 1000 опубликованных работ и изобретений	Более 20 монографий, справочников, учебных пособий на русском, английском и китайском языках	9 государственных стандартов, в том числе 3 межгосударственных, 4 стандарта предприятий
18 патентов на изобретения и авторских свидетельств	7 Международных симпозиумов по трибофатике: (Гомель (1993), Москва (1996), Пекин (2000), Тернополь (2002), Иркутск (2005), Минск (2010), Гомель (2015)), в работе которых принимали участие более 2500 ученых и специалистов	Доклады по трибофатике и механотермодинамике представлены более чем на 120 Международных конференциях в 50 городах мира (Москва, Пекин, Минск, Киев, Вашингтон, Лондон, Оттава, Киото, Штутгарт, Турин, Краков и др.), в работе которых принимали участие более 2000 ученых и специалистов
147 ученых многих стран награждены Почетным дипломом «За вклад в развитие трибофатики»	25 ученых и организаторов науки разных стран награждены Почетным юбилейным знаком «ТРИБОФАТИКА-25»	Новый класс испытательного оборудования: 11 модификаций машин серии СИ для комплексных износоусталостных испытаний материалов, элементов конструкций, моделей пар трения и силовых (трибофатических) систем
10 кандидатских и 2 докторские диссертации	В университетах РБ введены учебные курсы «Основы трибофатики», «Фундаментальные и прикладные задачи трибофатики», «Механика износоусталостного повреждения и разрушения», «Механотермодинамика». За 20 лет эти курсы прослушали более 3500 студентов и магистрантов	Более 60 НИР в интересах крупных предприятий (ПО «Гомсельмаш», ОАО «Гомельтриваснефть Друзьба», ОАО «МАЗ» и др.). Общий экономический эффект от внедрения выполненных работ превышает 10 млн. долларов США

ОНИ НАГРАЖДЕНЫ ПОЧЕТНЫМ ЗНАКОМ «ТРИБОФАТИКА-25» (2010)



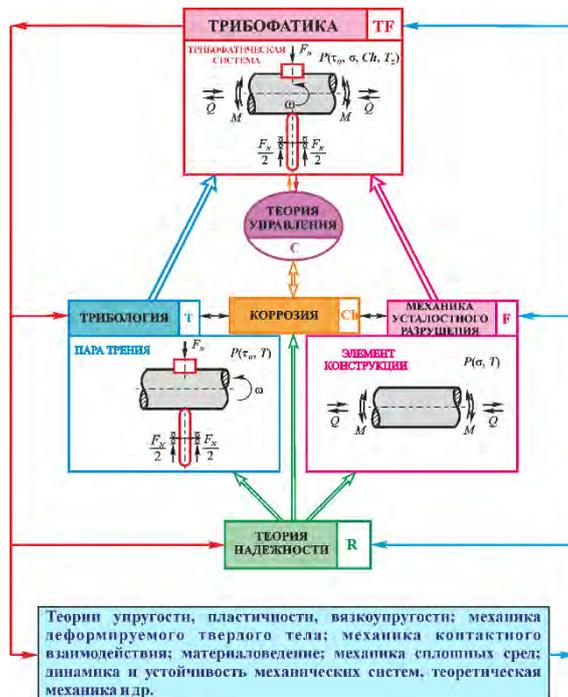
Рис. 1. Некоторые итоги работ



Когда **научные результаты** внедряются в **производство**, это признание их практической эффективности. Когда же они образуют новую **учебную дисциплину** в университетах, это становится **общим достоянием научно-образовательной сферы общества**

- БЕЛАРУСЬ:** ООО «НПО ТРИБОФАТИКА», НЦ ПММ НАН Б, РУП «Белавтотракторостроение», ОИМ НАН Б, ПО «Гомсельмаш», РУП «Гомельтранснефть Дружба», БелГУТ, БГУ, БНТУ и др.
- РОССИЯ:** ИМАШ РАН, ОАО «РЖД» и др.
- УКРАИНА:** ИП НАН У и др.
- КИТАЙ:** Институт защиты металлов и др.

Рис. 2. К анализу фундаментальной триады образование–наука–производство и ее реализация



Современная западная цивилизация достигла необычайных высот в **искусстве расчленения целого на части...**

Мы изрядно преуспели в этом искусстве, преуспели настолько, что забываем собрать разъятые части в то **единое целое**, которое они некогда составляли.

О. Тоффлер

...Именно в Беларуси родилась и успешно развивается **новая наука – трибофатика**, один из наиболее перспективных разделов механики.

К. В. Фролов, 1993

“Целое, мыслимое как многое,” – такой... представляется нам трибофатика по отношению к сопряженным с нею наукам, в том числе и к тем, которые являются ее прародителями...

Не взаимное влияние факторов, а **взаимодействие явлений** – вот что изучает трибофатика.

Л. А. Сосновский, 1996

Трибофатика: наукова-технічна дисципліна, яка вивчає зносоусталення, пошкодження і руйнування силових систем машин і обладнання

Белорусская энциклопедия: 2002 г., т.15

Трибофатика: наука об износоусталостных повреждениях и разрушении силовых систем машин и оборудования

ГОСТ 30638-99

Рис. 3. Новый раздел механики: трибофатика как комплексная научная дисциплина



Рис. 4. Новый раздел физики: объединение двух великих конкурентов (1850-2010)



Training Program of Dalian University of Technology and Belarusian State University Joint Institute

Specialty	BSU: 1-31 03 02 Mechanics and Mathematic Modelling / DUT: Engineering Mechanics				
Course Name (DUT)	Total	Auditorium hours	Credits (BSU)	Credits (DUT)	Semester
Cycle of Special Disciplines					
University Component					
Computational Structural Mechanics	36	24		1,5	7
Fracture and Damage Mechanics	48	32	6	2	7
Mechanical Strength Analysis	48	32			
Engineering Drawing	72	48	7	3	1
Mechanical Design Basics	96	64	9	4	5,6
Mechanics of Vibration	48	32	6	2	7
Tribo-Fatigue	96	64	9	4	5
Mechanothermodynamics	48	32	6	2	6
Plate and Shell Mechanics	96	64	9	4	6
Finite Element Method	48	32	6	2	5
Reinforced Concrete Structure	48	32			
Steel Structure	48	32	6	2	7

Рис. 5. Трансдисциплинарная методология подготовки инженеров-механиков

Без испытания материалов развитая цивилизация существовать не может
Дж. Гордон

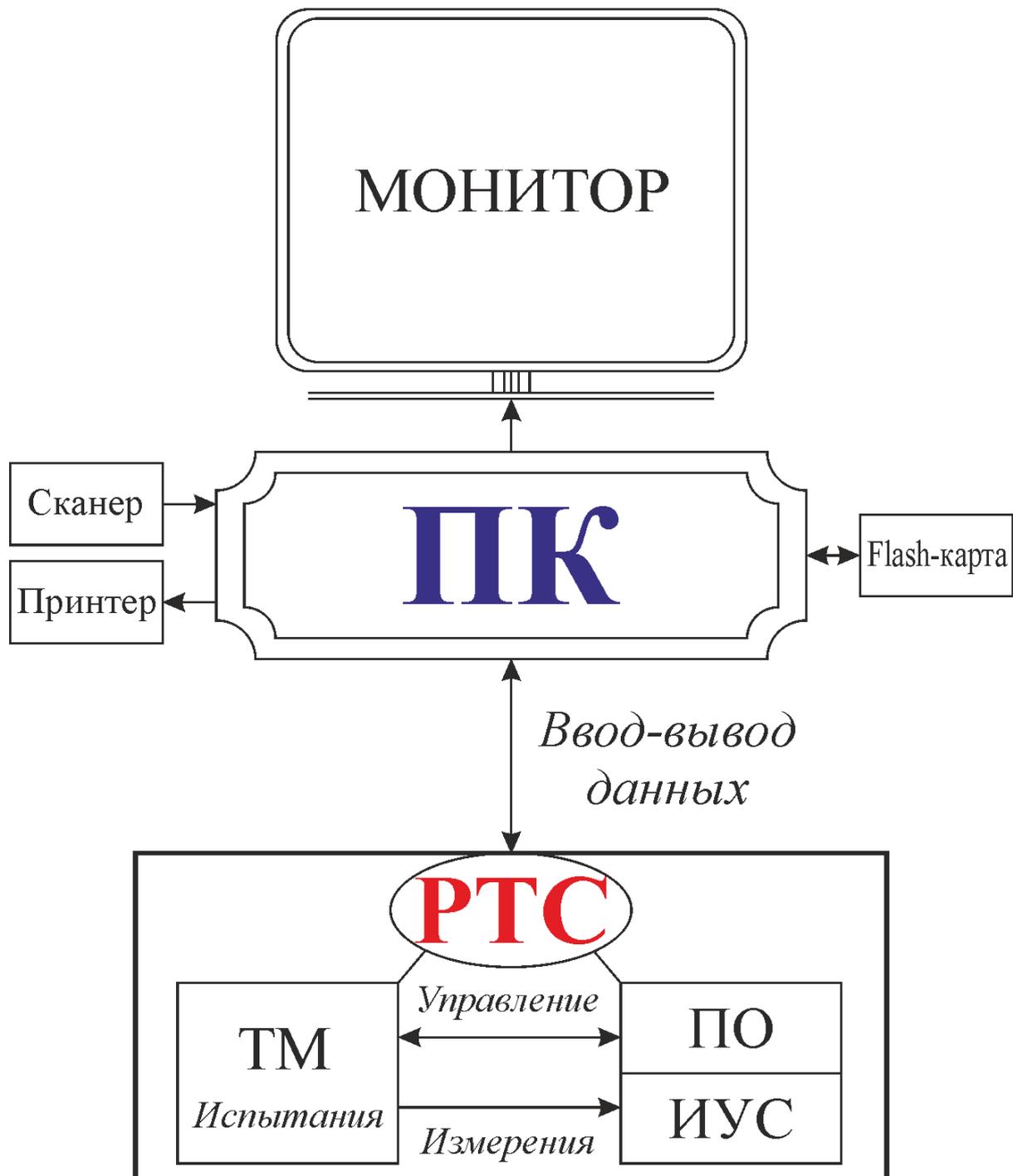
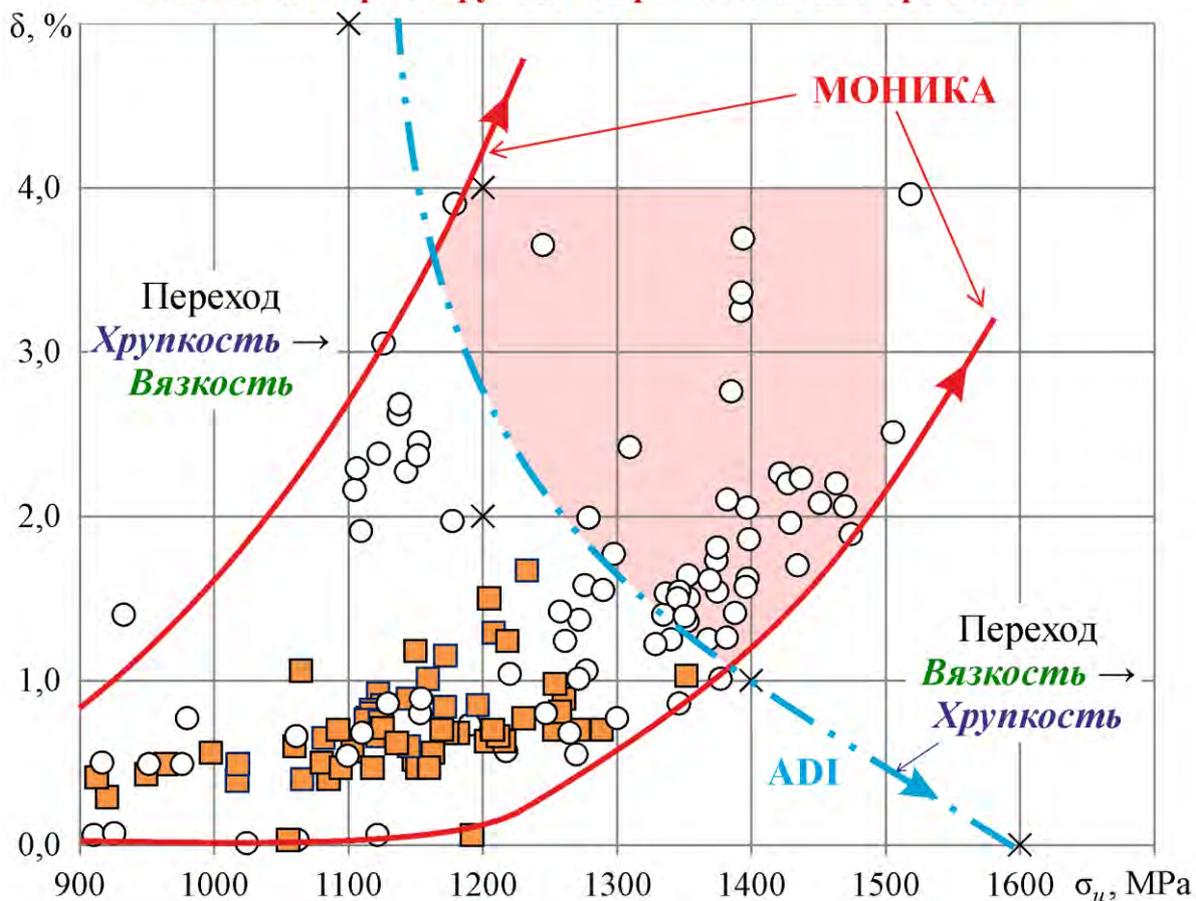


Рис. 6. Мехатроника: оригинальное периферийное устройство PTS для ПК:
ТМ – малогабаритный модульный испытательный центр настольного исполнения;
ИУС – информационно-управляющая система; ПО – программное обеспечение

**Уникальная закономерность:
МОНИКА теряет хрупкость при повышении прочности**



Чугун и сталь: сопротивление усталости

Материал	HB	Предел выносливости, МПа	
		при контактном нагружении, p_f	при изгибе с вращением, σ_{-1}
ЧУГУН с шаровидным графитом (ISO 6336-5:2003(E))	250	625	229
Легированная термопрочненная СТАЛЬ (ISO 6336-5:2003(E))	295	915	337
ВЧТГ (плавка №25)	340	975	290

Сопротивление усталости «МОНИКИ» (ВЧТГ): по контактной выносливости – превосходит известные материалы, по изгибной усталости – превосходит современные чугуны и приближается к термопрочненной стали

Рис. 7. Новый конструкционный материал МОНИКА с особыми механическими свойствами и высоким сопротивлением усталости

Мы бы хотели закончить этот краткий перечень достижений сентенцией для молодых ученых.

«Труд! И еще раз труд! – несмотря ни на какие условия. Одержимый труд каждый день и много-много лет подряд. Во все времена для добрых и больших дел всегда находились энтузиасты – и наша команда работала практически «за идею» все эти долгие годы. И вот – результат. Трудно поверить, что его могло не быть...» [5].

И еще несколько слов о самом сокровенном [5]:

Родина!
Кто ты такая?
И почему умереть
Люди, тебя прославляя,
Чтут за большую честь?
Родина!
Кто же ты? Что ты?
Родина!
Дай же ответ!
«Я – жизнь,
и любовь,
и работа.
А лучшего в мире нет».

Обобщая, скажем: любите Родину – и будьте счастливы!

* *
*

Правильно, что на научных форумах надо больше говорить о *хорошем*. Но «путь вверх» всегда ухабистый и обнаруживает немало высоких и сложных препятствий – и это *не есть хорошо*, это *плохо*. И надобно хотя бы упомянуть о *плохом* [38]. В спрессованном виде применительно к нашему пути мы скажем так: в трех великих языках – русском, английском, китайском – приняты новые – наши! термины:

- *трибофатика, троппи, механотермодинамика*.

А в словарь русского языка для белорусов предложено включить еще два новых слова:

- *набюр, намош*.

Все пять слов вместе и отвечают на вопрос, «что такое хорошо и что такое плохо» на нашем многотрудном конкретном пути.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосновский, Л. А. О комплексной оценке надежности силовых систем / Л. А. Сосновский // Республиканская науч.-техн. конф. : тез. докл., Минск, 20–21 нояб. 1986 г. – Минск, 1986. – С. 29.
2. Старовойтов, Э. И. Международный симпозиум по трибофатике / Э. И. Старовойтов // Проблемы прочности. – 1994. – № 11. – С. 92–94.
3. Слово о трибофатике / ред.-сост. А. В. Богданович / Авт. : В. И. Стражев, К. В. Фролов, М. С. Высоцкий, В. Т. Трощенко, Л. А. Сосновский, Н. А. Махутов, А. В. Кухарев, П. С. Грунтов, Э. И. Старовойтов, В. А. Марченко, В. Н. Корешков, В. А. Шуринов, Л. Р. Ботвина, Ю. Н. Дроздов, М. И. Горбачевич, В. Г. Павлов, Д. Г. Эфрос. – Гомель – Минск – Москва – Киев : Retika, 1996. – 132 с.
4. Щербаков, С. С. Механико-математическое моделирование, испытания, прогнозирование повреждаемости, безопасности и долговечности высоконагруженных компонентов современных машин на базе методологии трибофатики и механотермодинамики / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский // Актуальные вопросы машиноведения : сб. науч. тр. – Вып. 6. – Минск : ОИМ НАНБ, 2017. – С. 27–39
5. Личность. Ученый. Поэт / под общ. ред. В. И. Сенько ; Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2015. – 109 с.

6. Сосновский, Л. А. Основы трибофатики : учеб. пособие : [доп. Мин-вом образования Респ. Беларусь в качестве учебного пособия для студентов технических высших учебных заведений] / Л. А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2003. – Т. 1. – 246 с.; Т. 2. – 234 с.; Sosnovskiy, L. A. Tribo-Fatigue. Wear-Fatigue Damage and Its Prediction / L. A. Sosnovskiy // Series : Foundations of Engineering Mechanics, Springer, 2005. – 424 p.; 摩擦疲劳学 磨损 – 疲劳损伤及其预测. L. A. 索斯洛夫斯基著, 高万振译 – 中国矿业大学出版社, 2013. – 324 p.
7. Сосновский, Л. А. Механика износоусталостного повреждения / Л. А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2007. – 434 с.
8. Щербаков, С. С. Механика трибофатических систем / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский. – Минск : БГУ, 2011. – 407 с.
9. Сосновский, Л. А. Сюрпризы трибофатики / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков. – Гомель : БелГУТ, 2005. – 192 с.; 604. Sosnovskiy, L. A. Surprises of Tribo-Fatigue / L. A. Sosnovskiy, S. S. Sherbakov. – Minsk : Magic Book, 2009. – 200 p.
10. Сосновский, Л. А. Фундаментальные и прикладные задачи трибофатики : курс лекций / Л. А. Сосновский, М. А. Журавков, С. С. Щербаков. – Минск : БГУ, 2011. – 488 с.
11. Богданович, А. В. Прогнозирование предельных состояний силовых систем / А. В. Богданович. – Гродно : ГрГУ им. Я. Купалы, 2008. – 372 с.
12. Сосновский, Л. А. Трибофатика: износоусталостные повреждения в проблемах ресурса и безопасности машин / Л. А. Сосновский, Н. А. Махутов. – Москва–Гомель : ФЦНТП «Безопасность», НПО «ТРИБОФАТИКА», 2000. – 304 с.
13. Девять сюрпризов трибофатики // Наука и инновации. – 2010. – № 9 (91). – С. 1–28.
14. Сосновский, Л. А. Принципы механотермодинамики : [моногр.] / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 150 с.
15. Sosnovskiy, L. A. Mechanothermodynamics / L. A. Sosnovskiy, S. S. Sherbakov. – Springer, 2016. – 155 p.
16. Сосновский, Л. А. О возможности построения механотермодинамики / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков // Наука и инновации. – 2008. – № 2 (60). – С. 24–29.
17. Сосновский, Л. А. К построению механотермодинамики / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков // Теоретическая и прикладная механика : межвед. сб. науч.-метод. статей. – Вып. 24. – Минск : БНТУ, 2008. – С. 8–21.
18. Высоцкий, М. С. Механотермодинамическая система как новый объект исследования / М. С. Высоцкий, П. А. Витязь, Л. А. Сосновский // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 2 (15). – С. 5–10.
19. Sosnovskiy, L. A. Mechanothermodynamical System and Its Behavior / L. A. Sosnovskiy, S. S. Sherbakov // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2012. – № 24. – P. 239–256.
20. Сосновский, Л. А. Энергетические состояния механотермодинамической системы и ее повреждение / Л. А. Сосновский, М. А. Журавков, С. С. Щербаков // Актуальные вопросы машиноведения : сб. науч. тр. – Вып. 2. – Минск : ОИМ НАНБ, 2013. – С. 47–52.
21. Щербаков, С. С. Обобщенная модель механотермодинамических состояний среды / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский // Теоретическая и прикладная механика : межвед. сб. науч.-метод. статей. – Вып. 29. – Минск : БНТУ, 2014. – С. 29–40.
22. Сосновский, Л. А. Механотермодинамика (об объединении великих конкурентов: 1850-2015) / Л. А. Сосновский // Механика машин, механизмов и материалов. – 2016. – № 4 (37). – С. 19–41.
23. Sosnovskiy, L. A. A Model of Mechanothetmodynamic Entropy in Tribology / L.A. Sosnovskiy, S.S. Sherbakov // Entropy, 2017. – №19. – С.1–18.

24. Сосновский, Л. А. *L-Риск (механотермодинамика необратимых повреждений)* / Л. А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2004. – 317 с.
25. Двадцатилетний опыт преподавания курса «Основы трибофатики» / В. И. Сенько [и др.] // *Вестник БелГУТа : Наука и транспорт.* – 2016. – № 1 (32). – С. 11–31.
26. *Трансдисциплинарное проектирование объектов и силовых систем – качественно новый уровень подготовки инженеров* / В. И. Сенько [и др.] // *Вестник БелГУТа : Наука и транспорт.* – 2016. – № 1 (32). – С. 32–38.
27. Сенько, В. И. *Основные идеи трибофатики и их изучение в техническом университете : учеб. пособие* / В. И. Сенько, Л. А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2005. – 191 с.
28. Лазаревич, А. А. *На пути к синергии техно- и биоразвития: техносология и трибофатика* / А. А. Лазаревич // *Вестник БелГУТа : Наука и транспорт.* – 2016. – № 1 (32). – С. 39–44.
29. Лойко, А. И. *Трибофатика и философия: стратегия трансдисциплинарных исследований* / А. И. Лойко // *Вестник БелГУТа : Наука и транспорт.* – 2016. – № 1 (32). – С. 45–48.
30. Сороко, Э. М. *Трансдисциплинарность и трибофатика: о новой линии разработки информационных технологий, их эвристических возможностях, инновационном потенциале* / Э. М. Сороко // *Вестник БелГУТа : Наука и транспорт.* – 2016. – № 1 (32). – С. 49–51.
31. Спасков, А. Н. *Генезис, регенерация и нелинейная эволюция сложных систем в механотермодинамической и субстанциально-информационной концепциях* / А. Н. Спасков // *Вестник БелГУТа : Наука и транспорт.* – 2016. – № 1 (32). – С. 52–58.
32. Senko, V. I. *Fundamentals Ideas of Tribo-Fatigue and their Study in Belarus* / V. I. Senko, L. A. Sosnovskiy // *Proc. of 2005 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition [Электронный ресурс] : Orlando, Florida USA, November 5–11, 2005.* – Orlando, 2005. – Электрон. дан. и прогр. (3899 Мб) – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM) : зв., цв.
33. *SI-series machines for wear-fatigue tests.* – S&P Group TRIBOFATIGUE Ltd – Production Group GOMSELMASH, 2002. – 21 p.
34. *Чугун и сталь в трибофатических системах современных машин и оборудования* / Л. А. Сосновский [и др.] // *Механика машин, механизмов и материалов.* – 2014. – № 4 (29). – С. 5–20.
35. *Конструкционный материал для трибофатических систем: рассеяние механических свойств* / Л. А. Сосновский [и др.] // *Механика машин, механизмов и материалов.* – 2017. – № 2 (39). – С. 84–91.
36. *Конструкционный материал для трибофатических систем: сопротивление усталости и структура* / Л. А. Сосновский [и др.] // *Механика машин, механизмов и материалов.* – 2017. – № 4 (41). – С. 71–81.
37. Сосновский, Л. А. *Сталь и чугун: конкуренция продолжается в области высокопрочных состояний* / Л. А. Сосновский, П. А. Витязь, В. А. Гапанович, В. В. Комиссаров, Н. А. Махутов, Н. В. Псырков // *Машины, технологии и материалы для современного машиностроения : тр. Междунар. конф., посвященной 75-летию Института машиноведения им. А. А. Благоднарова РАН, 21–22 нояб. 2013 г.* – М. : ИМАШ РАН им. А. А. Благоднарова, 2013. – С. 99.
38. *Трибофатика-95 : ежегодник / под общ. ред. Л. А. Сосновского // Вып. 2 : Вопросы стандартизации. Хроника / под ред. В. Н. Корешкова / В. А. Андрияшин [и др.].* – Гомель : НПО «ТРИБОФАТИКА», 1996. – 88 с.

ЛОКАЛЬНЫЕ НАГРУЖЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

¹Плескачевский Ю.М., ²Журавков М.А., ³Старовойтов Э.И.

¹Национальная Академия наук Беларуси, Минск, Беларусь

²Белорусский государственный университет Минск, Беларусь

¹Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Введение. Современные тенденции в строительстве и машиностроении диктуют всё новые и новые требования к конструкциям и изделиям. Необходимость повышения прочностных характеристик непрерывно возрастает, а условия эксплуатации становятся всё более жесткими. В связи с этим широкое применение в технике и строительстве получили многослойные, в том числе трехслойные, конструкции. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, при относительно малом весе способны обеспечить заданную прочность, жёсткость и противостоять ряду других физических воздействий.

В монографиях [1–3] рассматриваются различные математические модели статического и динамического деформирования многослойных и трехслойных элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их расчета. Работа [4] посвящена исследованию квазистатического деформирования упругих геометрически нелинейных многослойных стержней. В статьях [5, 6] исследовано деформирование сэндвич-балок и пластин, в том числе с помощью метода усреднения упругих свойств материалов слоев. Изотермическое динамическое поведение слоистых элементов конструкций при непрерывных и локальных нагрузках рассмотрено в работах [7–9]. Статьи [10, 11] посвящены исследованию колебаний трехслойных пластин, возникающих вследствие теплового или радиационного ударов. Анализ деформирования физически нелинейных трехслойных пластин проведен в публикациях [12–14]. Исследованию напряженно-деформированного состояния трехслойных стержней с несжимаемым заполнителем посвящены статьи [15–18]. Деформирование упругих трехслойных стержней со сжимаемым заполнителем в температурном поле при непрерывных нагрузках рассмотрено в статье [19].

Здесь приведена постановка и построено аналитическое решение краевой задачи о термосиловом нагружении *трехслойного стержня прямоугольного поперечного сечения со сжимаемым заполнителем при локальных нагрузках*. Численная апробация решения проведена в случае металлополимерного стержня.

Постановка краевой задачи. Рассматривается деформирование несимметричного по толщине трехслойной балки в температурном поле под действием локальной поперечной поверхностной нагрузки $q(x)$, распределенной в интервале $a \leq x \leq b$ (рис. 1). Для изотропных несущих слоёв стержня приняты гипотезы Бернулли. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается сдвиг и обжатие, деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. На стержень действует тепловой поток интенсивности q_t , направленный перпендикулярно несущему слою l . Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей *несущих* слоёв, h_k – толщина k -го слоя, $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя), b_0 – ширина стержня.

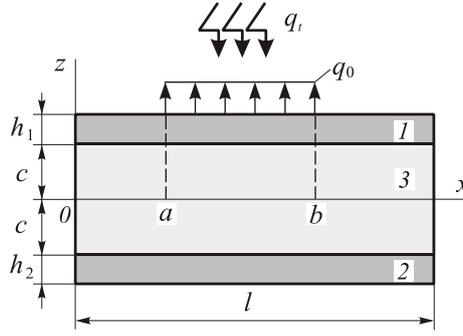


Рис. 1. Схема нагружения стержня

В качестве физических уравнений состояния в слоях стержня используются термоупругие соотношения закона Гука:

$$\begin{aligned} s_i^{(k)} &= 2G_k(T_k)\varepsilon_i^{(k)}, \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3\varepsilon_{xz}^{(3)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T_k) \quad (i = x, z; k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1)$$

где $s_i^{(k)}$, $\varepsilon_i^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости материала k -го слоя; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения; T_k – приращение температуры, отсчитываемое от начального значения T_0 .

Считаем поверхность $z = -c - h_2$ и контур стержня теплоизолированными. Это позволяет неоднородное температурное поле $T(z)$, отсчитываемое от некоторой начальной температуры T_0 , вычислять с достаточной точностью по формуле [7]:

$$\begin{aligned} T &= \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \\ \tau &= \frac{at}{H^2}, \quad a = \frac{\sum_{k=1}^3 \lambda_{tk} h_k}{\sum_{k=1}^3 \rho_k C_k h_k}, \quad H = \sum_{k=1}^3 h_k \dots \end{aligned} \quad (2)$$

где λ_{tk} , ρ_k , C_k – теплопроводность, плотность и теплоемкость материала k -го слоя.

Перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w_1(x)$, $u_1(x)$, $w_2(x)$ и $u_2(x)$:

в несущих слоях

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}, \quad w^{(1)} = w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ u^{(2)} &= u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}, \quad w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c); \end{aligned}$$

в заполнителе

$$\begin{aligned} u^{(3)} &= \left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right), \\ w^{(3)} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \quad (-c \leq z \leq c), \end{aligned} \quad (3)$$

где z – координата рассматриваемого волокна.

Искомые перемещения будут удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений равновесия [2, 4]:

$$\begin{aligned} a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} &= p, \\ -a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} &= 0, \\ -a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,x} - \\ -a_{12} w_{2,x} + a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 &= q - q_t, \\ -a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,x} + a_{14} w_{2,x} - a_{16} w_{1,xxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + a_8 w_2 &= q_t. \end{aligned} \quad (4)$$

где температурные добавки q_i и коэффициенты a_1, \dots, a_{17} , вычисляемые через геометрические и упругие параметры слоев, определяются с учетом температуры

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{3b_0h_3K_3\alpha_{03}T_3}{2cb_0}, \quad a_1 = \frac{G_3}{2c}; \quad a_2 = \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}, \quad a_3 = \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2}, \\ a_4 &= K_1^+h_1 + \frac{2K_3^+c}{3}, \quad a_5 = \frac{K_3^+c}{3}, \quad a_6 = \frac{K_3^+ch_1}{6}, \quad a_7 = \frac{K_3^+ch_2}{6}, \quad a_8 = \frac{K_3^+}{2c}, \\ a_9 &= K_2^+h_2 + \frac{2K_3^+c}{3}, \quad a_{10} = \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2}, \quad a_{11} = \frac{K_3^-h_1}{2} - \frac{G_3c}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right)^2 - \frac{G_3c}{6}, \\ a_{12} &= \frac{K_3^-(h_1+h_2)}{4} + \frac{G_3c}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right)\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) - \frac{G_3c}{6}, \quad a_{13} = \frac{K_2^+h_2^3}{12} + \frac{K_3^+ch_2^2}{6}, \\ a_{14} &= \frac{K_3^-h_2}{2} - \frac{G_3c}{2}\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right)^2 - \frac{G_3c}{6}, \quad a_{15} = \frac{K_1^+h_1^3}{12} + \frac{K_3^+ch_1^2}{6}, \quad a_{16} = \frac{K_3^+ch_2h_1}{12}, \\ a_{17} &= \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}, \quad K_k^+(T_k) = K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k), \quad K_k^-(T_k) = K_k(T_k) - \frac{2}{3}G_k(T_k). \end{aligned}$$

В качестве граничных условий принимаем кинематические условия свободного опирания рассматриваемого трехслойного стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Тогда в торцевых поперечных сечениях $x = 0, l$ (l – длина стержня) должны выполняться следующие требования:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (5)$$

Общее решение краевой задачи.

Решение системы дифференциальных уравнений (4) предполагается в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (5):

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \\ w_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$ – искомые амплитуды перемещений.

Внешнюю нагрузку и температурные составляющие в слоях стержня также представляются в виде разложений в следующие тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned} q &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx, \\ p &= \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad p_m = \frac{2}{l} \int_0^l p(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx, \\ q_t &= \sum_{m=1}^{\infty} g_{tm} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad q_{tm} = \frac{2}{l} \int_0^l g_t(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx. \end{aligned} \quad (7)$$

После подстановки перемещений (6) и нагрузок (7) в систему дифференциальных уравнений (4) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения искомых амплитуд перемещений $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$ при m -ой гармонике:

$$\begin{cases} b_1U_{1m} + b_2U_{2m} + b_3W_{1m} + b_4W_{2m} = p_m, \\ b_2U_{1m} + b_5U_{2m} + b_6W_{1m} - b_7W_{2m} = 0, \\ b_3U_{1m} + b_6U_{2m} + b_8W_{1m} + b_9W_{2m} = q_m - q_{tm}, \\ b_4U_{1m} - b_7U_{2m} + b_9W_{1m} + b_{10}W_{2m} = q_{tm}. \end{cases} \quad (8)$$

где коэффициенты b_i зависят от параметра m и от температуры через коэффициенты a_n .

Решение системы (8) будем получать численно для различных локальных нагрузок. Далее по формулам (6) вычисляются искомые функции. Перемещения в несущих слоях и заполнителе следуют из соотношений (2), деформации – из соотношений Коши, напряжения – из закона Гука (1).

Локальная поверхностная нагрузка. Рассматривается деформирование в температурном поле рассматриваемой трехслойной балки под действием локальной поперечной поверхностной нагрузки $q(x)$, равномерно распределенной в интервале $a \leq x \leq b$ (см. рис. 1). Аналитический вид нагрузки будет

$$q(x) = q_0 (H_0(b-x) - H_0(a-x)) \quad (9)$$

где $H_0(x)$ – функция Хевисайда, q_0 – интенсивность нагрузки.

Вычислив интеграл в (7), получим коэффициенты разложения нагрузки (9) в ряд

$$q_m = -\frac{2q_0}{\pi m} \left(\cos \frac{\pi m b}{l} - \cos \frac{\pi m a}{l} \right) \quad (10)$$

После решения системы (8), с учетом коэффициентов (10), получим амплитуды перемещений $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$. Суммированием рядов по формулам (6) вычисляются искомые функции, перемещения в слоях стержня следуют из соотношений (3).

Численные результаты получены для трехслойного стержня, слои которого набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, термомеханические параметры которых приведены в [2]. Относительные толщины слоев $h_1 = 0,04, h_2 = 0,02, h_3 = 0,18$. Интенсивность распределенной локальной нагрузки $q_0 = -10$ МПа. Температурное поле рассчитывалось по формуле (2) при интенсивности теплового потока $q_t = 5000$ Дж / (м² · с). Расчетная температура на поверхности стержня в момент времени $t = 60$ мин достигала 540 К.

Рис. 2 иллюстрирует изменение прогибов несущих слоев в срединном поперечном сечении стержня ($x = 0,5$) в зависимости от длины интервала нагрузки b (9) при $a = 0$. Максимум, естественно, наблюдается при нагрузке, распределенной по всему стержню. Разность этих прогибов дает величину обжатия заполнителя, которая здесь не велика. Температурная составляющая прогибов достигает 16 %.

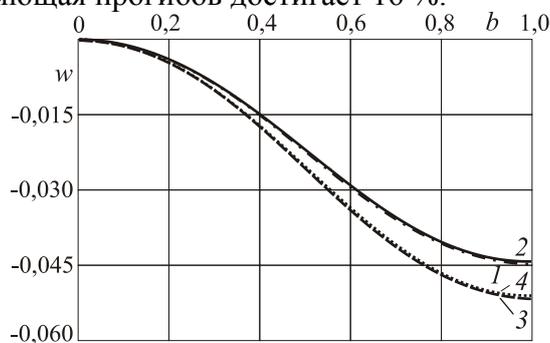


Рис. 2. Прогибы несущих слоев: 1, 3 – первого слоя изотермический и термосиловой, 2, 4 – аналогичные прогибы второго несущего слоя

Сосредоточенная поперечная сила. Примем, что погонная (вдоль координаты y) поперечная сила постоянной интенсивности Q_0 , приложена в сечении с координатой $x = a$.

Решение задачи проведем, применяя результаты, полученные для распределенной на интервале $a - c \leq x \leq a + c$ поверхностной нагрузки интенсивности q_0 . Предположим, что c мало и введем в коэффициенты (10) замену $q_0 = Q_0 / (2c)$. После этого будем стягивать интервал нагрузки к сечению $x = a$, для чего устремим величину c к нулю, оставляя Q_0 постоянной. В результате получим следующие коэффициенты разложения прямоугольной нагрузки в ряд:

$$q_m = \frac{2Q_0}{2c\pi m} \left(\cos \frac{\pi m(a+c)}{l} - \cos \frac{\pi m(a-c)}{l} \right) = \frac{2Q_0}{l} \sin \frac{\pi m a}{l} \quad (11)$$

Вычислив коэффициенты q_m по формуле (11), и внося их в систему (8), получим искомые амплитуды перемещений $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$. Полные перемещения после этого вычисляются суммированием рядов (6).

Численные результаты получены при величине внешней силы $Q_0 = 10^6$ Н. На рис. 3 показано посередине стержня ($x = 0,5$) в зависимости от координаты a места приложения сосредоточенной силы Q . По мере продвижения силы от левого края стержня прогибы возрастают и достигают максимума при $a = 0,5$, затем их величина убывает. Если сила приложена на опорах стержня, то прогибы нулевые. Температура увеличивает максимальные прогибы на 16 %.

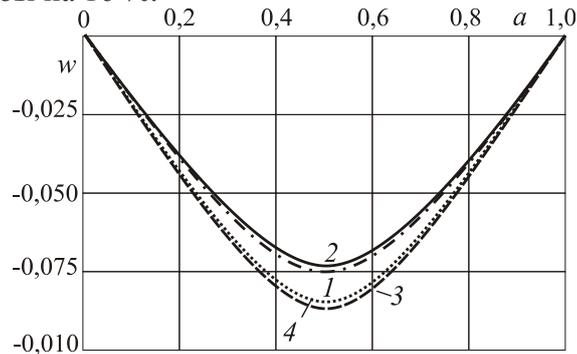


Рис. 3. Зависимость прогибов несущих слоев от координаты приложения нагрузки:
1, 3 – первого слоя изотермический и термосиловой,
2, 4 – аналогичные прогибы второго несущего слоя

Сосредоточенный изгибающий момент. Пусть на рассматриваемый трехслойный стержень в сечении $x = a$ действует погонный поперечный момент интенсивности $M_0 = \text{const}$. Решение задачи проведем, используя сумму решений (11) для двух сосредоточенных сил, равных по величине, направленных в противоположные стороны и действующих в близко расположенных сечениях с координатами $x = a - c$ и $x = a + c$ (c – мало). В этой сумме введем замену $Q_0 = M_0 / (2c)$ и устремим величину параметра c к нулю, оставляя M_0 постоянной. В результате, вычислив предел, получим

$$q_m = \frac{2M_0}{l} \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{l}{2c\pi m} \left(\sin \frac{\pi m(a+c)}{l} - \sin \frac{\pi m(a-c)}{l} \right) \right] = \frac{2M_0\pi m}{l^2} \cos \frac{\pi m a}{l}.$$

Далее, после вычисления параметров q_m по полученной формуле и решении системы (7), получим искомые амплитуды перемещений $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$. Перемещения в слоях, деформации и напряжения после этого вычисляются по рассмотренной ранее схеме.

Численные результаты получены при $M_0 = -10^5$ Н·м. Рис. 4 иллюстрирует изменение прогиба первого несущего слоя посередине стержня ($x = 0,5$) в зависимости от координаты a места приложения сосредоточенного момента.

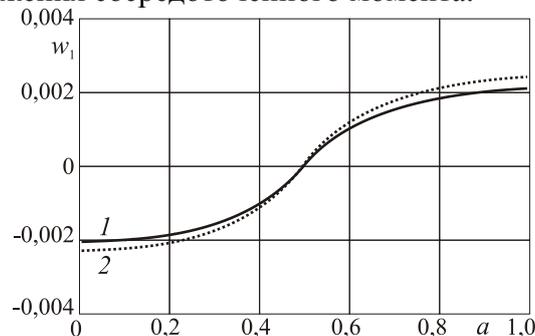


Рис. 4. Прогиб первого слоя в зависимости от координаты a приложения сосредоточенного момента: 1 – изотермическое нагружение, 2 – термосиловое.

Предложенная модель деформирования упругих трехслойных стержней со сжимаемым наполнителем позволяет исследовать их НДС при локальных нагрузках в температурном поле. Численные расчеты показали существенное влияние температуры на перемещения в стержне.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект T16P-010).

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В.В. *Механика многослойных конструкций* / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Плескачевский, Ю. М. *Деформирование металлополимерных систем* / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – Минск: Бел. наука. 2004. – 342 с.
3. Плескачевский, Ю. М. *Динамика металлополимерных систем* / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск: Бел. наука. 2004. – 386 с.
4. Горшков, А. Г. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций* / А.Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
5. Старовойтов, Э. И. *Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании* / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 380 с.
6. Старовойтов, Э. И. *Сопротивление материалов* / Э. И. Старовойтов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 384 с.
7. Горшков, А. Г. *Теория упругости и пластичности* / А.Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.
8. Плескачевский, Ю. М. *Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием* / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
9. Старовойтов, Э.И. *Трехслойные стержни в терморadiaционных полях* / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко // Минск: Беларуская наука, 2017. – 275 с.
10. Leonenko, D. V. *Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation* / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2012. – Vol. 47, № 1. – P. 111–118.
11. Журавков, М. А. *Деформирование трехслойного упругого стержня со сжимаемым наполнителем в температурном поле* / М. А. Журавков // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2016. – № 4. – С. 101–109.
12. Старовойтов, Э.И. *Термосиловое деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки* / Э.И. Старовойтов, Ф.Б. Нагиев // *Теоретическая и прикладная механика*. Вып. 31.– Мн.: БНТУ. –2016. – С. 176–184.
13. Плескачевский, Ю. М. *Деформирование трехслойного упругого стержня нагрузками различных форм в температурном поле* / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник*.– Мн.: 2017. – Вып. 32. – С. 5–12.
14. Старовойтов, Э.И. *Повторное знакопеременное нагружение упругопластических тел в нейтронном потоке* / Э.И. Старовойтов, Д.М. Савицкий // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2015. – Минск: БНТУ. Вып. 30. – С. 20–29.
15. Старовойтов, Э.И. *Термосиловое деформирование трехслойных упругопластических стержней* / Э.И. Старовойтов, Д.М. Савицкий // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2014. – Вып. 29. – С. 51–57.

СИСТЕМЫ МНОГОКООРДИНАТНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА МЕХАНИЗМАХ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КИНЕМАТИКИ

проф. Карпович С.Е., д.т.н. Жарский В.В., ст.преп. Алехнович Г.Н.,
асп. Салманзадех Г.Й.

УО «Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники», Минск

Введение. Достижения микроэлектроники и связанные с ними успехи микропроцессорной управляющей техники открыли возможность широкого внедрения новых подходов к автоматизации и, в первую очередь, связанных с использованием мехатронных систем, построенных на основе современного многокоординатного бестрансмиссионного привода прямого действия и механизмов параллельной кинематики, обеспечивающих реализацию любых сложных перемещений инструмента или заготовки в трёхмерном пространстве с числом степеней свободы до шести включительно [1].

В статье представлены системы многокоординатных перемещений на механизмах параллельной кинематики, базовыми элементами которых являются многокоординатные системы приводов, построенные на управляемых синхронных шаговых модулях линейного, поворотного и планарного типов и механизмах параллельной кинематики со структурой пространственных групп Ассура третьего класса в виде различных схемных и конструктивных исполнений. Структурно-кинематическое согласование этих элементов в систему многокоординатных перемещений, в конечном итоге, даёт возможность получить всё многообразие последних с возможностью реконфигурирования и адаптации при встраивании в конкретное оборудование [2, 3].

Система перемещений на треугольном приводе прямого действия. Система перемещений на треугольном приводе, представленная на рис. 1 состоит из треугольного статора 1 с зубцовой нарезкой по направляющим которой перемещаются подвижные линейные модули 2, 3, ..., 7, движение которых через промежуточные шатуны 8, 9, ..., 13 передаётся на подвижную платформу 14. При этом линейные перемещения шести подвижных модулей преобразуется в сложное движение платформы с шестью степенями свободы.

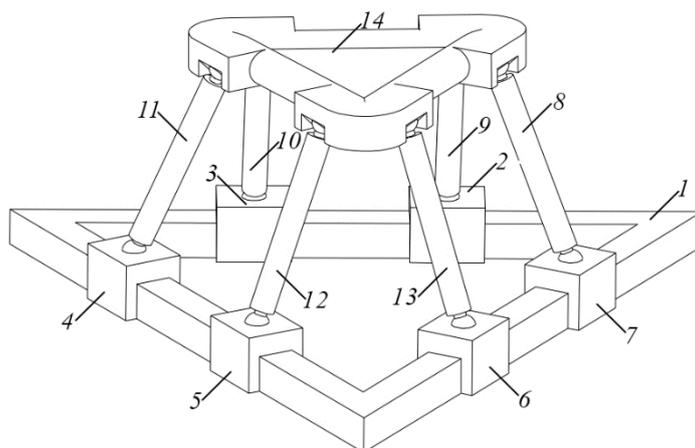


Рис. 1. Система перемещений на треугольном приводе

Принципиальная схема конструкции одного подвижного модуля треугольного линейного шагового двигателя приведена на рис. 2.

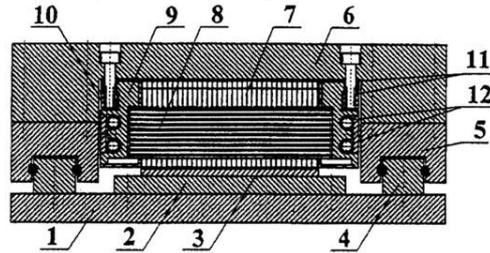


Рис. 2. Конструкция подвижного модуля

Синхронный шаговый двигатель состоит из основания 1, на котором расположен статор, включающий магнитопровод 2 и постоянные магниты 3, расположенные с чередующей полярностью магнитных полюсов вдоль направления перемещения.

На основании 1 закреплены две линейные направляющие 4 с подшипниками 5, на которых с помощью каретки 6 закреплен якорь двигателя. Якорь состоит из ряда П-образных магнитопроводов 7 с обмотками 8 управления, закрепленных с помощью теплопроводящего компаунда и выступов в металлическом немагнитном, например, из дюралюминия, корпусе 9. Корпус 9 с помощью несущей балки 10 крепится к каретке 6 и теплоизолирован от нее и балки 10 посредством прокладок 11. Для подведения потока охлаждающей жидкости корпус 9 снабжен каналами 12.

Система перемещений на кольцевом сегментном приводе. Система перемещений на кольцевом сегментном приводе (рис. 3) определяется конфигурацией многокоординатного кольцевого привода с шестью подвижными сегментными модулями.

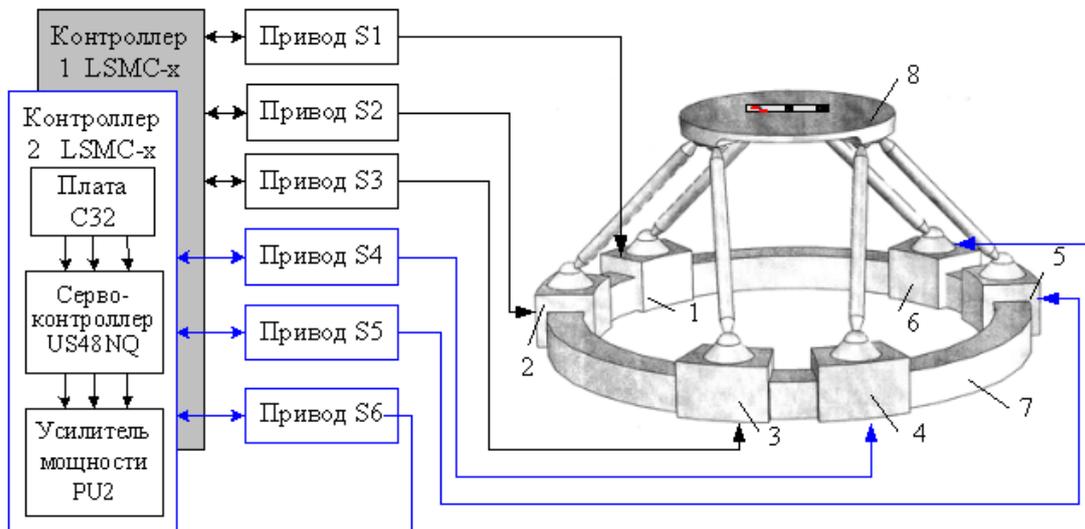


Рис. 3. Система перемещений на кольцевом сегментном приводе

Она является механо-аппаратно-программным комплексом, относящимся к классу мехатронных систем перемещений и состоит из механизма параллельной кинематики со структурой $n = 7$, $p_3 = 9$ и шестикоординатного кольцевого привода, в котором управление всеми координатами происходит через специальный контроллер от программы верхнего уровня, управляющей ЭВМ.

Система перемещений на кольцевом сегментном приводе (рис. 3) состоит из механизма параллельной кинематики и многокоординатного привода, представляющего гибридную структуру из сегментных синхронных двигателей 1, 2, ..., 6, которые через сферические шарниры передают управляемое движение на рабочую платформу 8.

Исполнительные двигатели в виде подвижных сегментов расположенных на кольцевом статоре, по образующей которого регулярно уложены постоянные магниты, имеют автономные управления их перемещениями. В результате этого в рассматриваемом случае обеспечивается внутренняя подвижность с шестью степенями свободы.

В качестве конструктивного прототипа нами был принят поворотный синхронный сегментный двигатель серии RSMS - M36 (рис. 4), разработанный и выпускаемый на предприятии «Рухсервомотор» (Минск) [2, 3].

Он конструктивно состоит из одного или нескольких неподвижных сегментов с трехфазной системой обмоток, залитых теплопроводящим компаундом, и подвижного стального кольца статора (ротора) с регулярно наклеенными редкоземельными постоянными магнитами. В систему такого двигателя может быть встроен инкрементный датчик положения для реализации регулирования по законам перемещения. Равномерность вращения при этом достигается благодаря синусоидальной коммутации токов в фазах двигателя. Такой двигатель характеризуется прямым преобразованием энергии в механическое движение без дополнительных механических редукторов и передач. Он обладает высоким точностным разрешением и высокой плавностью перемещения, простотой встраивания в технологическое оборудование.



Рис. 4. Синхронный сегментный двигатель RSMS-M36:
1, 3 – неподвижные сегменты; 2 – подвижный ротор

На этой базе нами был предложен шестикоординатный сегментный двигатель, полученный из прототипа путем инверсии его механики, когда в качестве неподвижного был принят ротор, а неподвижные сегменты статора были приняты подвижными, автономно управляемыми, число которых может быть, как два, так и более. На основании инверсионной компоновки нами был разработан многокоординатный привод для систем перемещений с числом степеней свободы равным шести (рис. 3). Кроме того, отличительной особенностью таких систем является способность реализации неограниченного поворота вокруг вертикальной оси.

Система перемещений на планарных приводах прямого действия. Рассматриваемая система перемещений на планарных приводах прямого действия, представленная на рис. 5, сконфигурирована из многокоординатного привода прямого действия на трёх планарных позиционерах и механизма параллельной кинематики в виде подвижного раскрывающегося тетраэдра.

Она обладает шестью степенями свободы и состоит из группы Ассур третьего класса (звенья 5, 6, 7, 8) и шестикоординатного привода в виде трёх управляемых пла-

нарных позиционеров 1, 2, 3, перемещающихся на одном общем для них плоском стартере 4. Такая конструктивная особенность системы перемещений накладывает специфические требования, которые необходимо учитывать при разработке алгоритмов для имитационного моделирования её кинематики [3]. Планарный позиционер представляет собой двухкоординатный линейный шаговый двигатель с совмещенными координатами, которые содержат зубчатый ферромагнитный статор и индуктор, выполненный в виде плоского корпуса. Симметрично относительно центра корпуса расположены и закреплены электромагнитные модули каждой координаты. Индуктор находится над статором на небольшом расстоянии порядка 10 – 30 мкм, которое создается благодаря уравниванию сил притяжения индуктора к статору создаваемых за счет электромагнитных модулей и сил отталкивания, создаваемых сжатым воздухом.

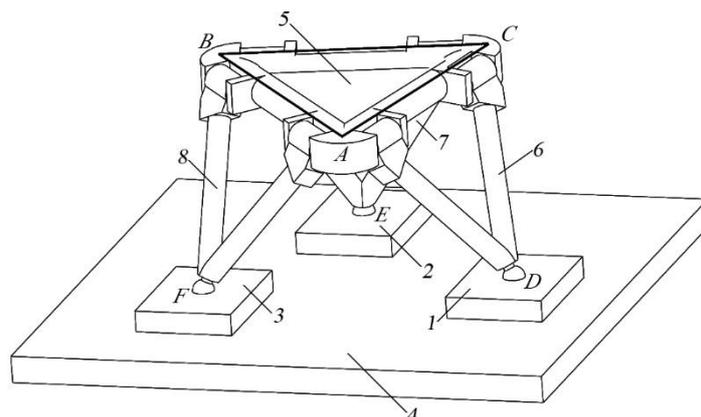


Рис. 5. Система перемещений на трёх планарных позиционерах

Особенность такой конструкции состоит в появлении угловых колебаний индуктора вокруг вертикальной оси, причем амплитуда и частота этих колебаний зависит от температуры. Двухкоординатный планарный позиционер обладает высокими точностными и динамическими показателями за счёт того, что электромагнитные модули выполнены однофазными, что дополнительно позволяет обеспечить их симметрирование относительно осей корпуса, параллельных координатам перемещений. Электромагнитные модули одной координаты позиционера расположены около оси корпуса параллельно другой координате. Такая ортогональная компоновка магнитных модулей позволяет реализовать систему перемещения по двум независимым ортогональным координатам в плоскости перемещения.

Для достижения высоких точностей по координатам и контурным перемещениям используется система измерений на однотипных датчиках линейных перемещений, построенная на базе интерферометров с двухчастотным лазером (рис. 6).

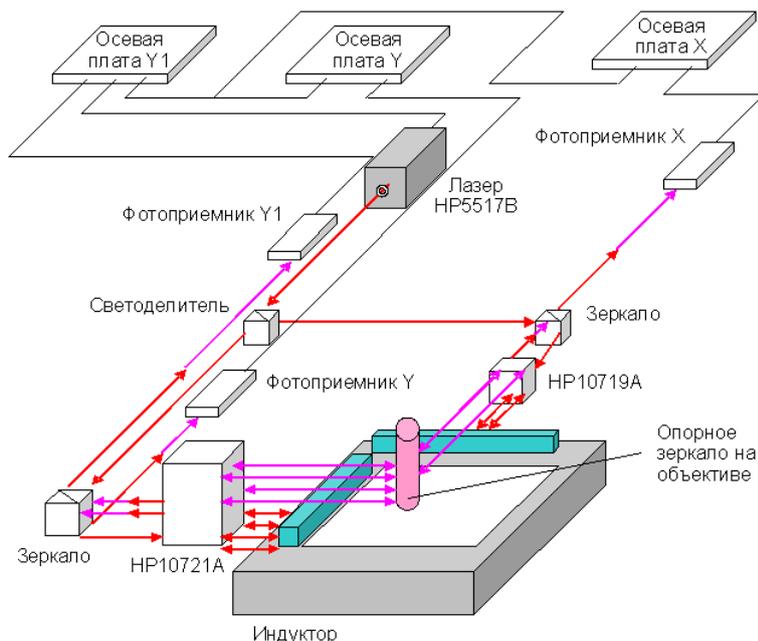


Рис. 6. Позиционная система измерений

Это позволяет при автоматическом управлении реализовывать обратные связи по положению, скорости и ускорения в режиме реального времени и обеспечивать высокую динамику (скорость до 1 м/с, ускорения до 30 м/с²) при точности и повторяемости в пределах от 1 до 5 мкм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович, С.Е. Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования / В.В. Жарский [и др.]; под ред. д-ра техн. наук, проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2013. – 208 с.
2. Жарский, В.В. Планарный привод прямого действия для многокоординатной системы перемещений / В.В. Жарский // Доклады БГУИР. – 2007. – № 6. – С. 44–49.
3. Жарский, В.В. Привод прямого действия / В.В. Жарский // Ремонт. Инновации. Технологии. Модернизация : специализированный журнал. – 2009. – № 7(45). – С. 26.

RAY EXPANSION IN INHOMOGENEOUS AND STOCHASTIC MEDIA

¹Chigarev A.V., ²Chigarev Ju.V.

¹Belarussian national technical university, Minsk

²West Pomeranian University of Technology, Szczecin

1. Rays' propagation in inhomogeneous media. Simulation of wave propagation processes in inhomogeneous media is based on kinematic [1-4] and dynamic principles [5-10] for the process of ray propagation and wave surfaces (fronts) in different media.

Huygens' principle of constructing wave fronts in according to algorithm of a contact transformation is easily implemented if the perturbation region is non-concave Fig. 1.1a

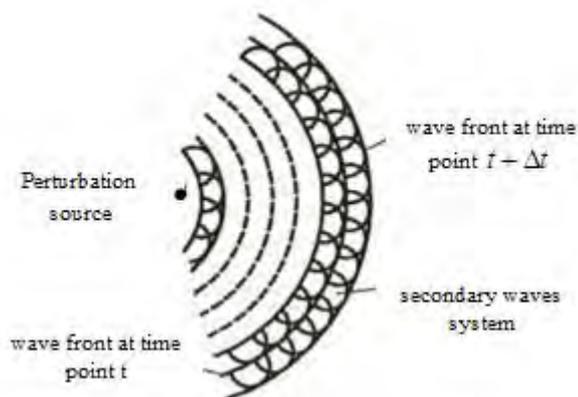


Fig. 1.1a. Huygens' model for propagation of wave fronts

If the emitting area has a concavity, the construction of the wave surface is shown in Fig. 1.1b

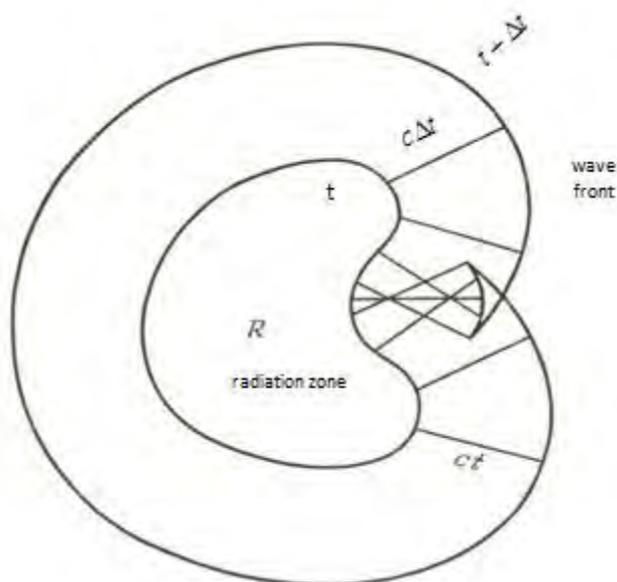


Fig. 1.1.b

Presentation of the wave front in the form of the surface is a mathematical idealization, because in reality, a wave is a volume configuration change of the medium points during the passage of a perturbation from some initial configuration to the final. In a homogeneous iso-

tropic medium all front points have the same speed directed along the normal \bar{n} , then during the time Δt surface points are shifted by the same distance s along the normal with the speed \bar{V} . The wave surface at time point $t + \Delta t$, constructed according to Huygens' principle as the concavity of secondary waves coincides with the surface, passing through the points lying on one and the same distance along the normal from the wave surface at time point t . These lines, which are orthogonal to the original radiating surface (in particular, points) in a homogeneous isotropic medium, are the rays along which the radiation energy propagates.

According to **Newton's corpuscular theory**, the energy is transferred along the rays, the construction of which in homogeneous isotropic media is carried out with purely geometrical methods. Approaches of Huygens and Newton are known as the optic and mechanical analogs in analytical mechanics [1-2]. With the approach of Newton is associated the analogy of particle motion by inertia under the influence of the initial pulse and in the absence of any effects during the movement. With the approach of Huygens is associated the analogy of contact transformations in the Hamiltonian mechanics, representing a canonical transformation of generalized coordinates and momenta.

An approach based on the construction of rays is effective in solving problems of the wave kinematics by geometrical methods for homogeneous isotropic media, including the case of transmission and reflection of waves at the interface of two media, also through the lens, etc.

In the case of inhomogeneous, anisotropic, nonlinear media Huygens' approach is more difficult to implement and Newton's approach allows solving the problem of wave propagation more effectively, if we use the kinematic **principle of Fermat**, according to which the perturbation of the medium state at the source $M_0(x_0, y_0, z_0)$ extends to any receiver point $M(x_1, x_2, x_3)$ for the minimum time $\tau(M_0, M)$, which is the Fermat's functional [1-4]

$$\tau(M_0, M) = \int_{M_0}^M \frac{d\ell}{V(x_1, x_2, x_3)} \quad (1.1)$$

where $V(x_1, x_2, x_3)$ perturbation propagation speed including (x_1, x_2, x_3) that of inhomogeneous media, ℓ – the distance along the ray.

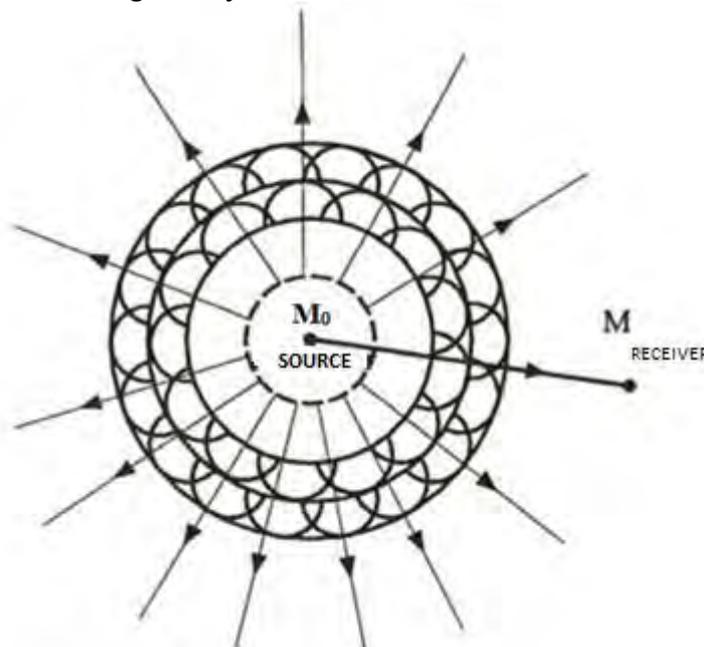


Fig. 1.2. Construction scheme of rays in the Fermat's model

For equation (1.1) are formulated direct and inverse tasks.

In the direct task $V(x_1, x_2, x_3)$ is set and is possible to build surface-isochrones $\tau(M_0, M) = C$ (C – arbitrary constant), representing a family of wave fronts.

In the inverse task of the known $\tau(M_0, M)$ is necessary to determine $V(x_1, x_2, x_3)$, namely to identify the physical and mechanical characteristics of the media (media profile).

Ray tube in a inhomogeneous medium is a figure formed by adjacent rays Fig.1.3

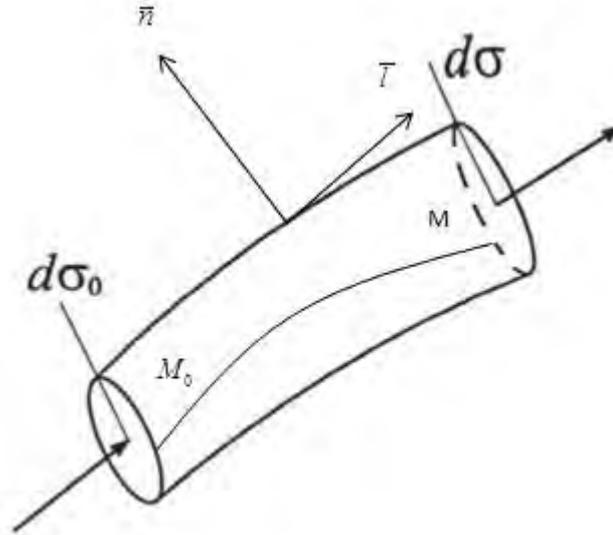


Fig. 1.3. Ray tube

We denote by A function that characterizes the change in the unit ray tube cross-sectional area of the value of $d\sigma_0$ at the initial front to the current cross section $d\sigma = Ad\sigma_0$, $\bar{\ell}_0 = \nabla\tau / |\nabla\tau|$ – the unit vector directed along the ray Fig. 1.4.

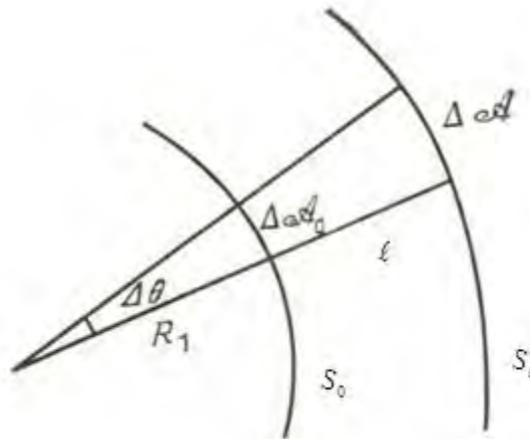


Fig. 1.4. The change σ in the ray

We calculate the integral by volume of ray tube Σ_t passing to the surface integral by the formula

$$\int_{\Sigma_t} \text{div} \left(\frac{\bar{\ell}}{A} \right) dv = \oint \frac{\bar{\ell}_0 * \bar{n}}{A} d\ell \quad (1.2)$$

Since on the side surface $\bar{\ell} \perp \bar{n}$, to $d\sigma A - d\sigma_0 A_0 = 0$, hence, we obtain

$$\text{div}[(v\nabla\tau)/A]=0, \nabla\tau = \text{grad } \tau \quad (1.3)$$

Considering the ratio of

$$v^2 = |\nabla\tau|^{-2} \quad (1.4)$$

we obtain the equations for finding the position and shape of the wavefront. Equation (1.4) is called **the eikonal equation**, and the equation (1.3) determines the change in cross section of the tube.

In particular, for the case of 2D rays and consistent positions of the front form an orthogonal curvilinear grid α, β Fig. 1.5

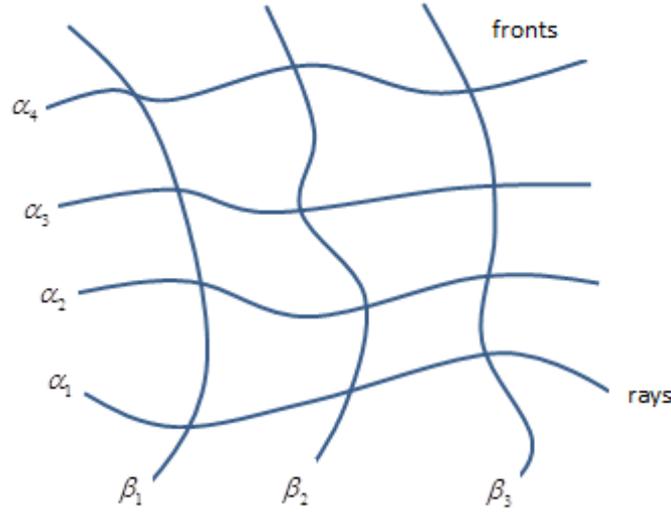


Fig. 1.5. The case of 2D rays

for which two kinematic equations are obtained

$$\frac{1}{V} \frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial \theta}{\partial \beta}, \quad \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial \beta} = -\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \quad (1.5)$$

where $\theta(\alpha, \beta)$ – an angle which for linear homogeneous medium does not depend on α , because $V = V_0 = \text{const}$. As A depends linearly on α , the rays will be straight, and the fronts will be circles in the plane considered.

The law of energy conservation in the integral form is

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_t} E dv = -\oint P_j n_j ds \quad (1.6)$$

Here P_j – **vector components of the energy density \bar{P} of Poynting-Umov**, E – the total energy density.

In the differential form of (1.6) we obtain

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div} \bar{P} = 0 \quad (1.7)$$

The energy flow is directed along the speed \bar{V} , and hence along the rays. For an arbitrary ray tube of (1.7) follows the conservation equation

$$\frac{\partial(EA)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{P} * \bar{A})}{\partial e} = 0 \quad (1.8)$$

where ℓ - the distance along the ray.

The eikonal equation (1.4) is a non-linear differential **equation in partial derivatives of the first order type Hamilton-Jacobi**, which is generally written as [11-14]

$$H\left(\frac{\partial\tau}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial\tau}{\partial q_n}; q_1 \dots q_n\right) = 0 \quad (1.9)$$

where $\tau = \tau(q_1 \dots q_n)$ – the desired function, q_i – the generalized coordinates ($i = \overline{1, n}$).

Designating $\frac{\partial\tau}{\partial q_i} = p_i$ as generalized impulses, the equation (1.9) can be written as

$$H(p_i, q_i) = 0 \quad (1.10)$$

Equation characteristics (1.9) satisfy the system of ordinary differential equations

$$\frac{dq_i}{\partial H / \partial p_i} = -\frac{dp_i}{\partial H / \partial q_i} = \frac{d\tau}{\sum_{j=1}^n p_j (\partial H / \partial p_j)} \quad (1.11)$$

which can be written as

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (1.12)$$

Here $2n$ component $q_i = q_i(t), p_i = p_i(t)$, which are solutions of the system (1.11) are called the characteristics of the equation (9).

If $q_i = x_i$ – the Cartesian coordinates, and $H = H(\bar{p}, \bar{r}), \bar{r} = (x_1, x_2, x_3)$, the Hamiltonian characteristic equations (1.11) - (1.13) can be written in the vector form

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}}, \quad \frac{d\bar{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{r}} \quad (1.13)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \bar{p} \frac{\partial H}{\partial \bar{p}}, \quad \bar{p} = \text{grad } \tau = \nabla \tau \quad (1.14)$$

Differentiation respect to the vector, means differentiation with respect to the appropriate coordinate, for example $\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$. Thus, the ray is in the coordinate space of a projection $q_i = x_i = x_i(t)$ of the eikonal equation characteristics (1.4). In the phase space $\{p_i, q_i\}$ the characteristic $q_i = q_i(t), p_i = p_i(t)$ is called the ray equations.

If you found the solution of equations (1.13) in the form of $\bar{r} = r(t), \bar{p} = \bar{p}(t)$, then the solution of equation (1.14) can be written as

$$\tau = \tau_0 + \int_{t_0}^t \bar{p} \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} dt \quad (1.15)$$

There are different forms of recording the ray equations (1.13), depending on the kind of H , coordinate system selection. For example, we write H (eikonal equation) as

$$H = \frac{1}{2} [\bar{p}^2 - n^2(\bar{r})] = 0, \quad \bar{p} = \text{grad } \tau \quad (1.16)$$

where n – the refractive medium index.

Then the equations for the rays have the form of

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{p} \quad (1.17)$$

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{1}{2} \nabla n^2(r) = \frac{1}{2} \text{grad } n^2 \quad (1.18)$$

which shows that in an isotropic medium rays are orthogonal to the wave fronts.

Most convenient to use instead of the parameter t the parameter of the arc lengths of the curved ray in a inhomogeneous medium

$$dt = \frac{ds}{p} = \frac{ds}{n} \quad (1.19)$$

then the expression for the eikonal (1.16) has the form

$$\tau = \tau_0 + \int_{s_0}^s n(\bar{r}) ds \quad (1.20)$$

If the eikonal equation (and) or H-equation of Hamilton-Jacobi (1.5) will be written in the form of

$$H(\bar{p}, \bar{r}) = p - r(\bar{r}) = 0, \quad p = \sqrt{\bar{p}^2} \quad (1.21)$$

then the rays equations (1.14) have the form

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{\bar{p}}{n}, \quad \frac{d\bar{p}}{dt} = \nabla n = \text{grad } n \quad (1.22)$$

and the expression for the eikonal (1.20).

To this same expression for the eikonal respond equations for the rays, written in the form

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\ell}, \quad \frac{d\bar{\ell}}{ds} = \frac{\text{grad } n}{n} - \bar{\ell} \left(\frac{\text{grad } n}{n} \bar{\ell} \right) = \text{grad} \perp \ln n \quad (1.23)$$

where $\bar{\ell} * \text{grad } n = dr / ds$ – derivative with respect to the ray, the operator $\text{grad}_{\perp} = \text{grad} - \bar{\ell} (\bar{\ell} \text{grad})$ determines the gradient calculation in the direction perpendicular to the beam (along the wave front).

According to **the optical-mechanical analogy** the system of equations (1.14) can also be written in the form of Newtonian mechanics for potential forces (in the form of second-order equations)

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{1}{2} \text{grad } n^2 \text{ or } \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\bar{r}}{ds} \right) = \text{grad } n^2 \quad (1.24)$$

where the role of the forces potential is played by $n^2(\bar{r})$.

The geometry of the spatial curve (ray) is characterized by the **curvature k and torsion \varkappa** , which are calculated according to the formulas

$$k = \left\| \bar{\ell} \left(\frac{\text{grad } n}{n} \bar{\ell} \right) \right\| = \left\| \frac{\text{grad } n}{n} \bar{\ell} \right\| = \left| \frac{\text{grad } n}{n} \right| \quad (1.25)$$

where $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ – the angle between the ray (vector $\bar{\ell} \sin \theta$) and vector $\text{grad } n$.

The radius of the ray curvature $\rho = k^{-1}$. As in a homogeneous medium $n = const$, then $k = 0$, ie rays are straight lines.

The torsion is calculated according to the formula

$$\varkappa = \frac{1}{2}(\bar{n} \text{ rot } \bar{n} + \bar{b} \text{ rot } \bar{b}) \quad (1.26)$$

where \bar{n} – the unit vector the main normal, $\bar{b} = [\bar{\ell} * n]$ the binormal unit vector in **the Frenet trihedron**, moving along the ray.

The expressions for \bar{n} and \bar{b} can be represented by the index of refraction $n(\bar{r})$ according to the formulas

$$\bar{n} = \frac{1}{k} \text{grad}_{\perp} \ln n, \quad \bar{b} = \frac{1}{k} \left[\bar{\ell} \frac{\text{grad } n}{n} \right] \quad (1.27)$$

Then

$$\varkappa = \frac{1}{k} \left[(\bar{\ell} \text{ grad}) \bar{b} * \text{grad}_{\perp} \ln n \right] = \frac{1}{k} \left[(\bar{\ell} \text{ grad}) \text{grad}_{\perp} \ln n + \bar{b} \right]$$

For planar curves $\varkappa = 0$, for example in layered media.

Discussed equations correspond to coordinate method of setting a motion in mechanics. Natural way to set a motion in mechanics corresponds to the consideration of the kinematics of the rays in **the ray coordinates**, related to the initial position of the wave front [4,7,15].

On the surface of the radiating body curvilinear coordinates can be introduced ξ, η Fig. 1.6

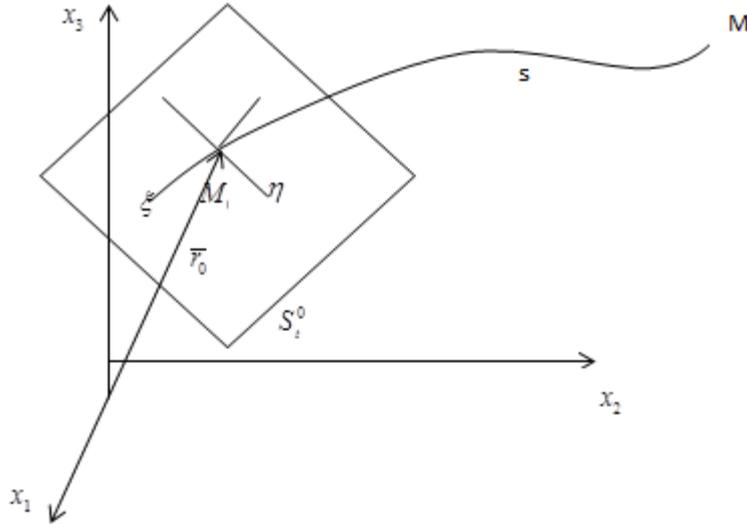


Fig. 1.6. The ray coordinates

so that

$$\bar{r}_0 = \bar{r}(t_0) = \bar{r}_0(\xi, \eta) \quad (1.28)$$

The coordinate lines ξ, η are orthogonal and they are chosen, as a rule, from geodesic lines or lines of the principal curvatures, coordinate line s – ray, tangent to which at ξ, η is orthogonal to the front S_t^0 . Coordinate system ξ, η, s is called as **ray coordinate system**.

At $t = t_0$ you must set a condition for $\bar{p} = \bar{p}(t_0) = \bar{p}_0(\xi, \eta)$. The vector components $\bar{p}(\xi, \eta)$ satisfy the equations, which follow from the eikonal equation

$$(\bar{p}^0)^2 = n^2(\bar{r}_0), \bar{p}^0 \frac{\partial \bar{r}^0}{\partial \xi}, \bar{p}^0 \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{\tau}_0}{\partial \xi}, \bar{p}^0 \frac{\partial \bar{r}^0}{\partial \eta} = \frac{\partial \tau_0}{\partial \eta} \quad (1.29)$$

If the initial emitting surface is plane, then the coordinate system is a Cartesian system, and is connected with the surface $x_3^0 = 0$. Then assuming that $\xi = x_1^0, \eta = x_2^0$, we obtain

$$p_x^0 = \frac{\partial \tau_0}{\partial \xi}, p_y^0 = \frac{\partial \tau_0}{\partial \eta}, p_z^0 = \sqrt{n^2(\bar{r}_0) - \left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \eta}\right)^2} \quad (1.30)$$

The equation of the initial surface can be written as

$$x_i = x_i(u^\alpha, t), \quad \alpha = 1, 2; i = 1, 2, 3 \quad (1.31)$$

We introduce **the first and second quadratic form of the surface** S_t^0

$$g^{\alpha\beta} = x_i^\alpha * x_i^\beta, \quad b^{\alpha\beta} = -v_\alpha^i * x_\beta^i = x_{\alpha\beta}^i v^i \quad (1.32)$$

Then the differential equations for the rays have the form [4,7,10]

$$\frac{\delta x^i}{\delta t} = c v^i, \quad c = v^i \frac{\delta x^i}{\delta t} \quad (1.33)$$

$$\frac{\delta v^i}{\delta t} = -g^{\alpha\beta} x_\beta^i v^j \frac{\delta x_j^\alpha}{\delta t} = -g^{\alpha\beta} x_{i\beta} c_\alpha \quad (1.34)$$

To close the system (1.31), (1.32) it must be supplemented by equations for the mean and Gaussian curvatures of the surface.

In the particular case when the wave front propagates parallel to itself expressions for the mean and Gaussian curvatures have the form

$$\Omega = \frac{\Omega_0 - sK_0}{1 - 2s\Omega_0 + s^2K_0}, \quad K = \frac{K_0}{1 + s^2K_0 - 2sK_0} \quad (1.35)$$

The expression for the eikonal in the coordinates ξ, η, t is written in the form

$$\tau(\xi, \eta, t) = \tau_0(\xi, \eta) + \int_{t_0}^t n^2[\bar{r}(\xi, \eta, t)] dt \quad (1.36)$$

Coordinates ξ, η on the surface τ_0 identify a ray coming from the surface at the moment $t = t_0$. For different ξ, η we obtain a family of rays, therefore, at the initial time from the surface τ_0 comes the bundle of rays, that allows you to build a complex radiation pattern, on the basis of which is determined the wave field structure in the physical space.

In the phase space $\{\bar{p}, \bar{r}\}$ the phase portrait under certain conditions, can also be quite complicated.

In the spatial of generalized coordinates q_i , which are not related to the wave surface and which are orthogonal curvilinear coordinates, eikonal can be written as

$$H(p_i, q_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{p_j^2}{h_j^2(q_i)} - n^2(q_i) \right\} \quad (1.37)$$

where $h_j(q_i)$ – **Lame coefficients** for curvilinear coordinates q_i .

The system of equations for the rays in this case has the form

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{1}{h_i^2} p_i, \quad \frac{dp_i}{dt} = n \frac{\partial n}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j^2} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} p_j^2 \quad (1.38)$$

The expression for the eikonal is written as

$$\tau = \tau_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} n^2 [\bar{r}(t)] dt, \quad p^2 = n^2 \quad (1.39)$$

If you enter a pulse components in curvilinear coordinates according to the formulas

$$\hat{p}_i = \frac{P_i}{h_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \tau}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.40)$$

then the equations (1.36) are written as

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{1}{h_i} \hat{p}_i \frac{d\hat{p}_i}{dt} = \frac{1}{h_i} n \frac{\partial n}{\partial q_i} + \frac{1}{h_i} \sum_{j \neq i}^3 \frac{\hat{p}_j}{h_j} \left(\hat{p}_j \frac{\partial h_j}{\partial q_i} - \hat{p}_i \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \right) \quad (1.41)$$

In many specific problems of ray propagation in inhomogeneous media is convenient to use **angular variables**, for example, in the case of the spherical symmetry. Assuming that $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$ and considering that in this case $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$, equations (1.39) can be written as

$$\frac{dr}{dt} = \hat{p}_r, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \hat{p}_\theta, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\hat{p}_\varphi}{r \sin \theta}, \quad \frac{d\hat{p}_r}{dt} = n \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{p}_\theta^2 + \frac{1}{r} \hat{p}_\varphi^2$$

$$\frac{d\hat{p}_\theta}{dt} = \frac{1}{r} \left(n \frac{\partial n}{\partial \theta} - \hat{p}_r \hat{p}_\theta + \text{ctg } \theta \hat{p}_\varphi^2 \right) \quad (1.42)$$

$$\frac{d\hat{p}_\varphi}{dt} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(n \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \sin \theta \hat{p}_r \hat{p}_\theta - \cos \theta \hat{p}_\theta \hat{p}_\varphi \right)$$

Here $\frac{\partial \tau}{\partial r} = \hat{p}_r, \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} = \hat{p}_\theta, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \hat{p}_\varphi.$

The eikonal equation is written as

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \right)^2 = n^2 \quad (1.43)$$

or

$$\hat{p}_r^2 + \hat{p}_\theta^2 + \hat{p}_\varphi^2 = n^2 \quad (1.44)$$

In the case of a plane task 2D- dimension, entering angle α by relations

$$\hat{p}_r = n \cos \alpha$$

$$\hat{p}_\theta = n \sin \alpha \quad (1.45)$$

we write the equations for the ray in the form of

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r} \text{tg } \alpha, \quad \frac{d\alpha}{dr} = \frac{1}{nr} \left[\frac{\partial n}{\partial r} - \frac{\partial(rn)}{\partial r} \frac{d\theta}{dr} \right] \alpha = \pi/2 \quad (1.46)$$

Thus, depending on the geometry and mechanics of the particular task you can choose a suitable system of coordinates and shape of the ray equations. The most commonly used are

phase coordinates (\bar{r}, \bar{p}) and radial coordinates (ξ, η, s) so that the solution of the radial equation is represented as

$$\bar{r} = \bar{r}(\xi, \eta, t), \quad \bar{p} = \bar{p}(\xi, \eta, t) \quad (1.47)$$

Here, the parameter t is related to the distance s along the ray (coordinate line), and ξ, η identify the ray on the initial surface S_t^0 at $t = t_0$. If the wave is emitted by a limited surface area, defined by the relation $\bar{r}^0 = \bar{r}^0(\xi, \eta)$, then the rays form a family of rays emanating from this area.

The conversion from the Cartesian coordinate system to the ray system is defined by Jacobian $D = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi, \eta, t)}$ and will be one to one, if $D \neq 0$.

A lot of wavefronts obtained in accordance with the principle of Huygens (contact transformations) form a family of equal phase surfaces, eikonal for each of them is written in the form

$$\tau(\xi, \eta, t) = \tau^0(\xi, \eta) + \int_{t_0}^t n^2 [r(\xi, \eta, t)] dt = \text{const} = \tau_0 \quad \bar{r} = \bar{r}(\xi, \eta, t) \quad (1.48)$$

From the first equation (1.48) for each τ_0 can be found $t = t_\phi(\xi, \eta, \tau_0)$ and it is inserted into the second, then the family of wave fronts of equal phase (phase fronts) is determined by the ratio

$$\bar{r} = \bar{r}[\xi, \eta, t_\phi(\xi, \eta, \tau_0)] = r_\phi(\xi, \eta, \tau_0) \quad (1.49)$$

The family of rays emitted by the limited surface area S_t^0 forms a the bundle of rays. This means that the rays propagate not independent of each other, but they interfere. Due to the interference of secondary waves a significant contribution to the building of the fronts contribute only those rays, for which the phase difference does not differ by more than $\lambda/2$ (λ – wavelength).

Surfaces, where condition $D_{(t_k)S_k} = 0$ is violated are referred to as **caustic**

$$D_{(t_k)S_k} = 0 \quad \text{at } \bar{r} \in \bar{r}_k(t) \quad (1.50)$$

The position of caustics is defined from the equation of the family of rays $\bar{r} = \bar{r}(\xi, \eta, t)$ and condition $D(t) = 0$

$$\bar{r} = \bar{r}(\xi, \eta, t), \quad D(\xi, \eta, t) = 0 \quad (1.51)$$

Excluding t we obtain

$$\bar{r} = \bar{r}(\xi, \eta, t(\xi, \eta)) = \bar{r}_k(\xi, \eta) \quad (1.52)$$

where $\bar{r}_k(\xi, \eta)$ determines the equation of the caustic in curvilinear coordinates of the initial surface. In solving problems for caustics it is convenient to introduce on the caustic surface own caustic coordinates (α, β, δ) , where, α, β are curvilinear coordinates located on the caustic, and δ is measured along the line characterizing the removing from the caustic.

The value J Excluding t we obtain

$$J = \frac{D(t)}{D(t_0)} = \frac{\left([\bar{r}_{,\xi} * \bar{r}_{,\eta}] * \bar{p} \right)}{\left([\bar{r}_{,\xi} * \bar{r}_{,\eta}] * \bar{p} \right)_{t=t_0}} \bar{r}_{,\xi} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}, \bar{r}_{,\eta} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}, \bar{r}_{,t} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \bar{p} \quad (1.53)$$

is called **the divergence of rays**.

From (1.51) follows that on the caustic $J = 0$, ie cross-section of the ray tube decreases, energy increases, the rays touch caustics and change the direction. The classification of caustics is considered in the catastrophe theory [16]. On caustics and in their neighborhood classical spatial ray solutions are not applicable. There are methods for caustic rays, allowing to solve a number of tasks for caustics [2].

The wave fronts pass through **the interface between the physical and mechanical properties** of the medium, wherein the interface can have a complicated geometry. The study of the interaction of waves with obstacles (diffraction waves) with the help of radiation methods is considered in **the geometric theory of diffraction** []. Using ray method in this case is based on the principle of locality, whereby in the neighborhood of each interface point the incident, reflected and refracted waves can be considered plane waves.

On Fig. 1.7 is shows a classic scheme of wave incidence on the interface between two media with different physical and mechanical properties. The plane of ray incidence contains vectors: of normal \bar{N} , incident \bar{p}_{inc} , refracted p_{refr} waves. At the interface the following conditions must be satisfied

$$\tau_{inc} = \tau_{refl} = \tau_{refr} \text{ at } r \in Q \quad (1.54)$$

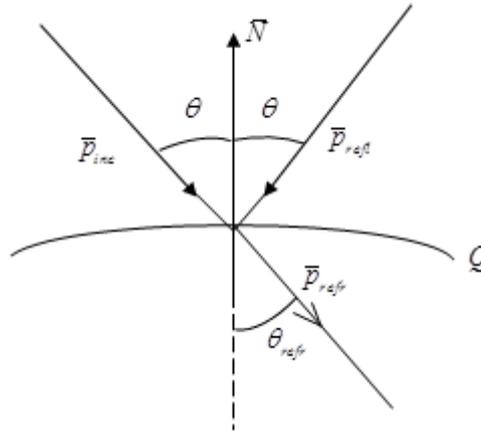


Fig. 1.7. A scheme of wave incidence on the interface between two media

In view of the conditions (1.53) tangential to the interface line Q components of the vectors have the form of

$$\begin{aligned} \bar{p}_{inc} = \nabla \tau_{inc} = \text{grad } \tau_{inc}, \bar{p}_{refl} = \nabla \tau_{refl} = \text{grad } \tau_{refl}, \quad \bar{p}_{refr} = \nabla \tau_{refr} = \text{grad } \tau_{refr} \\ (\bar{p}_{inc})_t = (\bar{p}_{refl})_t = (\bar{p}_{refr})_t, \bar{p}_\tau = \bar{p} - \bar{N}(p\bar{N}) \end{aligned} \quad (1.55)$$

Here by the index τ tangential vectors are indicated for normal components of these vectors, representing at the same time normal derivatives of eikonals $\tau_{inc}, \tau_{refl}, \tau_{refr}$. We have the relations

$$(\bar{p}_{inc})_N = -\sqrt{n_1^2 - (\bar{p}_{inc})_t^2}, \quad (\bar{p}_{refl})_N = \sqrt{n_1^2 - (\bar{p}_{refl})_t^2}, \quad (\bar{p}_{refr})_N = \sqrt{n_2^2 - (\bar{p}_{refr})_t^2}, \text{ at } \bar{r} \in Q \quad (1.56)$$

Designating with $\theta, \theta_{refl}, \theta_{refr}$ respectively, **the angles of incidence, reflection, refraction**, we write the equation in the form

$$n_1 \sin \theta = n_1 \sin \theta_{refl} = n_2 \sin \theta_{refr} \quad (1.57)$$

ie must be performed **mirroring laws**

$$\theta_{refl} = \theta \quad (1.58)$$

and the law of refraction (Snellius law)

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta_{refr}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.59)$$

With these equations eikonal normal derivatives can be written as

$$\frac{\partial \tau_{refl}}{\partial N} = -\frac{\partial \tau_{inc}}{\partial N} = n_1 \cos \theta, r \in Q \quad \frac{\partial \tau_{refr}}{\partial N} = -n_1 \cos \theta_{refr} = -\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} \quad (1.60)$$

Ratios (1.52) – (1.57) give all the necessary formulas for finding rays and eikonals of reflected and refracted waves.

The surface waves can exist at the interface of two media. The field of these waves decreases exponentially by leaving at the normal from the surfaces along which they propagate. At a smooth change of the geometrical and mechanical properties of the surface, in the scale of the wavelength, you can build **surface rays and fronts** [].

At a waves' diffraction on the bodies of different geometry diffraction rays propagate in the shadow zone behind obstacles, which are divided into two main types:

1. Edge rays, sources of which are the fins (edges), and the tips on the bodies Fig. 1.8

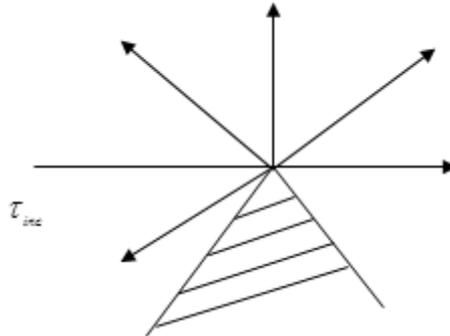


Fig. 1.8. Edge rays

2. Slipping rays (creeping rays) Fig.1.9

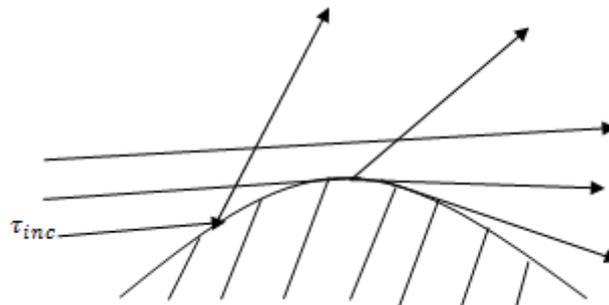


Fig. 1.9. Slipping rays

3. Diffraction rays of the lateral wave [2,8] in the presence of the refractive of the interface Fig.1.10

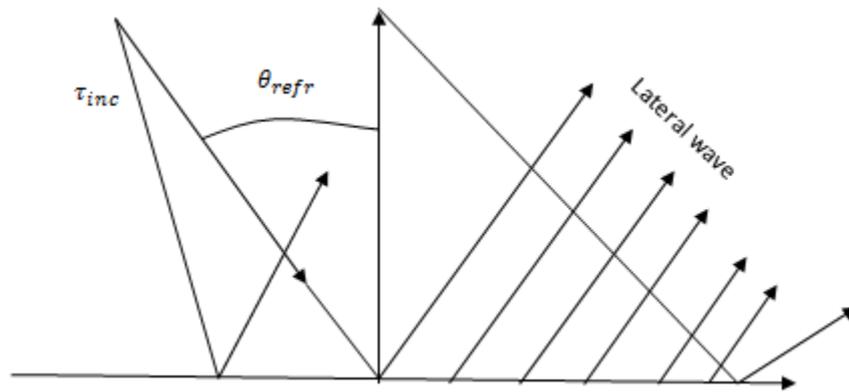


Fig. 1.10. Diffraction rays

4. Complex rays for waves with a complex eikonal, with which you can build rays in the caustic shadow zone, surface and leaky waves, etc. Fig. 1.11

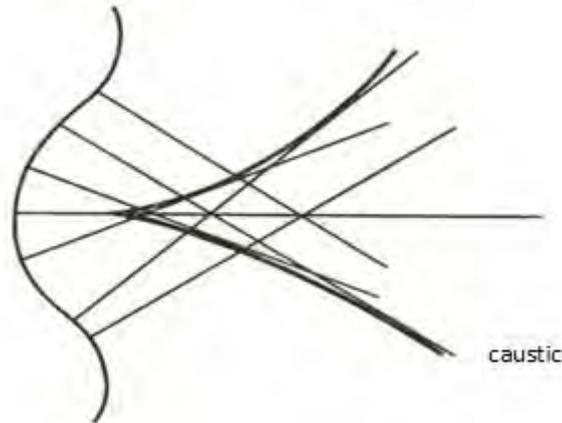


Fig. 1.11. The rays in the caustic zone

An extension of this kinematics of the spatial rays are **the space-time rays**, resulting in tasks of stationary waves' propagation, rays in anisotropic stationary media with temporal and spatial dispersion. The kinematics of the different types of space-time rays (complex, edge, etc.), which are related to the space-time geometrical theory of diffraction can be considered.

Due optic and mechanical analogy the considered spatial rays correspond in the analytical mechanics with scleronomic systems, and the theory of space-time rays is similar respectively to the rheonomic systems [2].

To be continued.

СЛОЖНЫЙ ИЗГИБ ГИБРИДНЫХ ДЕРЕВЯННЫХ БРУСЬЕВ**Немировский Ю.В., Болтаев А.И.***Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН*

Введение. Древесина широко используется в строительстве [1-3]. Этому способствуют такие её качества как [1]: низкий удельный вес - при средней плотности 550 кг/м^3 она в 14 раз легче стали и в 4,5 раза легче бетона; высокая удельная прочность - $25500 \text{ м}^2/\text{с}^2$ для древесины, $29500 \text{ м}^2/\text{с}^2$ для строительной стали и $5800 \text{ м}^2/\text{с}^2$ для бетона класса В25. Она также обладает малой теплопроводностью, высокой химической стойкостью и высокой технологичностью. И что немаловажно - является самовозобновляемым и экологически чистым материалом.

Основные недостатки древесины - пороки, неоднородность и анизотропность физико-механических свойств, пожароопасность, коробление, усушка и др. [1,3] могут быть в значительной степени устранены путём различных технологических и конструктивных приёмов, используемых при производстве современных деревянных конструкций. Кроме этого, современные технологии позволяют создавать клееные деревянные конструкции различных форм поперечных сечений и пролётов, что значительно расширяет их область применения.

Примерами эффективного использования древесины в строительстве могут служить: радиобашня в Польше высотой 118 м (1935 г.), деревобетонный мост в Австрии [4] пролётом 85 м (1993 г.), жилое здание в Канаде [5] высотой 53 м (2017 г.) и др.

Весьма эффективными оказываются комбинированные гибридные конструкции, сочетающие в своей структуре такие разнообразные материалы, как дерево, пластики, бетоны и металлы [6,7].

Следует отметить, что существующие нормативные методы расчёта деревянных конструкций [8,9] обладают рядом недостатков:

- не учитывают реальные диаграммы деформирования древесины;
- не позволяют проектировать неоднородные (состоящие из разных пород) конструкции, так как основаны на экспериментальных данных, полученных для однородных конструкций;
- накладывают ограничения на возможные формы поперечных сечений (прямоугольное, круглое, двутавровое и т.п.).

Стандартные методы расчёта физически нелинейных стержневых конструкций [10-15] рассматривают в основном однородные конструкции и не уделяют должного внимания особенностям работы древесины.

Следовательно, необходимо создание методики расчёта деревянных конструкций, учитывающей реальные диаграммы деформирования древесины и позволяющей рассчитывать и проектировать эффективные неоднородные конструкции.

1. Диаграммы деформирования древесины. Здесь и далее будем говорить о диаграммах, полученных при кратковременных испытаниях малых чистых образцов древесины на растяжение-сжатие вдоль волокон [16-18].

Для использования диаграмм деформирования в расчётах необходимо получить их аналитическую форму. Функция, описывающая диаграммы, должна удовлетворять двум основным критериям: достаточно точно описывать опытные данные и иметь, по возможности, простой вид. При этом оба условия являются взаимоисключающими - желание получить, как можно более точное совпадение с экспериментальными данными приводит к усложнению связи между напряжениями и деформациями.

Отметим, что не следует стремиться к идеальному совпадению экспериментальной диаграммы и аппроксимирующей её функции. Так как сами опытные диаграммы деформирования получаются путём осреднения целого набора диаграмм. При этом средние коэффициенты вариации механических свойств древесины: предел прочности, модуль упругости и др. лежат в пределах 13-20 % [19].

Для разработки теории расчёта физически нелинейных гибридных стержневых систем будем использовать два вида функций:

1. квадратная аппроксимация отдельно для растяжения и сжатия [20]

$$\sigma^{\pm}(\varepsilon) = E_1^{\pm}\varepsilon + E_2^{\pm}\varepsilon^2. \quad (1)$$

верхние знаки берутся при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^+$, нижние - при $\varepsilon_*^- \leq \varepsilon \leq 0$.

2. кубическая аппроксимация на всём диапазоне деформирования $\varepsilon_*^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^+$ [21]

$$\sigma(\varepsilon) = E_1\varepsilon + E_2\varepsilon^2 + E_3\varepsilon^3. \quad (2)$$

где $\varepsilon_*^+, \varepsilon_*^-$ - предельные значения продольных деформаций при растяжении и сжатии; E_i^{\pm}, E_j - коэффициенты аппроксимации диаграмм деформирования соответственно для квадратной и кубической функций.

Принятие в качестве аппроксимирующей функции степенных многочленов с одной стороны позволяет достаточно точно описать экспериментальные данные, с другой стороны данные функции имеют простой вид и являются одними из наиболее изученных в математике.

Связь между напряжениями и деформациями в форме (1) и (2) позволяет получать в пределе модели одномодульного и разномодульного линейно-упругого материала. Если в (1) принять $E_2^{\pm} = 0$, то приходим к модели разномодульного линейно-упругого материала. Далее, принимая $E_1^+ = E_1^- = E$, получим уравнение закона Гука. То же получим и в (2) при $E_2 = E_3 = 0$.

Для подтверждения возможности аппроксимации диаграмм деформирования функциями (1,2) используем экспериментальные данные для трёх пород древесины: сосны [16], ясеня [17] и ели [18]. И, на основе метода наименьших квадратов [22], вычислим коэффициенты аппроксимации E_i^{\pm}, E_j .

Оценку степени точности аппроксимации проводим с помощью коэффициента детерминации R^2 [22]:

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}}, \quad SS_{res} = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \hat{\sigma}_i)^2, \quad SS_{tot} = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \bar{\sigma}_i)^2, \quad \bar{\sigma}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i. \quad (3)$$

где σ_i - значения напряжений, взятые из опытных графиков; $\hat{\sigma}_i$ - значения напряжений, полученные непосредственно по формулам (1) или (2); n - количество точек взятых на экспериментальных диаграммах.

Результаты аппроксимации даны на рис.1-3, значения коэффициентов аппроксимации, а также коэффициентов детерминации приведены в табл. 1-2. На рис. 1-3 экспериментальные данные обозначены следующими значками: треугольниками для сосны, крестиками для ясеня и кружками для ели. Соответствующие им аппроксимирующие функции проведены сплошными линиями. В табл.1 коэффициенты детерминации отдельно приведены для диаграмм растяжения - R^{2+} и отдельно для диаграмм сжатия - R^{2-} . Величины σ_*^+, σ_*^- - максимальные нормальные напряжения при растяжении (+) и сжатии (-).

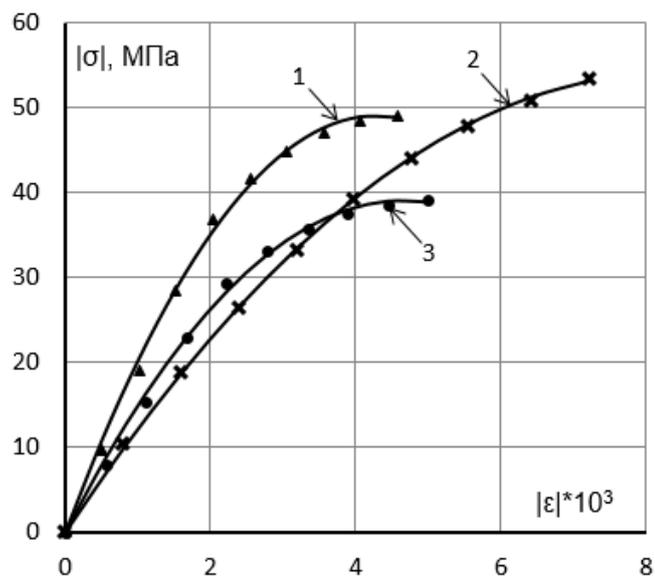


Рис. 1. Квадратная аппроксимация диаграмм сжатия древесины. 1 – сосна, 2 – ясень, 3 – ель. Способ 1

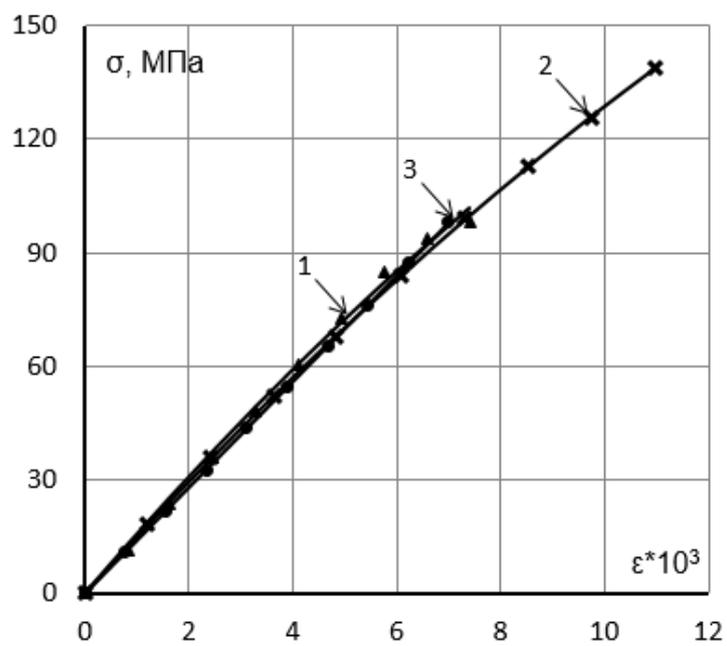


Рис. 2. Квадратная аппроксимация диаграмм растяжения древесины. 1 – сосна, 2 – ясень, 3 – ель. Способ 1

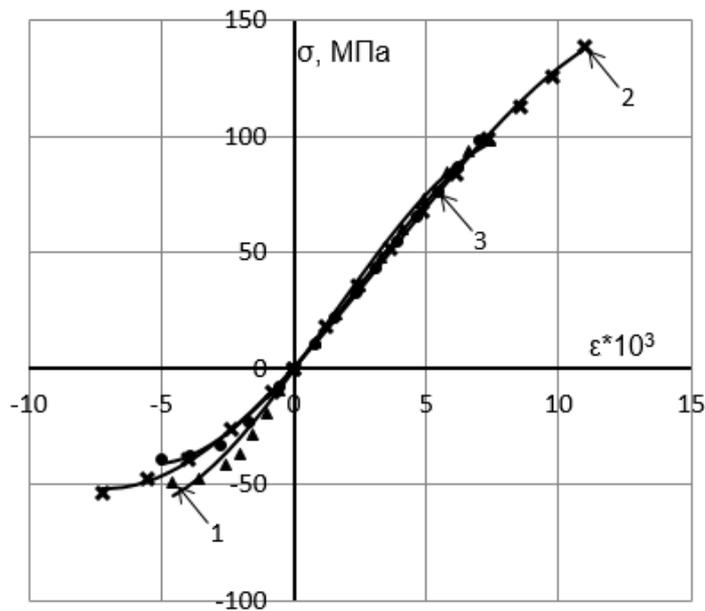


Рис. 3. Кубическая аппроксимация диаграмм деформирования древесины. 1 – сосна, 2 – ясень, 3 – ель. Способ 1

Анализ экспериментальных диаграмм деформирования показывает, что при растяжении древесина деформируется линейно практически до самого разрушения, а при сжатии уже в области средних напряжений начинает проявляться физическая нелинейность, которая возрастает по мере увеличения нагрузки. Для одной и той же породы древесины пределы прочности на растяжение и сжатие различаются до 2,6 раз, максимальные деформации - до 1,6 раз.

Таблица 1 – Характеристики диаграмм деформирования для квадратной аппроксимации. Способ 1

№	Характеристики Порода	E_1^+	E_1^-	E_2^+	E_2^-	ε_1^+	ε_1^-	σ_1^+	σ_1^-	R^{2+}	R^{2-}
		10^3 МПа	10^3 МПа	10^6 МПа	10^6 МПа	10^{-3}	10^{-3}	МПа	МПа		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Сосна	15,97	22,82	-0,303	2,65	7,4	-4,6	101,6	-48,9	0,9967	0,9975
2	Ясень	15,21	12,94	-0,233	0,773	11,0	-7,2	138,7	-53,2	0,9999	0,9998
3	Ель	14,01	16,74	0	1,789	7,0	-5,0	98,1	-39,0	0,9999	0,9980

Таблица 2 – Характеристики диаграмм деформирования для кубической аппроксимации. Способ 1

№	Характеристики	E_1	E_2	E_3	ϵ_+^*	ϵ_-^*	σ_+^*	σ_-^*	R^2
	Порода	10^3 МПа	10^6 МПа	10^9 МПа	10^{-3}	10^{-3}	МПа	МПа	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Сосна	15,55	0.373	-0,094	7,4	-4,6	97.6	-54.4	0.9951
2	Ясень	12.60	0.451	-0,042	11,0	-7,2	137.4	-51.8	0.9995
3	Ель	13.24	0.610	-0.078	7,0	-5,0	95.9	-41.2	0.9988

Из рис.1-3 видно, что функции (1) и (2) достаточно хорошо аппроксимируют экспериментальные диаграммы деформирования древесины. При этом квадратная аппроксимация немного точнее кубической. Коэффициент детерминации для квадратной аппроксимации изменяется от 0,9975 до 0,9999, для кубической - от 0,9951 до 0,9995, см. табл. 1-2.

При определении коэффициентов диаграмм деформирования E_i^\pm, E_j использовались экспериментальные графики. Однако число таких графиков сильно ограничено. В основном в литературе приводятся данные по модулю упругости при изгибе E_u и σ_*^\pm [23,24], реже можно найти модули упругости при растяжении E^+ и сжатии E^- [24]. Значения предельных деформаций ϵ_*^\pm практически отсутствуют.

Одно из важных свойств, которому по возможности должны удовлетворять диаграммы деформирования, заключается в том, чтобы их коэффициенты определялись через известные величины $\sigma_*^\pm, \epsilon_*^\pm$ и E^\pm . С одной стороны это позволит по известным данным получить большое количество диаграмм деформирования для различных пород. С другой стороны, что более важно, даст возможность учитывать влияние различных факторов (температуры, влажности, времени, скорости нагружения, изменчивости свойств и т.д.) на диаграммы деформирования через накопленную информацию о влиянии этих факторов на $\sigma_*^\pm, \epsilon_*^\pm$ и E^\pm [1,3,8,16,23,24].

В связи с этим на опытных диаграммах растяжения-сжатия сосны, ясеня и ели [16-18] были проанализированы различные варианты определения коэффициентов E_i^\pm, E_j через значения $\sigma_*^\pm, \epsilon_*^\pm, E^\pm$ - табл.3-4. В табл.3-4 коэффициенты детерминации приведены для трёх пород древесины. Первой строке соответствует сосна, второй - ясень, и третьей - ель. Значения E^\pm взяты из табл.1 - $E^\pm = E_1^\pm$.

Таблица 3 – Методы определения коэффициентов для квадратной аппроксимации

№	Определяющие уравнения	Коэффициенты диаграмм деформирования	R^{2+}	R^{2-}
1	2	3	4	5
1	$\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = E^\pm,$ $\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=\varepsilon_*^\pm} = 0.$	$E_1^\pm = E^\pm,$ $E_2^\pm = -\frac{E^\pm}{2\varepsilon_*^\pm}.$	0.6085	0.9880
			0.6355	0.9671
			0.4263	0.9869
2	$\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = E^\pm,$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$	$E_1^\pm = E^\pm,$ $E_2^\pm = \frac{\sigma_*^\pm - E^\pm \varepsilon_*^\pm}{\varepsilon_*^{\pm 2}}.$	0.9941	0.9974
			0.9999	0.9997
			1.0000	0.9979
3	$\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=\varepsilon_*^\pm} = 0,$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$	$E_1^\pm = 2\frac{\sigma_*^\pm}{\varepsilon_*^\pm},$ $E_2^\pm = -\frac{\sigma_*^\pm}{\varepsilon_*^{\pm 2}}.$	0.8487	0.9934
			0.8119	0.9787
			0.7055	0.9940
4	$\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = E^\pm,$ $\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=\varepsilon_*^\pm} = 0,$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$	$E_1^\pm = E^\pm,$ $E_2^\pm = -\frac{E^{\pm 2}}{4\sigma_*^\pm},$ $\varepsilon_*^\pm = 2\frac{\sigma_*^\pm}{E^\pm}.$	0.9190	0.9975
			0.9423	0.9996
			0.8566	0.9980

Таблица 4 – Методы определения коэффициентов для кубической аппроксимации

№	Определяющие уравнения	Коэффициенты диаграмм деформирования	R^2
1	2	3	4
1	$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = \min(E^+; E^-),$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$	$E_1 = \min(E^+; E^-),$ $E_2 = \frac{\sigma_*^+ - E_1 \varepsilon_*^+ - E_3 \varepsilon_*^{+3}}{\varepsilon_*^{+2}},$ $E_3 = \frac{E_1}{\varepsilon_*^+ \varepsilon_*^-} + \frac{\sigma_*^+}{\varepsilon_*^{+2} (\varepsilon_*^+ - \varepsilon_*^-)} - \frac{\sigma_*^-}{\varepsilon_*^{-2} (\varepsilon_*^+ - \varepsilon_*^-)}.$	0.9934
			0.9991
			0.9970

2	$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = \min(E^+; E^-),$ $\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=\varepsilon_*^\pm} = 0.$	$E_1 = \min(E^+; E^-),$ $E_2 = -E_1 \frac{\varepsilon_*^- + \varepsilon_*^+}{2\varepsilon_*^+ \varepsilon_*^-},$ $E_3 = \frac{E_1}{3\varepsilon_*^+ \varepsilon_*^-}.$	0.9897
			0.9749
			0.9713
3	$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = \min(E^+; E^-),$ $\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=\varepsilon_*^\pm} = 0,$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$	$E_1 = \min(E^+; E^-),$ $E_2 = \frac{3\sigma_*^+ - 2E_1\varepsilon_*^+}{\varepsilon_*^{+2}},$ $E_3 = \frac{E_1\varepsilon_*^+ - 2\sigma_*^+}{\varepsilon_*^{+3}}.$ <p>ε_*^\pm находим из решения системы:</p> $\sigma_*^- 3(k^2 - a) = 2E_1\varepsilon_*^- k(k-1)$ $E_1\varepsilon_*^- k(k^2 - 1) = 2\sigma_*^-(k^3 - a)$ <p>где $k = \frac{\varepsilon_*^+}{\varepsilon_*^-}$ $a = \frac{\sigma_*^+}{\sigma_*^-}$.</p>	0.9932
			0.9863
			0.9978
4	$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=\varepsilon_*^-} = 0,$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$		0.9869
			0.9993
			0.9981

Будем считать аппроксимацию хорошо совпадающей с экспериментальными данными при $R^2(R^{2\pm}) \geq 0.990$. Исходя из этого, для квадратной аппроксимации наилучшим является вариант в строке 2 табл.3. Для кубической аппроксимации наилучший вариант расположен в строке 1 табл.4. Покажем графики деформирования для каждого из этих вариантов - рис.4-6. На рис.4-6 аппроксимирующие функции проведены сплошными линиями, а экспериментальные данные обозначены треугольниками для сосны, крестиками для ясеня и кружками для ели.

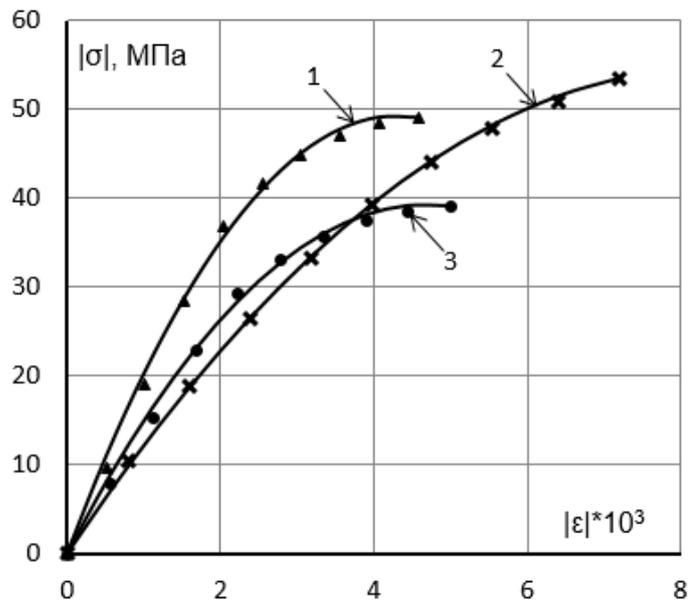


Рис. 4. Квадратная аппроксимация диаграмм сжатия древесины. 1 – сосна, 2 – ясень, 3 – ель.
Способ 2

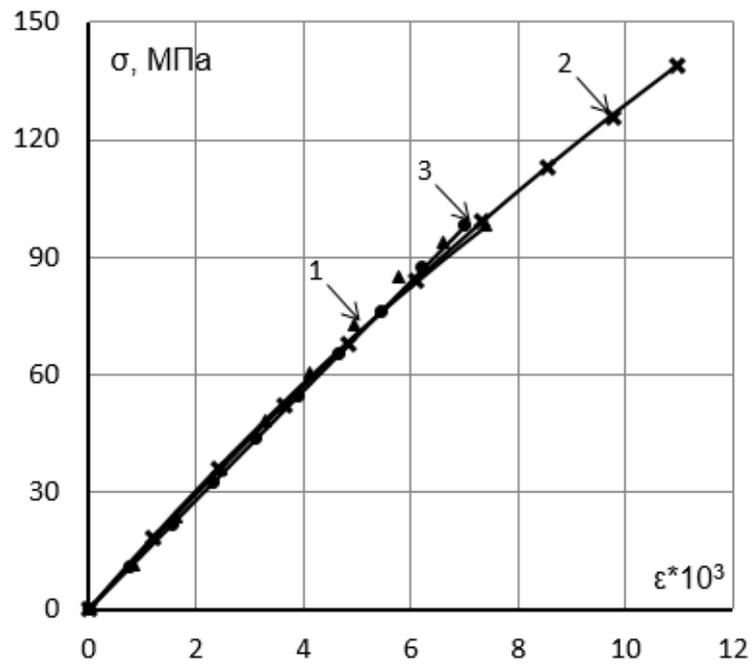


Рис. 5. Квадратная аппроксимация диаграмм растяжения древесины. 1 – сосна, 2 – ясень,
3 – ель. Способ 2

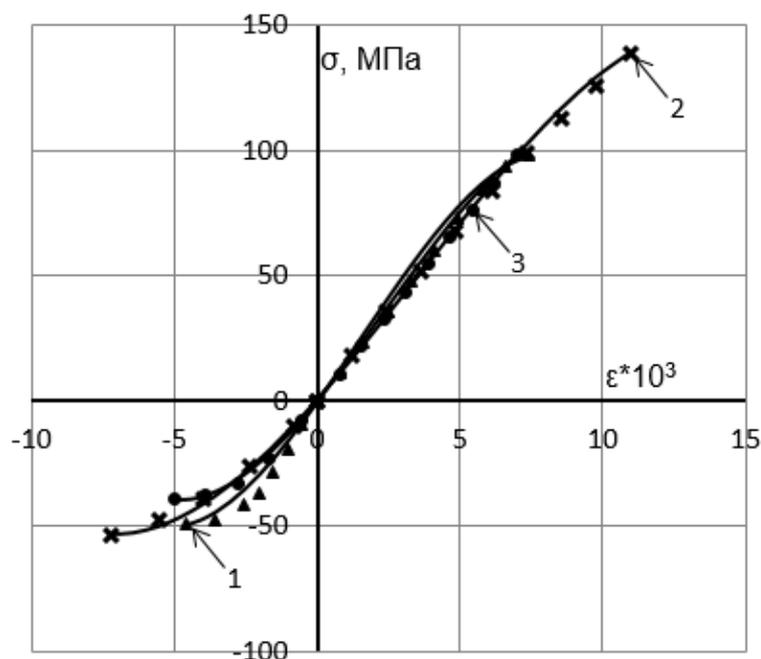


Рис. 6. Кубическая аппроксимация диаграмм деформирования древесины. 1 – сосна, 2 – ясень, 3 – ель. Способ 2

Данные рисунки свидетельствуют об успешной возможности аппроксимации диаграмм деформирования с использованием основных механических характеристик древесины - σ_*^\pm , ε_*^\pm и E^\pm .

Оба выбранных варианта аппроксимации требуют знания предельных продольных деформаций ε_*^\pm . Однако, их сложно найти в литературе. Поэтому можно предложить следующий способ определения ε_*^\pm : ε_*^+ находим с использованием закона Гука, так как при растяжении диаграмма деформирования практически линейна вплоть до разрушения; ε_*^- определяем из формул строки 4 табл.3, так как данный в ней метод определения E_i^- даёт хорошие совпадения с опытом. В итоге, при отсутствии опытных данных о ε_*^\pm , можно приближённо принять:

$$\varepsilon_*^+ = \frac{\sigma_*^+}{E^+}, \quad \varepsilon_*^- = 2 \frac{\sigma_*^-}{E^-}. \quad (4)$$

Вычислим ε_*^\pm по формулам (4) и сравним с предельными деформациями, взятыми из диаграмм деформирования сосны, ясеня и ели [16-18]. Максимальная разница для сосны составляет 17,0 %, для ясеня - 16,6 % и для ели - 6,2 %.

Используя формулы (4) и данные о σ_*^\pm , E^\pm из [24], вычислим коэффициенты аппроксимации для различных пород древесины - табл.5. Коэффициенты E_i^\pm определяем по формулам строки 2 табл.3, а E_j - по формулам строки 1 табл.4.

Таблица 5 – Характеристики диаграмм деформирования. Способ 2

№	Характеристики Порода	E_1^+	E_1^-	E_2^+	E_2^-	E_3	E_4	E_5	ϵ_1^+	ϵ_1^-	σ_1^+	σ_1^-
		10^3 МПа	10^3 МПа	10^6 МПа	10^6 МПа	10^3 МПа	10^6 МПа	10^9 МПа	10^{-3}	10^{-3}	МПа	МПа
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	Берёза даурская	18,4	16,1	0	1,325	16,1	0,922	-0,066	10,65	-6,07	196	-48,9
2	Граб кавказский	14,8	12,4	0	0,523	12,4	0,387	-0,011	8,18	11,85	121	-73,5
3	Дуб красный	14,2	14,2	0	0,818	14,2	0,395	-0,049	8,10	-8,68	115	-61,6
4	Ива ломкая	11,1	11,5	0	0,808	11,1	0,408	-0,048	8,42	-7,11	93,5	-40,9
5	Лиственница сибирская	14,7	14,2	0	0,804	14,2	0,418	-0,044	8,16	-8,83	120	-62,7
6	Ольха черная	12,1	13,0	0	0,969	12,1	0,467	-0,055	8,51	-6,71	103	-43,6
7	Осина	15,6	12,8	0	0,916	12,8	0,652	-0,038	8,53	-6,98	133	-44,7
8	Пихта кавказская	12,7	12,7	0	0,894	12,7	0,497	-0,056	8,90	-7,10	113	-45,1
9	Тополь сереющий	9,05	10,1	0	0,630	9,05	0,293	-0,026	11,38	-8,02	103	-40,5
10	Тополь черный	12,4	13,9	0	0,992	12,4	0,436	-0,049	8,95	-7,01	111	-48,7
11	Ясень маньчжурский	15,8	12,6	0	0,781	12,6	0,579	-0,025	9,24	-8,06	146	-50,8
12	Ясень обыкновенный	14,2	15,2	0	1,144	14,2	0,593	-0,060	9,86	-6,64	140	-50,5

Анализируя данные табл.5 можно выявить следующие особенности диаграмм деформирования древесины:

1. Модули упругости древесины при растяжении и сжатии отличаются максимум на 20,2 %, причём для половины пород эта разница лежит в пределах 7%.

2. Предельные деформации растяжения практически всегда больше предельных деформаций сжатия. Для берёзы даурской ε_*^+ больше ε_*^- в 1,75 раза, а для граба кавказского ε_*^- больше ε_*^+ в 1,45 раза.

3. Предел прочности на растяжение больше предела прочности на сжатие в среднем в 2,5 раза. Для берёзы даурской σ_*^+ больше σ_*^- в 4,0 раза, для граба кавказского σ_*^+ больше σ_*^- в 1,6 раза.

Из табл.5 видно, что модули упругости при растяжении и сжатии в основном не сильно отличаются друг от друга. В работе [8] показано, что можно с небольшой погрешностью принять $E^+ = E^- = E_u$. Тогда, используя данные из [23,24] с учётом (4) можно получить коэффициенты диаграмм деформирования для сотен различных пород древесины по вышеописанному алгоритму.

2. Напряженно-деформированное состояние бруса. Схема бруса в декартовой прямоугольной системе координат xuz представляет собой стержень, состоящий из нескольких слоёв. Слои могут быть выполнены из различных материалов и могут располагаться как горизонтально, так и вертикально (рис.7). Общее число слоёв принципиально не ограничено. Условия контакта слоёв считаются совершенными - отсутствуют взаимные смещения любого направления в плоскости контакта.

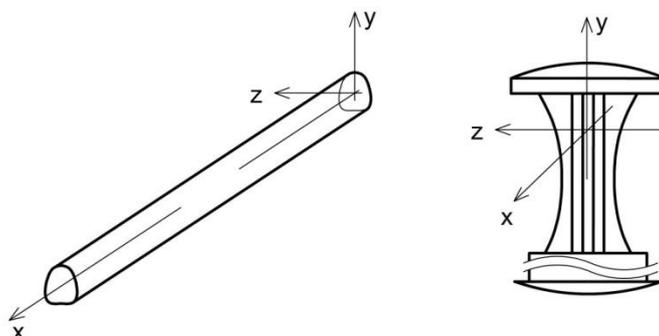


Рис. 7. Общий вид и форма поперечного сечения слоистого стержня

Начало системы координат xuz помещаем в левый конец стержня. Ось x совпадает с продольной осью стержня и имеет определённую геометрическую привязку к поперечному сечению.

Для упрощения получающихся в дальнейшем решений, будем считать, что структуры гибридных стержней и распределений внешних нагрузок согласованы так, что они в процессе нагружения либо вовсе не вызывают эффектов закручивания, либо они столь незначительны, что ими можно пренебречь. В общем случае стержень испытывает изгиб в плоскостях xu и uz с растяжением-сжатием. Все нагрузки приведены к продольной оси стержня - оси x .

Деформации и перемещения будем считать малыми. Это позволит записывать уравнения равновесия для недеформированного состояния:

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q_y - \frac{dm_z}{dx}, \quad \frac{d^2 M_y}{dx^2} = q_z - \frac{dm_y}{dx}, \quad \frac{dN}{dx} = -q_x. \quad (5)$$

Здесь N - проекция вектора внутреннего усилия на ось x , M_z, M_y - проекции вектора внутреннего момента на оси z и y . Точка приложения вектора внутренних усилий лежит на оси стержня. Величины q_x, q_y, q_z - проекции вектора распределённой нагрузки, приложенной к оси стержня, m_z, m_y - проекции вектора распределённого момента на оси z и y .

Интегрируя уравнения (5), получим выражения для внутренних усилий:

$$\begin{aligned}
 N(x) &= N(0) - \int_0^x q_x dx, \\
 M_z(x) &= M_z(0) - Q_y(0)x - \int_0^x m_z dx + \int_0^x \left(\int_0^x q_y dx \right) dx, \\
 M_y(x) &= M_y(0) - Q_z(0)x - \int_0^x m_y dx + \int_0^x \left(\int_0^x q_z dx \right) dx.
 \end{aligned} \tag{6}$$

В случае если стержень статически определимый, то значения внутренних усилий в начале координат определяем из условий равновесия узлов. Иначе, необходимо составлять дополнительные условия совместности деформаций.

Принимается справедливой теория плоских сечений Бернулли и упрощённое выражение кривизны плоской кривой. В соответствие с данными ограничениями связь между деформациями и перемещениями стержня выражается следующими известными соотношениями:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(x, y, z) &= \varepsilon_0 - y \cdot \kappa_z - z \cdot \kappa_y, \\
 \varepsilon_0(x) &= \frac{du_0}{dx}, \quad \kappa_y = \frac{d^2 v_0}{dx^2}, \quad \kappa_z = \frac{d^2 w_0}{dx^2}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $\varepsilon_0, \kappa_z, \kappa_y$ - продольная деформация на уровне оси стержня и изменение кривизны оси стержня в проекции на оси z и y , $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ - компоненты перемещений точек на выбранной осевой линии. Интегрируя соотношения (7) получим:

$$\begin{aligned}
 u_0(x) &= u_0(0) + \int_0^x \varepsilon_0 dx, \\
 v_0(x) &= v_0(0) + \varphi_y(0) \cdot x + \int_0^x \left(\int_0^x \kappa_y dx \right) dx, \quad \varphi_y(x) = \varphi_y(0) + \int_0^x \kappa_y dx, \\
 w_0(x) &= w_0(0) + \varphi_z(0) \cdot x + \int_0^x \left(\int_0^x \kappa_z dx \right) dx, \quad \varphi_z(x) = \varphi_z(0) + \int_0^x \kappa_z dx.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Величины $u_0(0), v_0(0), w_0(0), \varphi_y(0)$ и $\varphi_z(0)$ находим из условий закрепления стержня.

Связь между нормальными напряжениями и деформациями m -го слоя выражается степенным многочленом вида (2):

$$\sigma_m = \sum_{n=1}^3 E_{nm} \varepsilon_m^n, \quad -\varepsilon_{m*}^- \leq \varepsilon_m \leq \varepsilon_{m*}^+ \tag{9}$$

где E_{nm} - константы, зависящие от механических свойств m -го слоя стержня, ε_{m*}^\pm - предельно допустимые продольные деформации m -го слоя при растяжении (+) и сжатии (-).

3. Система разрешающих уравнений. Вариант 1. Выразим интегральные внутренние силовые факторы N, M_y и M_z через продольные напряжения σ_m :

$$N = \sum_{m=1}^{n_{cl}} \int \sigma_m dF_m, \quad M_y = \sum_{m=1}^{n_{cl}} \int \sigma_m \cdot z dF_m, \quad M_z = \sum_{m=1}^{n_{cl}} \int \sigma_m \cdot y dF_m. \tag{10}$$

В (10) интегрирование ведётся по площади поперечного сечения m -го слоя стержня. Количество слоёв задаётся параметром n_{cl} .

Подставляем в (10) связь между напряжениями и деформациями в виде (9) и первое уравнение из (7). После преобразований получим систему из трёх нелинейных алгебраических уравнений 3-ей степени относительно трёх неизвестных - κ_y , κ_z и ε_0 :

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=1}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} \kappa_y^{t-1} D_{nkt} - N = F_1(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=1}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} \kappa_y^{t-1} D_{nk(t+1)} + M_y = F_2(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=1}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} \kappa_y^{t-1} D_{n(k+1)t} + M_z = F_3(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$D_{nkt} = \sum_{m=1}^{n_{cl}} E_{nm} d_{mkt}, \quad d_{mkt} = \int_{F_m} y^{k-t} z^{t-1} dF_m, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (12)$$

Система (11) обладает следующими характерными особенностями:

1. Структура каждого уравнения системы (11) подобна, и отличается только коэффициентами D_{nkt} .

2. Геометрия поперечного сечения полностью описывается коэффициентами d_{mkt} , характеристики диаграммы деформирования - коэффициентами E_{nm} . Коэффициенты D_{nkt} полностью включают в себя геометрические и механические характеристики слоёв.

3. Приняв $E_{nm} = 0 (n = 2, 3)$, получим определяющие уравнения для слоистого, линейно-упругого стержня. Если при этом $n_{cl} = 1$, то приходим к уравнениям технической теории изгиба стержней [25].

Условие прочности задаётся соотношением

$$|\varepsilon_{m,max}^{\pm}| \leq \varepsilon_{m*}^{\pm} \quad (m = 1 \dots n_{cl}), \quad (13)$$

где $\varepsilon_{m,max}^{\pm}$ - максимальные продольные деформации растяжения (+) и сжатия (-) m -го слоя. Проверка выполнения условия прочности осуществляется в каждом слое поперечного сечения. Так как функция продольных деформаций $\varepsilon(x, y, z)$ в пределах определённого поперечного сечения линейная (гипотеза плоских сечений), то экстремальные значения она будет принимать на контуре поперечного сечения слоя. Задача определения области возможных значений κ_y , κ_z и ε_0 представляет собой отдельный интерес. В случае прямого поперечного изгиба она сводится к решению задачи линейного программирования [26].

4. Решение системы разрешающих уравнений (11). Система нелинейных уравнений (11) такова, что можно легко получить аналитическое выражение производных входящих в неё функций по основным неизвестным - κ_y , κ_z и ε_0 . Поэтому для её решения будем использовать метод Ньютона [27]. Полагаем, что задача статически определима и, следовательно, внутренние усилия определены из (6).

Для произвольного поперечного сечения запишем систему уравнений (11) в виде:

$$\bar{F}(\bar{x}) = 0. \quad (14)$$

Тогда решение строится посредством рекуррентной формулы:

$$\bar{x}^{j+1} = \bar{x}^j - J^{-1}(\bar{x}^j) \cdot \bar{F}(\bar{x}^j). \quad (15)$$

где $J(\bar{x})$ - матрица Якоби системы (14), \bar{x}^j - вектор неизвестных на j -ом шаге. Каждый её член представляет собой нелинейный алгебраический многочлен:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon_0} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (n-k+1) C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k} \sum_{t=1}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} \kappa_y^{t-1} D_{nkt}, \\
\frac{\partial F_1}{\partial \kappa_y} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=2}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} (t-1) \kappa_y^{t-2} D_{nkt}, \\
\frac{\partial F_1}{\partial \kappa_z} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=1}^{k-1} C_{k-1}^{t-1} (k-t) \kappa_z^{k-t-1} \kappa_y^{t-1} D_{nkt}, \\
\frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon_0} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (n-k+1) C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k} \sum_{t=1}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} \kappa_y^{t-1} D_{nk(t+1)}, \\
\frac{\partial F_2}{\partial \kappa_y} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=2}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} (t-1) \kappa_y^{t-2} D_{nk(t+1)}, \\
\frac{\partial F_2}{\partial \kappa_z} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=1}^{k-1} C_{k-1}^{t-1} (k-t) \kappa_z^{k-t-1} \kappa_y^{t-1} D_{nk(t+1)}, \\
\frac{\partial F_3}{\partial \varepsilon_0} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (n-k+1) C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k} \sum_{t=1}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} \kappa_y^{t-1} D_{n(k+1)t}, \\
\frac{\partial F_3}{\partial \kappa_y} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=2}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} (t-1) \kappa_y^{t-2} D_{n(k+1)t}, \\
\frac{\partial F_3}{\partial \kappa_z} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=1}^{k-1} C_{k-1}^{t-1} (k-t) \kappa_z^{k-t-1} \kappa_y^{t-1} D_{n(k+1)t}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Выражения частных производных $\frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon_0}$ отличаются только коэффициентами D_{nkt} , как и выражения для $\frac{\partial F_i}{\partial \kappa_y}$, а также для $\frac{\partial F_i}{\partial \kappa_z}$. Также необходимо отметить, что в (16) изменились пределы суммирования по сравнению с (11).

Начальное приближение \bar{x}^1 можно взять в виде нулевого вектора, что будет соответствовать недеформированному состоянию стержня. С другой стороны его можно определить из решения системы (11) при $E_{nm} = 0 (n = 2, 3)$, что равносильно переходу к физически линейной задаче. В этом случае система (11) переходит в систему трёх линейных уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 D_{111} - \kappa_y D_{122} - \kappa_z D_{121} - N = 0, \\ \varepsilon_0 D_{112} - \kappa_y D_{123} - \kappa_z D_{122} + M_y = 0, \\ \varepsilon_0 D_{121} - \kappa_y D_{132} - \kappa_z D_{131} + M_z = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Выпишем решение системы (17):

$$\bar{x}^1 = A^{-1} \cdot \bar{B} \tag{18}$$

$$\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} D_{111} & -D_{122} & -D_{121} \\ D_{112} & -D_{123} & -D_{122} \\ D_{121} & -D_{132} & -D_{131} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} N \\ -M_y \\ -M_z \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Примем следующие критерии останова для итерационного процесса (15) [29]:

$$\bar{F}(\bar{x}^j) - \bar{F}(\bar{x}^{j+1}) \leq \tau_F (1 + \bar{F}(\bar{x}^{j+1})), \tag{20}$$

$$\bar{x}^j - \bar{x}^{j+1} \leq \sqrt{\tau_F} (1 + \bar{x}^{j+1}).$$

Оба неравенства являются признаками близости последовательностей $\bar{F}(\bar{x}^j)$ и \bar{x}^j к своим пределам. Параметр τ_F имеет смысл желаемой точности решения - чем он меньше, тем выше точность. Его величина задаётся непосредственно в расчёте и может изменяться в зависимости от полученных результатов. В неравенствах (20) используется евклидова норма.

Область возможных значений вектора неизвестных \bar{x} ограничена условием прочности (13).

5. Система разрешающих уравнений. Вариант 2. Подставляем выражения внутренних усилий (11) в дифференциальные уравнения равновесия (5):

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{nkt} \frac{d}{dx} (\varepsilon_0^{n-k+1} \kappa_y^{t-1} \kappa_z^{k-t}) + q_x = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{nk(t+1)} \frac{d^2}{dx^2} (\varepsilon_0^{n-k+1} \kappa_y^{t-1} \kappa_z^{k-t}) - \frac{dm_y}{dx} + q_z = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{n(k+1)t} \frac{d^2}{dx^2} (\varepsilon_0^{n-k+1} \kappa_y^{t-1} \kappa_z^{k-t}) - \frac{dm_z}{dx} + q_y = 0. \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} D'_{nkt} &= (-1)^{k-1} C_n^{k-1} C_{k-1}^{t-1} D_{nkt}, \quad D'_{nk(t+1)} = (-1)^{k-1} C_n^{k-1} C_{k-1}^{t-1} D_{nk(t+1)}, \\ D'_{n(k+1)t} &= (-1)^{k-1} C_n^{k-1} C_{k-1}^{t-1} D_{n(k+1)t}. \end{aligned} \quad (22)$$

Далее переходим от обобщённых деформаций ε_0, κ_y и κ_z к компонентам вектора перемещений точек оси стержня u_0, v_0 и w_0 . Для этого подставляем (7) в (21):

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{nkt} \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{du_0}{dx} \right)^{n-k+1} \cdot \left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} \right)^{t-1} \cdot \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^{k-t} \right) + q_x = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{nk(t+1)} \frac{d^2}{dx^2} \left(\left(\frac{du_0}{dx} \right)^{n-k+1} \cdot \left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} \right)^{t-1} \cdot \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^{k-t} \right) - \frac{dm_y}{dx} + q_z = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{n(k+1)t} \frac{d^2}{dx^2} \left(\left(\frac{du_0}{dx} \right)^{n-k+1} \cdot \left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} \right)^{t-1} \cdot \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^{k-t} \right) - \frac{dm_z}{dx} + q_y = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Выражения (21), как и (23) являются системой из трёх нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Вместе с граничными условиями они представляют собой краевую задачу, решение которой полностью определяет напряжённо-деформированное состояние стержня.

6. Решение системы разрешающих уравнений (23). Решение системы (23) в общем виде представляет определённые математические трудности и представляет собой отдельное исследование. Поэтому, здесь рассмотрим решение одной частной задачи методом Галёркинского типа [28].

Примем стержень с жёстко закреплёнными краями, тогда приближённое решение уравнений (23) можно представить в виде:

$$\begin{cases} u_0 = a(\sin(\pi x/l))^2, \\ v_0 = b(\sin(\pi x/l))^2, \\ w_0 = c(\sin(\pi x/l))^2. \end{cases} \quad (24)$$

где l - длина стержня, a, b, c - коэффициенты подлежащие определению. Как не сложно проверить, в таком виде решение точно удовлетворяет краевым условиям: $u_0(0) = u_0(l) = v_0(0) = v_0(l) = w_0(0) = w_0(l) = 0$; $\frac{dv_0}{dx}(0) = \frac{dv_0}{dx}(l) = \frac{dw_0}{dx}(0) = \frac{dw_0}{dx}(l) = 0$.

Подставляем (24) в (23) и интегрируем по переменной x в пределах длины стержня. После преобразований получим систему трёх нелинейных уравнений относительно коэффициентов a, b, c .

$$\begin{cases} -D'_{111} \frac{\pi^2}{2l} a + D'_{311} \frac{3\pi^4}{8l^3} a^3 - D'_{331} \frac{\pi^6}{2l^5} ac^3 + D'_{332} \frac{\pi^6}{2l^5} abc - D'_{333} \frac{\pi^6}{2l^5} ab^2 + \int_0^l q_x \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = 0, \\ \frac{2\pi^4}{l^3} (D'_{122} b + D'_{123} c) + \frac{\pi^6}{2l^5} a^2 (D'_{322} b + D'_{323} c) + \frac{6\pi^8}{l^7} (b^2 (D'_{345} b + D'_{344} c) + c^2 (D'_{343} b + D'_{342} c)) - \\ - \int_0^l \left(\frac{dm_y}{dx} - q_z\right) \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = 0, \\ \frac{2\pi^4}{l^3} (D'_{122} b + D'_{123} c) + \frac{\pi^6}{2l^5} a^2 (D'_{322} b + D'_{323} c) + \frac{6\pi^8}{l^7} (b^2 (D'_{345} b + D'_{344} c) + c^2 (D'_{343} b + D'_{342} c)) - \\ - \int_0^l \left(\frac{dm_z}{dx} - q_y\right) \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Систему (25) решаем методом Ньютона по формуле, аналогичной формуле (15).

7. Примеры расчётов. Определение напряжённо-деформированного состояния балки осуществлялось путем решения разрешающей системы уравнений (11) методом Ньютона. Определив обобщённые деформации поперечных сечений балки, перемещения точек оси находим по формулам (8), а продольные напряжения в слоях по (9).

Для расчёта возьмём однопролётную балку рис.8а. На рисунке все размеры даны в миллиметрах.

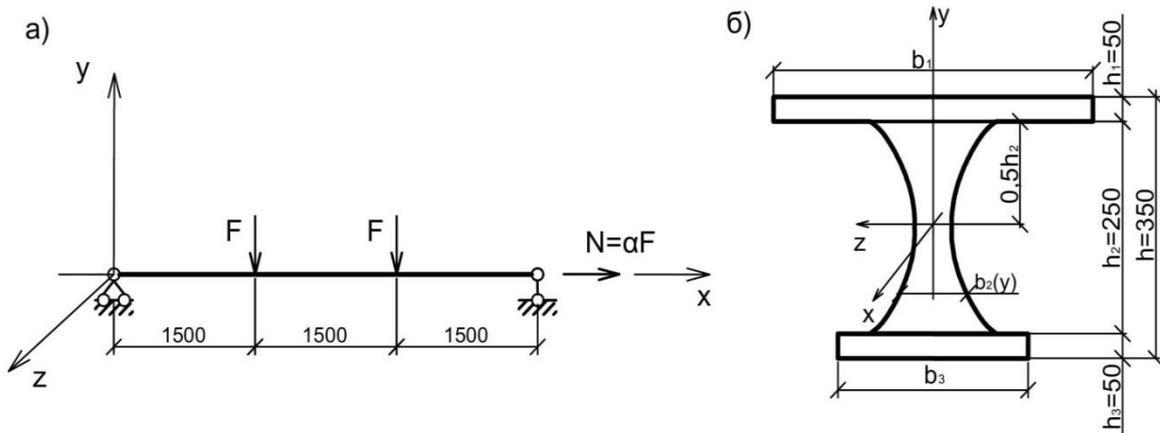


Рис. 8. К расчёту деревянной балки: а) расчётная схема балки; б) поперечное сечение балки

Поперечное сечение балки состоит из трёх слоёв - рис.8б. Каждый слой может быть выполнен из различных пород древесины. Образующие второго слоя представля-

ют собой квадратные параболы, описываемые выражениями $z(y) = \pm(25 + y^2 / 625)$ мм. Тогда ширина второго слоя задаётся соотношением $b_2(y) = 50 + 2y^2 / 625$ мм.

Пример 1. Примем 1 и 3 слои из лиственницы сибирской, 2 слой из берёзы даурской, коэффициент $\alpha = 1$. Проведём серию расчетов, в которых будем изменять ширину верхнего и нижнего слоёв. Введём дополнительное условие на ширину слоёв: $b_1 + b_3 = 400$ мм. Данное условие позволит сохранять неизменными как объём балки, так и стоимость материалов. При другом распределении пород в слоях стоимость материалов будет изменяться. Загружаем балку, увеличивая величину силы F до тех пор, пока в каком-либо слое не выполнится условие прочности (13) со знаком равенства. Результаты расчётов даны в табл.6.

Таблица 6 – Результаты расчёта 1

№	b_1 [см]	b_3 [см]	F_{max} [кН]	w_{max} [см]	θ_{max} 10^{-2} [рад]	Номер слоя, в котором достигнуты предельные деформации	Характер начала разрушения: растяжение (+), сжатие (-)	Степень нагружения нижних волокон, [%]
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	300	122	6,7	4,5	2	-	45,0
2	150	250	148	7,3	5,0	2	-	56,3
3	200	200	173	8,2	5,6	2	-	71,2
4	250	150	194	9,2	6,3	2	-	90,0
5	300	100	190	9,0	6,2	3	-	100,0

В столбце 4 приведена величина предельно допустимой нагрузки F_{max} . В столбцах 5 и 6 максимальное значение прогиба и угла поворота при $F = F_{max}$. Степень нагружения крайних нижних волокон (столбец 9) равна $\max(\epsilon(x, -0.5h)) / \epsilon_{3*}^+$.

Сильная степень разносопротивляемости древесины привела к тому, что наибольшая несущая способность достигается для несимметричного сечения. Также во всех случаях кроме последнего предельные деформации достигались во внутреннем слое сечения.

Пример 2. Расчётную схему балки и форму поперечного сечения возьмём из первого расчёта - рис.7. Примем $b_1 = b_3 = 150$ мм, $\alpha = 0$. Проведём несколько расчётов с неизменной геометрией сечения, но с разными породами слоёв. В первом расчёте (строка 1 табл.6) все слои выполним из граба кавказского. Во втором - в 1 слой поместим породу лучше всего сопротивляющуюся сжатию, а в 3 слой - лучше всего сопротивляющуюся растяжению. В третьем расчёте поменяем породы 1 и 3 слоёв из второго расчёта местами. В четвёртом расчёте 1 слой выполним из породы хуже всего работающей на сжатие, а в 3 слой - из породы хуже всего работающей на растяжение. В пятом расчёте поменяем породы 1 и 3 слоёв из четвёртого расчёта местами. Для каждого из расчётов 2-5 средний слой будем выполнять в двух вариантах: из древесины с низкой прочностью и малым значением E_1 - расчёты 2-5, и из древесины с высокой прочностью и большим значением коэффициента E_1 - расчёты 6-9. Загружаем балку до тех пор, пока в каком-либо слое не выполнится условие прочности (13) со знаком равенства. Результаты расчётов даны в табл.7.

Все породы берём из табл.5. Во втором столбце табл.7 дано распределение пород по слоям в соответствии с нумерацией табл.5. Так шифр 291 означает, что первый слой сделан из граба кавказского, второй - из тополя сереющего и третий - из берёзы даурской.

Таблица 7 – Результаты расчёта 2

№	Распределение пород	F_{max} [кН]	w_{max} [см]	θ_{max} 10^{-2} [рад]	Номер слоя, в котором достигнуты предельные деформации	Характер начала разрушения: растяжение (+), сжатие (-)	Степень нагружения нижних волокон, [%]
1	2	3	4	5	6	7	8
1	222	173	11,8	8,1	3	+	100
2	291	151	9,9	6,7	2	-	58,7
3	192	98	6,5	4,4	1	-	59,3
4	994	93	8,1	5,5	1	-	66,3
5	499	89	7,7	5,3	1	-	51,1
6	211	145	8,1	5,5	2	-	50,5
7	112	111	6,5	4,4	1	-	59,6
8	914	106	8,0	5,5	2	-	66,4
9	419	102	7,7	5,2	1	-	50,1

Анализируя данные табл.7 можно выделить следующие особенности деформирования и разрушения неоднородных деревянных конструкций:

1. В зависимости от распределения пород слоёв разрушение может начинаться как на внешней поверхности балки, так и во внутренних слоях. Иначе говоря, в слоистых конструкциях могут возникать скрытые механизмы разрушения.

2. Предельные деформации могут достигаться как в сжатых, так и в растянутых волокнах. При этом резко меняется характер разрушения [1,6]: достижение предельных деформаций в области сжатия обычно приводит к образованию складок, при этом конструкция сохраняет несущую способность; достижение предельных деформаций в области растяжения приводит к резкому разрушению конструкции.

3. Перераспределение пород значительно влияет на несущую способность и деформативность балки. Величина F_{max} изменяется от 89 до 173 кН, w_{max} - от 6,5 до 11,8 см и θ_{max} от $4,4 \cdot 10^{-2}$ до $8,1 \cdot 10^{-2}$ рад. Простая перестановка пород во внешних слоях (строки 2,3 табл.7) привела к снижению несущей способности в 1,54 раза.

4. Из сравнения расчётов с одинаковыми породами внешних слоёв и разными породами среднего слоя видно, что характеристики среднего слоя не сильно сказываются на несущей способности балки. Максимальное снижение F_{max} составило 1,15 раза. При этом площадь поперечного сечения среднего слоя в 2,23 раза больше площади наружного слоя.

5. Практически во всех расчётах предельные деформации достигались в сжатой зоне. При этом максимальные деформации растяжения составляли (50,1-66,4) % от предельных значений. Что является следствием сильной разносопротивляемости древесины.

*Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 15-01-00825.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арленинов Д.К., Буслаев Ю.Н., Игнатьев В.П., Романов П.Г., Чахов Д.К. Конструкции из дерева и пластмасс. М.: Издательство АСВ, 2002. 280 с.
2. Шмидт А.Б., Дмитриев П.А. Атлас строительных конструкций из клееной древесины и водостойкой фанеры. М.: Издательство АСВ, 2002. 292 с.
3. Porteous J., Kermani A. Structural timber design to Eurocode 5. John Wiley & Sons, 2013. 640 p.

4. Pischl R., Schickhofer G. *The Mur River wooden bridge, Austria // Structural Engineering International*. 1993. Vol. 3. No. 4. pp. 217-219.
5. Poirier E. *Design and construction of a 53-meter-tall timber building at the university of British Columbia // Proceedings of WCTE*. 2016.
6. Стоянов В.В., Окунь И.В. Усиление балочных конструкций методом послойного армирования // *Изв. вузов. Строительство*. - 2013. - №11-12. - С.44-47.
7. Немировский Ю.В., Болтаев А.И. Особенности расчёта деревожелезобетонного балочного моста // *Вестник СибАДИ*. 2016. №5. С. 114-124.
8. Коченов В.М. Несущая способность элементов и соединений деревянных конструкций. М.: Гос. изд. лит. по строительству и архитектуре, 1953. 320 с.
9. СП 64.13330.2011 *Деревянные конструкции*.
10. Ржаницын А.Р. Изгиб и сложное сопротивление прямоугольного сечения стержня при произвольной диаграмме работы материала // *Расчёт тонкостенных пространственных конструкций: сборник статей под ред. А.Р. Ржаницына*. М.: 1964. С. 7-22.
11. Геммерлинг А.В. *Расчет стержневых систем*. М.: Стройиздат, 1974. 208 с.
12. Лукаш П.А. *Основы нелинейной строительной механики*. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.
13. Шапиро Д.М., Агарков А.В., Мельничук Н.Н., Чан Тхи Тхюи Ван *Нелинейные методы расчёта в современном проектировании // Научный журнал строительства и архитектуры*. 2009. №3. С. 85-94.
14. Owen D.R., Hinton E. *Finite elements in plasticity: Theory and Practice*. Swansea, U.K.: John Wiley & Sons, 2013. 640 p.
15. McGuire W., Gallagher R. H., Ziemian R. D. *Matrix structural analysis*, 2014. 460 p.
16. *Исследование прочности и деформативности древесины. Сборник статей / Под ред. д-ра техн. наук проф. Г.Г. Карлсена*. М.: Госстройиздат, 1956. 172 с.
17. Немировский Ю.В., Гребенюк Г.И., Ажермачёв А.В. Расчёт ребристых деревянных конструкций с учетом эффектов разномодульности и нелинейности сопротивления // *Изв. вузов. Строительство*. 2007. №3. С. 4-12.
18. Квасников Е.Н. *Вопросы длительного сопротивления древесины*. Л.: Стройиздат, 1972. 96 с.
19. ГСССД 69-84. *Древесина. Показатели физико-механических свойств малых чистых образцов*. Издание Госстандарта СССР. 1984.
20. Немировский Ю.В. *Расчёт и рациональное проектирование деревянных стержневых элементов / Современные проблемы совершенствования и развития конструкций в строительстве и транспорте: сборник научных трудов III Междунар. научно-технич. конференции*. Самара: Изд-во СамГАСУ, 2005. С.247-251.
21. Немировский Ю.В. *Метод расчёта композитных стержневых систем из разномодульных материалов / Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: материалы V Всероссийской научной конференции*. Томск: Изд-во ТГУ, 2006. С.288-290.
22. Дрейпер Н., Смит Г. *Прикладной регрессионный анализ. Кн.1*. М.: Финансы и статистика, 1986. 366 с.
23. Волынский В. Н. *Взаимосвязь и изменчивость физико-механических свойств древесины*. Архангельск: Издательство АГТУ, 2000. 196 с.
24. Боровиков А. М., Уголев Б.Н. *Справочник по древесине*. М.: Лесная промышленность, 1989. 296 с.
25. Филлин А.П. *Прикладная механика твердого деформируемого тела*. – М.: Наука, 1978. - 616 с.

26. Немировский Ю.В., Болтаев А.И. Особенности деформирования и разрушения деревянных клееных многопролётных балок. Сообщение 1 // Изв. вузов. Строительство. 2016. №6. С. 116-126.
27. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. - М.: Мир, 1975. - 558 с.
28. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. - М.: Мир, 1988. - 352.
29. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. - М.: Мир, 1985. - 509.

ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРА МЕЖЧАСТИЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ЧИСЛА БЛОКИРОВАННЫХ УЗЛОВ НА КОЭФФИЦИЕНТ ДИФФУЗИИ РЕШЕТОЧНОГО ФЛЮИДА НА ПРОСТОЙ КУБИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

¹Грода Я.Г., ²ди Каприо Д., ¹Вихренко В.С.

¹УО «Белорусский государственный технологический университет», Минск

²Высшая национальная школа химии, Париж

Введение. Рассматриваемая в работе модель представляет собой пространственную простую кубическую решетку, каждый узел которой может находиться в одном из трех возможных состояний: быть занятым примесной частицей, быть вакантным либо заблокированным. При этом примесные частицы, занимающие ближайшие решеточные узлы, могут взаимодействовать друг с другом с энергией J . Занятие узла более чем одной частицей считается невозможным.

С практической точки зрения построенная модель пригодна для описания свойств ансамбля примесных частиц, абсорбированных на поверхности кристалла. В этом случае реальные атомы кристалла, взаимодействуя друг с другом, формируют некоторый профиль потенциальной энергии, минимумы которого являются наиболее предпочтительными положениями для размещения в них примесных частиц. Данные положения и выступают в качестве условных узлов рассматриваемой решеточной модели. Запрет частицам занимать некоторые из этих узлов – блокировка узлов – может быть вызван, например, дефектами кристаллической структуры исходного кристалла либо нахождения в нем тяжелых примесных частиц, обладающих низкой подвижностью.

Для определения равновесных характеристик рассматриваемой модели в работах [1, 2] было предложено квазихимическое приближение, которое позволило получить простые аналитические выражения для нахождения ее термодинамических и структурных характеристик в случае систем любых размерностей. Сопоставление результатов, полученных в рамках данного приближения, с данными моделирования равновесных свойств решеточных систем по методу Монте-Карло показало [3], что оно может с успехом использоваться для оценки равновесных свойств трехмерных решеток с заблокированными узлами, по меньшей мере, в случае решеточного флюида, не обладающего упорядоченной фазой, либо при температурах выше критической. Также в работе [4] был рассмотрен процесс диффузии решеточного флюида с притяжением ближайших соседей на плоской квадратной решетке с заблокированными узлами. В частности, было установлено, что при $k_B T > |J|$ кинетический коэффициент диффузии может быть оценен с достаточной степенью точности с помощью соотношения Жданова [5] на основе информации о равновесных значениях термодинамических параметров системы.

В настоящей работе представлены результаты исследования методами компьютерного моделирования диффузионных характеристик решеточного флюида с притяжением/отталкиванием ближайших соседей на простой кубической решетке при различном количестве заблокированных узлов на ней.

Квазихимическое приближение. В основе построения квазихимического приближения для определения равновесных характеристик рассматриваемой системы лежит рассмотрение наряду с исходной подобной ей базисной системы, которая определяется одночастичными средними потенциалами. В рамках этого приближения для таких величин, как свободная энергия F , химический потенциал μ , термодинамический фактор χ_T и вероятность $F(1; 1)$ двум ближайшим узлам решетки быть занятыми частицами, были получены следующие аналитические выражения [1, 6]:

$$\beta F = \theta \ln \theta + (1 - \theta - c) \ln(1 - \theta - c) + c \ln c - \frac{z}{2} \ln Y + \frac{z}{2} (1 - 2c) \ln \eta, \quad (1)$$

$$\beta \mu = \ln \frac{c}{1 - \theta - c} - z \ln \frac{Y - c}{1 - c}, \quad (2)$$

$$\chi_T = \frac{1 - \theta}{1 - \theta - c} + z \frac{c}{1 - 2Y} \left(\frac{W}{Y - c} - \frac{1}{1 - c} \right), \quad (3)$$

$$F(1; 1) = \frac{c^2(1 - c)}{Y(Y - c)} W, \quad (4)$$

где

$$Y = 0,5 \left(1 + \sqrt{1 + 4c(1 - c)(W - 1)} \right), \quad \eta = \frac{Y - c}{1 - c}, \quad W = \exp(-\beta J), \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (5)$$

c и θ – концентрации частиц и заблокированных узлов соответственно; k_B – постоянная Больцмана; T – температура; J – энергия взаимодействия двух примесных частиц, занимающих ближайшие решеточные узлы ($J < 0$ в случае системы с притяжением между частицами и $J > 0$ для системы с межчастичным отталкиванием).

Необходимо отметить, что соотношения (1) – (5) справедливы лишь для систем, не обладающих макроскопической упорядоченностью. Применительно к рассматриваемой модели это соответствует рассмотрению решеточного флюида с притяжением ближайших соседей либо флюида с отталкиванием ближайших соседей, но при температурах выше критической. Для описания упорядоченной фазы необходимо рассмотреть исходную решетку как систему нескольких подрешеток (в случаях квадратной и кубической решеток – двух) и ввести параметр порядка в виде разности концентраций на них [1, 2]. Данный параметр порядка может быть определен из условия равенства химических потенциалов на подрешетках либо из эквивалентного ему условия экстремальности свободной энергии при его варьировании. При таком подходе может быть записано выражение для свободной энергии решеточного флюида, но производные от этого выражения, определяющие химический потенциал, термодинамический фактор и функцию распределения могут быть вычислены лишь численно и не допускают представления в замкнутой форме.

Алгоритм моделирования. Как равновесные, так и транспортные характеристики рассматриваемых систем могут быть определены в ходе их компьютерного моделирования по методу Монте-Карло [7].

При этом равновесные свойства решеточного флюида моделируются в большом каноническом ансамбле. Для этого первоначально рассматривается произвольное распределение некоторого числа частиц по решетке, содержащей $N = L^d$ узлов (L – линейный размер решетки, d – размерность пространства). Затем произвольным образом выбирается незаблокированный узел решетки. Если этот узел занят частицей, то эта частица изымается, если же он вакантен, то частица добавляется, и определяется изменение энергии δE_N . Если $\delta E_N \leq 0$, то новая конфигурация принимается, если $\delta E_N > 0$, то она принимается с вероятностью $W = \exp(-E_N/k_B T)$. Для этого случайным образом генерируется число W_0 из интервала $[0; 1]$, и если $W \geq W_0$, то новая конфигурация принимается. В противном случае новая конфигурация отвергается, и система возвращается в прежнее состояние. Повторение описанной процедуры n раз, где n – число частиц на решетке, формирует один шаг алгоритма Монте-Карло (МКШ).

Поскольку первоначальное состояние моделируемой системы является произвольным и может существенно отличаться от равновесного, для перехода системы в состояние термодинамического равновесия требуется некоторое число МКШ. При определении средних значений термодинамических величин эти начальные шаги не учитываются.

В свою очередь, диффузионный процесс во флюиде моделируется в каноническом

ансамбле, т.е. при постоянном числе примесных частиц. При этом моделирование, как и в первом случае, начинается со случайного распределения частиц. В рамках используемого алгоритма случайным образом выбирается узел i , занятый частицей. После этого также случайно определяется направление возможного прыжка частицы в один из ближайших узлов j . Если второй выбранный узел занят частицей либо является заблокированным, то переход частицы в него, очевидно, невозможен. Тем не менее, попытка такого перехода учитывается. Если же он свободен, то переход частицы в него осуществляется с вероятностью:

$$P_{ij} = P_0^{-1} \exp(\beta J s), \quad (6)$$

где P_0 – нормировочный коэффициент, равный 1 для системы с притяжением ближайших соседей и $\exp(5\beta J)$ для системы с отталкиванием и его смысл состоит в том, чтобы вероятности перехода не превышали единицу, а наиболее энергетически выгодный переход частицы осуществлялся с вероятностью, равной 1; s – число ближайших соседей частицы, находящейся в исходном узле i .

Это означает, что если $P_r > P_{ij}$, где P_r – случайное число из диапазона $[0; 1]$, то переход частицы между узлами не осуществляется, в противном случае он считается произошедшим. Повторение данной процедуры n раз, где n – число частиц на решетке, формирует один шаг алгоритма Монте-Карло (МКШ).

При моделировании использовалась решетка, содержащая $12^3 = 1728$ решеточных узлов в сочетании с периодическими граничными условиями. Полная длина процедуры моделирования состояла из 100 000 шагов алгоритма Монте-Карло (МКШ). При этом первые 10 000 МКШ отводились на процесс эквиприоризации и не учитывались при дальнейших усреднениях. Необходимо также отметить, что выполнение 90 000 существенных МКШ формировало одну траекторию движения центра масс системы примесных частиц, а окончательные результаты получались путем усреднения не менее чем по 3 584 таких траекторий (количество траекторий варьировалось в зависимости от температуры моделируемой системы и числа частиц в ней). Также необходимо отметить, что при моделировании каждой из траекторий происходила новая расстановка заблокированных узлов на решетке в соответствии с заданной их концентрацией.

Таким образом, в результате моделирования определялась зависимость среднего квадрата смещения всех частиц системы от времени, измеренного в шагах алгоритма Монте-Карло. Кинетический коэффициент диффузии системы D_J определялся путем ее линейной аппроксимации.

Типичный вид зависимости среднего квадрата смещения частиц системы от времени, измеренного в шагах алгоритма Монте-Карло, представлен на рис. 1 для случая системы с притяжением и отталкиванием между ближайшими соседями при концентрации заблокированных узлов равной 0.30% и параметре взаимодействия равном $\beta J = 0.845$.

Прежде всего можно отметить, что в отличие от решеточного флюида на плоских решетках, в случае пространственной системы субдиффузионный режим, проявляющийся в нелинейном характере зависимости среднего квадрата смещения частиц от времени, практически не проявляется даже при относительно высокой концентрации заблокированных узлов. Данное обстоятельство позволяет использовать для определения кинетического коэффициента диффузии всю траекторию, полученную в ходе моделирования, не отбрасывая как ранее некоторое начальное число шагов алгоритма Монте-Карло соответствующих субдиффузионной области.

Результат линейной аппроксимации полученной зависимости также представлен на рис. 1 в виде пунктирной прямой. Фактически тангенс угла данной прямой и определяет кинетический коэффициент диффузии исследуемой системы.

Можно также отметить, что исходя из данных, представленных на рис. 1, коэффициент диффузии для системы с отталкиванием оказывается приблизительно на порядок

меньше по сравнению с коэффициентом диффузии системы с притяжением. Однако в этом случае необходимо учесть, что при моделировании данные параметры определяются при различных значениях нормирующего множителя P_0 (см. соотношение (6)).

Аналогичным образом может быть определен и одночастичный коэффициент диффузии меченных атомов D_{tr} . В этом случае при моделировании определяется не средний квадрат смещения всех частиц системы, а средний квадрат смещения одной частицы.

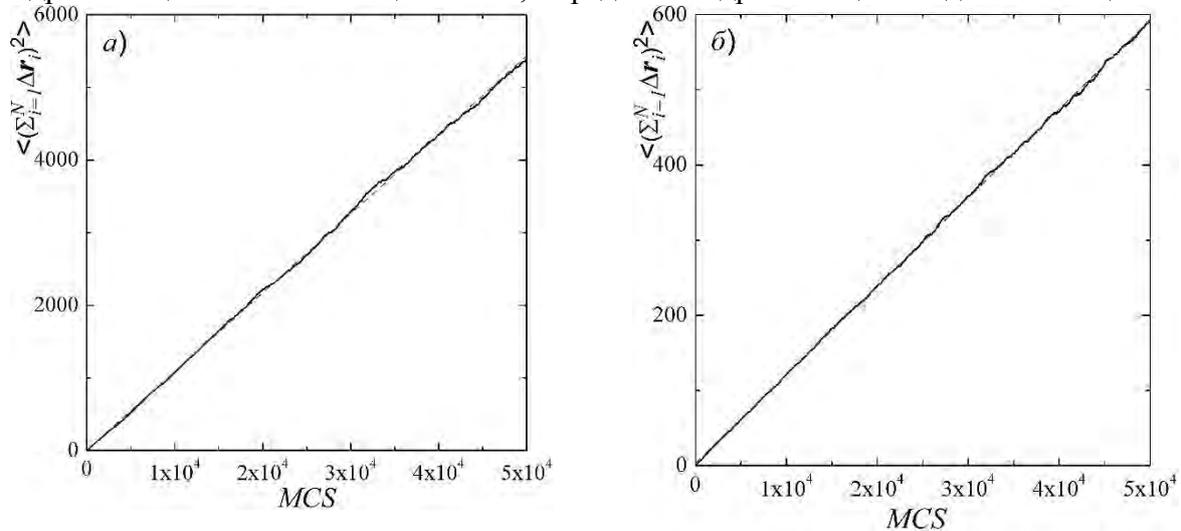


Рис. 1. Зависимость от времени, измеренного в шагах алгоритма Монте-Карло, среднего квадрата смещения всех частиц системы в случае решеточного флюида с притяжением (а) и отталкиванием (б) ближайших соседей на простой кубической решетке, содержащей 30% при $\beta|J| = 0.845$ и $c = 0.21$

Результаты моделирования и их обсуждение. На рис. 2 представлены зависимости кинетического коэффициента диффузии решеточного флюида от концентрации примесных частиц, определенные при рассмотрении систем с различным характером межчастичного взаимодействия ближайших соседей и при различном числе заблокированных решеточных узлов. В целом можно отметить, что полученные зависимости, с качественной точки зрения, соответствуют результатам для обычного решеточного флюида на кубической решетке [8].

В случае системы с отталкиванием уменьшение коэффициента диффузии в области средних концентраций при низких температурах обусловлено существованием в системе при этих условиях упорядоченной фазы. В упорядоченной фазе исходная решетка распадается на отдельные упорядоченные домены. Упорядоченные состояния доменов соответствует т.н. «шахматному» порядку, а их расположение определяется положениями заблокированных узлов. Очевидно, что в таком упорядоченном состоянии подвижность частиц снижается, что и проявляется в уменьшении коэффициента диффузии.

Наряду с определением кинетического коэффициента диффузии решеточного флюида в ходе прямого компьютерного моделирования диффузионного процесса были выполнены его оценки на основе соотношения Жданова [5], позволяющего найти коэффициент диффузии через коэффициент диффузии лэнгмюровского газа D_0 и равновесные характеристики системы:

$$D_J = D_0 \frac{\exp[\beta\mu]}{c} F(0; 0). \quad (7)$$

Входящие в соотношение (7) равновесные значения химического потенциала μ , концентрации c и вероятность двум ближайшим решеточным узлам быть вакантными $F(0; 0)$ могут быть найдены как в рамках развитого квазихимического приближения, так и непосредственно при моделировании равновесных параметров по методу Монте-Карло.

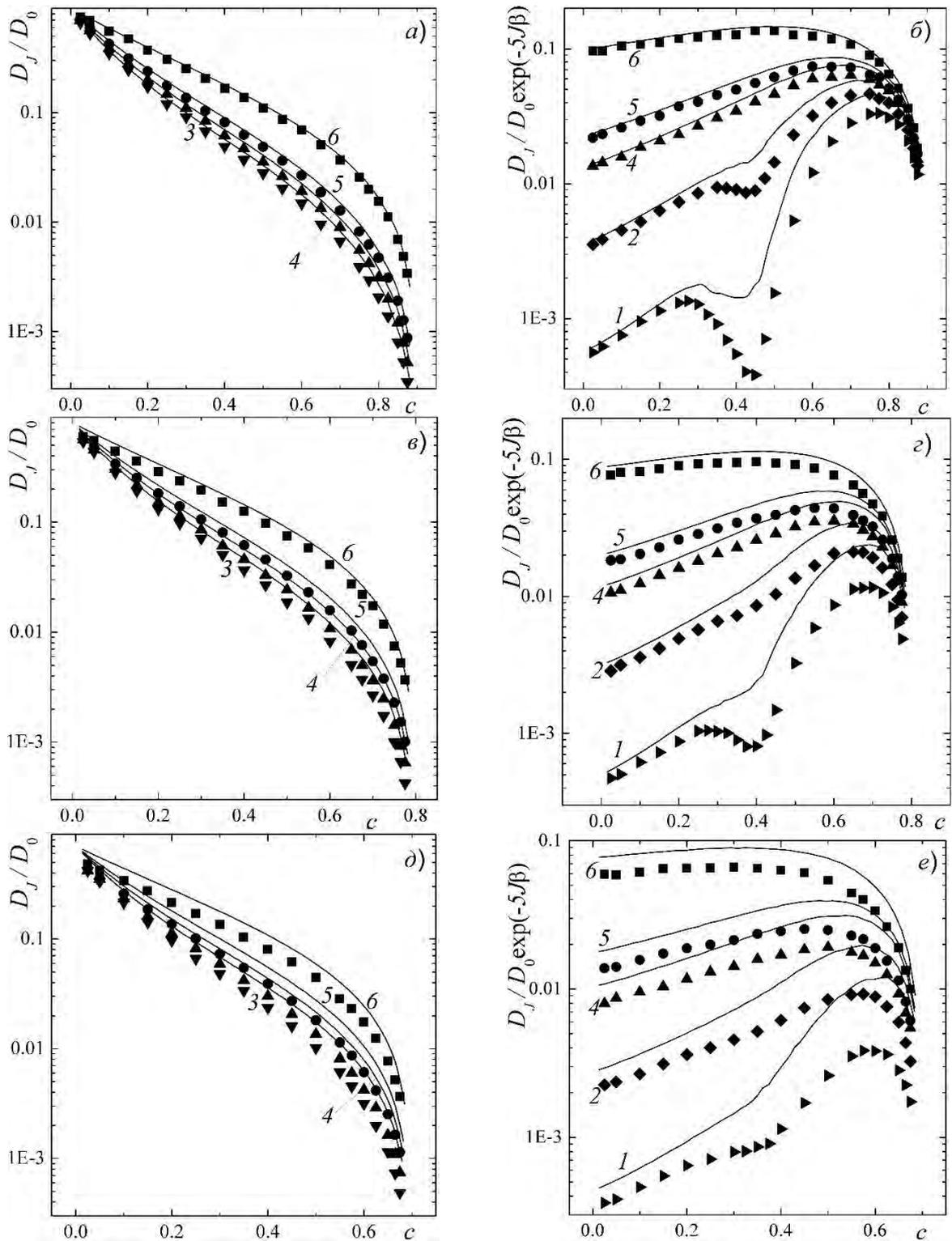


Рис. 2. Концентрационные зависимости кинетического коэффициента диффузии решеточного флюида с притяжением (а, в, д) и отталкиванием (б, г, е) ближайших соседей на простой кубической решетке, содержащей 10% (а, б), 20% (в, г) и 30% (д, е) заблокированных узлов. $\beta|J| = 1.478$ (кривые 1); 1.108 (2); 0.933 (3); 0.845 (4); 0.739 (5) и 0.443 (6). Символы – результаты моделирования, кривые – результаты использования соотношения Жданова (7)

В последнем случае появляется возможность непосредственно проверить возможность применения соотношения (7) для оценки коэффициента диффузии. Полученные подобным образом результаты представлены на рис. 2 в виде сплошных линий.

Сопоставление результатов позволило сделать вывод, что соотношение (7) верно

отражает качественные особенности рассматриваемых зависимостей, но его точность недостаточна для количественной оценки коэффициента диффузии, особенно для систем, содержащих относительно большое число заблокированных узлов. В целом получаемые с его помощью результаты оказываются завышенными по сравнению с данными моделирования. Это может быть объяснено тем, что в соотношении (7) не учитывается снижения числа доступных для миграции решеточных узлов, вызванное эффектами блокировки части из них.

Исследования выполнены при грантовой поддержке Министерства образования Беларуси, научной программы Евросоюза HORIZON-2020 (проект AMD-734276-CONIN), а также Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант №Ф16К-614).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Influence of Obstacles on Equilibrium Properties of the Lattice Fluid on a Surface / P. Argyrakis [et al.] // In: Proceedings of the International Conference Nanomaterials: Applications and Properties – Zatoka, Ukraine, 10-15 September 2017 – Article 01PCSI15 (5 p.).*
2. *Аргиракис, П. Термодинамические и структурные свойства решеточного флюида на плоской квадратной решетке с заблокированными узлами: квазихимическое приближение / П. Аргиракис, П. Гуазитзидис, Я. Г. Грода // Труды БГТУ. – 2015. – № 6 (179): Физ.-мат. науки и информатика. – С. 48-52.*
3. *Грода, Я. Г. Равновесные свойства решеточного флюида с притяжением ближайших соседей на простой кубической решетке с заблокированными узлами / Я. Г. Грода, Э. Э. Бильданов // Труды БГТУ. – 2017. – № 2 (200): Физ.-мат. науки и информатика. – С. 40-44.*
4. *Аргиракис, П. Кинетический коэффициент диффузии решеточного флюида на плоской квадратной решетке с заблокированными узлами / П. Аргиракис, П. Гуазитзидис, Я. Г. Грода // Труды БГТУ. – 2016. – № 6 (188): Физ.-мат. науки и информатика. – С. 36-40.*
5. *Zhdanov, V. P. General Equation for Description of Surface Diffusion in the Framework of the Lattice Gas Model / V. P. Zhdanov // Surf. Sci. – 1985. – vol. 149. – L13–L17.*
6. *The self-consistent diagram approximation for lattice systems / G.S. Bokun [et al.] // The European Physical Journal B. 2000. Vol. 15, no. 2. P. 297–304.*
7. *Uebing, C. A Monte Carlo study of surface diffusion coefficients in the presence of adsorbate-adsorbate interactions / C. Uebing, R. Gomer // The Journal of Chemical Physics. – 1991. – Vol. 95, no. 10. – P. 7626–7652.*
8. *Вихренко, В.С. Равновесные и диффузионные характеристики интеркаляционных систем на основе решеточных моделей / В.С. Вихренко, Я.Г. Грода, Г.С. Бокун – Минск: БГТУ, 2008. – 326 с.*

РЕШЕНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ ГЕОМЕХАНИКИ И ГЕОТЕХНИКИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРОВАННОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Козловский Е.Я., Богдан С.И., Журавков М.А.

Белорусский государственный университет, Минск

В практике строительства подземных сооружений всегда присутствуют сложные конструктивно-планировочные решения, концентрирующие комплексы взаимовлияющих выработок (см. рис.1), расчет которых не может быть произведен инженерными методиками без принятия существенного количества дополнительных допущений, упрощений и запасов.

Существующие на территории Республики Беларусь и Российской Федерации нормативные документы в области горного дела [1, 2] не допускают расчет методами механики сплошных сред.

Для анализа и подтверждения надежности принятых решений в инженерной практике проводятся проверочные расчеты методами конечных, граничных, дискретных элементов и т.д.

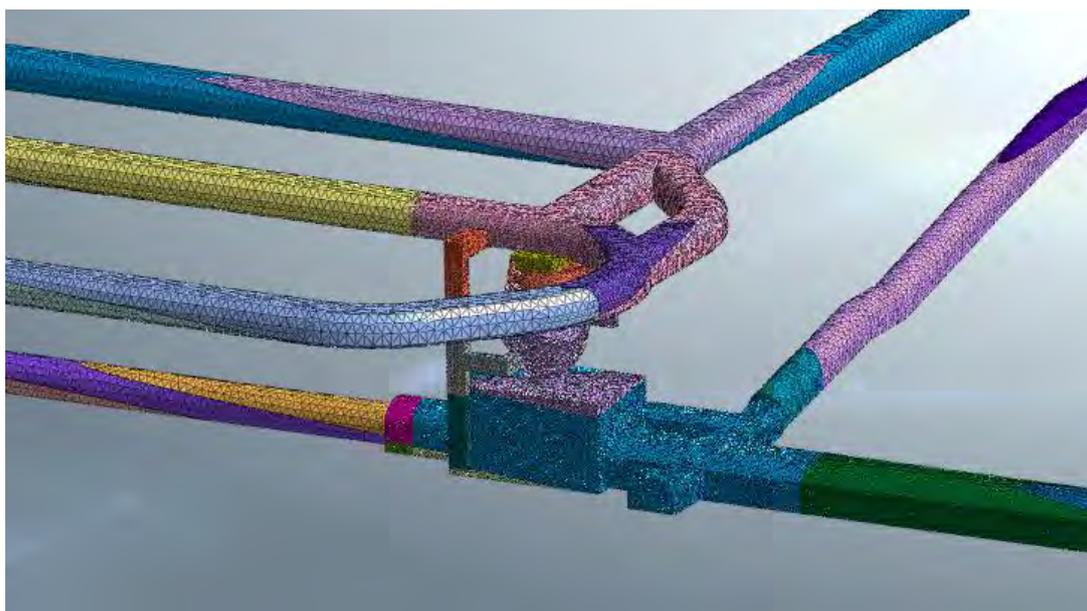


Рис.1. Сетки конечных элементов цепочки камер и сопряжений

При решении задач горной геомеханики и расчета крепей методом конечных элементов (см. рис.2) часто применяется критерий Мора-Кулона, требующий кроме деформационных показателей, ещё и характеристики сопротивления сдвигу, а также может быть расширен критериями прочности на растяжение, дилатансии и т.д.

В ходе расчета может быть искусственно учтена происходящая на различных временных этапах разгрузка массива, а в результате получены конечные напряжения в крепи (обделке) или иных конструкциях, при переходе из которых на усилия в дальнейшем произведен расчеты по двум предельным состояниям согласно действующим нормативным подходам к расчетам бетонных и железобетонных конструкций.

В трещиноватых массивах задачи усложняются и решение во многом зависит от характерных поверхностей скольжения, их ориентации, положения и формы.

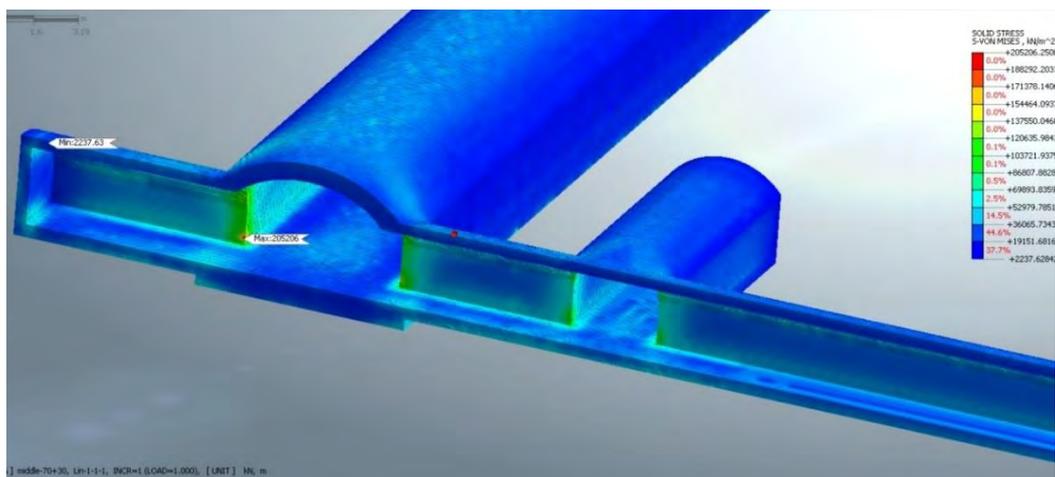


Рис. 2. Эквивалентные напряжения по Мизесу (кПа) в крепи сопряжения

Иначе дело обстоит в строительстве сооружений, не связанных с добычей полезных ископаемых. В частности, нормативные документы на тоннели и метрополитены допускают расчеты методами механики сплошных сред [3-5], а наиболее прогрессивные актуализированные нормы по проектированию коллекторов и оснований сооружений [5-8] во многих случаях отдают предпочтение анализу численными методами перед аналитическими и полуэмпирическими, т.к. их применение позволяет получить достаточно надежные результаты для сооружений, усилия в которых сильно зависят от жесткости соседних сооружений, жесткости и прочности окружающего геомассива и его напряженного состояния.

В ежедневной геотехнической практике появляется все больше задач по оценке влияния нового строительства на существующие сооружения, а также связанных со сложной геометрией расчетной схемы [9]. При этом становится очень важно учитывать сложную нелинейную работу грунта в допредельной стадии, а использованием идеально упруго-пластической модели, которая сохраняет линейную связь «напряжения-деформации» до перехода в течение на пределе, можно получить результаты противоречащие здравому смыслу (подъем здания при разработке глубокого котлована вблизи). Современные модели упрочняющейся среды требуют расширенных лабораторных испытаний грунтов, но позволяют описать геомассив с учетом модуля деформации при «разгрузке – повторной нагрузке», изменения объема при действии касательных напряжений, описывают дилатансию и контракцию, снижение сопротивления сдвигу. В результате учета вышеперечисленных факторов получается корректная картина напряженно-деформируемого состояния при снижениях напряжений, а также происходит уход от понятия глубины сжимаемой толщи.

При решении практических задач геотехники (см. рис.3) большое внимание уделяется коррекции вводных параметров модели, проведению виртуальных испытаний грунтов, дублирующих лабораторные до удовлетворительного повторения результатов. При этом происходит подбор некоторых дополнительных параметров вручную по известным теоретическим зависимостям, заложенным в математические модели.

В течение последних 10 лет вычислительные мощности значительно возросли, в т.ч. за счет развития архитектуры параллельных вычислений на графических процессорах (CUDA), получили широкое распространение в геотехническом проектировании более современные модели грунтов, учитывающие допредельную нелинейную работу материала, хорошо коррелирующую с его реальным поведением.

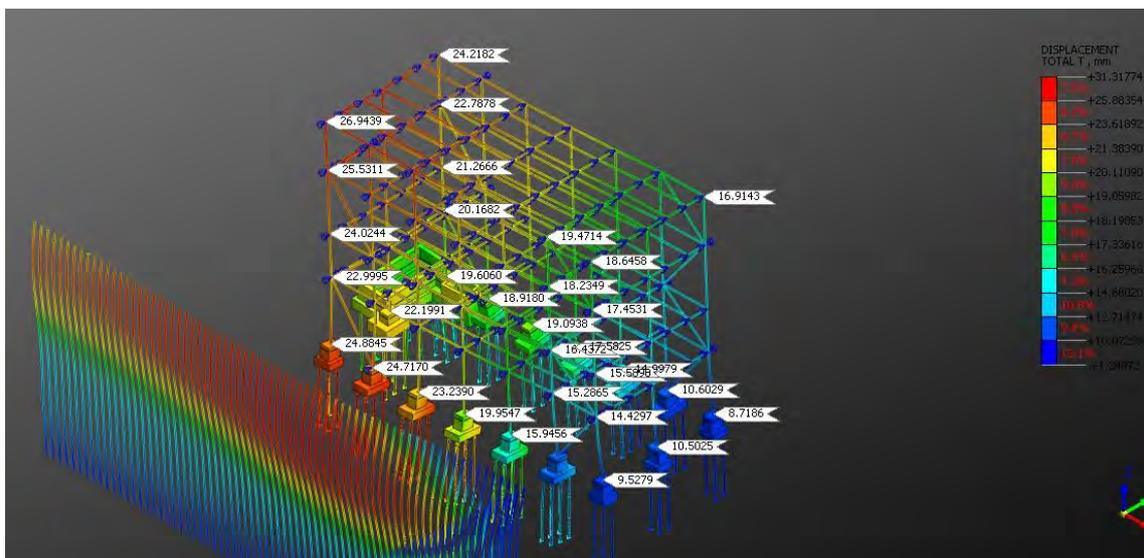


Рис. 3. Суммарные деформации здания при экскавации грунта у подпорной стены для нового строительства

Использование получаемых в результате численного анализа данных совместно с натурными наблюдениями способствует адекватной оценке проектных ситуаций, позволяют избежать перерасхода материалов и дополнительных работ без реальной необходимости, предвидеть неявные нежелательные эффекты и обеспечить сохранность существующих зданий и сооружений.

ЛИТЕРАТУРА

1. СНиП II-94-80 Подземные горные выработки;
2. СП 91.13330.2012 Подземные горные выработки;
3. СП 120.13330.2012 Метрополитены;
4. СП 122.13330.2012 Тоннели железнодорожные и автодорожные;
5. СП 248.1325800.2016 Подземные сооружения. Правила проектирования;
6. СП 249.1325800.2016 Коммуникации подземные. Проектирование и строительство закрытым и открытым способом;
7. ТКП EN 1997-1-2009 Геотехническое проектирование;
8. СП 22.13330.2016 Основания зданий и сооружений;
9. Справочник геотехника. Основания, фундаменты и подземные сооружения, — 2-ое издание, дополненное и переработанное, Москва: АСВ, 2016. — 1040 с.

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Леоненко Д.В., Зеленая А.С.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. В условиях деформации изгиба трехслойные конструкции, которые состоят из двух несущих слоев и сжимаемого заполнителя, оказываются наиболее рациональными, то есть близкими к оптимальным с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость.

В монографии [1] исследованы трехслойные стержни в терморadiационных полях. Деформация трехслойного упругопластического стержня на упругом основании рассмотрена в работе [2]. Статья [3] посвящена изучению термоупругопластического изгиба круглой трехслойной пластины на деформируемом основании.

Здесь выполнена постановка и решение задачи о статическом деформировании физически нелинейной прямоугольной трехслойной пластины, получены уравнения равновесия в усилиях и перемещениях, проведен численный анализ решения.

Постановка задачи. Рассматривается изгиб несимметричной по толщине трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, несущие слои которой выполнены из упругопластического материала, а заполнитель – нелинейно упругий. Систему координат x, y, z свяжем со срединной плоскостью заполнителя (рис.1). Принимаем, что для изотропных несущих слоев справедливы гипотезы Кирхгофа. В жестком заполнителе применим точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . Учитываем, что на границах контакта перемещения непрерывны. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

На внешнюю поверхность первого несущего слоя действует произвольная распределенная нагрузка, проекции которой на координатные оси: $q(x, y)$, $p_x(x, y)$, $p_y(x, y)$. За искомые функции принимаем продольные перемещения $u_{kx}(x, y)$, $u_{ky}(x, y)$ и прогибы $w_k(x, y)$ срединных поверхностей несущих слоев ($k=1,2$).

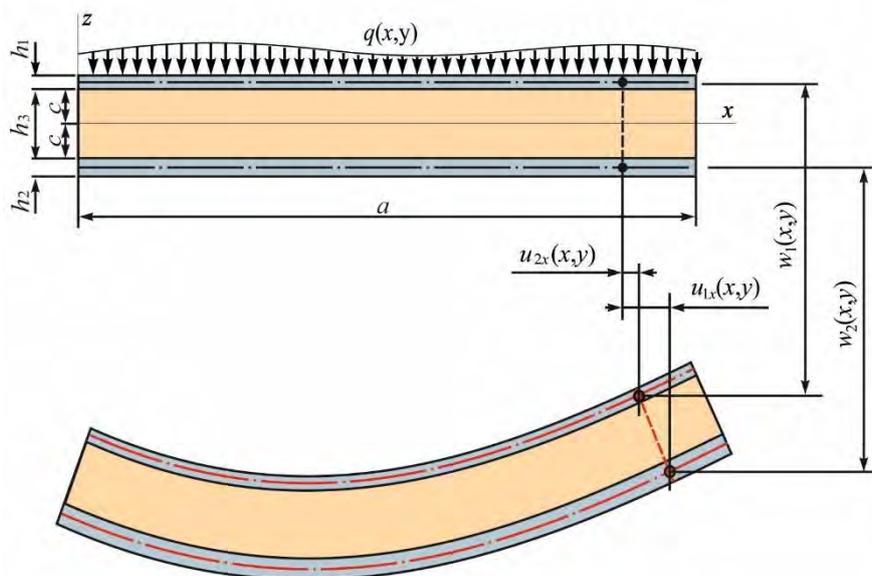


Рис.1. Расчетная схема

В слоях пластины применим физические уравнения состояния, соответствующие теории малых упругопластических деформаций:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= 2G_k \left(1 - \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})\right) \varepsilon_{ij}^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (i, j = x, y, z, k = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (1)$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений; $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформации в k -м слое; $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности Ильюшина в несущих слоях, которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_T^{(k)}$ следует положить равными нулю, $\varepsilon_T^{(k)}$ – предел текучести материала; $\omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность материала заполнителя, причем $\omega^{(3)} \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$; $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности заполнителя; G_k – сдвиговой модуль упругости материалов, K_k – объемный модуль упругости материалов.

Ранее в [4] были получены силовые уравнения равновесия для упругой пластины и соответствующие граничные условия. Они не зависят от физических уравнений состояния, поэтому справедливы и для упругопластической пластины.

Исходя из соотношений (1) выделим в тензоре напряжений упругие (с индексом «0») и нелинейные (с индексом « ω ») слагаемые:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{(k)0} - \sigma_{ij}^{(k)\omega}, \\ \sigma_{ij}^{(k)0} &= 2G_k \varepsilon_{ij}^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} \delta_{ij}, \quad \sigma_{ij}^{(k)\omega} = 2G_k \omega^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(k)} \end{aligned} \quad (2)$$

С внутренними усилиями и обобщенными усилиями проведем аналогичные операции, разбивая на линейные и нелинейные составляющие. Подставив обобщенные усилия в систему уравнений равновесия для упругой пластины и преобразовав, получим систему уравнений физически нелинейной трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем:

$$\begin{aligned} H_{1x}^0 - V_{1,y}^0 - P_{1x,x}^0 &= p_x + H_{1x}^\omega - V_{1,y}^\omega - P_{1x,x}^\omega, \\ H_{1x}^0 + V_{2,y}^0 + P_{2x,x}^0 &= H_{1x}^\omega + V_{2,y}^\omega + P_{2x,x}^\omega, \\ H_{1y}^0 - V_{1,x}^0 - P_{1y,y}^0 &= p_y + H_{1y}^\omega - V_{1,x}^\omega - P_{1y,y}^\omega, \\ H_{1y}^0 + V_{2,x}^0 + P_{2y,y}^0 &= H_{1y}^\omega + V_{2,x}^\omega + P_{2y,y}^\omega, \end{aligned} \quad (3)$$

$$S_{1x,xx}^0 + H_2^0 - T_{1x,x}^0 - U_{1,yy}^0 + S_{1y,yy}^0 - T_{1y,y}^0 = q + \frac{p_{x,xx} h_1}{2} + \frac{p_{y,yy} h_1}{2} + S_{1x,xx}^\omega + H_2^\omega - T_{1x,x}^\omega - U_{1,yy}^\omega + S_{1y,yy}^\omega - T_{1y,y}^\omega,$$

$$S_{2x,xx}^0 - H_2^0 - T_{2x,x}^0 - U_{2,xy}^0 + S_{2y,yy}^0 - T_{2y,y}^0 = S_{2x,xx}^\omega - H_2^\omega - T_{2x,x}^\omega - U_{2,xy}^\omega + S_{2y,yy}^\omega - T_{2y,y}^\omega,$$

где H_{kx} , H_{ky} , V_k , P_{kx} , P_{ky} , S_{kx} , S_{ky} , H_k , T_{kx} , T_{ky} , U_k – обобщенные усилия (упругие – с индексом «0», нелинейные – с индексом « ω »).

С силовыми граничными условиями поступим аналогично, т.е. при $x=0, a$ должны выполняться требования:

$$\begin{aligned} P_{1x}^0 &= N_{rx}^{(1)} + P_{1x}^\omega, \quad P_{2x}^0 = N_{rx}^{(2)} + P_{2x}^\omega, \quad V_1^0 = Q_{rxy}^{(1)} + V_1^\omega, \quad V_2^0 = Q_{rxy}^{(2)} + V_2^\omega, \\ T_{1x}^0 - S_{1x,x}^0 - U_{1,y}^0 &= Q_{rx}^{(1)} + (T_{1x}^\omega - S_{1x,x}^\omega - U_{1,y}^\omega), \\ T_{2x}^0 - S_{2x,x}^0 - U_{2,y}^0 &= Q_{rx}^{(1)} + (T_{2x}^\omega - S_{2x,x}^\omega - U_{2,y}^\omega), \quad S_{1x}^0 = M_{rx}^{(1)} + S_{1x}^\omega, \quad S_{2x}^0 = M_{rx}^{(2)} + S_{2x}^\omega. \end{aligned}$$

При $y=0, b$

$$\begin{aligned} P_{1y}^0 &= N_{ly}^{(1)} + P_{1y}^\omega, \quad P_{2y}^0 = N_{ly}^{(2)} + P_{2y}^\omega, \quad V_1^0 = Q_{lxy}^{(1)} + V_1^\omega, \quad V_2^0 = Q_{lxy}^{(2)} + V_2^\omega, \\ T_{1y}^0 - S_{1y,y}^0 &= Q_{ly}^{(1)} + (T_{1y}^\omega - S_{1y,y}^\omega), \quad T_{2y}^0 - S_{2y,y}^0 = Q_{ly}^{(2)} + (T_{2y}^\omega - S_{2y,y}^\omega), \end{aligned} \quad (4)$$

$$S_{1y}^0 = M_{ly}^{(1)} + S_{1y}^\omega, \quad S_{2y}^0 = M_{ly}^{(2)} + S_{2y}^\omega, \quad U_1^0 = Q_{lx}^{(1)} + U_1^\omega, \quad U_2^0 = Q_{lx}^{(2)} + U_2^\omega$$

Здесь $N_{rx}^{(1)}$, $Q_{rx}^{(1)}$, $Q_{rx}^{(1)}$, $M_{rx}^{(1)}$, $N_{ly}^{(1)}$, $Q_{ly}^{(1)}$, $Q_{ly}^{(1)}$, $M_{ly}^{(1)}$ – заданные усилия на торцах пластины в первом несущем слое (с индексом «2» – во втором несущем слое). Индекс r принимает значения $0, a$, индекс l – $0, b$, указывая, на каком конце пластины задано усилие.

Подставим выражения линейных и нелинейных составляющих внутренних усилий через искомые функции u_{1x} , u_{1y} , u_{2x} , u_{2y} , w_1 , w_2 в уравнения равновесия (3), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений прямоугольной физически нелинейной трехслойной пластины:

$$\begin{aligned} & a_1 u_{1x} - a_1 u_{2x} - a_4 u_{1x,xx} - a_5 u_{2x,xx} - a_{19} u_{1x,yy} - a_{18} u_{2x,yy} - a_{21} u_{1y,xy} - a_{23} u_{2y,xy} + a_2 w_{1,x} + \\ & + a_3 w_{2,x} - 2a_{24} w_{1,xyy} + a_{25} w_{2,xyy} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} = p_x + p_\omega, \\ & -a_1 u_{1x} + a_1 u_{2x} - a_5 u_{1x,xx} - a_9 u_{2x,xx} - a_{18} u_{1x,yy} - a_{20} u_{2x,yy} - a_{23} u_{1y,xy} - a_{22} u_{2y,xy} - a_{10} w_{1,x} - \\ & - a_{17} w_{2,x} - a_{24} w_{1,xyy} + 2a_{25} w_{2,xyy} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} = s_\omega, \\ & a_1 u_{1y} - a_1 u_{2y} - a_4 u_{1y,yy} - a_5 u_{2y,yy} - a_{19} u_{1y,xx} - a_{18} u_{2y,xx} - a_{21} u_{1x,xy} - a_{23} u_{2x,xy} + a_2 w_{1,y} + \\ & + a_3 w_{2,y} - 2a_{24} w_{1,xyy} + a_{25} w_{2,xyy} - 2a_6 w_{1,yyy} + a_7 w_{2,yyy} = p_y + h_\omega, \\ & -a_1 u_{1y} + a_1 u_{2y} - a_5 u_{1y,yy} - a_9 u_{2y,yy} - a_{18} u_{1y,xx} - a_{20} u_{2y,xx} - a_{23} u_{1x,xy} - a_{22} u_{2x,xy} - a_{10} w_{1,y} - \\ & - a_{17} w_{2,y} - a_{24} w_{1,xyy} + 2a_{25} w_{2,xyy} - a_6 w_{1,yyy} + 2a_7 w_{2,yyy} = r_\omega, \\ & -a_2 u_{1x,xx} - a_2 u_{1y,yy} + a_{10} u_{2x,xx} + a_{10} u_{2y,yy} + 2a_6 u_{1x,xxx} + a_6 u_{2x,xxx} + 2a_6 u_{1y,yyy} + a_6 u_{2y,yyy} + \\ & + 2a_{24} u_{1x,xyy} + a_{24} u_{2x,xyy} + 2a_{24} u_{1y,xyy} + a_{24} u_{2y,xyy} + a_{11} w_{1,xx} + a_{11} w_{1,yy} - a_{12} w_{2,xx} - \\ & - a_{12} w_{2,yy} + a_{15} w_{1,xxxx} + a_{15} w_{1,yyyy} - a_{16} w_{2,xxxx} - a_{16} w_{2,yyyy} + a_{26} w_{1,xyy} - a_{28} w_{2,xyy} + \\ & + a_8 w_1 - a_8 w_2 = q + \frac{p_{x,xx} h_1}{2} + \frac{p_{y,yy} h_1}{2} + q_\omega, \\ & -a_3 u_{1y,yy} - a_3 u_{1x,xx} + a_{17} u_{2y,yy} + a_{17} u_{2x,xx} - a_7 u_{1y,yyy} - a_7 u_{1x,xxx} - 2a_7 u_{2y,yyy} - 2a_7 u_{2x,xxx} - \\ & - 2a_{27} u_{2y,xyy} - a_{25} u_{1y,xyy} - 2a_{25} u_{2x,xyy} - a_{25} u_{1x,xyy} - a_{12} w_{1,xx} - a_{12} w_{1,yy} + a_{14} w_{2,xx} + a_{14} w_{2,yy} + \\ & - a_{16} w_{1,xxxx} - a_{16} w_{1,yyyy} + a_{13} w_{2,xxxx} + a_{13} w_{2,yyyy} - a_{28} w_{1,xyy} + a_{27} w_{2,xyy} - \\ & - a_8 w_1 + a_8 w_2 = g_\omega. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь коэффициенты a_1, \dots, a_{28} определяются по формулам, полученным при решении упругой задачи. Нелинейные слагаемые

$$\begin{aligned} p_\omega &= H_{1x}^\omega - V_{1,y}^\omega - P_{1x,xx}^\omega, \\ s_\omega &= H_{1x}^\omega + V_{2,y}^\omega + P_{2x,xx}^\omega, \\ h_\omega &= H_{1y}^\omega - V_{1,xx}^\omega - P_{1y,yy}^\omega, \\ r_\omega &= H_{1y}^\omega + V_{2,xx}^\omega + P_{2y,yy}^\omega, \\ q_\omega &= H_2^\omega - T_{1x,xx}^\omega - U_{1,xy}^\omega + S_{1y,yy}^\omega - T_{1y,yy}^\omega, \\ g_\omega &= S_{2x,xx}^\omega - H_2^\omega - T_{2x,xx}^\omega - U_{2,xy}^\omega + S_{2y,yy}^\omega - T_{2y,yy}^\omega. \end{aligned} \tag{6}$$

Далее применим метод «упругих» решений Ильюшина [5], так как точное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (5) получить не удалось.

упругопластической пластины по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Тогда для торцевых сечений справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0, a \quad u_{kx,x}^n = u_{ky}^n = w_k^n = w_{k,xx}^n &= 0, \\ \text{при } y=0, b \quad u_{ky,y}^n = u_{kx}^n = w_k^n = w_{k,yy}^n &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где k – номер слоя, n – номер приближения.

Решение системы дифференциальных уравнений предполагаем в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (9):

$$\begin{aligned} u_{1x} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} U_{1xmp}^n \cos \frac{\pi px}{a} \sin \frac{\pi my}{b}, & u_{2x} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} U_{2xmp}^n \cos \frac{\pi px}{a} \sin \frac{\pi my}{b}, \\ u_{1y} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} U_{1ymp}^n \sin \frac{\pi px}{a} \cos \frac{\pi my}{b}, & u_{2y} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} U_{2ymp}^n \sin \frac{\pi px}{a} \cos \frac{\pi my}{b}, \\ w_1 &= \sum_{m,p=0}^{\infty} W_{1mp}^n \sin \frac{\pi px}{a} \sin \frac{\pi my}{b}, & w_2 &= \sum_{m,p=0}^{\infty} W_{2mp}^n \sin \frac{\pi px}{a} \sin \frac{\pi my}{b}, \end{aligned} \quad (10)$$

где U_{1xmp}^n , U_{2xmp}^n , U_{1ymp}^n , U_{2ymp}^n , W_{1mp}^n , W_{2mp}^n – неизвестные амплитуды перемещений на n -м шаге.

Поперечную и дополнительную «внешнюю» нагрузку в слоях пластины представим в виде разложения в следующие тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned} q &= \sum_{m,p=0}^{\infty} q_{mp} \sin \frac{\pi px}{a} \sin \frac{\pi my}{b}, & q_{mp} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin \frac{\pi px}{a} \sin \frac{\pi my}{b} dx dy, \\ p_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} p_{\omega mp}^{n-1} \cos \frac{\pi px}{a} \sin \frac{\pi my}{b}, & p_{\omega mp}^{n-1} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p_{\omega}^{n-1}(x,y) \cos \frac{\pi px}{a} \sin \frac{\pi my}{b} dx dy, \\ s_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} s_{\omega mp}^{n-1} \cos \frac{\pi px}{a} \sin \frac{\pi my}{b}, & s_{\omega mp}^{n-1} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b s_{\omega}^{n-1}(x,y) \cos \frac{\pi px}{a} \sin \frac{\pi my}{b} dx dy, \\ h_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} h_{\omega mp}^{n-1} \sin \frac{\pi px}{a} \cos \frac{\pi my}{b}, & h_{\omega mp}^{n-1} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b h_{\omega}^{n-1}(x,y) \sin \frac{\pi px}{a} \cos \frac{\pi my}{b} dx dy, \\ r_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} r_{\omega mp}^{n-1} \sin \frac{\pi px}{a} \cos \frac{\pi my}{b}, & r_{\omega mp}^{n-1} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b r_{\omega}^{n-1}(x,y) \sin \frac{\pi px}{a} \cos \frac{\pi my}{b} dx dy, \\ q_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} q_{\omega mp}^{n-1} \sin \frac{\pi px}{a} \sin \frac{\pi my}{b}, & q_{\omega mp}^{n-1} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_{\omega}^{n-1}(x,y) \sin \frac{\pi px}{a} \sin \frac{\pi my}{b} dx dy, \\ g_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m,p=0}^{\infty} g_{\omega mp}^{n-1} \sin \frac{\pi px}{a} \sin \frac{\pi my}{b}, & g_{\omega mp}^{n-1} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b g_{\omega}^{n-1}(x,y) \sin \frac{\pi px}{a} \sin \frac{\pi my}{b} dx dy. \end{aligned} \quad (11)$$

После подстановки перемещений (10), нагрузок и дополнительных усилий (11) в систему (7) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения искомых амплитуд перемещений U_{1xmp}^n , U_{2xmp}^n , U_{1ymp}^n , U_{2ymp}^n , W_{1mp}^n , W_{2mp}^n :

$$\begin{aligned} b_1 U_{1xmp}^n + b_2 U_{2xmp}^n + b_{11} U_{1ymp}^n + b_{12} U_{2ymp}^n + b_3 W_{1mp}^n + b_4 W_{2mp}^n &= p_{\omega mp}^{n-1}, \\ b_2 U_{1xmp}^n + b_5 U_{2xmp}^n + b_{12} U_{1ymp}^n + b_{13} U_{2ymp}^n + b_6 W_{1mp}^n + b_7 W_{2mp}^n &= s_{\omega mp}^{n-1}, \\ b_{11} U_{1xmp}^n + b_{12} U_{2xmp}^n + b_{14} U_{1ymp}^n + b_{15} U_{2ymp}^n + b_{16} W_{1mp}^n + b_{17} W_{2mp}^n &= h_{\omega mp}^{n-1}, \\ b_{12} U_{1xmp}^n + b_{13} U_{2xmp}^n + b_{15} U_{1ymp}^n + b_{18} U_{2ymp}^n + b_{19} W_{1mp}^n + b_{20} W_{2mp}^n &= r_{\omega mp}^{n-1}, \\ b_3 U_{1xmp}^n + b_6 U_{2xmp}^n + b_{16} U_{1ymp}^n + b_{19} U_{2ymp}^n + b_8 W_{1mp}^n + b_9 W_{2mp}^n &= q_{mp} + q_{\omega mp}^{n-1}, \\ b_4 U_{1xmp}^n + b_7 U_{2xmp}^n + b_{17} U_{1ymp}^n + b_{20} U_{2ymp}^n + b_9 W_{1mp}^n + b_{10} W_{2mp}^n &= g_{\omega mp}^{n-1}. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты b_i выражаются через величины a_i и зависят от параметров m и p , вычисляются по формулам, введенным ранее в [4].

Численная апробация решения. Численное исследование проводилось для трехслойной пластины, набранной из материалов Д16Т – ПТФЭ – Д16Т. Размеры пластины: $a=1$ м, $b=1$ м, $h_1=0,04$ м, $h_2=0,02$ м, $h_3=0,2$ м. Механические характеристики материалов взяты из монографии [6]. Нагрузка с интенсивностью $q=12$ МПа равномерно распределена по всей поверхности первого несущего слоя пластины. Ее величина подбиралась таким образом, чтобы нелинейные свойства материалов слоев проявились в достаточной степени, но деформации оставались в рамках теории малых упругопластических деформаций.

Рис. 2 а)–г) показывает процесс сходимости метода упругих решений на примере прогибов и продольных перемещений первого и второго слоя при изгибе упругопластической пластины.

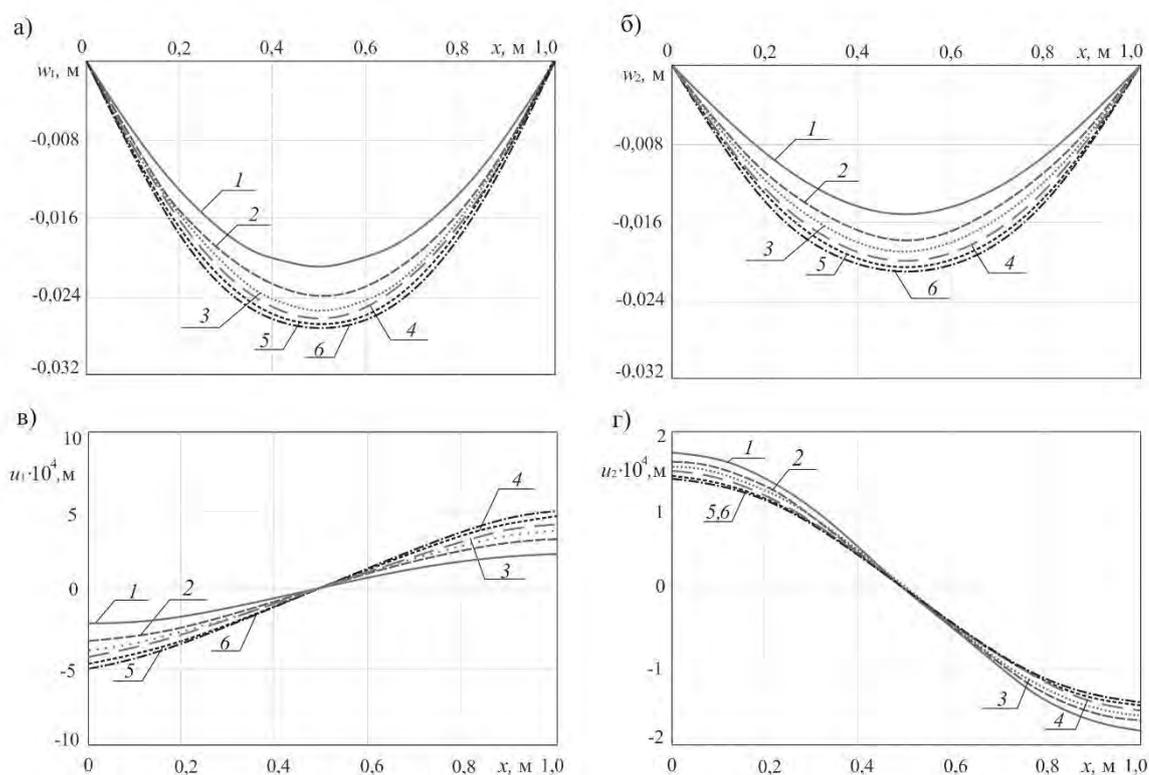


Рис. 2. Сходимость метода «упругих» решений

Номер кривой соответствует номеру итерации. Кривая 1 является решением упругой задачи. Перемещения 2-й итерации отличаются от первой на 13%. При каждой последующей итерации разница между перемещениями уменьшается. За искомое решение принято 6-е приближение, различие между кривыми 5 и 6 составляет менее 1%. При дальнейшем численном исследовании сходимости было обнаружено стремление к нулю между предыдущей и последующей итерацией.

Из рис. 2 а), б) следует, что упругопластические прогибы несущих слоев пластины больше упругих на 28%. Из рис. 2 в), г) очевидно, что продольные перемещения первого несущего слоя увеличиваются на 29%, а продольные перемещения второго несущего слоя уменьшаются на 15%.

Вывод. Таким образом, решена краевая задача изгиба прямоугольной трехслойной пластины со слоями, проявляющими упругопластические свойства. Метод «упругих» решений в нашем случае показал хорошую сходимость. Отличие 6-й итерации от 5-й составляет менее 1%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск : Беларуская навука, 2017. – 275 с.
2. Starovoitov, E.I. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *Mechanics of Solids*. – 2011. – Vol. 46, № 2. – P. 291–298.
3. Starovoitov, E.I. Thermoelastoplastic bending of circular three-layer plate on the deformable foundation / E.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya, D.V. Leonenko // *Actual Problems of Aviation and Aerospace Systems: processes, models, experiment*. – 2009. – Т.14, 1(28). – P. 115–128.
4. Зеленая, А.С. Напряженно-деформированное состояние упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А.С. Зеленая // *Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. научн. тр.* – Гомель: БелГУТ, 2017. – Вып. 10. – С. 67–74.
5. Ильюшин, А.А. Упругопластические деформации полых цилиндров / А.А. Ильюшин, П.М. Огибалов. – М. : Изд-во МГУ, 1960. – 224 с.
6. Старовойтов, Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э.И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 343 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ НАНОРАЗМЕРНОЙ БАЛКИ С ПОЗИЦИЙ ДВУХФАЗНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ЭРИНГЕНА

¹Михасев Г.И., ¹Авдейчик Е.В., ²Каплунов Ю.Д., ²Приказчиков Д.А.

¹Белорусский государственный университет, Минск
²Университет Кишле, Кишле, Великобритания

Введение. Первые идеи нелокальной теории упругости были предложены в работах Крёнера [1], Кунина [2], Крумханселя [3], Эделена и Лоуса [4, 5]. Впоследствии окончательная формулировка теории были сделана Эрингеном [6-8]. Именно после выхода упомянутых статей Эрингена, а также его монографии [9] появились многочисленные исследования в области деформирования наноразмерных балок, пластин и оболочек, а также дискретных наноструктур (нанотрубок, графена) с позиций континуальной механики.

В соответствии с нелокальной теорией упругости, напряжения σ_{ij} в точке континуума $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ зависят не только от деформаций e_{ij} в данной точке, но и от деформаций во всех точках среды, а в случае рассмотрения тела, - от его формы и объема V :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V K(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \varepsilon) \sigma_{ij}^{(c)}(\mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \quad (1)$$

где $\sigma_{ij}^{(c)}$ - компоненты макроскопического (классического) тензора напряжений, $K(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \varepsilon)$ - ядро или функция влияния, которая положительна и быстро убывает при $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty$, а ε - безразмерный нелокальный параметр, учитывающий размерный эффект и определяемый по формуле $\varepsilon = e_0 a / l_c$. Здесь, e_0 - материальная константа, которая находится экспериментально для каждого материала (например, для углеродных нанотрубок обычно $e_0 = 0.39$ [6]), a - внутренний характерный размер (размер гранул, расстояние между атомами дискретной структуры), а l_c - внешний характерный размер. В пределе, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, ядро $K(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \varepsilon)$ обращается в дельта-функцию Дирака.

Модель упругой среды, в основу которой положен закон (1), будем называть нелокальной однофазной интегральной (НОФИ) моделью континуума. Очевидно, что ее принятие приводит к сложным интегро-дифференциальным уравнениям, попытка решения которых, даже при рассмотрении одномерной задачи, наталкивается на значительные и чаще непреодолимые математические трудности. В работе [6] Эрингеном была получена дифференциальная форма уравнений физического состояния

$$(1 - \varepsilon^2 l_c^2 \nabla^2) \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}^{(c)}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

которая для некоторых задач (например, в задаче о распространении плоских волн в неограниченной среде) может рассматриваться как модель эквивалентная интегральной форме (1). В дальнейшем, модель упругой среды, определяемую соотношениями (2), будем называть нелокальной «эквивалентной» дифференциальной (НЭД) моделью. Начиная с 2003г [10] и до сих пор данная модель широко применяется многими авторами при исследовании деформирования, устойчивости и колебаний наноразмерных балок, пластин и оболочек, а также углеродных нанотрубок (среди многих других работ см., например, статьи [12-17]). Ее принятие позволило получить ряд новых механических эффектов: учет параметра нелокальности ε в большинстве случаев приводит к увеличению прогибов и к снижению собственных частот и критических нагрузок. Исключением является случай консольной наноразмерной балки, поведение которой при

действию сосредоточенной нагрузки указывает на отсутствие нелокального эффекта. Данный парадокс для консольной балки, отмеченный в статьях [10, 18, 19], привлек к себе внимание и привел к выводу о несостоятельности дифференциальной формы закона Эрингена при решении других задач. Так Бенвенути и Симон [20], исследуя наноразмерную балку на растяжение, обнаружили, что решения, полученные на основе НЭД-модели, противоречат уравнениям физического состояния (1) в интегральной форме. Причина данного несоответствия моделей состоит в том, что некоторые граничные условия (например, условия свободного края) в рамках НЭД-модели записываются в терминах макроскопических напряжений $\sigma_{ij}^{(c)}$ (см., например, в [12, 13]), что, очевидно, противоречит изначально принятому закону физического состояния (1). Ниже нами будет показано, что и в случае рассмотрения кинематических граничных условий (жесткого защемления краев), закон (2) не позволяет учесть наличие краевых эффектов, порождаемых нелокальным деформированием у границ нанообъекта. Таким образом, НЭД модель является некорректной, ибо не позволяет удовлетворить граничным условиям в терминах напряжений и не отражает реальной картины деформирования наноразмерного объекта у его границ. Интересный вывод был также сделан авторами статьи [21], в которой рассмотрен статический изгиб балки под действием произвольной распределенной поперечной нагрузки. Оказалось, что решения одной и той же задачи, рассмотренной в рамках НЭД и НОФИ моделей, совпадают лишь в случае, когда функция распределения нагрузки удовлетворяет специальным условиям, сформулированным Поляниным и Манжировым в [22]. Другим случаем, когда использование НЭД-модели оправдано, является случай сильной локализации деформаций вдали от границ наноразмерного тела. Так в работах [23, 24] были исследованы локализованные формы собственных колебаний углеродных нанотрубок (УНТ), внедренных в неоднородную упругую матрицу: с использованием НЭД-модели для длинных тонких наноразмерных оболочек, решения уравнений движения были построены в виде функций, быстро убывающих при удалении от некоторых «слабых» линий, расположенных вдали от краев длинной одностенной [23] и двухстенной УНТ [24].

Что касается НОФИ-модели, то ее принятие в задаче о статическом изгибе балки [21] приводит к двум каноническим интегральным уравнениям Фредгольма первого рода, которые в общем случае (при произвольном распределении нагрузки) являются некорректно поставленными задачами [25]. Строгое доказательство некорректности многих задач об изгибе балки в рамках НОФИ-модели было дано в недавно опубликованной работе Романо и др. [26]. Чтобы устранить данный парадокс, сначала Чалламел и Вонг [19], а затем и другие авторы [29, 30] обратились к смешанной модели (ранее предложенной Эрингеном [27, 28]), которая учитывает как локальную, так и нелокальную составляющие в законе физического состояния:

$$\sigma_{ij}(x) = \xi_1 \sigma_{ij}^{(c)}(x) + \xi_2 \int_V K(|x-x'|, \tau) \sigma_{ij}^{(c)}(x') dV(x') \quad (3)$$

Здесь ξ_1 и ξ_2 - коэффициенты, определяющие объемные доли локальной и нелокальной фаз, соответственно, и удовлетворяющие условиям: $0 < \xi_1, \xi_2 < 1$, $\xi_1 + \xi_2 = 1$. Модель, определяемую соотношением (3) обычно называют смешанной или нелокальной двухфазной интегральной (НДФИ) моделью. Очевидно, что при $\xi_1 \rightarrow 0$ модель вырождается в НОФИ-модель, а при $\xi_1 = 1$ получаем уравнения физического состояния классической локальной теории упругости. В работе [26] было доказано, что задача о статическом изгибе балки в рамках НДФИ-модели корректна и имеет единственное решение лишь при $\xi_1 > 0$.

Следует отметить, что НДФИ-модель применялась и для решения других задач. Так в работах [20, 31] были рассмотрены задачи о растяжении наноразмерной балки, а в статье [32] с использованием метода дискретизации уравнений (3) впервые численно

исследованы изгибные формы колебаний балки Эйлера-Бернулли. Вместе с тем отсутствуют исследования, в которых бы были предложены аналитические методы решения динамических задач для наноразмерных балок, пластин и оболочек с использованием НДФИ-модели. Заметим, что в рамках данной модели задачи о колебаниях нанообъектов сводятся к нестационарным интегро-дифференциальным уравнениям в частных производных. Очевидно, что подобные задачи существенно отличаются от ранее выполненных исследований о статическом деформировании нанобалок и требуют дополнительного изучения и анализа.

Целью данной работы является рассмотреть задачу о свободных продольных колебаниях наноразмерной балки с использованием НДФИ-модели. Поскольку данная модель позволяет в предельных случаях перейти к НОФИ-модели, а также к классической модели локальной теории упругости, будет выполнен сравнительный анализ собственных частот, найденных в рамках различных подходов, включая НЭД-модель.

Разрешающие уравнения. Рассмотрим наноразмерную балку длиной L , с модулем Юнга E и плотностью материала ρ . Пусть x_1 - координата, отсчитываемая в осевом направлении балки, а $\sigma = \sigma_{11}$ - напряжение на площадке, ортогональной направлению оси. Тогда дифференциальное уравнение, описывающее малые продольные колебания балки может быть записано в виде:

$$S \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} - \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x_1, t) \quad (4)$$

где S - площадь поперечного сечения, t - время, а $f(x_1, t)$ - интенсивность продольной массовой силы. Для исследования свободных колебаний принимаем $f = 0$.

Введем безразмерные величины $x = x_1/l_c$, $\tau = \sqrt{E/(\rho l_c^2)} t$. Для свободных колебаний перемещение сечения ищем в виде $u = l_c y(x) e^{i\omega\tau}$, где i - мнимая единица, а ω - искомая безразмерная собственная частота колебаний. Подставляя последнее соотношение в (4) и принимая (3) в качестве закона физического одномерного напряженного состояния, приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$\xi_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\xi_2}{2\varepsilon} \frac{d}{dx} \int_0^1 R(|x-s|, \varepsilon) y'(s) ds + \omega^2 y = 0 \quad (5)$$

где $R(|x-s|, \varepsilon) = K(l_c |x-s|, \varepsilon)$, а штрих означает дифференцирование по безразмерной координате.

Рассмотрим три возможных варианта граничных условий:

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (6)$$

$$y(0) = \sigma(1) = 0 \quad (7)$$

$$\sigma(0) = \sigma(1) = 0 \quad (8)$$

где условие (6) соответствует жесткому защемлению обоих краев, условие (8) – свободным краям, а условие (7) означает, что левый край жестко защемлен, а правый свободен. Заметим, что в рамках НДФИ-модели условие свободного края принимает вид

$$\xi_1 \frac{dy}{dx} + \frac{\xi_2}{2\varepsilon} \int_0^1 R(|x-s|, \varepsilon) y'(s) ds = 0 \quad (9)$$

Рассмотрим здесь би-экспоненциальное ядро

$$R(|x-s|, \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{|x-s|}{\varepsilon}} \quad (10)$$

которое наиболее часто используется для исследования деформирования наноразмерных балок [19, 20, 30-32]. Заметим, что для данного ядра

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 e^{-\frac{|x-s|}{\varepsilon}} z(s) ds = \frac{1}{\varepsilon} \left[e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \int_0^1 e^{-\frac{s}{\varepsilon}} z(s) ds - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \int_0^1 e^{\frac{s}{\varepsilon}} z(s) ds \right] \quad (11)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_0^1 e^{-\frac{|x-s|}{\varepsilon}} z(s) ds = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 e^{-\frac{|x-s|}{\varepsilon}} z(s) ds - \frac{2}{\varepsilon} z(x) \quad (12)$$

Будем искать неизвестную функцию $y(x)$ на множестве $C^4[0, 1]$. Продифференцируем уравнение (5) дважды по x и примем во внимание соотношения (11), (12). В результате получим следующее уравнение

$$\varepsilon^2 \xi_1 \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{\xi_2}{2\varepsilon} \frac{d}{dx} \int_0^1 e^{-\frac{|x-s|}{\varepsilon}} y'(s) ds - \xi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \varepsilon^2 \omega^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (13)$$

Исключая в (5) и (13) второе слагаемое, содержащее интегрирование, приходим к дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\varepsilon^2 \xi_1 \frac{d^4 y}{dx^4} - (1 - \varepsilon^2 \omega^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - \omega^2 y = 0 \quad (14)$$

Используя (11), можем переписать граничные условия для свободного края. Они принимают вид

$$\varepsilon^{\xi_1} y'(0) + \frac{1 - \xi_1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{s}{\varepsilon}} y'(s) ds = 0 \quad (15)$$

и

$$\varepsilon^{\xi_1} y'(1) + \frac{(1 - \xi_1) e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{2} \int_0^1 e^{\frac{s}{\varepsilon}} y'(s) ds = 0 \quad (16)$$

для левого ($x = 0$) и правого ($x = 1$) края, соответственно.

Дифференциальное уравнение (14) имеет четвертый порядок, в то время как мы имеем лишь два граничных условия (по одному на каждом крае). Недостающие два условия могут быть получены непосредственно из уравнения (5):

$$\varepsilon^2 \xi_1 y''(0) + \frac{1 - \xi_1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{s}{\varepsilon}} y'(s) ds + \varepsilon^2 \omega^2 y(0) = 0 \quad (17)$$

$$\varepsilon^2 \xi_1 y''(1) - \frac{(1 - \xi_1) e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{2} \int_0^1 e^{\frac{s}{\varepsilon}} y'(s) ds + \varepsilon^2 \omega^2 y(1) = 0 \quad (18)$$

Замечание 1. Условия (17), (18) не являются естественными в обычном понимании граничные условия. Как будет показано ниже, данные условия позволяют принять во внимание наличие краевых эффектов, порождаемых не граничными условиями (6)-(8), а нелокальным деформированием (учитывающим внутренний масштаб) наноразмерной балки вблизи краев.

Обратимся к уравнению (14). Данное уравнение является сингулярно возмущенным так как содержит малый параметр $\varepsilon \ll 1$ при старшей производной. Заметим, что при $\xi_1 = 0$ оно вырождается в дифференциальное уравнение второго порядка, которое соответствует НЭД и НОФИ- моделям одновременно. Граничные условия свободного края (15), (16) при $\xi_1 = 0$ принимают форму граничных условий в рамках НОФИ- модели. Если рассмотреть дополнительные условия (17), (18) при $\xi_1 = 0$, то они становятся несовместимыми с любым из вариантов естественных граничных условий (6)-(8) для НОФИ- модели. Таким образом, НОФИ- модель нельзя считать корректной, а НДФИ- модель следует рассматривать при $\xi_1 > 0$, что совпадает с выводом, сделанным в работе [26].

Точное и асимптотические решения краевой задачи. Рассмотрим уравнение (14). На множестве $y(x) \in C^4[0, 1]$ оно эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению (5). Для любых $\xi_1, \varepsilon > 0$ оно имеет простое решение

$$y = c_1 \sin \alpha x + c_2 \cos \alpha x + c_3 e^{-\beta x} + c_4 e^{\beta(x-1)} \quad (19)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-\varepsilon^2\omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\xi_1\omega^2} - (1-\varepsilon^2\omega^2)}{2\varepsilon^2\xi_1}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-\varepsilon^2\omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\xi_1\omega^2} + (1-\varepsilon^2\omega^2)}{2\varepsilon^2\xi_1}} \quad (20)$$

а c_k - константы, определяемые из граничных условий. Подстановка (19) в граничные условия приводит к некоторому трансцендентному уравнению

$$F(\omega; \xi_1, \varepsilon) = 0 \quad (21)$$

относительно безразмерной частоты ω . Попытка нахождения его корней при значениях ξ_1 близких к нулю, приводит к большим вычислительным трудностям, что объясняется тем, что при $\xi_1 \rightarrow 0$ (предельный переход к НОФИ-модели) уравнение (21) претерпевает сингулярное вырождение.

Для того, чтобы построить решения при малых ξ_1 применим асимптотический метод. Однако в качестве малого параметра мы будем рассматривать не ξ_1 , а $\varepsilon \ll 1$. Решение задачи ищем в виде:

$$y = y_m(x) + \varepsilon^\gamma y_e(x), \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots, \quad (22)$$

где y_m - перемещение, соответствующее основному напряженно-деформированному состоянию, y_e - интегралы краевого эффекта, а γ - показатель интенсивности краевого эффекта.

Уравнение краевого эффекта имеет вид:

$$\xi_1 \frac{d^4 y_e}{d\xi^4} - (1 - \varepsilon^2 \omega^2) \frac{d^2 y_e}{d\xi^2} - \varepsilon^2 \omega^2 y_e = 0 \quad (23)$$

Общее решение данного уравнения можно представить в виде ряда

$$y_e = a_{01} e^{-\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}} + a_{02} e^{\frac{x-1}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}} + \left[a_{11} e^{-\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}} + a_{12} e^{\frac{x-1}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}} + \frac{\omega_0^2(1-\xi_1)}{2\sqrt{\xi_1^3}} \left(a_{01} x e^{-\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}} - a_{02} (x-1) e^{\frac{x-1}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}} \right) \right] + O(\varepsilon^2) \quad (24)$$

где a_{ij} - константы, определяемые из граничных условий.

Функцию y_m будем искать в виде ряда

$$y_m = y_{m0} + \varepsilon y_{m1} + \varepsilon^2 y_{m2} + \dots \quad (25)$$

Подставляя (25) в уравнение (14), приходим к последовательности дифференциальных уравнений:

$$L_0 y_{m0} = \frac{d^2 y_{m0}}{dx^2} + \omega_0^2 y_{m0} = 0, \quad L_0 y_{m1} = -2\omega_0 \omega_1 y_{m0}, \quad (26)$$

$$L_0 y_{m2} = -2\omega_0 \omega_1 y_{m1} + \xi_1 \frac{d^4 y_{m0}}{dx^4} + \omega_0^2 \frac{d^2 y_{m0}}{dx^2} - (2\omega_0 \omega_2 + \omega_1^2) y_{m0}$$

Далее рассмотрим случай, соответствующий жесткому защемлению краев (6). Подставляя (22), (25) в (6) и дополнительные граничные условия (17), (18), находим $\gamma = 1$ и приходим к последовательности краевых условий для уравнений (26):

$$y_{m0}(0) = y_{m0}(1) = 0 \quad (27)$$

$$y_{m1}(0) = -y_{e0}(0) = -a_{01}, \quad y_{m1}(1) = -y_{e0}(1) = -a_{02}, \quad (28)$$

$$(1 - \sqrt{\xi_1}) y'_{m0}(0) + a_{01} = 0, \quad (1 - \sqrt{\xi_1}) y'_{m0}(1) - a_{02} = 0;$$

$$y_{m2}(0) = -a_{11}, \quad y_{m2}(1) = -a_{12},$$

$$(1 - \sqrt{\xi_1}) [y'_{m1}(0) + y''_{m0}(0)] + a_{11} = 0, \quad (1 - \sqrt{\xi_1}) [y'_{m1}(1) + y''_{m0}(1)] - a_{12} = 0 \quad (29)$$

Процедура отыскания решений последовательности краевых задач (26)-(29), основанная на требовании существования решения неоднородных краевых задач на

«спектре», общеизвестна. Опуская ее детали, выпишем приближенное решение задачи, сохраняя лишь три члена в рядах (22), (25):

$$\omega = \pi \left\{ 1 - 2\varepsilon(1 - \sqrt{\xi_1}) + \varepsilon^2 \left[4\pi(1 - \sqrt{\xi_1})^2 - \frac{1}{2}(\pi)^3(1 - \xi_1) \right] + O(\varepsilon^3) \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$y(x) = C \left\{ \sin \pi x + \varepsilon \pi (1 - \sqrt{\xi_1}) \left[(1 - 2x) \cos \pi x - e^{-\frac{x}{\varepsilon \sqrt{\xi_1}}} + (-1)^n e^{\frac{x-1}{\varepsilon \sqrt{\xi_1}}} \right] + O(\varepsilon^2) \right\} \quad (30)$$

Аналогичным образом, рассматривая оставшиеся варианты граничных условий, мы находим:

$$\omega = \pi \left(\frac{1}{2} + n \right) \left[1 - \varepsilon(1 - \sqrt{\xi_1}) + O(\varepsilon^2) \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$y(x) = C \left\{ \sin \pi \left(\frac{1}{2} + n \right) x + \varepsilon \pi \left(\frac{1}{2} + n \right) (1 - \sqrt{\xi_1}) \left[(1 - x) \cos \pi \left(\frac{1}{2} + n \right) x - e^{-\frac{x}{\varepsilon \sqrt{\xi_1}}} \right] + O(\varepsilon^2) \right\} \quad (31)$$

для случая, когда левый край жестко зашпелен (граничные условия (7)), и

$$\omega = \pi \left[1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\pi)^2 (1 - \xi_1) + O(\varepsilon^3) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$y(x) = C \left\{ \cos \pi x - \varepsilon^2 (\pi)^2 (1 - \sqrt{\xi_1}) \left[e^{-\frac{x}{\varepsilon \sqrt{\xi_1}}} + (-1)^n e^{\frac{x-1}{\varepsilon \sqrt{\xi_1}}} \right] + O(\varepsilon^3) \right\}. \quad (32)$$

Во всех случаях C - произвольная константа. Заметим, что в последнем случае $\gamma = 2$.

Анализ построенных решений. При $\xi_1 = 1$ соотношения (30)-(32) переходят в простые известные формулы для собственных частот и форм колебаний макроразмерной балки. Если $\xi_1 = 0$, то получаем соотношения для НОФИ-модели. В частности, для жестко зашпеленной с обоих краев балки имеем

$$\omega = \pi \left\{ 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \pi \left[4 - \frac{1}{2} (\pi)^2 \right] + O(\varepsilon^3) \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

Заметим, что НЭД-модель с уравнением (14) при $\xi_1 = 0$ дает формулу

$$\omega = \pi - \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\pi)^3 + O(\varepsilon^3), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

Как видно, часто используемая в литературе НЭД-модель дает к классической частоте поправку порядка $O(\varepsilon^2)$, в то время как НОФИ- и НДФИ-модели – поправку порядка $O(\varepsilon)$. Таким образом, НЭД-модель имеет большую погрешность, что объясняется тем, что она не учитывает наличие нелокальных краевых эффектов.

На рисунке 1 приведены точные значения наименьшей безразмерной частоты ω жестко зашпеленной с обеих сторон наноразмерной балки как функции параметра ξ_1 при различных значениях малого параметра ε . Как видно уменьшение параметра

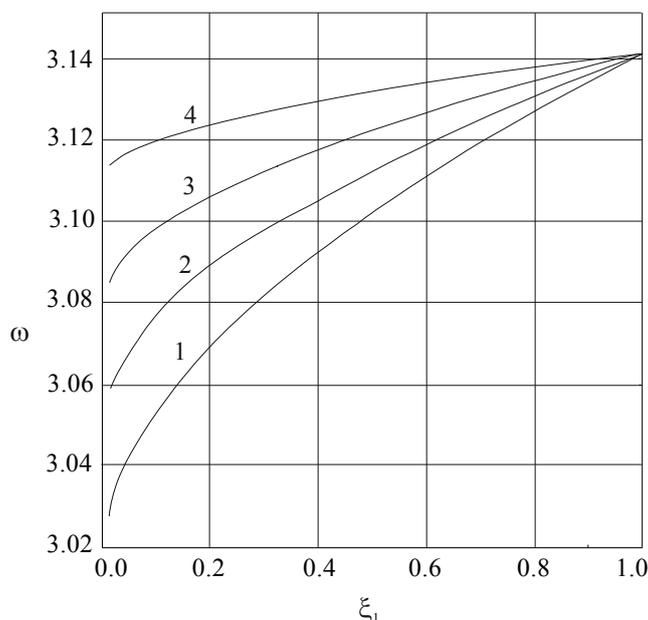


Рис. 1. Зависимость наименьшей безразмерной собственной частоты ω от параметра ξ_1 при различных значениях малого параметра ε : 1 – $\varepsilon = 0.02$; 2 – $\varepsilon = 0.015$; 3 – $\varepsilon = 0.01$; 4 – $\varepsilon = 0.005$;

ξ_1 влечет уменьшение собственной частоты. При этом частота тем меньше, чем больше параметр ε . Поскольку определение ω при малых значениях ξ_1 связано со значительными вычислительными трудностями, мы выполнили расчеты частоты в окрестности $\xi_1 = 0$ с использованием асимптотической формулы (30). На рисунке 2, для сравнения, показаны значения частоты, найденные точно (сплошная линия) и асимптотически (пунктирная линия) в случае, когда $\varepsilon = 0.02$. Как видно, погрешность асимптотической формулы (30) очень мала: анализ расчетов показал, что на всем промежутке изменения ξ_1 относительная погрешность не превышает 0.022%.

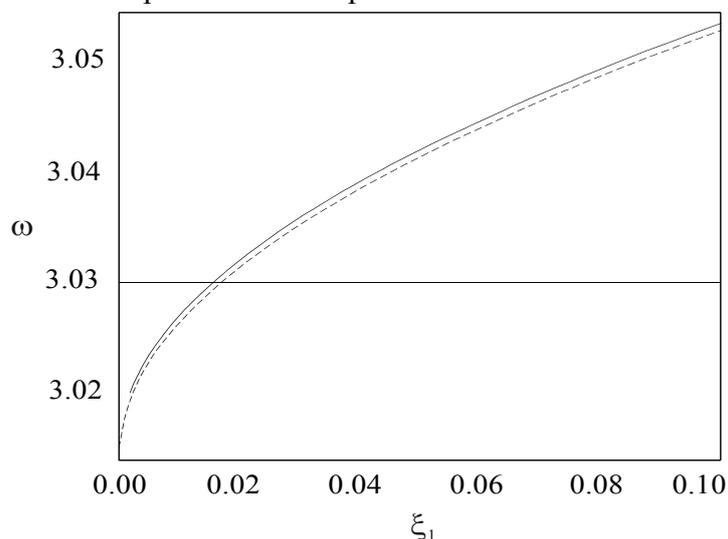


Рис. 2. Значения безразмерной частоты ω , вычисленные с использованием решения уравнения (21) (сплошная линия), а также асимптотической формулы (30) при значении параметра $\varepsilon = 0.02$.

Выводы. С использованием нелокальной двухфазной модели Эрингена исследованы свободные продольные колебания наноразмерной балки для различных граничных условий. Выполнен сравнительный анализ собственных частот, найденных в рам-

ках нелокальных двухфазной, однофазной и «эквивалентной» дифференциальной моделей, показано, что однофазная модель, а также так называемая «эквивалентная» ей дифференциальная модели некорректны, ибо не позволяют удовлетворить граничным условиям и учесть возникающие нелокальные краевые эффекты. Найдены простые асимптотические формулы для собственных частот и форм колебаний для всех вариантов граничных условий. Сравнительный анализ расчетов показал высокую точность найденных асимптотических формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kröner, E. *Elasticity theory of materials with long range cohesive forces* / E. Kröner // *Int. J. Solids Struct.* – 1967. – V.3. – P. 731-742.
2. Kunin, I.A. *The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocation* / I.A. Kunin // In: *Mechanics of Generalized Continua* (Ed. by Kröner). *Proceedings of IUTAM Symposium.* - New York: Springer, 1968.
3. Krumhansl, J.A. *Some considerations on the relations between solid state physics and generalized continuum mechanics* / J.A. Krumhansl // In: *Mechanics of Generalized Continua* (Ed. by Kröner). – Berlin: Springer-Verlag. – 1968. - P. 298-331.
4. Edelen, D.G.B. *Protoelastic bodies with large deformations* / D.G.B. Edelen // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1969. – V. 34. – P. 283-300.
5. Edelen, D.G.B. *On the thermodynamics of systems with nonlocality* / D.G.B. Edelen, N. Laws // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1971. – V. 43. – P. 24-35.
6. Eringen, A.C. *Nonlocal polar elastic continua* / A.C. Eringen // *Int. J. Eng. Sci.* – 1972. – V. 10. - P.1–16.
7. Eringen, A.C. *On nonlocal elasticity* / A.C. Eringen, D.G.B. Edelen // *Int. J. Eng. Sci.* – 1972. - V.10. –P. 233–248.
8. Eringen, A.C. *On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves* / A.C. Eringen // *J. Appl. Phys.* – 1983. – V. 54. – P. 4703–4710.
9. Eringen, A.C. *Nonlocal Continuum Field Theories* / A.C. Eringen. - New York: Springer, 2002.
10. Peddieson, J. *Application of nonlocal continuum models to nanotechnology* / J. Peddieson, R. Buchanan, R.P. McNitt // *International Journal of Engineering Science.* – 2003. –V. 41. – P. 305-312.
11. Sudak, L.J. *Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics* / L.J. Sudak // *J. Appl. Phys.* – 2003. – V. 94 (11). – P. 7281-7287.
12. Reddy, J.N. *Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams* / J.N. Reddy // *International Journal of Engineering Science.* – 2007. – V. 45. – P. 288–307.
13. Lu, P. *Non-local elastic plate theories* / P. Lu, P.Q. Zhang, H.P. Lee, C.M. Wang, J.N. Reddy // *Proc. R. Soc. A.* -2007. – V. 463. – P. 3225-3240.
14. Usuki, T. *Beam equations for multi-walled carbon nanotubes derived from Flugge shell theory* / T. Usuki, K. Yogo // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 2009. – P. 1199-1226.
15. Wang, C.Y. *Free vibrations of multi-walled carbon nanotube* / C.Y. Wang, C.Q. Ru, A. Mioduchowski // *J. Appl. Phys.* – 2005. –V. 97. –P. 114323-114333.

16. Zhang, Y.Q. *Free transverse vibrations of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity* / Y.Q. Zhang, G.R. Liu, X.Y. Xie // *Phys. Rev. B.* - 2005. – 2005. – V. 71. - P. 195404-1–19540410.
17. Xu, M. *Free transverse vibrations of nano-to-micron scale beams* / M. Xu // *Proc. R. Soc. Lond. A.* -2006. –V. 426. –P. 2977-2995.
18. Wang, Q. *Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro- and nano-structures* / Q. Wang, K.M. Liew // *Physics Letters A.* – 2007. -V. 363 (3). – P. 236-242.
19. Challamel, N. *The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved* / N. Challamel, C.M. Wang // *Nanotechnology.* – 2008. –V. 19. –P. 345703-345710.
20. Benvenuti, E. *One-dimensional nonlocal and gradient elasticity: Closed-form solution and size effect* / E. Benvenuti, A. Simone // *Mechanics Research Communications.* – 2013.- V. 48. –P. 46-51.
21. Fernández-Sáez, J. *Bending of Euler-Bernoulli beams using Eringen's integral formulation: A paradox resolved* / J. Fernández-Sáez, R. Zaera, J.A. Loya, J.N. Reddy // *Int. J. Eng. Sci.* –2016. - V.99. –P. 107–116.
22. Polyanin, A. *Handbook of integral equations* / A. Polyanin, A. Manzhirov. – New York: CRC Press. - 2008.
23. Mikhasev, G.I. *On localized modes of free vibrations of single-walled carbon nanotubes embedded in nonhomogeneous elastic medium* / G.I. Mikhasev // *ZAMM.* -2014. – V. 94 (1-2). – P. 130-141.
24. Михасев, Г.И. *Свободные локализованные колебания длинной двухстенной углеродной нанотрубки, внедренной в неоднородную упругую среду* / Г.И. Михасев, М.Г. Ботогова // *Вестник СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия.* – 2016. Вып. 1. – Т. 3 (61). – С. 155-163.
25. Васильев, А.Б. *Интегральные уравнения* / А.Б. Васильев, Н.А. Тихонов. – Москва: Изд-во Московского ун-та. – 1989.- 156 с.
26. Romano, G. *Constitutive boundary conditions and paradoxes in nonlocal elastic nanobeams* / G. Romano, R. Barretta, M. Diaco, F. Marotti de Sciarra // *International Journal of Mechanical Sciences.* – 2017.-V. 121. - P. 151-156.
27. Eringen, A.C. *Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves* / A.C. Eringen // *Int J. Eng. Sci.* – 1972. –V.10(5). -P. 425–35.
28. Eringen, A.C. *Theory of nonlocal elasticity and some applications* / A.C. Eringen // *Res Mech.* – 1987. – V.21. – P.313–342.
29. Khodabakhshi, P. *A unified integro-differential nonlocal model* / P. Khodabakhshi, J.N. Reddy // *Int. J. Eng. Sci.* - 2015. –V. 95. –P. 60–75.
30. Wang, Y.B. *Exact solutions for the static bending of Euler-Bernoulli beams using Eringen's two-phase local/nonlocal model* / Y.B. Wang, X.W. Zu, H.H. Dai // *AIP Adv.* - 2016. – V. 6 – P. 085114/22.
31. Pisano AA, Fuschi P. *Closed form solution for a nonlocal elastic bar in tension.* *Int. J. Solids. Struct.* - 2003. –V. 40. – P. 13–23.
32. Eptaimeros, K. G. *Nonlocal integral approach to the dynamical response of nanobeams* / K.G. Eptaimeros, C.Chr. Koutsoumaris, G.J. Tsamasphyros // *International Journal of Mechanical Sciences.* – 2016. –V. 115-116. – P. 68-80.

ОПТИМИЗАЦИЯ РАДИУСОВ КОНТАКТОВ СОСТАВНЫХ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ В БЛОК-МАТРИЦАХ АППАРАТОВ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

Дудяк А.И., Хвасько В.М.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Наиболее нагруженной частью аппарата высокого давления являются матрицы, которые находятся в условиях всестороннего неравномерного сжатия. Известно, что при проведении испытаний на растяжение или сжатие и одновременном воздействии на образцы всестороннего гидростатического давления в 2,6 ГПа пределы прочности на растяжение для твердых сплавов марок ВК-6 – ВК-8 увеличиваются более чем в пять раз, а пределы прочности на сжатие – более чем в два раза [1].

Так как матрицы аппаратов высокого давления изготавливаются из твердого сплава марки ВК-6, то с целью получения в них условий всестороннего сжатия необходимо создать как можно большее контактное давление по их боковой поверхности. Этого можно добиться за счет запрессовки матриц в блок стальных колец, а также за счет деформации этих матриц в радиальном направлении в процессе их нагружения. Такая конструкция позволяет значительно увеличить срок службы аппаратов высокого давления [2].

Ранее аналитическим путем было получено соотношение для определения оптимального радиуса контакта соприкасающихся поверхностей двухслойного толстостенного цилиндра, при котором внутреннее давление достигает своего максимального значения, при этом наружный и внутренний цилиндры работают в условиях равнопрочности [3]:

$$r_c = \sqrt{r_1 r_2}, \quad (1)$$

где r_c – наружный радиус внутреннего цилиндра и внутренний радиус наружного цилиндра (радиус контакта); r_1 – внутренний радиус внутреннего цилиндра; r_2 – наружный радиус наружного цилиндра.

Давление, возникающее в зоне контакта цилиндров после их запрессовки друг в друга (P_c), при этом определяется следующим выражением [3]:

$$P_c = \frac{\sigma_{\text{мц}} (r_2^2 - r_c^2)}{2r_2^2}. \quad (2)$$

где $\sigma_{\text{мц}}$ – предел пропорциональности для материала цилиндров.

А максимально возможное давление на внутреннюю поверхность составного цилиндра (P_1) можно найти из равенства:

$$P_1 = \frac{\sigma_{\text{мц}} (r_c^2 - r_1^2) + 2P_c r_c^2}{2r_c^2}. \quad (3)$$

Для синтеза порошков искусственных алмазов, как правило, применяются аппараты высокого давления, в которых матрицы запрессовываются в блок из трех стальных цилиндров.

Принимая за известные величины внутреннего радиуса внутреннего цилиндра и наружного радиуса наружного цилиндра, получим выражения для определения оптимальных размеров контактов трехслойного составного цилиндра, приведенного на рисунке 1.

Пусть r_1 и r_{c1} – соответственно внутренний и наружный радиусы внутреннего цилиндра; r_{c1} и r_{c2} – внутренний и наружный радиусы среднего цилиндра; r_{c2} и r_2 – внутренний и наружный радиусы наружного цилиндра. После запрессовки цилиндров друг в друга и возникновения контактных давлений P_{c1} и P_{c2} в зоне сопряжения цилиндров, создается некоторое внутреннее давление P_1 (см. рис. 1).

В соответствии с ранее полученными результатами исследований, следует пред-

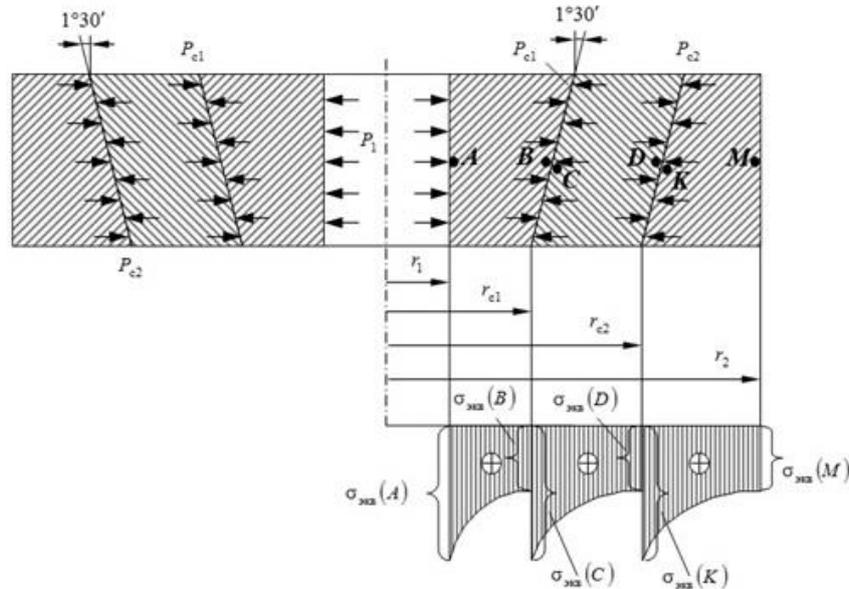


Рис. 1. Осевой разрез трехслойного толстостенного цилиндра и распределение эквивалентных напряжений по толщине стенок отдельных цилиндров

положить, что условия равнопрочности составляющих цилиндров можно представить в виде:

$$\sigma_{\text{эkv}}(A) = \sigma_{\text{эkv}}(C) = \sigma_{\text{эkv}}(K) \leq \sigma_{\text{пц}}, \quad (4)$$

$$\sigma_{\text{эkv}}(B) = \sigma_{\text{эkv}}(D) = \sigma_{\text{эkv}}(M). \quad (5)$$

Используя известные формулы для определения радиальных и окружных напряжений [4]:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(P_1 - P_2) \cdot r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}, \\ \sigma_t = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(P_1 - P_2) \cdot r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}, \end{cases} \quad (6)$$

где σ_r и σ_t – соответственно радиальные и окружные напряжения рассматриваемого цилиндра;

P_1 и P_2 – соответственно давление на внутреннюю и наружную поверхность цилиндра;

r_1 и r_2 – соответственно внутренний и наружный радиусы цилиндра;

r – координата точки, в которой определяют напряжение;

а также третью теорию прочности для определения эквивалентных напряжений [4]:

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{\text{пц}}, \quad (7)$$

где $\sigma_{\text{эkv}}$ – эквивалентные напряжения;

σ_1, σ_3 – главные напряжения ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

в характерных зонах отдельных цилиндров трехслойного блока, получим следующие выражения:

$$\sigma_{\text{экв}}(A) = \frac{2(P_1 - P_{c1}) \cdot r_{c1}^2}{r_{c1}^2 - r_1^2} \leq \sigma_{\text{пц}}, \quad (8)$$

$$\sigma_{\text{экв}}(B) = \frac{2(P_1 - P_{c1}) \cdot r_1^2}{r_{c1}^2 - r_1^2}, \quad (9)$$

$$\sigma_{\text{экв}}(C) = \frac{2(P_{c1} - P_{c2}) \cdot r_{c2}^2}{r_{c2}^2 - r_{c1}^2} \leq \sigma_{\text{пц}}, \quad (10)$$

$$\sigma_{\text{экв}}(D) = \frac{2(P_{c1} - P_{c2}) \cdot r_{c1}^2}{r_{c2}^2 - r_{c1}^2}, \quad (11)$$

$$\sigma_{\text{экв}}(K) = \frac{2P_{c2}r_2^2}{r_2^2 - r_{c2}^2} \leq \sigma_{\text{пц}}, \quad (12)$$

$$\sigma_{\text{экв}}(M) = \frac{2P_{c2}r_{c2}^2}{r_2^2 - r_{c2}^2}. \quad (13)$$

В соответствии с равенством (5) имеем, что $\sigma_{\text{экв}}(D) = \sigma_{\text{экв}}(M)$. Воспользовавшись этим условием и выражениями (11) и (13), получим:

$$\frac{2(P_{c1} - P_{c2}) \cdot r_{c1}^2}{r_{c2}^2 - r_{c1}^2} = \frac{2P_{c2}r_{c2}^2}{r_2^2 - r_{c2}^2}. \quad (14)$$

Из соотношения (14) легко определить значение P_{c2} , которое представим в следующем виде:

$$P_{c2} = \frac{(P_{c1} - P_{c2}) \cdot r_{c1}^2}{r_{c2}^2 - r_{c1}^2} \cdot \frac{r_2^2 - r_{c2}^2}{r_{c2}^2}. \quad (15)$$

Подставим величину (15) в выражение (12):

$$\sigma_{\text{экв}}(K) = \frac{(P_{c1} - P_{c2}) \cdot r_{c1}^2}{r_{c2}^2 - r_{c1}^2} \cdot \frac{r_2^2 - r_{c2}^2}{r_{c2}^2} \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_{c2}^2} \leq \sigma_{\text{пц}}. \quad (16)$$

Или окончательно имеем:

$$\sigma_{\text{экв}}(K) = \frac{2r_2^2(P_{c1} - P_{c2})}{r_{c2}^2 - r_{c1}^2} \cdot \frac{r_{c1}^2}{r_{c2}^2} \leq \sigma_{\text{пц}}. \quad (17)$$

Так как левые части соотношений (10) и (17) равны, то приравняем между собой и правые части этих соотношений:

$$\frac{2(P_{c1} - P_{c2}) \cdot r_{c2}^2}{r_{c2}^2 - r_{c1}^2} = \frac{2r_2^2(P_{c1} - P_{c2})}{r_{c2}^2 - r_{c1}^2} \cdot \frac{r_{c1}^2}{r_{c2}^2}. \quad (18)$$

После ряда математических преобразований из уравнения (18) легко можно получить равенство:

$$r_{c2}^4 = r_{c1}^2 \cdot r_2^2. \quad (19)$$

Из условия равнопрочности цилиндров (5) следует, что $\sigma_{\text{экв}}(B) = \sigma_{\text{экв}}(D)$. Поэтому используя выражения (9) и (11), имеем:

$$\frac{2(P_1 - P_{c1}) \cdot r_1^2}{r_{c1}^2 - r_1^2} = \frac{2(P_{c1} - P_{c2}) \cdot r_{c1}^2}{r_{c2}^2 - r_{c1}^2}. \quad (20)$$

Из уравнения (20) следует:

$$P_1 - P_{c1} = \frac{(P_{c1} - P_{c2}) \cdot r_{c1}^2}{r_{c2}^2 - r_{c1}^2} \cdot \frac{r_{c1}^2 - r_1^2}{r_1^2}. \quad (21)$$

Подставив полученное значение из выражения (21) в соотношение (8), получим следующую формулу для определения эквивалентных напряжений:

$$\sigma_{\text{эжв}}(A) = \frac{2r_{c1}^2}{r_{c1}^2 - r_1^2} \cdot \frac{(P_{c1} - P_{c2}) \cdot r_{c1}^2}{r_{c2}^2 - r_{c1}^2} \cdot \frac{r_{c1}^2 - r_1^2}{r_1^2} \leq \sigma_{\text{шт}}. \quad (22)$$

После ряда упрощений формула (22) будет иметь вид:

$$\sigma_{\text{эжв}}(A) = \frac{2(P_{c1} - P_{c2}) \cdot r_{c1}^4}{r_{c2}^2 - r_{c1}^2} \cdot \frac{1}{r_1^2} \leq \sigma_{\text{шт}}. \quad (23)$$

На основании условия (4), сравнивая между собой полученное выражение (23) и соотношение (10), будем иметь:

$$\frac{2(P_{c1} - P_{c2}) \cdot r_{c2}^2}{r_{c2}^2 - r_{c1}^2} = \frac{2(P_{c1} - P_{c2}) \cdot r_{c1}^4}{r_{c2}^2 - r_{c1}^2} \cdot \frac{1}{r_1^2}. \quad (24)$$

После преобразований выражения (24) окончательно получим равенство:

$$r_{c1}^4 = r_1^2 \cdot r_{c2}^2. \quad (25)$$

Из уравнения (25) следует:

$$r_{c1}^2 = r_1 \cdot r_{c2}. \quad (26)$$

Подставив величину (26) в соотношение (19), получим:

$$r_{c2}^4 = r_1 \cdot r_{c2} \cdot r_2^2. \quad (27)$$

Решая уравнение (27) относительно неизвестного радиуса r_{c2} , получим зависимость, связывающую величину r_{c2} с известными значениями радиусов r_1 и r_2 , которая будет иметь вид:

$$r_{c2} = \sqrt[3]{r_1 \cdot r_2^2}. \quad (28)$$

Тогда согласно выражению (26) получим следующую искомую величину – радиус r_{c1} , выражение для которого можно представить в виде:

$$r_{c1} = \sqrt{r_1 \cdot r_{c2}}. \quad (29)$$

По аналогичной методике можно проводить расчеты для толстостенных цилиндров, состоящих из n колец.

Если толстостенный цилиндр составлен из четырех колец, где радиусы контактов выражаются соответственно через величины r_{c1} , r_{c2} , r_{c3} , то для определения оптимальных значений этих величин получим следующие соотношения:

$$r_{c3} = \sqrt[4]{r_1 \cdot r_2^3}, \quad r_{c2} = \sqrt[3]{r_1 \cdot r_{c3}^2}, \quad r_{c1} = \sqrt{r_1 \cdot r_{c2}}. \quad (30)$$

Если составной цилиндр выполнен из n колец, запрессованных друг в друга, то выражения для определения оптимальных размеров колец можно представить в виде:

$$r_{c_n} = \sqrt[n+1]{r_1 \cdot r_2^n}, \quad r_{c_{n-1}} = \sqrt[n]{r_1 \cdot r_{c_n}^{n-1}}, \quad r_{c_{n-2}} = \sqrt[n-1]{r_1 \cdot r_{c_{n-1}}^{n-2}} \text{ и т.д.} \quad (31)$$

Проанализирована конструкция блок-матрицы аппарата высокого давления, состоящая из трех колец, запрессованных друг в друга с радиальным натягом. Предложены условия равнопрочности, которые позволяют определить радиусы контактов составных цилиндров, при соблюдении которых становится возможным создать максимальное давление на боковую поверхность матрицы. Благодаря этому достигается увеличение несущей способности составной конструкции в целом.

Также предложенная методика может быть применена для расчета многослойного блока из n стальных цилиндров, запрессованных друг в друга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко Г.С. *Сопротивление материалов: учеб. для вузов / Г.С. Писаренко [и др.]; под общ. ред. Г.С. Писаренко. – 4-е изд., перераб и доп. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1979. – С. 443-460.*
2. Феодосьев, В.И. *Сопротивление материалов: учеб. для вузов / В.И. Феодосьев. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – С. 389-393.*

3. Дудяк, А.И. *Определение рациональных размеров составных толстостенных цилиндров при их контактном взаимодействии друг с другом* / А.И. Дудяк, В.М. Хвасько // *Теорет. и прикл. механика: междунар. научн.-техн. сб.* – Вып. 31. – 2016. – С. 261-265.
4. Подскребко, М.Д. *Сопротивление материалов: учеб.* / М.Д. Подскребко. – Минск: Высшая школа, 2007. – С. 653-670.

УПРАВЛЕНИЕ МЕХАТРОННЫМИ СИСТЕМАМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

доц. ¹Дайняк И.В., доц. ¹Дик С.К., студ. ¹Кузнецов В.В., асп. ¹Поляковский В.В.

¹УО «Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники», Минск

Введение. Объединение узлов точной механики с электронными, электрическими и компьютерными компонентами позволило осуществлять проектирование и производство качественно новых модулей, систем и машин с интеллектуальным управлением [1, 2].

Традиционные системы перемещений используют ПЛК-технологии для выполнения задачи управления и включают в свой состав некоторые аппаратные и программные элементы: ПК для визуализации, ПЛК с различными сопроцессорами, ввод/вывод через полевую шину, управление движением через параллельный интерфейс LPT, операционную систему и различные языки программирования.

Принципы управления. Существует множество примеров, когда осуществлялись попытки организовать управление в реальном времени через Ethernet [5, 6]. Например, процедура доступа CSMA/CD (множественный доступ с контролем данных и обнаружением конфликтов) запрещает доступ через уровень протокола и разрешает управление через разделение времени или “pooling”.

Другие подходы используют специальные ключи, которые пересылают сообщения по сети в точно определенное контроллером время. Эти решения обеспечивают передачу данных для узла Ethernet более-менее быстро и надежно, однако скорость передачи данных ограничена, в частности для устройств автоматизации, так как даже для малого объема данных необходимо осуществлять передачу всего Ethernet сообщения. Более того, время начала обмена строго фиксировано для устройств переадресации и зависит от состава и количества устройств в сети, что не позволяет эффективно управлять сложными устройствами (например, контроллерами управления движением различных механизмов).

Также иногда рекомендуется использовать дополнительный канал управления, в частности для устройств управления вводом/выводом, для реализации быстрого и качественного алгоритма управления данными. При данном подходе передача данных для источника осуществляется быстро и синхронизировано, но с определенными задержками, что не всегда допустимо для сложных устройств.

С помощью технологии EtherCAT можно преодолеть перечисленные выше ограничения. Обработка данных практически не превышает время получения и обработки полученного Ethernet сообщения. Каждый управляемый контроллер читает данные, предназначенные для выбранного устройства, в момент прохождения сообщения через него. Пока сообщение проходит через контроллер (задержка всего лишь на несколько бит), контроллер распознает данные, предназначенные для выбранного устройства, и выполняет необходимые действия.

Ответные данные в соответствии с командами для устройства, также вставляются контроллером в Ethernet-сообщение «на лету», то есть в момент прохождения обратного сообщения по каналу Ethernet. Данный алгоритм обработки выполняется на аппаратном уровне и не зависит от реализации протокола обмена. Последнее устройство в сети EtherCAT возвращает полностью обработанное ответное сообщение для управляющего устройства, в соответствии с протоколом обмена по сети Ethernet.

С точки зрения Ethernet, EtherCAT-устройство представляет собой просто большое Ethernet устройство, которое принимает и посылает Ethernet-сообщения и представляет собой множество управляемых EtherCAT-устройств, подключенных к одному Ethernet контроллеру или переключателю Ethernet. В случае, когда управляемые EtherCAT-устройства подключаются непосредственно к контроллеру Ethernet, получается отдельная EtherCAT-система (рис. 1).

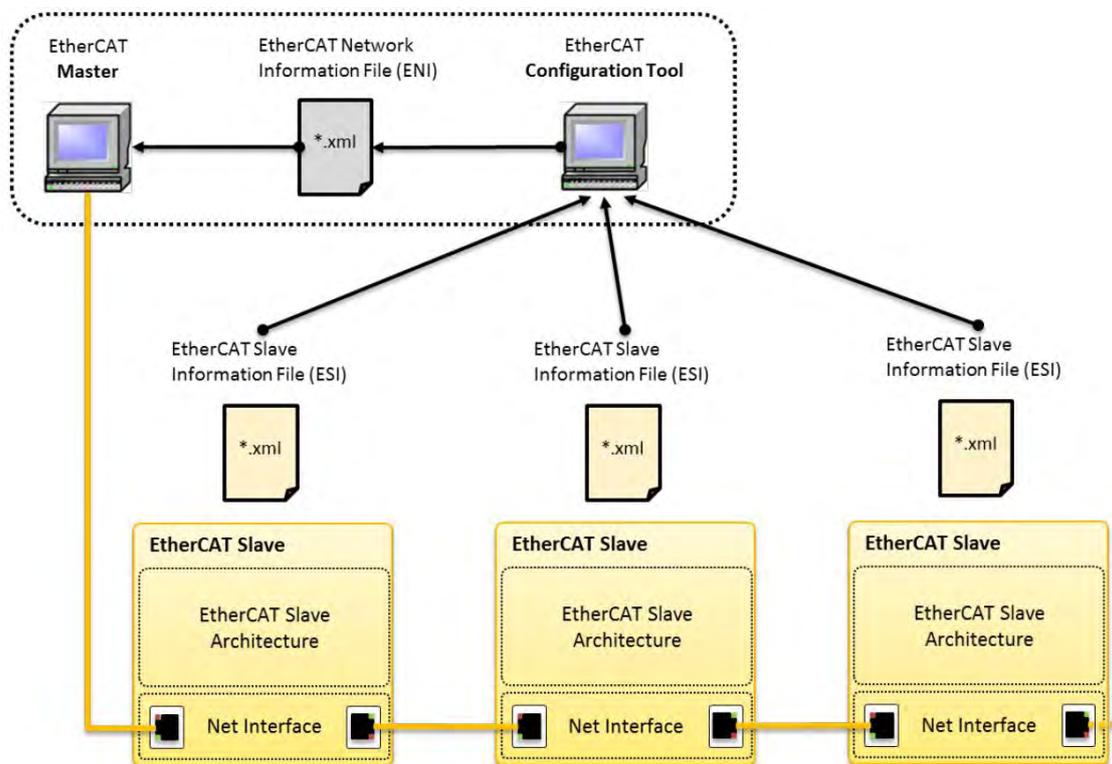


Рис. 1. Архитектура сети EtherCAT

Аппаратное обеспечение для управления EtherCAT-системами обеспечивается при помощи стандартных контроллеров управления доступом в среде передачи данных или сетевых интерфейсных плат. Устройство прямого доступа к памяти используется только для передачи данных в компьютер. Это означает, что доступ и обработка данных в EtherCAT-сетях не влияет на производительность компьютера.

Протокол EtherCAT оптимизирован для передачи управляющих данных посредством стандартной Ethernet телеграммы или вставляется непосредственно в UDP/IP пакет данных (рис. 2).

Ethernet Frame:

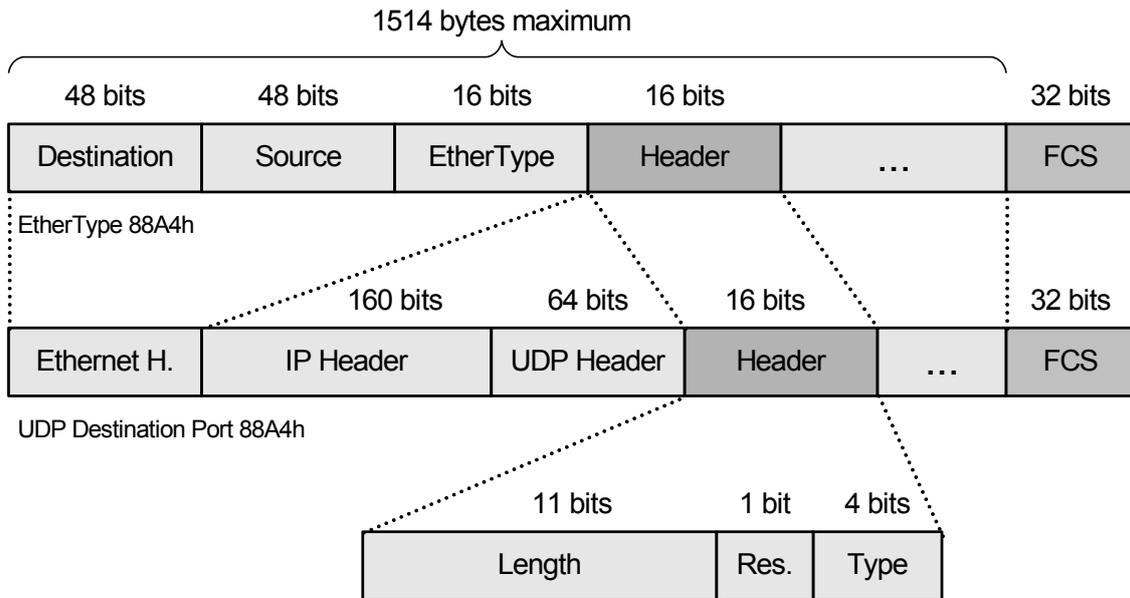


Рис. 2. Структура пакета EtherCAT

Версия UDP-протокола используется в ситуациях, когда сегмент EtherCAT находится в другой сети и адресуется при помощи маршрутизатора. Ethernet телеграмма может содержать несколько EtherCAT-сообщений, в этом случае каждое EtherCAT-сообщение обслуживает часть логической памяти системы с адресуемой областью до 4 Гб.

Порядок передачи данных не зависит от расположения управляемых EtherCAT-устройств в системе, и они могут быть адресованы в любом порядке. Возможны любые варианты передачи управляющих данных:

- всем устройствам;
- одному или нескольким устройствам;
- между двумя устройствами EtherCAT.

Реализация системы управления. Управляемое устройство сети EtherCAT представляет собой интеллектуальный контроллер, который обеспечивает прием и обработку данных поступающих с управляющего устройства (рис. 3). EtherCAT-устройства подразделяются на простые и сложные. К простым устройствам относятся устройства, которые просто управляют ограниченным набором сигналов и передают их состояние в EtherCAT систему. К таким устройствам можно отнести простейший ввод/вывод. К сложным устройствам причисляются все устройства, которые поддерживают протоколы обмена данными по локальной сети и различные дополнительные сервисы.

По протоколу предусмотрена также и передача параметров устройства, которые обычно пересылаются в режимах, не требующих четкой фиксации времени обмена. Передача данных осуществляется при помощи почтовых ящиков (Mailbox).

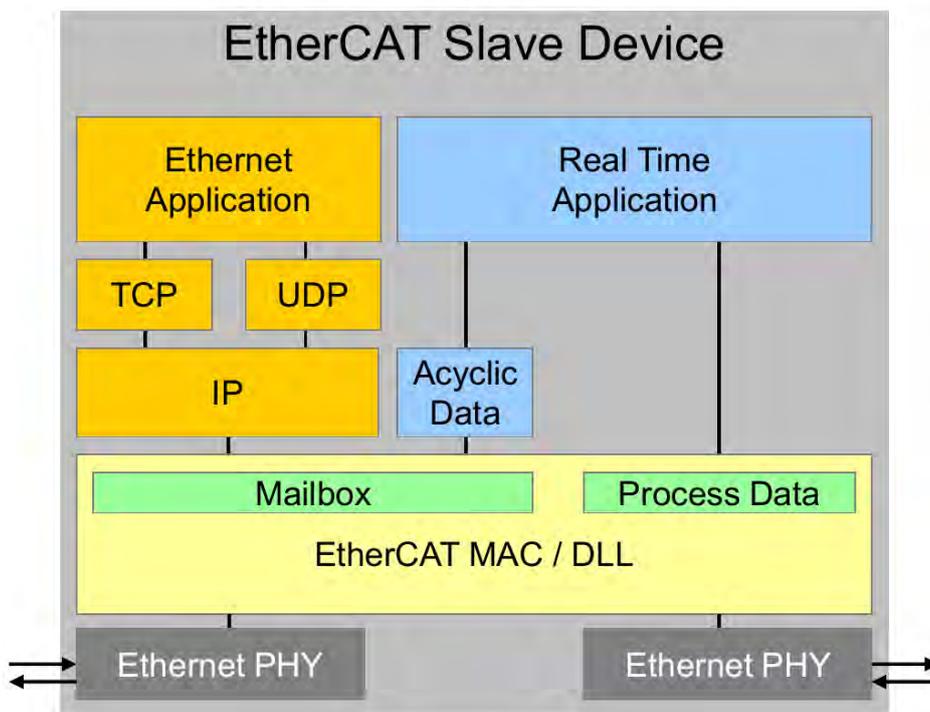


Рис. 3. Структура управляемого устройства EtherCAT

Структура и значения параметров определяются посредством CANopen стандарта в части описания профиля устройства, которое поддерживается множеством производителей контроллеров во всем мире.

Протокол так же поддерживает стандарт IEC 61800-7-204 (рис. 4), который функции устройств управления серводвигателями, и используется для многих устройств управления перемещением под именем SERCOS.

Servo Drive over EtherCAT Header:

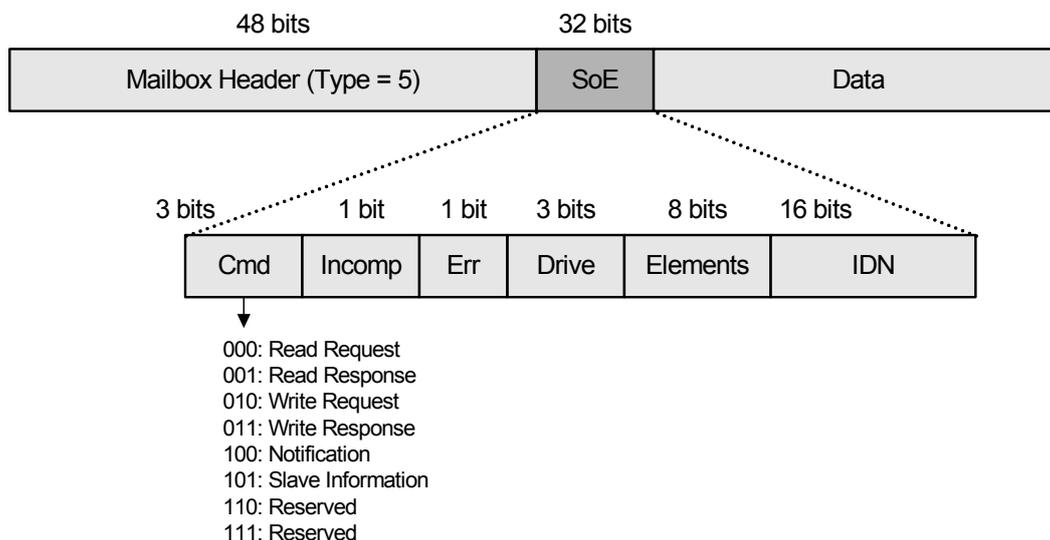


Рис. 4. Структура пакета Servo Drive over EtherCAT

В дополнение к обмену данными в сети по принципу «управляющий – управляемый», EtherCAT протокол так же очень удобен для организации обмена данными по принципу «управляющий – управляющий». Свободно адресуемые сетевые переменные для выполняемых данных и различные сервисы для параметрических данных, диагно-

стики, программирования и удаленного управления создают необходимые условия для несложной организации обмена между управляющими контроллерами. При этом интерфейс передаваемых данных остается без изменения.

Технология EtherCAT открывает новые возможности для увеличения производительности обмена данными по сети. Время обработки данных для 1000 устройств ввода/вывода составляет только 30 мкс. До 1486 байтов управляющих данных могут быть обработаны в EtherCAT сети в составе одной Ethernet-телеграммы, что соответствует почти 12000 единичных сигналов ввода/вывода. При этом время обмена составляет всего 300 мкс.

Обмен управляющими данными между 100 сервомоторами занимает 100 мкс. В течение этого времени, сервомоторы получают параметрические и управляющие данные и формируют ответное сообщение с данными о состоянии и реальном положении моторов. Поддержка техники распределения времени позволяет синхронизировать управление моторами с точностью меньше 1 мкс, что необходимо для организации качественного управления по заданной траектории движения [4].

Чрезвычайно высокая скорость обмена данными позволяет использовать концепцию управления, которую нельзя реализовать на обычных сетевых протоколах. Быстрый цикл обработки управляющих данных, таким образом, может быть выполнен на уровне системы EtherCAT.

Функции обработки данных, которые рекомендовалось выполнять на уровне аппаратного обеспечения, могут быть перенесены на уровень программного обеспечения, что делает построение системы более гибким и прозрачным. Огромная пропускная способность EtherCAT системы позволяет получать все необходимые данные о состоянии каждого узла системы за время, которое позволяет организовывать управление в режиме реального времени. Технология EtherCAT обмена управляющими данными сопоставима, по производительности обработки данных, с современными промышленными персональными компьютерами.

Быстродействие обработки данных весьма заметно при работе с устройствами, которые не имеют хороших вычислительных мощностей. Цикл обработки данных в системе EtherCAT настолько быстр, что он позволяет производить обработку данных между двумя циклами управляемых устройств, тем самым сравним по быстродействию с работой аппаратной части разрабатываемой системы. В результате, предоставляется возможность получать данные от управляемых устройств в режиме реального времени, а управляющие данные передавать с минимальными задержками. Причем все это происходит без изменения производительности управляемого контроллера.

В настоящее время рекомендуется использовать канал обмена данными с мощностью 100 мегабит в секунду, однако, технология EtherCAT настолько гибкая, что можно использовать и более мощные каналы обмена данными без принципиальных изменений протокола. Например, использовать Ethernet с мощностью гигабит в секунду.

С увеличением миниатюризации компонентов персонального компьютера, физический размер управляющего промышленного компьютера зависит от количества плат, вставляемых в компьютер для организации системы управления. Мощность канала обмена данными Fast Ethernet в сочетании с системой обмена данными, построенными на базе технологии EtherCAT, открывает новые возможности: интерфейсы обработки данных, которые условно находятся на персональном компьютере, переносятся на интеллектуальные интерфейсные узлы системы, построенной на базе EtherCAT технологии. Децентрализованные устройства ввода/вывода, всевозможные устройства управления двигателями, комплексные системы управления, быстрые последовательные устройства обмена и другие интерфейсные устройства могут адресоваться при помощи одного Ethernet канала обмена данными в промышленном персональном компьютере. Даже несколько Ethernet устройств могут быть подключены через децентрализованные пере-

ключатели каналов, без изменения протокола обмена данными. Следовательно, управляющий компьютер становится меньше и управляет внешними устройствами при помощи одного канала связи Ethernet.

Таким образом, использование протокола EtherCAT позволяет обеспечить необходимое быстродействие канала передачи данных, в том числе и в сверхпрецизионных станках, характеризующихся высокой разрядностью данных и большим количеством сегментов траектории. Тем самым достигается оптимальное разделение функций между компьютером и системой управления LSMC, позволяющее полностью использовать ресурс последней для решения в реальном времени задач генерации траектории [3], сплайн-интерполяции, обработки сигналов датчика, расчета положения и регулирования привода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович, С.Е. Системы перемещений на основе привода прямого действия / С.Е. Карпович, В.В. Жарский, И.В. Дайняк. – Минск : БГУИР, 2008. – 239 с.
2. Аппаратно-программное моделирование системы управления многокоординатной системы перемещений / Е.А. Литвинов, В.В. Жарский, И.В. Дайняк, М.А. Ареби // Доклады БГУИР. – 2007. – №6. – С. 50–55.
3. Поляковский, В.В. Алгоритмизация бесколлизийных перемещений планарных позиционеров универсального сборочного модуля / В.В. Поляковский, Д.Г. Бегун, И.В. Дайняк // Доклады БГУИР. – 2015. – № 6(92). – С. 17–22.
4. Дайняк, И.В. Распределенная система управления реального времени на основе технологии EtherCAT / И.В. Дайняк // Информационные системы и технологии: управление и безопасность : сб. ст. III Междунар. заоч. науч.-практ. конф., Тольятти, Россия, 2014 г. – С. 83–90.
5. El-Khoury, J. Towards a toolset for architectural design of distributed real-time control systems / J. El-Khoury, M. Torngren // 22nd IEEE Real-Time Systems Symposium, London, England, 2001.
6. Real-Time Workshop. Real-Time Workshop User's Guide. – The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2004.

ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ НА БОЛЬШЕБЕРЦОВУЮ КОСТЬ ГОЛЕНИ ПОСЛЕ СЕКТОРАЛЬНОЙ РЕЗЕКЦИИ: ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ КОСТНОЙ ТКАНИ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ КОСТИ

¹ С.М. Босяков, ¹ К.С. Юркевич, ¹ М.А. Афанасьева, ² И.Э. Шпилевский

¹ *Белорусский государственный университет, Минск*

² *Республиканский научно-практический центр травматологии и ортопедии, Минск*

Введение. Кости являются основными структурными компонентами скелета; они обеспечивают поддержание постоянной формы человеческого тела, защиту внутренних органов и передачу мышечных сил. Структурная целостность костной ткани имеет важное значение, однако кость способна выдержать нагрузку до определенного предела, после которого теряет свою несущую способность. Для профилактики и предупреждения травм необходимо понимание механизма разрушения кости. Наиболее целесообразным для этого является разработка адекватных численных моделей, как кости в целом, так и костной ткани, позволяющих детально изучить причины и предложить способы профилактики переломов костей. При этом необходимо учитывать реальные данные о физико-механических свойствах материала. Различия в ориентации составных компонентов кости приводит к анизотропии (поперечной изотропии или ортотропии) свойств, причем анизотропные свойства могут проявляться как по длине кости, так и по анатомическим квадрантам (или сторонам поперечного сечения кости) [1, 2]. Ударная вязкость костной ткани также характеризуется анизотропным распределением в анатомических квадрантах поперечного сечения кости [3].

Различные свойства костной ткани для различных квадрантов поперечного сечения кости могут оказывать влияние на несущую способность кости в целом при хирургической резекции (удаление опухолеподобного поражения с формированием секторального дефекта кости). Это связано с тем, что после хирургической резекции оказывается нагруженной оставшаяся после операции часть кости, частично или полностью соответствующая какому-либо из четырех квадрантов (передний, внутренний, задний и внешний) поперечного сечения кости [4]. В результате секторальной резекции прочность сегмента снижается и появляется риск патологического перелома кости на уровне резекции. Целью настоящей работы является оценка влияния анизотропного распределения ударной вязкости в поперечном сечении кости на предельную нагрузку на кость голени с пострезекционным дефектом в большеберцовой кости.

Конечно-элементное моделирование. Компьютерная томография неповрежденной кости голени выполнена на спиральном рентгеновском томографе Siemens Somatom Emotion 16, шаг среза 2 мм. Генерация трехмерной твердотельной модели осуществлена с применением компьютерной системы обработки медицинских изображений ScanIP (Simpleware Ltd., UK). STL-модель преобразована в твердотельную модель в CAD-пакете CATIA V5 (Dassault Systèmes, France) и импортирована в ANSYS Workbench 17.0 (ANSYS Inc., USA). Костная ткань большеберцовой и малоберцовой костей моделировалась линейно ортотропной средой [2] в цилиндрической системе координат в соответствии.

Постоянные упругости костной ткани и стандартные отклонения приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Постоянные упругости костной ткани большеберцовой кости голени (индекс 1 соответствует радиальному направлению, 2 – окружному направлению, 3 – продольному направлению)

E_1 , ГПа	11.7±1.3
E_2 , ГПа	12.2±1.4
E_3 , ГПа	20.7±1.9
ν_{12}	0.420±0.074
ν_{13}	0.237±0.041
ν_{23}	0.231±0.035
G_{12} , ГПа	4.1±0.5
G_{13} , ГПа	5.17±0.6
G_{23} , ГПа	5.7±0.5

Нагрузка на кость голени прикладывалась вдоль ее биомеханической оси, то есть линия действия нагрузки проходит от середины межмышцелкового возвышения большеберцовой кости к середине суставной площадки дистального эпифиза. Зонами приложения нагрузки являются мыщелки большеберцовой кости за исключением межмышцелкового возвышения. Граничные условия соответствуют жесткому закреплению дистальной суставной площадки большеберцовой кости за исключением лодыжек (участки контакта с мыщелками бедренной кости и блоком таранной кости).

Костный дефект располагался в средней трети большеберцовой кости в различных квадрантах поперечного сечения. Отделы большеберцовой кости голени и анатомические квадранты для образца из средней трети обозначены на рисунке 1.

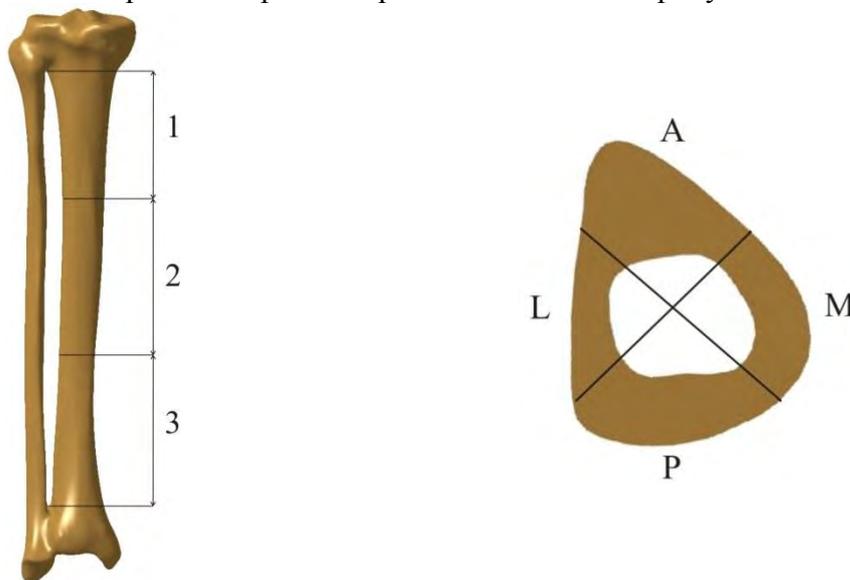


Рис. 1. Трети диафиза бедренной кости человека: (вид сзади):
 1 – верхняя треть, 2 – средняя треть, 3 – нижняя треть;
 квадранты поперечного сечения образца из верхней трети: А – передний квадрант,
 М – внутренний квадрант, Р – задний квадрант, L – внешний квадрант

Варианты расположений костной ткани в области пострезекционного дефекта в поперечном сечении большеберцовой кости схематично представлены на рисунке 2. Угловой размер дефекта составляет 270°; линейный размер 64,0 мм.

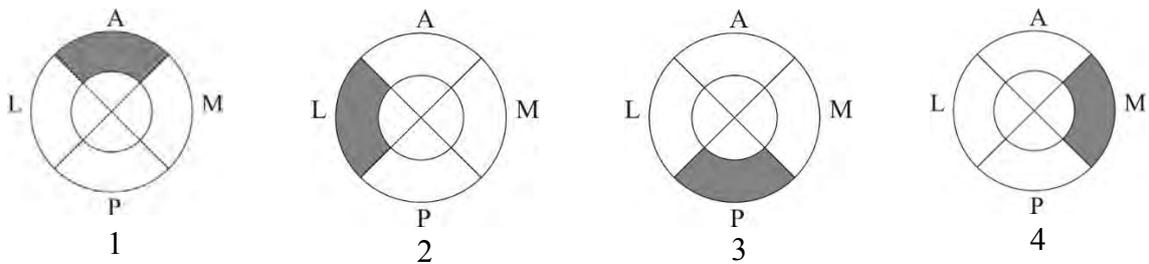


Рис. 2. Схематичное расположение костной ткани в области пострезекционного дефекта в поперечном сечении большеберцовой кости: костная ткань удалена в квадрантах, выделенных белым цветом; квадрант с оставшимся после хирургической резекции фрагментом костной ткани выделен серым цветом

В качестве примера на рисунке 3 представлена кость голени с пострезекционным дефектом, расположенным в средней трети большеберцовой кости, соответствующим варианту 1 локализации дефекта, показанному на рисунке 2.



Рис. 3. Кость голени с пострезекционным дефектом в средней трети; оставшийся после хирургической резекции фрагмент костной ткани располагается в переднем анатомическом квадранте

Конечно-элементное разбиение модели кости голени осуществлялось в автоматическом режиме, за исключением областей в окрестности костного дефекта (тип элемента). Максимальный размер элемента для кости в целом составил 5,0 мм (за исключением областей вблизи концентраторов костного дефекта). Конечно-элементное разбиение областей около концентраторов дефекта выполнялось с применением сфер влияния в ANSYS Tools. Максимальный размер элемента в этих областях составлял 0,1 мм.

Оценка предельной нагрузки осуществлялась на основании расчета J -интегралов в области секторального дефекта для четырех вариантов, представленных на рисунке 1, расположения костного дефекта. Нагрузка принималась предельной, если J -интеграл достигал критического значения J_c , экспериментально определенного для кортикальной костной ткани в работе [3] для различных анатомических квадрантов поперечного сечения кости. Диапазон значений предельной нагрузки на бедренную кость с пострезекционным дефектом определялся для вариантов 1-4 расположения костного дефекта в двух случаях. В первом случае значения J_c были различны для всех анатомических квадрантов в соответствии с данными работы [3]. Во втором случае всех квадрантов

задавалось усредненное значение $\langle J_C \rangle$, рассчитанное на основании результатов [3]. В первом и втором случаях упругие свойства костной ткани описывались постоянными упругости для ортотропного материала в соответствии таблицей 1. Результаты определения предельной нагрузки для выше указанных трех случаев представлены в таблицах 2 и 3.

Таблица 2 – Значения предельной нагрузки на кость голени и соответствующие стандартные отклонение для различных вариантов локализации пострезекционного дефекта

Вариант локализации дефекта	1	2	3	4
J_C , Н/м [3]	4509.1±422.1	5661.6±452.7	3876.7±847.3	5925.5±802.9
Предельная нагрузка, Н	1090±50	1210±50	2470±270	2170±150

Таблица 3 – Значения предельной нагрузки на кость голени и соответствующие стандартное отклонение для различных вариантов локализации пострезекционного дефекта при $\langle J_C \rangle = 4993.23 \pm 631.25$ Н/м [3].

Вариант локализации дефекта	1	2	3	4
Предельная нагрузка, Н	1150±70	1130±70	2800±180	1990±130

Результаты таблиц 2 и 3 для четырех вариантов локализации костного дефекта и двух случаев оценки предельной нагрузки систематизированы на диаграмме, представленной на рисунке 4.

Из таблиц 1 и 2 и рисунка 4 следует, что анизотропное распределение ударной вязкости и механических свойств костной ткани для различных анатомических квадрантов может оказывать существенное влияние на значение предельной нагрузки на кость голени с пострезекционным дефектом. Особенно существенно влияние анизотропии ударной вязкости на величину предельной нагрузки для варианта 3 локализации пострезекционного дефекта (при локализации оставшегося после резекции фрагмента костной ткани в заднем квадранте). Усреднение ударной вязкости в поперечном сечении большеберцовой кости приводит к существенному уменьшению предельной нагрузки для этого варианта. Это может иметь опасные последствия при оценке предельной нагрузки, поскольку в этом случае величина предельной нагрузки оказывается завышенной после усреднения по сравнению с величиной нагрузки оцениваемой с учетом различных значений ударной вязкости для различных анатомических квадрантов. Таким образом, пренебрежение анизотропией ударной вязкости может привести к неверной оценке предельной нагрузки, что может привести к неверным рекомендациям по послеоперационной реабилитации пациента. В частности, может быть назначен разгрузочный режим для пациента при необходимости армирования бедренной кости. Значение предельной нагрузки при усреднении ударной вязкости в случае варианта 1 локализации пострезекционного дефекта (оставшийся после хирургической резекции фрагмент костной ткани расположен в переднем квадранте) также снижается. Но уменьшение величины предельной нагрузки в этом случае несущественно.

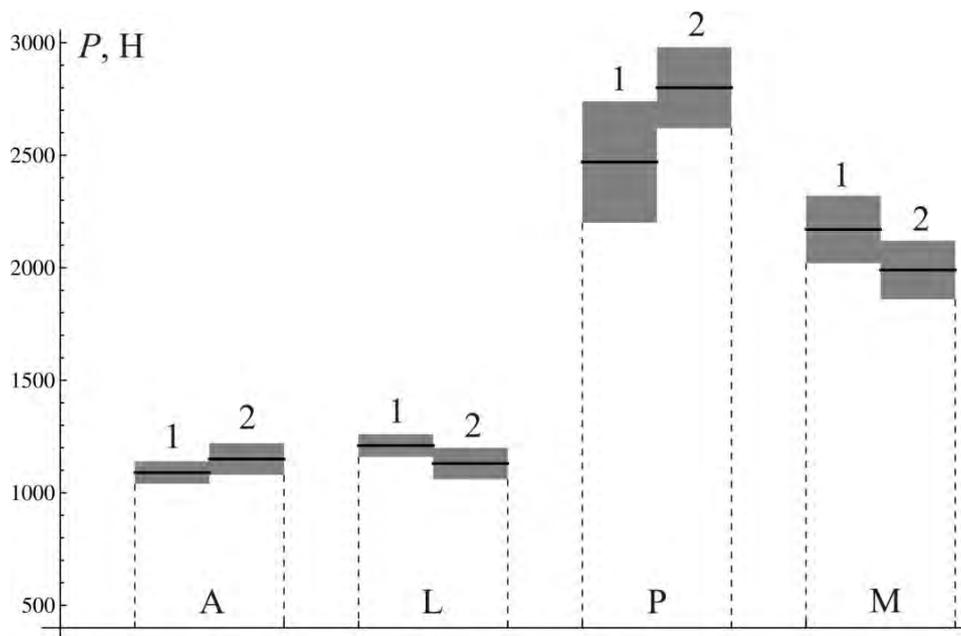


Рис. 4. Предельная нагрузка на кость голени с пострезекционным дефектом в средней трети при различных вариантах локализации костного дефекта в поперечном сечении кости и двух подходах к ее оценке (1 – оценка предельной нагрузки с учетом различных значений J_C для различных анатомических квадрантов, 2 – для единого усредненного значения $\langle J_C \rangle$ для различных анатомических квадрантов); A, L, P и M соответствуют вариантам 1, 2, 3 и 4 локализации пострезекционного дефекта. Сплошная линия соответствует среднему значению нагрузки, серым цветом выделено стандартное отклонение.

Заключение. Наиболее опасным с точки зрения возникновения патологического перелома является варианты 1 и 2 локализации пострезекционного дефекта (оставшийся фрагмент костной ткани располагается в переднем или наружном квадрантах), поскольку в этом случае значение предельной нагрузки является существенно меньшим по сравнению с остальными вариантами локализации пострезекционного дефекта.

В случаях локализации костного дефекта в случаях, когда оставшийся после хирургической резекции фрагмент костной ткани располагается в переднем, наружном или внутреннем квадрантах величины предельной нагрузки являются сопоставимыми.

Анизотропное распределение ударной вязкости костной ткани для различных анатомических квадрантов может оказывать существенное влияние на значение предельной нагрузки на бедренную кость с пострезекционным дефектом. Влияние анизотропии ударной вязкости на величину предельной нагрузки особенно существенно для локализации оставшегося после резекции фрагмента костной ткани в заднем квадранте. В этом случае усреднение ударной вязкости может привести к завышенному значению предельной нагрузки при ее оценке.

Пренебрежение анизотропией ударной вязкости может привести к неверной оценке предельной нагрузки и к неверным рекомендациям по послеоперационной реабилитации пациента.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция» (задание 1.8.01.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Orías A.A.E. *The relationship between the mechanical anisotropy of human cortical bone tissue and its microstructure / Dissertation. Notre Dame, Indiana, USA. 2005. 142 pp.*

2. Rho J.-Y. *An ultrasonic method for measuring the elastic properties of human tibial cortical and cancellous bone* // *Ultrasonics*. 1996. Vol. 34. P. 777 – 783.
3. Li S., Demirci E., Silberschmidt V.V. *Variability and anisotropy of mechanical behaviour of cortical bone in tension and compression* // *Journal of Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2013, Vol. 21, pp. 109-120.
4. Босьяков С. М., Шпилевский И. Э., Алексеев Д. В. *Анализ поврежденности бедренной кости с пострезекционным дефектом при действии статической нагрузки* // *Теоретическая и прикладная механика*. 2014, Выпуск 29. С. 148 – 152.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НОЖЕЙ ДЛЯ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ ПИЩЕВЫХ ПРОДУКТОВ ПРИ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ЗАКАЛКЕ ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ НАГРЕВА

к.ф.-м.н. **Вермейчик А.И.**, **Гарбачевский В.В.**, д.т.н. **Сазонов М.И.**, к.т.н. **Хвисевич В.М.**

УО «Брестский государственный технический университет», Брест

Введение. В пищевой промышленности широко используются установки для измельчения пищевых продуктов. Производительность и ресурс этих установок определяется техническим состоянием измельчителей, вращающимися с высокими угловыми скоростями и работающими при больших нагрузках. Поэтому разработка методики и оптимальных параметров процесса плазменной закалки является актуальной задачей [1]. Статья посвящена исследованию температурных полей и термонапряжений, возникающих в измельчителях, подвергнутых поверхностной плазменной закалке движущимся источником нагрева. Разработана механико-математическая модель ножа и исследован износ его элементов. Изучены температурные поля и термонапряжения от движущегося высокоинтенсивного источника нагрева. Срок эксплуатации измельчителей пищевых продуктов увеличен в 2,3 раза.

Исследование износостойкости измельчителей пищевых продуктов и разработка основ технологии поверхностной плазменной закалки (ППЗ)

Ножи, используемые при измельчении пищевых продуктов на универсальных установках немецкой компании «Stephan», изготовлены из хромистой жаропрочной нержавеющей стали 14X17H2 ГОСТ 5632—2014 и упрочнялись объемной закалкой. В процессе эксплуатации измельчители подвергались механическому, кавитационному и коррозионному изнашиванию и имели короткий срок эксплуатации (рис. 1, а).

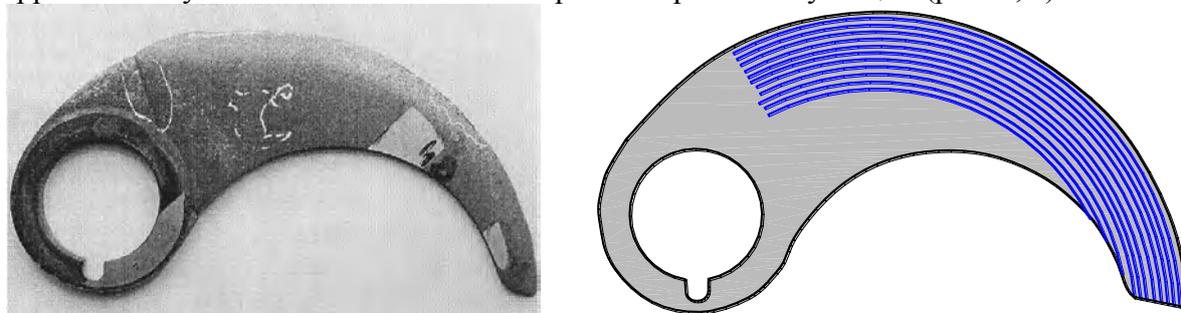


Рис. 1. Измельчители пищевых продуктов: а – после эксплуатации с упрочнением объемной закалкой; б – до эксплуатации после ППЗ

Нож имеет плоскую серпообразную форму толщиной $t=8$ мм (рис. 1). В результате объемной закалки твердость детали достигала величины 42–48 HRC. В установке используются два ножа, которые установлены в горизонтальном положении на вращающемся валу емкости, в которую загружаются куски сырья общей массой $m = 70$ кг. Заточенная под углом 21° кромка детали обращена вниз. В емкость подается пар с температурой $T = 150$ °С (после размельчения и расплавления сырья часть его остается под поверхностью детали). Ведущий вал вращается с высокой скоростью, совершая $n = 740 - 1480$ об/мин. Один цикл нагружения при стационарном режиме $t = 7$ мин; а с учетом времени перезагрузки установки за сутки деталь нагружается 25...40 раз. Долговеч-

ность детали не превышала 3 месяца, поэтому разрушение материала является малоцикловым, что свидетельствует о наличии нагрузок с большой интенсивностью.

Визуальные обследования показали ряд типичных для таких процессов дефектов – поверхностная коррозия металла, затупление, растрескивание и выламывание режущей кромки, разрушение полотна детали, отламывание кусков в периферийной зоне. В зоне примыкания детали к утолщению с посадочным отверстием отмечено появление «шейки».

С помощью лазерного профилометра для изучения характера износа построены профилограммы детали, из которых видно, что произошел значительный износ материала (порядка 10–20 % общей массы детали). Толщина детали в сечениях, наиболее удаленных от оси вращения, уменьшилась из-за большей окружной скорости в этих сечениях ножа примерно в два раза, при этом его поверхность не подверглась деформации и осталась плоской. Ввиду слоистости структуры материала определены механические характеристики образцов вдоль и поперек слоев. Прочность материала вдоль волокон на 12...17 % выше прочности материала поперек волокон, что должно быть учтено при изготовлении детали.

Эксперименты показали, что из-за высоких градиентов напряжений в процессе эксплуатации измельчителей появляются трещины на глубину до 3,7 мм. Таким образом, проблема повышения надежности и долговечности детали может быть решена 2-мя путями:

- анализом НДС с разработкой рекомендаций для оптимизации геометрии детали;
- использованием поверхностной плазменной закалки для создания поверхностного слоя измельчителя с высокой твердостью и износостойкостью.

Анализируя характер работы установки, имеющих механических повреждений, можно сделать вывод, что касательные силы инерции не влияют на работоспособность детали. Кроме того, на отработавших свой ресурс деталях замечены характерные дефекты, которые также позволяют сделать вывод о характере и уровне действующих нагрузок.

Проведены исследования износостойкости измельчителей. С помощью программного обеспечения измерительного комплекса MISTRAL 070705 создана модель детали (рис. 2, б). На основании полученных данных для фрагментов четырех анализированных деталей построены кривые, описывающие геометрию исследуемой части детали в плоскостях А–F.

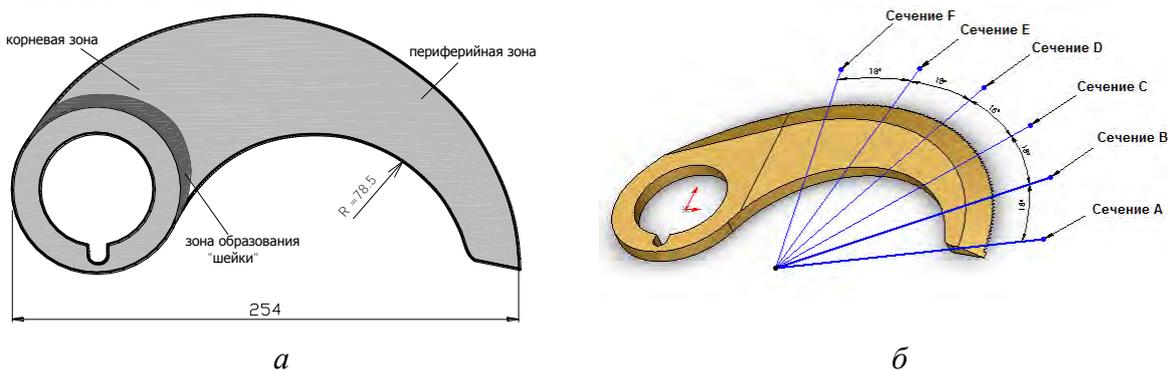


Рис. 2. Эскиз детали (а) и ее компьютерная модель (б)

Для осуществления процесса поверхностной плазменной закалки в комплексе с плазменной установкой был разработан специальный манипулятор, при помощи которого осуществляется перемещение детали относительно плазменной дуги с заданной скоростью (частота вращения стола манипулятора может регулироваться в пределах 0,5–180 об/мин). Упрочняемая деталь располагалась на столике манипулятора горизонтально. Нанесение плазменных дорожек осуществлялось с шагом 1,5–2,0 мм (рис. 1, б).

Рабочие параметры устанавливались следующим образом: ток дуги $I=28$ А, расход плазмообразующего газа (аргон) $Q_{Ar}=1,2$ л/мин, расход защитного газа (азот) $Q_{N_2}=3,6$ л/мин, относительная скорость перемещения детали $v=10$ мм/с.

В результате микротвердость поверхности детали увеличена до 466–600 HV_{0,1}. Экспериментально подтверждена возможность закалки при наложении соседних дорожек друг на друга с расстояниями 0,4 мм между их осями; при этом микротвердость составила 532 – 566 HV. Упрочненные таким способом детали были установлены на длительные испытания.

В силу конструктивных особенностей деталь имеет режущую кромку с соответствующим углом заточки. Для упрочнения режущей кромки сначала выполнялся раскрой заготовок по существующей технологии. Затем осуществлялся процесс ППЗ заготовок по разработанной методике. Заключительной операцией являлась механическая заточка заготовок для образования режущей кромки измельчителя.

Для вычисления критерия износа детали Φ_{nm} применялась следующая формула:

$$\Phi_{nm} = \frac{S_{1m} - S_{nm}}{S_{1m}} \cdot 100 \%, \quad (1)$$

где Φ_{nm} – относительный процент износа детали, S_{nm} – поле поверхности анализируемого сечения для соответствующей детали n в соответствии с плоскостью m ; n – номер детали ($n=1, 2, 3, 4, 5$).

По результатам проведенных расчетов построены графики относительного износа элементов детали, упрочненной объемной и поверхностной закалками (рис. 3, а, б).

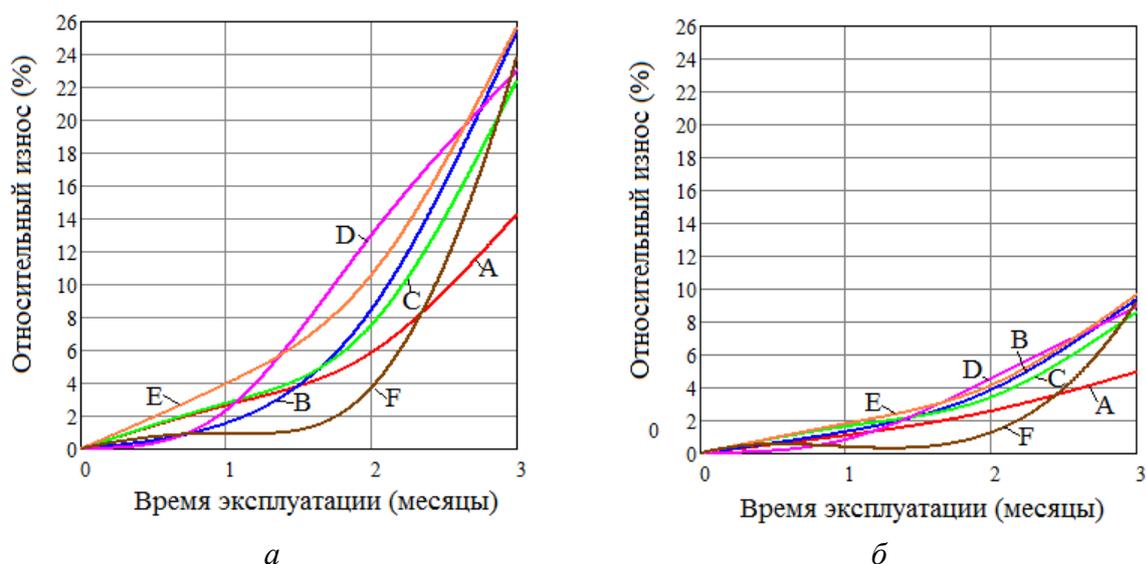


Рис. 3. Графики относительного износа измельчителей из стали 14X17H2, упрочненных: а – объемной закалкой, б – поверхностной закалкой

Анализируя полученные зависимости можно заключить, что износостойкость измельчителей, упрочненных путем ППЗ, в 2,3 раза выше, чем износостойкость измельчителей, упрочненных объемной закалкой.

Методика исследований НДС ножей при поверхностной закалке рабочей зоны

Для определения оптимальных режимов процесса поверхностной плазменной закалки проведено исследование нестационарных температурных полей, напряжений и деформаций, выполненное с применением конечно-элементного комплекса ANSYS [2]. Следует отметить, что основой термостатического анализа в ANSYS является уравнение теплового баланса, которое получается из принципа сохранения энергии. Конечно-элементное решение заключается в получении значений узловых температур и напряжений, на основе которых вычисляются остальные необходимые величины [3, 4].

В ходе проведения вычислительного эксперимента разработана трехмерная модель ножа, приведенная на рис. 4.

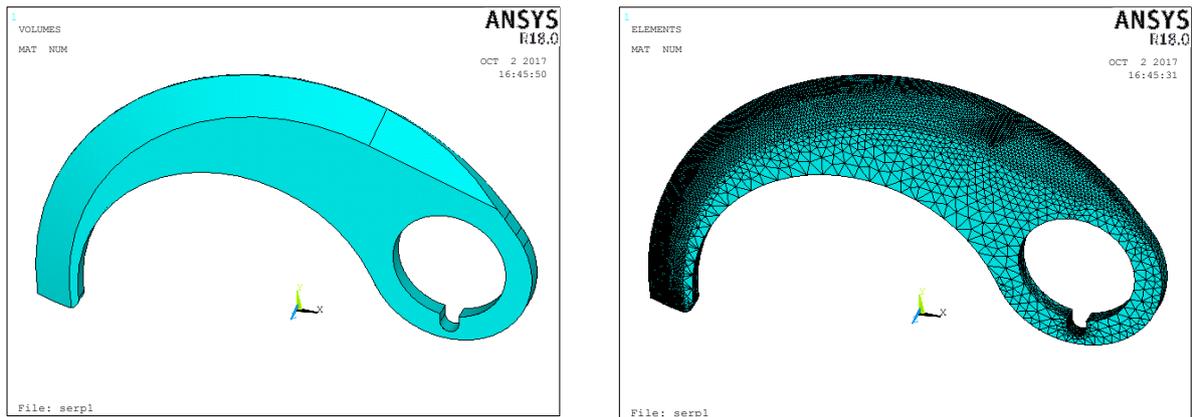


Рис. 4. Трехмерная модель ножа (а) и схема разбиения конечными элементами (б)

При решении температурной задачи в ANSYS использовался предназначенный для анализа переходных процессов восьмиузловой термической элемент SOLID70 (Thermal Mass Solid Brick 8node 70), который имеет одну степень свободы (температура в каждой точке). Модель разбивалась на 53572 конечных элемента. В соответствии со скоростью движения плазменной струи к узлам дискретной модели ножа пошагово последовательно прикладывалась температурная нагрузка в виде конвекции. Во избежание оплавления максимальная температура поверхности ножа должна быть на 3...5 % меньше температуры плавления стали (~1400 °С). На всех поверхностях модели задавалась конвекция, т.к. температура плазменной струи в центре составляет около 20000 °С. Известно [1], что тепловой поток плазменной струи распределяется по ширине пятна нагрева по закону, близкому к кривой вероятности Гаусса. Исходя из этого на той поверхности, по которой движется плазменная струя, коэффициент конвекции задавался различным по ширине пятна нагрева, соответствующим нормальному распределению. Его значение выбиралось в зависимости от того, чтобы максимальная температура на нагреваемой поверхности не превышала 1350 °С. Распределение температуры по пятну нагрева приведено в [5].

Функции температуры и коэффициента конвекции имеют следующий вид:

$$T(x, y, t) = \frac{T_0}{10^{-3} \left[\left(R \cdot \cos\left(\frac{v}{R}t - 0,122\right) + x \right)^2 + \left(R \cdot \sin\left(\frac{v}{R}t - 0,122\right) - y \right)^2 \right] + 1} + T_H, \quad (2)$$

$$k(x, y, t) = \frac{k_0}{10^{-3} \left[\left(R \cdot \cos\left(\frac{v}{R}t - 0,122\right) + x \right)^2 + \left(R \cdot \sin\left(\frac{v}{R}t - 0,122\right) - y \right)^2 \right] + 1},$$

где $T_0=20\ 000$ °С – температура в центре плазменной струи, $R=0,13$ м – радиус кривизны траектории движения плазменной струи, определяемый из геометрии режущей кромки ножа, $v=10$ мм/с – скорость движения плазматрона, $T_H=20$ °С – температура окружающей среды, $k_0=7\ 000$ Вт/м²·К – коэффициент конвекции в центре плазменной струи.

Удельная теплоемкость стали принималась зависящей от температуры и при температурах 0...1300 °С находилась в интервале $c_{ст} = 400...600$ Дж/(кг·К) [6]. Время движения t определялось в зависимости от длины дуги режущей кромки при скорости

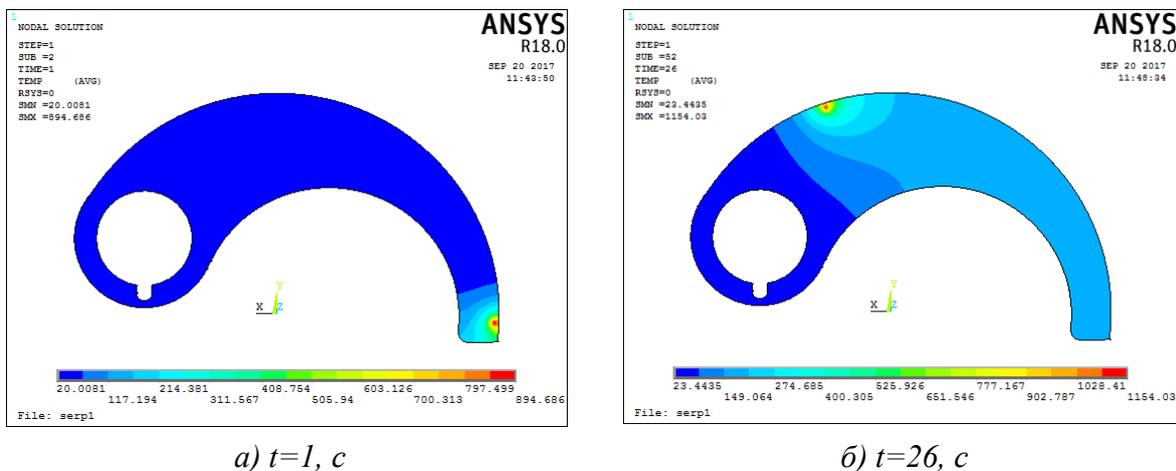
движения плазмотрона $v=10$ мм/с. Некоторые характеристики материала приведены в таблице 1.

Таблица 1. Характеристики материала измельчителя

Материал	Коэффициент теплопроводности λ , Вт/(К·м)	Модуль упругости E , Па	Коэффициент Пуассона ν	Удельная теплоемкость c , Дж/(кг·К)
Сталь 14X17H2	50	$2 \cdot 10^{11}$	0,28	400...600

После каждого шага нагружения проводился расчет температурных полей, результаты которого записывались в LS-файлы. В результате проведения расчета определены поля температур в различные моменты времени.

На рис. 5 представлено распределение температурных полей на рабочей зоне измельчителя в различные моменты времени при скорости движения пятна нагрева $V=10$ мм/с.



а) $t=1$, с

б) $t=26$, с

Рис. 5. Распределение температурных полей на нижней поверхности ножа для различных моментов времени

На рис. 6 приведены типичные распределения температуры и эквивалентных напряжений (по Мизесу) на режущей кромке в различных сечениях (рис. 3) от времени.

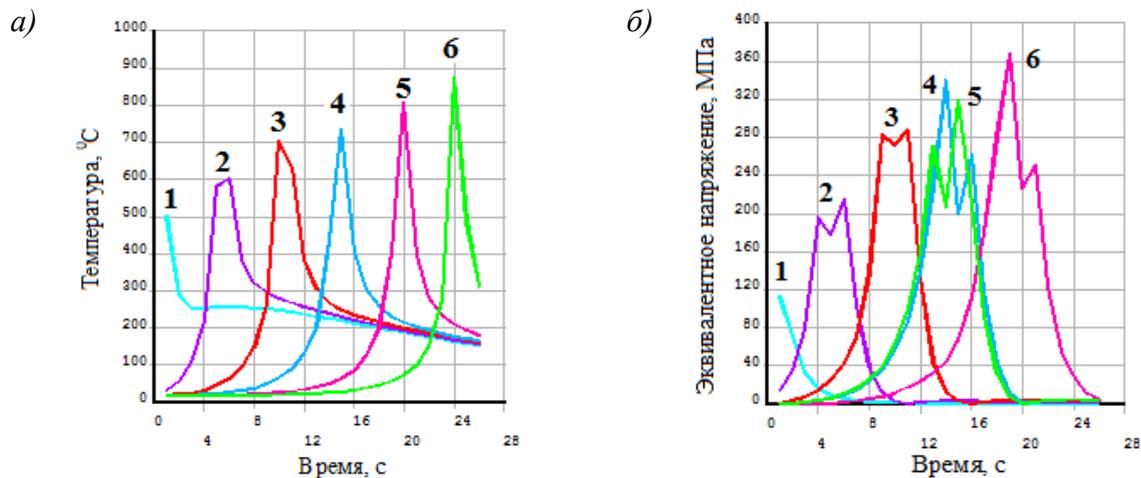


Рис. 6. Зависимость температуры (а) и эквивалентных напряжений (б) на режущей кромке от времени в различных сечениях (рис. 3): 1 – сечение А, 2 – сечение В, 3 – сечение С, 4 – сечение D, 5 – сечение Е, 6 – сечение F

Графики показывают, что наибольшее значение температура достигает в тот момент времени, когда центр источника тепла находится в сечении F.

Исследовано распределение температурных полей по глубине сечения измельчителя, вдоль которого перемещается источник нагрева. На рис. 7 приведены типичные распределения температурных полей для различных сечений при скорости движения плазмотрона $V=10$ мм/с.

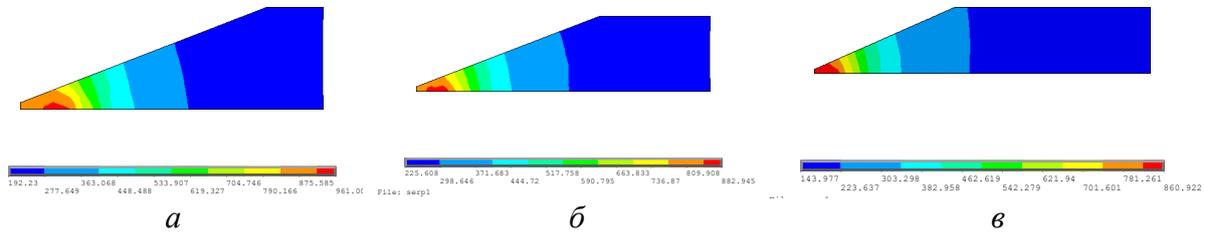


Рис. 7. Распределение температурных полей в различных сечениях в момент времени, соответствующему нахождению центра источника тепла: а) в сечении А, б) в сечении В, в) в сечении D

При решении задачи термоупругости нож «закреплялся» по нижней торцевой поверхности для ограничения перемещения в направлении, перпендикулярном поверхности ножа, и по поверхности шпоночного паза для ограничения перемещения в направлении, параллельном поверхности ножа. Для получения общего решения задачи термоупругости выполнялось совместное решение по определенному количеству LS-файлов, соответствующее 13 шагам нагружения, записанных при выполнении теплового расчета.

На рис. 8 представлено распределение эквивалентных напряжений и суммарных перемещений на рабочей зоне измельчителя в различные моменты времени при скорости движения пятна нагрева $v=10$ мм/с.

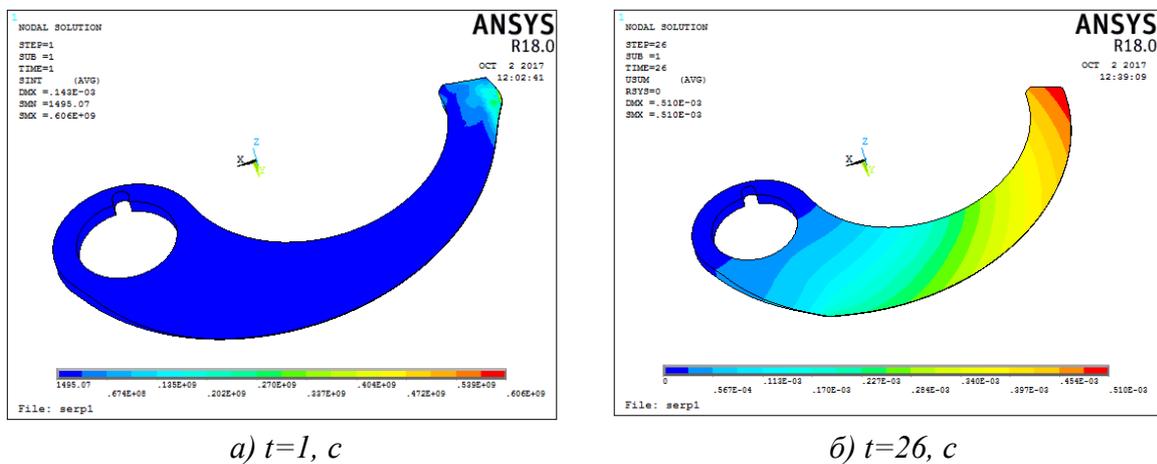


Рис. 8. Распределение эквивалентных напряжений (а) и суммарных перемещений (б) на рабочей зоне измельчителя в различные моменты времени

На рис. 9 приведены типичные распределения напряжений и перемещений для различных сечений при скорости движения плазмотрона $v=10$ мм/с.



Рис. 9. Распределение эквивалентных напряжений (а) и суммарных перемещений (б) в различных сечениях в момент времени, соответствующему нахождению центра источника тепла в сечении А

Заключение. Осуществлен процесс поверхностной плазменной закалки измельчителей пищевого сырья из стали 14X17H2 путем нанесения дорожек с шагом 1,5 мм на тело детали. Необходимая скорость движения источника и траектория плазменной струи автоматически выполнялась манипулятором. Определены оптимальные параметры процесса ППЗ: скорость движения источника $v = 10$ мм/с, расход аргона $Q_{Ar} = 1,2$ л/мин, расход азота $Q_{N_2} = 3,6$ л/мин, ток дуги $I = 28$ А.

Выполненные с помощью измерительного комплекса Mistral 070705 исследования упрочненных ППЗ измельчителей на износостойкость показали значительное увеличение их долговечности, а срок их эксплуатации увеличен в 2,3 раза.

Исследовано НДС измельчителя в процессе поверхностной плазменной закалки с помощью разработанной механико-математической ANSYS-модели, учитывающей распределение температуры по диаметру пятна нагрева и зависимость характеристик материала от температуры, что позволило уточнить параметры ППЗ и обеспечить прочность и жесткость деталей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кундас, С.П. Компьютерное моделирование процессов термической обработки сталей: монография / С.П. Кундас. – Мн.: Бестпринт, 2005. – 313 с.
2. Басов, К.А. ANSYS: справочник пользователя / К.А. Басов. – М.: ДМК Пресс-2005.- 640с., ил.
3. Чигарев, А.В. ANSYS для инженеров / А.В. Чигарев, А.С. Кравчук, А.Ф. Смалюк. - М.: Машиностроение. – 2004. – 510 с.
4. Каплун, А.Б. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство / А. Б. Каплун, Е.М. Морозов, М.А. Олферьева. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.
5. Веремейчик, А.И. Расчет нестационарных термоупругих напряжений при воздействии локального высококонцентрированного источника тепла / А.И. Веремейчик, В.В. Гарбачевский, М.И. Сазонов, В.М. Хвисевич, Д.Л. Цыганов // Механика и наномеханика структурно-сложных и гетерогенных сред. Успехи, проблемы, перспективы, Москва, 23-31 декабря 2014 г. / Институт прикладной механики РАН. – Москва: ИПРИМ РАН, 2014. – С. 244–252.
6. Таблицы физических величин. Справочник. / Под ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1008 с.

ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕССА ОТВЕРЖДЕНИЯ СВЯЗУЮЩЕГО НА УПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

¹Василевич Ю.В., ²Скворцов К.Г., ¹Сахоненко С.В., ²Сахоненко В.М.

¹УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

²ОАО «Авангард» Сафоново

На протяжении всех технологических процессов создания композита происходит существенное изменение его физико-механических свойств. Если свойства в направлении армирования волокон остаются линейными и практически неизменными, то податливость в поперечном направлении существенно нелинейна на стадиях намотки, разогрева, отверждения, готового изделия и может меняться на три порядка. Применение к такому материалу единой реологической модели практически невозможно. Инженерный метод решения заключался в том, что для каждого этапа механическое поведение описывается своим законом. При этом на стыках стадий имеет место существенное изменение характеристик. В этой связи рассмотрим влияние процесса отверждения эпоксидного связующего на остаточные напряжения в намоточных изделиях. Для разработки технической теории примем следующие гипотезы:

1) химическая усадка завершается на стадии отверждения эпоксидного связующего [1];

2) для эпоксидных связующих химическая и термическая усадки связующего заканчиваются одновременно при температуре 160°C;

3) во время полимеризации происходит незначительная фильтрация связующего, которая практически не влияет на изменение напряженного состояния в препреге.

Поставленную задачу будем решать с помощью уравнений, которые получены из условий равновесия и совместности деформаций наполнителя и связующего [2, 3], когда связующее находится в неотвержденном состоянии. Это означает, что давление сжатия связующего распространяется одинаково во все стороны.

Рассмотрим круглое поперечное сечение композита и исследуем деформацию всех семейств нитей в трансверсальном направлении. Предположим, что действующие усилия к нитям и связующему одинаковы, так как они последовательно передаются от одного материала к другому. В кольцевом направлении наблюдается параллельная деформация материалов.

В результате с учетом принятых гипотез имеем

$$\varepsilon_r = (m + 3 \cdot \varepsilon_c) \varepsilon_{rc} + (1 - m)(\varepsilon_{rH} + \varepsilon_{rTH}),$$

$$\sigma_\theta = m\sigma_{\theta c} + (1 - m)\sigma_{\theta H}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta H} + \varepsilon_{\theta TH},$$

$$\sigma_{rH} = \sigma_r = \sigma_{rc} = \sigma_{\theta c}$$

В этих формулах ε_r – усредненная деформация препрега в трансверсальном направлении; σ_r и σ_θ – усредненные напряжения в трансверсальном и кольцевом направлениях соответственно; ε_{rc} и ε_{rH} – деформации связующего и наполнителя в трансверсальном направлении; $\varepsilon_{\theta c}$ – деформация связующего в осевом направлении; ε_c – суммарная химическая и термическая деформация связующего; σ_{rH} и $\sigma_{\theta H}$ – напря-

жения в наполнителе в трансверсальном и кольцевом направлениях; m – относительное содержание связующего в препреге; $\varepsilon_{TH} = \alpha_H \cdot \Delta T$ – термическое расширение наполнителя; ΔT – температурный градиент; α_H – термический коэффициент линейного расширения.

Первое уравнение составлено в предположении, что связующее находится в неотвержденном состоянии. Поэтому химическая и термическая усадки влияют только на изменение объема связующего. Однако, учитывая, что $3\varepsilon_c$ намного меньше m , в формулах (1) слагаемые $3\varepsilon_c$ можно приравнять к нулю. По результатам проведенных испытаний установлено, что деформация в радиальном направлении состоит практически из деформации связующего. Деформация нитей при этом на два порядка меньше деформации связующего. Таким образом, в правой части первого уравнения системы (1) вторым слагаемым тоже можно пренебречь.

Предполагается, что материал наполнителя (нити) является изотропным и подчиняется закону Гука

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rH} &= \frac{1}{E_H}(\sigma_{rH} - \nu_H \sigma_{\theta H}) + \varepsilon_{iH} = \frac{1}{E_H}(\sigma_r - \nu_H \sigma_{\theta H}), \\ \varepsilon_{\theta H} &= \frac{1}{E_H}(\sigma_{\theta H} - \nu_H \sigma_{rH}) + \varepsilon_{iH} = \frac{1}{E_H}(\sigma_{\theta H} - \nu_H \sigma_r),\end{aligned}\quad (2)$$

где E_H и ν_H – модуль упругости и коэффициент Пуассона наполнителя.

Для связующего при его сжатии запишем деформацию в виде

$$\varepsilon_{rc} = \varepsilon_{\theta c} = \frac{1 - \nu_c}{E_c} \sigma_r, \quad (3)$$

где E_c и ν_c – модуль упругости и коэффициент Пуассона связующего, находящегося в условиях сжатия; зависимости (3) получены с учетом (1). При этом формулы (1) и (3) справедливы, если связующее находится в сжатом состоянии, т.е. когда $\sigma_r < 0$.

Связь между осредненными напряжениями и деформациями имеет вид, характерный для ортотропного тела [3, 4]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta} &= \frac{\sigma_{\theta}}{E_{\theta}} - \nu_{\theta r} \frac{\sigma_r}{E_r}, \\ \varepsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E_r} - \nu_{r\theta} \frac{\sigma_{\theta}}{E_{\theta}}.\end{aligned}\quad (4)$$

К уравнениям (1) – (4) следует добавить уравнение равновесия [2]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_{\theta}) = 0. \quad (5)$$

Путем взаимной подстановки зависимостей (1) - (4) в первое уравнение из (1) получим

$$\frac{\sigma_r}{E_r} - \nu_{r\theta} \frac{\sigma_{\theta}}{E_{\theta}} = m \frac{1 - \nu_c}{E_c} \sigma_r.$$

В результате получаем следующую зависимость

$$b_{11} \sigma_r + b_{12} \sigma_{\theta} = 0, \quad (6)$$

где

$$b_{11} = \frac{1}{E_r} - \frac{m(1 - \nu_c)}{E_c};$$

$$b_{12} = -\frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta}.$$

Аналогично второе уравнение из (1) превращается в

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= m\sigma_r + (1-m)(E_H\varepsilon_\theta + \nu_H\sigma_r - E_H \cdot \varepsilon_{TH}) = \\ &= \left[m - (1-m) \left(\nu_{\theta r} \frac{E_H}{E_r} - \nu_H \right) \right] \sigma_r + (1-m) \frac{E_H}{E_\theta} \sigma_\theta - E_H (1-m) \cdot \varepsilon_{TH}. \end{aligned}$$

Предыдущее равенство эквивалентно

$$b_{21}\sigma_r + b_{22}\sigma_\theta = b_2, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} b_{21} &= m - (1-m) \left(\nu_{\theta r} \frac{E_H}{E_r} - \nu_H \right), \\ b_{22} &= (1-m) \frac{E_H}{E_\theta} - 1, \\ b_2 &= E_H (1-m) \cdot \varepsilon_{TH}. \end{aligned}$$

Таким образом, решение системы уравнений (1) – (5) сводится к решению следующей системы

$$\begin{aligned} b_{11}\sigma_r + b_{12}\sigma_\theta &= 0, \\ b_{21}\sigma_r + b_{22}\sigma_\theta &= b_2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0.$$

Если рассматривать первые два уравнения, то при отличном от нуля определителе

$$b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \neq 0$$

получаем решение для σ_r и σ_θ в виде постоянных чисел. Третье уравнение при этом удовлетворяется, если $\sigma_r = \sigma_\theta$, что равносильно

$$b_{11} + b_{12} = 0.$$

В таком случае имеем

$$\sigma_r = \sigma_\theta = b_0 = \frac{b_2}{b_{21} + b_{22}}.$$

Из (4) найдем

$$\varepsilon_\theta = b_0 \left(\frac{1}{E_\theta} - \frac{\nu_{\theta r}}{E_r} \right), \quad (9)$$

В условиях симметричной деформации с учетом (1) и зависимостей между радиальным перемещением u и компонентами деформации ε_r и ε_θ

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (10)$$

получаем, что

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta + r \cdot \varepsilon_\theta' \quad (11)$$

Перемещение u должно удовлетворять граничному условию

$$u|_{r=a} = 0. \quad (12)$$

На основании (9) и (11) придем к зависимостям

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_r = 0.$$

Однако, при отсутствии деформации напряжения в композите не равны нулю. Получили противоречие. Следовательно, определитель первых двух уравнений системы (8) должен быть равен нулю. Условие равенства нулю определителя и одновременно условие существования решения этой системы может быть только в трех случаях:

1) если $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$;

2) если $b_{11} = b_{12} = b_{21} = 0$, $\frac{b_{12}}{b_{22}} = \frac{b_1}{b_2} = b_0$; (13)

3) если $\frac{b_{11}}{b_{21}} = \frac{b_{12}}{b_{22}} = \frac{b_1}{b_2} = b_0$.

Здесь предполагаем, что $b_2 \neq 0$.

В первом случае получаем, что

$$\sigma_r = \frac{b_2}{b_{21}}.$$

В результате из третьего уравнения системы (8) находим

$$\sigma_\theta = \sigma_r.$$

Получили вариант, рассмотренный выше.

Во втором случае из второго уравнения системы (8) находим

$$\sigma_\theta = \frac{b_2}{b_{22}}.$$

Подставим это значение в третье уравнение. В результате получим, что

$$\sigma_r = \frac{c_3}{r} + \frac{b_2}{b_{22}}.$$

Полученные выражения для σ_θ и σ_r должны преобразовать уравнение (11) в тождество относительно переменной r . Это условие будет выполнено, если $c_3 = 0$. Следовательно,

$$\sigma_\theta = \sigma_r = \frac{b_2}{b_{22}}.$$

Как показано выше, такое решение приводит к противоречию.

Рассмотрим теперь третий случай. Заметим, что система уравнений (8) превращается в два уравнения. После преобразований получим

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + k_1 \frac{\sigma_r}{r} = \frac{k_2}{r},$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{b_{22}}(b_2 - b_{21}\sigma_r),$$
(14)

где

$$k_1 = 1 + \frac{b_{21}}{b_{22}},$$

$$k_2 = \frac{b_2}{b_{22}}.$$

Решение дифференциального уравнения (14) имеет вид

$$\sigma_r = cr^{-k_1} + \frac{k_2}{k_1}, \quad (15)$$

$$\sigma_\theta = -c \frac{b_{21}}{b_{22}} r^{-k_1} - \frac{k_2}{k_1} \frac{b_{21}}{b_{22}} + k_2.$$

Теперь с учетом полученного решения (15) должна быть согласована система (10). Для этого заметим, что с учетом (1) – (4) можно записать

$$\varepsilon_r = \frac{m(1-\nu_c)}{E_c} \sigma_r,$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_H(1-m)} \left\{ \sigma_\theta - [m + (1-m)\nu_H] \sigma_r \right\} + \varepsilon_{TH}.$$

Подставим эти значения в (11). В результате полученное равенство с учетом (15) должно превратиться в тождество относительно переменной r . Следовательно, предположение будет выполнено, если принять во внимание, что

$$(k_1 - 1)^2 + d_1(k_1 - 1) = D, \quad (16)$$

$$1 - d_1 + k_1 \cdot b_{22} = D,$$

где

$$D = m(1-m)(1-\nu_c) \frac{E_H}{E_c},$$

$$d_1 = m + (1-m)\nu_H.$$

Обратим внимание на то, что параметры m и ν_H ограничены единицей, а

$$E_H \gg E_c.$$

На этом основании из (16) найдем

$$k_1 - 1 \approx b_{22} \approx \sqrt{D}. \quad (17)$$

Приближенные равенства (17) можно обратить в равенства, так как модуль E_H больше модуля E_c практически в тысячу раз.

Учитывая, что

$$k_1 - 1 = \frac{b_{21}}{b_{22}}; b_{22} = (1-m) \frac{E_H}{E_\theta} - 1,$$

найдем

$$b_{21} = D; E_\theta = \frac{1-m}{\sqrt{D}+1} E_H. \quad (18)$$

Из того, что $b_{11} = b_{12} = 0$ следует равенство

$$E_r = \frac{E_c}{m(1-\nu_c)}; \nu_{r\theta} = 0. \quad (19)$$

Коэффициент Пуассона $\nu_{\theta r}$ найдем из зависимости

$$b_{21} = m - (1-m) \left(\nu_{\theta r} \frac{E_H}{E_r} - \nu_H \right) = D.$$

Таким образом, для препрега

$$\nu_{\theta r} \approx -1. \quad (20)$$

Здесь приближенное равенство можно считать точным, если будем руководствоваться замечанием, сделанным выше. Отрицательное значение для $\nu_{\theta r}$ и равенство нулю для $\nu_{r\theta}$ получены в связи с тем, что композиция связующего с армирующим мате-

риалом не имеет физической связи. При этом сжатие связующего сопровождается уменьшением его объема из-за ликвидации в нем содержащихся пузырьков воздуха.

В результате все искомые параметры найдены и определяются формулами (18) - (20).

Постоянную c найдем из условия

$$u|_{r=a} = 0. \quad (21)$$

На основании (10) следует, что

$$\varepsilon_\theta|_{r=a} = c \quad (22)$$

или

$$\left(\frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \nu_{\theta r} \frac{\sigma_r}{E_r} \right) \Big|_{r=a} = 0. \quad (23)$$

Таким образом,

$$c = \frac{b_2(1-m-\nu_H)}{b_{22}k_1(k_1-1+m+\nu_H)} a^{k_1}.$$

С учетом найденной зависимости для c решение (15) можно записать в виде

$$\sigma_r = d \left(\frac{a}{r} \right)^{k_1} + \frac{b_2}{b_{22}k_1}, \quad (24)$$

$$\sigma_\theta = -d(k_1-1) \left(\frac{a}{r} \right)^{k_1} + \frac{b_2}{b_{22}k_1},$$

где

$$d = \frac{b_2(1-m-\nu_H)}{b_{22}k_1(k_1-1+m+\nu_H)}.$$

Полученные соотношения (21) решают поставленную задачу о влиянии усадки связующего в неотвержденном состоянии при полимеризации на изменение напряженного состояния в материале изделия.

В отношении модуля упругости E_r необходимо проводить специальные экспериментальные исследования. Дело в том, что модуль E_r определяется по формуле (19) через модуль связующего E_c . Однако, связующее в составе полимерной массы в качестве компоненты содержит некоторое количество воздуха. Это сильно отражается на величине модуля E_c . Состав воздуха по мере прохождения полимеризации меняется. Таким образом, меняется и величина E_c . В результате, никаким другим способом, кроме пути экспериментальных исследований в составе изделия, определить величину E_c невозможно.

При достаточно высоких значениях степени наполнителя (порядка 70%) усадка связующего, находящегося в пространстве между частицами наполнителя, приводит к частичной потере контакта наполнителя с полимерной матрицей. Это подтверждается прямыми наблюдениями пустот как на границе полимерная матрица-наполнитель, так и в полимере между частицами наполнителя [5]. Наличие пустот свидетельствует о том, что усадочные напряжения, развивающиеся в композите при отверждении, хотя и относительно малы, но сравнимы с низкой адгезионной, а, возможно, и когезионной прочностью формирующегося материала. Однако, когда развиваются сжимающие усилия в наполнителе, то усадочные и температурные напряжения в полимере по этой причине тоже уменьшаются. Таким образом, усадочные и температурные напряжения в наполнителе способствуют повышению качества изготавливаемых изделий. С другой сторо-

ны, сжимающие усилия в наполнителе могут существенно увеличить остаточные напряжения в готовом изделии. Расчет напряжений, возникших в результате полимеризации, может быть проведен с учетом зависимостей (24) и это позволяет оценить их с адгезионной прочностью, и учесть их влияние на остаточные напряжения.

Выводы:

Предложенный метод расчета напряжений применительно к препрегам дает возможность правильно оценить порядок трансверсальных и кольцевых напряжений в стеклопластике, которые возникают при усадке связующего в результате разогрева и полимеризации. Полученные расчетные формулы позволяют учитывать влияние на напряженное состояние таких факторов как химическая усадка связующего, так и термическое расширение компонентов композита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Молодцов Г.А. Структурные остаточные напряжения в ориентированных стеклопластиках // *Механика полимеров*. 1968. № 6. С. 1051-1058.
2. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. М. 1950. С.483.
3. *Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 2. Под ред. И.А.Биргера. Изд-во «Машиностроение»*. М. 1968. С.215-225.
4. Лехницкий С.Г. Обобщение задачи о плоской деформации на случай упругого тела с произвольной анизотропией // *Уч.зап.Саратовск.гос.ун-та. Сер.физ.-мат.наук. Т.1. Вып.2. 1938. С.154-157.*
5. Сиратовский С.Л., Джавадян Э.А., Розенберг Б.А. Усадочные напряжения в полимерных дисперсионно-армированных материалах // *Механика композиционных материалов*. 1980. №5. С.799-803.

ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С УСИЛИВАЮЩЕЙ НАКЛАДКОЙ

Яровая А.В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

В строительстве, транспортном машиностроении широко используются трехслойные элементы конструкций. Эти конструкции изготавливают из различных материалов, среди которых в настоящее время широко распространено применение полимерных, композиционных, функционально-градиентных материалов и т.д. Для уменьшения веса и придания большей жесткости трехслойные элементы могут быть подкреплены ребрами и накладками.

Деформирование трехслойных элементов конструкций при статических и динамических воздействиях исследовалось А. Г. Горшковым, Э. И. Старовойтовым, Д. В. Леоненко, Ю. М. Плескачевским в монографиях и статьях [1–8].

В данной статье исследован цилиндрический изгиб трехслойной прямоугольной ортотропной пластины длиной l и шириной b_0 , усиленной по нижнему слою тонкой накладкой из более жесткого, чем несущие слои, материала (рисунок 1).

Пластина нагружена поперечной нагрузкой $q(x)$. Через $w(x)$ и $u(x)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя вдоль оси ox ; h_k – толщина k -го слоя ($h_3 = 2c$, $k = 1, 2, 3$). Суммарная толщина нижнего слоя

$$h_2^+ = h_2 + h_s H_0(x - x_0) \quad (1)$$

где h_2 – толщина 2-го слоя; h_s – толщина накладки; $H_0(x)$ – функция Хевисайда.

Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях и в накладке справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол, составляющий с координатной осью x величину $\psi(x)$. На торцах пластины предусмотрены жесткие диафрагмы, препятствующие сдвигу слоев. Деформации считаются малыми.

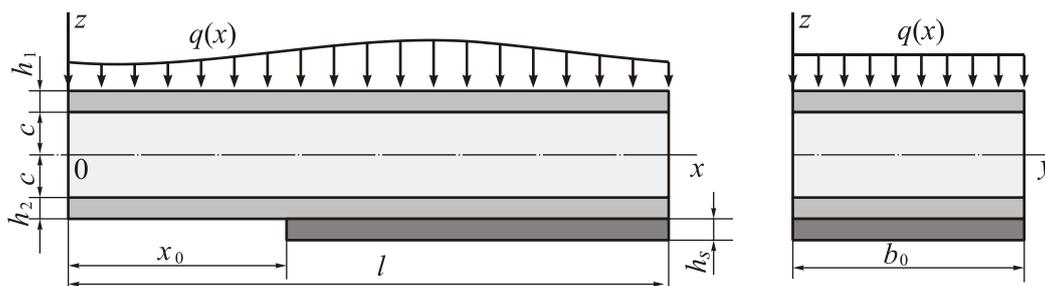


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины с накладкой

С учетом введенных геометрических гипотез продольные перемещения в слоях выражаются через пять искомых функции $w(x, y)$, $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$, $\psi_x(x, y)$, $\psi_y(x, y)$:

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &= u_x + c\psi_x - zw_{,x}; & u_y^{(1)} &= u_y + c\psi_y - zw_{,y} & (c \leq z \leq c + h_1); \\ u_x^{(3)} &= u_x + z\psi_x - zw_{,x}; & u_y^{(3)} &= u_y + z\psi_y - zw_{,y} & (-c \leq z \leq c); \\ u_x^{(2)} &= u_x - c\psi_x - zw_{,x}; & u_y^{(2)} &= u_y - c\psi_y - zw_{,y} & (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (2)$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; $(u_i + c\psi_i)$ – величина смещения внешнего несущего слоя l в направлении i -ой оси за

счет деформации заполнителя, для несущего слоя 2 это смещение равно $(u_i - c\psi_i)$, $i = x, y$; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Уравнения равновесия и силовые граничные условия следуют из принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta A + \delta W = 0 \quad (3)$$

Вариации работ внешней нагрузки и внутренних усилий (напряжений) равны:

$$\begin{aligned} \delta A = \iint_S q \delta w dS; \quad \delta W = \sum_{k=1}^3 \iiint_V \sigma_{ij}^{(k)} \delta \varepsilon_{ij}^{(k)} dV = \sum_{k=1}^3 \iiint_S \left(\int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx}^{(k)} dz + \int_{h_k} \sigma_{yy}^{(k)} \delta \varepsilon_{yy}^{(k)} dz + \right. \\ \left. + 2 \int_{h_k} \sigma_{xy}^{(k)} \delta \varepsilon_{xy}^{(k)} dz + 2 \int_{h_k} \sigma_{xz}^{(k)} \delta \varepsilon_{xz}^{(k)} dz + 2 \int_{h_k} \sigma_{yz}^{(k)} \delta \varepsilon_{yz}^{(k)} dz \right) dS. \end{aligned} \quad (4)$$

В работе [9] с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа и закона Гука для анизотропного тела была получена общая система пяти дифференциальных уравнений равновесия в частных производных для трехслойной пластины с анизотропными слоями без накладки. При цилиндрическом изгибе трехслойной ортотропной пластины с накладкой в этой системе необходимо перемещения с индексом «у» положить равными нулю. В результате, с учетом (1) – (4) для нахождения трех оставшихся перемещений $w(x)$, $\psi(x)$ и $u(x)$ (индекс «x» опущен) получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} [a_3 + a_3^{(s)} H(x - x_0)] w_{,xx} + [a_6 + a_6^{(s)} H(x - x_0)] \psi_{,xx} - [a_7 + a_7^{(s)} H(x - x_0)] w_{,xxx} = 0; \\ [a_7 + a_7^{(s)} H(x - x_0)] w_{,xxx} + [a_3 + a_3^{(s)} H(x - x_0)] \psi_{,xxx} - [a_{21} + a_{21}^{(s)} H(x - x_0)] w_{,xxxx} = -q; \\ [a_6 + a_6^{(s)} H(x - x_0)] w_{,xx} + [a_{24} + a_{24}^{(s)} H(x - x_0)] \psi_{,xx} - \\ - [a_{17} + a_{17}^{(s)} H(x - x_0)] w_{,xxx} - a_5 \psi = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где a_k ($a_k^{(s)}$) – параметры, характеризующие геометрические и упругие свойства слоев (накладки):

$$a_3 = A_4^{(1)} h_1 + 2cA_4^{(3)} + A_4^{(2)} h_2; \quad a_5 = G_{xz}^{(3)} c; \quad a_6 = A_4^{(1)} ch_1 - A_4^{(2)} ch_2;$$

$$a_7 = A_4^{(1)} \left(\frac{1}{2} h_1^2 + ch_1 \right) - A_4^{(2)} \left(\frac{1}{2} h_2^2 + ch_2 \right);$$

$$a_{17} = cA_4^{(1)} \left(\frac{1}{2} h_1^2 + ch_1 \right) + cA_4^{(2)} \left(\frac{1}{2} h_2^2 + ch_2 \right) + \frac{2}{3} c^3 A_4^{(3)};$$

$$a_{21} = A_4^{(1)} \left(ch_1^2 + c^2 h_1 + \frac{1}{3} h_1^3 \right) - A_4^{(2)} \left(ch_2^2 + c^2 h_2 + \frac{1}{3} h_2^3 \right) + \frac{2}{3} c^3 A_4^{(3)};$$

$$a_{24} = A_4^{(1)} c^2 h_1 + A_4^{(2)} c^2 h_2; \quad A_4^{(k)} = \frac{E_x^{(k)}}{1 - \nu_{xy}^{(k)} \nu_{yx}^{(k)}};$$

$$a_3^{(s)} = A_4^{(s)} h_s; \quad a_6^{(s)} = -A_4^{(s)} ch_s; \quad a_7^{(s)} = -A_4^{(s)} \left(\frac{1}{2} h_s^2 + h_2 h_s + ch_s \right);$$

$$a_{17}^{(s)} = cA_4^{(s)} \left(\frac{1}{2} h_s^2 + h_2 h_s + ch_s \right); \quad a_{21}^{(s)} = A_4^{(s)} h_s \left(c(c + 2h_2 + h_s) + h_2 h_s + h_2^2 + \frac{1}{3} h_s^3 \right);$$

$$a_{24} = A_4^{(s)} c^2 h_s; \quad A_4^{(s)} = \frac{E_x^{(s)}}{1 - \nu_{xy}^{(s)} \nu_{yx}^{(s)}},$$

$E_x^{(k)}$, $E_x^{(s)}$ – модуль Юнга материала k -го слоя ($k = 1, 2, 3$) и накладки в направлении оси Ox ; $\nu_{ij}^{(k)}$, $\nu_{ij}^{(s)}$ – коэффициенты Пуассона k -го слоя и накладки в соответствующих направлениях (нумерация параметров принята по работам [17, 18]); запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Система дифференциальных уравнений (5) содержит разрывные коэффициенты за счет функции Хевисайда, входящей в суммарную толщину 2-го слоя (1). Ее решение проводится отдельно во всех областях непрерывности коэффициентов.

В области I ($x < x_0$) функция Хевисайда обращается в ноль, $h_2^+ = h_2$. Система (5) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} a_3 u_{1,xx} + a_6 \psi_{1,xx} - a_7 w_{1,xxx} &= 0; \\ a_7 u_{1,xxx} + a_3 \psi_{1,xxx} - a_{21} w_{1,xxxx} &= -q; \\ a_6 u_{1,xx} + a_{24} \psi_{1,xx} - a_{17} w_{1,xxx} - a_5 \psi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение системы (6):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= C_{21} \operatorname{sh}(\beta_1 x) + C_{31} \operatorname{ch}(\beta_1 x) + \frac{1}{\beta_1} \left(\operatorname{sh}(\beta_1 x) \int g_1 \operatorname{ch}(\beta_1 x) dx - \operatorname{ch}(\beta_1 x) \int g_1 \operatorname{sh}(\beta_1 x) dx \right); \\ w_1 &= \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\alpha_{11} \int \psi_1 dx + a_3 L_4^{-1}(q) + \frac{a_3 C_{11}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{41}}{2} x^2 + C_{51} x + C_{61}; \\ u_1 &= \gamma_{31} \psi_1 + \frac{1}{\alpha_{21}} \left[a_7 L_3^{-1}(q) + \frac{a_7 C_{11}}{2} x^2 \right] + C_{71} x + C_{81}, \end{aligned} \quad (7)$$

где C_{11}, \dots, C_{81} – константы интегрирования;

$$\begin{aligned} g_1 &= \gamma_{21} p + \gamma_{11} \int_0^x q dx + \gamma_{11} C_{11}; \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{a_3 a_5 \alpha_{21}}{\alpha_{21} \alpha_{31} - \alpha_{11}^2}} > 0; \quad \gamma_{11} = \frac{a_3 \alpha_{11}}{\alpha_{21} \alpha_{31} - \alpha_{11}^2}; \\ \gamma_{21} &= \frac{a_6 \alpha_{21} - a_7 \alpha_{11}}{\alpha_{21} \alpha_{31} - \alpha_{11}^2}; \quad \gamma_{31} = \frac{a_{17} a_7 - a_{21} a_6}{\alpha_{21}}; \quad \alpha_{21} \alpha_{31} - \alpha_{11}^2 \neq 0; \\ \alpha_{11} &= a_3 a_{17} - a_6 a_7; \quad \alpha_{21} = a_3 a_{21} - a_7^2; \quad \alpha_{31} = a_3 a_{24} - a_6^2. \end{aligned}$$

$L_3^{-1}(q)$, $L_4^{-1}(q)$ – линейные интегральные операторы:

$$L_3^{-1}(q) = \iint \int q dx dx dx; \quad L_4^{-1}(q) = \iiint \int q dx dx dx dx.$$

В области II ($x \geq x_0$) функция Хевисайда равна единице, $h_2^+ = h_2 + h_3$. Система уравнений равновесия преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} a_3^+ u_{1,xx} + a_6^+ \psi_{1,xx} - a_7^+ w_{1,xxx} &= 0; \\ a_7^+ u_{1,xxx} + a_{17}^+ \psi_{1,xxx} - a_{21}^+ w_{1,xxxx} &= -q; \\ a_6^+ u_{1,xx} + a_{24}^+ \psi_{1,xx} - a_{17}^+ w_{1,xxx} - a_5 \psi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} a_3^+ &= a_3 + a_3^{(s)}; \quad a_6^+ = a_6 + a_6^{(s)}; \quad a_7^+ = a_7 + a_7^{(s)}; \\ a_{17}^+ &= a_{17} + a_{17}^{(s)}; \quad a_{21}^+ = a_{21} + a_{21}^{(s)}; \quad a_{24}^+ = a_{24} + a_{24}^{(s)}. \end{aligned}$$

Решение системы (8) следующее:

$$\begin{aligned} \psi_2 &= C_{22} \operatorname{sh}(\beta_2 x) + C_{32} \operatorname{ch}(\beta_2 x) + \frac{1}{\beta_2} \left(\operatorname{sh}(\beta_2 x) \int g_2 \operatorname{ch}(\beta_2 x) dx - \operatorname{ch}(\beta_2 x) \int g_2 \operatorname{sh}(\beta_2 x) dx \right); \\ w_2 &= \frac{1}{\alpha_{22}} \left[\alpha_{12} \int \psi_2 dx + a_3^+ L_4^{-1}(q) + \frac{a_3^+ C_{12}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{42}}{2} x^2 + C_{52} x + C_{62}; \\ u_2 &= \gamma_{32} \psi_2 + \frac{1}{\alpha_{22}} \left[a_7^+ L_3^{-1}(q) + \frac{a_7^+ C_{12}}{2} x^2 \right] + C_{72} x + C_{82}, \end{aligned} \quad (9)$$

где C_{12}, \dots, C_{82} – константы интегрирования;

$$\begin{aligned} g_2 &= \gamma_{22} p + \gamma_{12} \int_0^x q dx + \gamma_{12} C_{12}; \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{a_3^+ a_5 \alpha_{22}}{\alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2}} > 0; \quad \gamma_{12} = \frac{a_3^+ \alpha_{12}}{\alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2}; \\ \gamma_{22} &= \frac{a_6^+ \alpha_{22} - a_7^+ \alpha_{12}}{\alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2}; \quad \gamma_{32} = \frac{a_{17}^+ a_7^+ - a_{21}^+ a_6^+}{\alpha_{22}}; \quad \alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2 \neq 0; \\ \alpha_{12} &= a_3^+ a_{17}^+ - a_6^+ a_7^+; \quad \alpha_{22} = a_3^+ a_{21}^+ - (a_7^+)^2; \quad \alpha_{32} = a_3^+ a_{24}^+ - (a_6^+)^2. \end{aligned}$$

Решение исходной системы (5) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi_1(x) + [\psi_2(x) - \psi_1(x)]H(x - x_0); \\ w(x) &= w_1(x) + [w_2(x) - w_1(x)]H(x - x_0); \\ u(x) &= u_1(x) + [u_2(x) - u_1(x)]H(x - x_0),\end{aligned}\tag{10}$$

где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ – перемещения, определяемые решениями (7), (9).

Константы интегрирования $C_{11}, \dots, C_{81}, C_{12}, \dots, C_{82}$ определяются из 8 граничных условий на торцах пластины и дополнительных 8 условий равенства перемещений и их производных в сечении $x = x_0$, где изменяется толщина:

$$\begin{aligned}\psi_2(x_0) - \psi_1(x_0) &= 0; \quad \psi_{2,x}(x_0) - \psi_{1,x}(x_0) = 0; \quad \psi_{2,xx}(x_0) - \psi_{1,xx}(x_0) = 0; \\ w_2(x_0) - w_1(x_0) &= 0; \quad w_{2,x}(x_0) - w_{1,x}(x_0) = 0; \quad w_{2,xx}(x_0) - w_{1,xx}(x_0) = 0; \\ u_2(x_0) - u_1(x_0) &= 0; \quad u_{2,x}(x_0) - u_{1,x}(x_0) = 0.\end{aligned}\tag{11}$$

При защемлении правого торца пластины и свободном левом торце граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}\psi_1(0) &= 0; \quad N_1(0) = 0; \quad M_1(0) = 0; \quad M_{1,x}(0) = 0; \\ \psi_2(l) &= 0; \quad w_2(l) = 0; \quad w_{2,x}(l) = 0; \quad u_2(l) = 0.\end{aligned}\tag{12}$$

Таким образом, соотношения (2.5) с учетом условий сопряжения (11) и граничных условий (12) позволяют вычислять перемещения в трехслойной пластине со ступенчато-переменной толщиной при цилиндрическом изгибе.

Числовые результаты получены для трехслойной пластины $l = 1$ м, несущие слои которой – высокопрочные углеродные волокна на эпоксидном связующем ($E_x^{(1,2)} = 1,256 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu_{xy}^{(1,2)} = 0,27$; $\nu_{yx}^{(1,2)} = 0,02$), материал накладки – борные волокна на эпоксидном связующем ($E_x^{(s)} = 2,105 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu_{xy}^{(s)} = 0,21$), наполнитель – фторопласт ($E_x^{(3)} = 2,683 \cdot 10^8$ Па; $G_{xz}^{(3)} = 9 \cdot 10^7$ Па; $\nu_{xy}^{(3)} = \nu_{yx}^{(3)} = 0,49$). Толщины слоев $c = 0,09$ м; $h_1 = 0,03$ м; $h_2 = 0,01$ м; $h_s = 0,01$ м; координата начала накладки $x_0 = 0,5$; интенсивность нагрузки $q = 1$ МПа.

На рис. 2 показано изменение величины и формы прогиба w вдоль оси x в пластине в зависимости от толщины накладки: 1 – $h_s = 0$; 2 – $h_s = 0,01$ м; 3 – $h_s = 0,02$ м. Наличие накладки приводит к значительному уменьшению прогибов, на 11 и 18 % соответственно. Нормальные напряжения в слоях можно уменьшить на 30%.

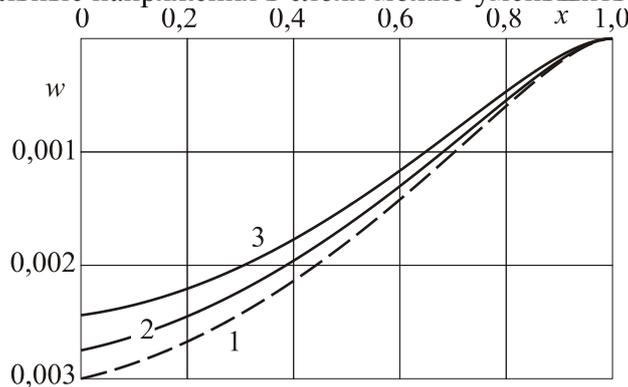


Рис. 2. Прогибы трехслойной пластины с накладкой

Следовательно, применяя в конструкциях усиливающую накладку незначительной толщины, но имеющую большую жесткость по отношению к материалам несущих слоев, можно добиться значительного уменьшения прогибов, а также внутренних усилий и напряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект T16P-010).

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А. Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.
2. Плескачевский, Ю. М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
3. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
4. Горшков, А.Г. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 91–98.
5. Gorshkov, A.G. Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux. / A.G. Gorshkov, E.I. Starovoitov, A.V. Yarovaia // Mechanics of Solids. – 2001. – Vol.36, No.1. – P. 64–69.
6. Горшков, А.Г. Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – № 1. – С. 16–22.
7. Starovoitov, E.I. Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. - 2008. -Vol. 44, № 9. – P. 1032-1040.
8. Leonenko, D.V. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2009. – Vol. 44, № 5. – P. 744–755.
9. Kuznetsova, E.L. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium / E.L. Kuznetsova, D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol. 5, №3. – P. 359–366.

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММИРУЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ В ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ДАТЧИКОВ ХОЛЛА

д.т.н. ¹Жарский В.В., ст.н.сотр. ²Луценко В.Е., асп. ¹Форутан М.М.,
³Шоломицкий В.Г., ³Дрогун Е.А.

¹УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», Минск

²ТУ «Московский энергетический институт», Москва

³ОАО «КБТЭМ-ОМО»

Введение. Построение замкнутой системы управления помимо реализации канала обратной связи ставит другие задачи теории автоматического управления. К таким задачам относятся, прежде всего, синтез и реализация алгоритма управления (регулятора), назначение которого состоит в определении управляющего сигнала, подаваемого на усилитель мощности, на основании текущего значения ошибки позиционирования [1-3, 6].

Один из распространенных вариантов реализации обратной связи основан на использовании датчиков Холла. В этом случае на управляющую плату контроллера системы перемещений подается сигнал в формате HP/GL. Плата формирует задание на перемещение, которое поступает на вход сервоконтроллеров [4-5].

Сервоконтроллеры на основании сигналов датчиков и сигналов обратной связи формируют управляющее напряжение в диапазоне 0...10 В, которое подается на вход усилителя мощности.

Усилитель мощности, подключенный к исполнительному позиционеру, обладает встроенной обратной связью по току (стабилизатор тока), что позволяет управлять током в обмотках управления.

Аппаратная реализация обратной связи. Датчики обратной связи, конструктивно встроенные в двигатель (рис. 1), формируют сигнал обратной связи, который поступает на сервоконтроллер для формирования замкнутого управления.

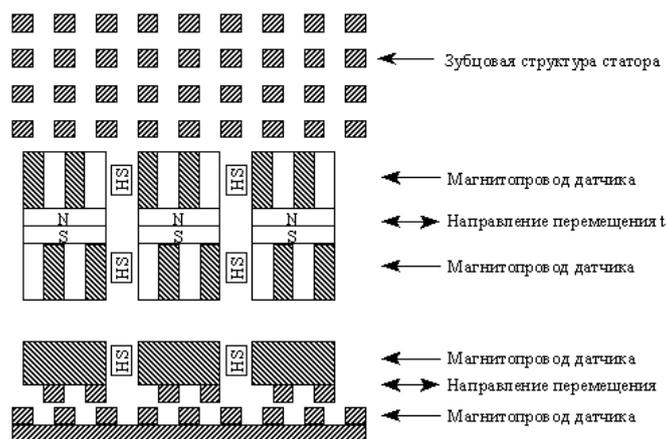


Рис. 1. Схема встраивания датчиков Холла в ЛШД

Базовая конструкция датчика положения содержит три составных П-образных магнитопровода, в каждую из которых последовательно включен постоянный магнит NS. Между магнитопроводами попарно располагаются датчики Холла HS (предварительно подобранные по соответствию токов смещения), при этом в магнитном отноше-

нии HS включаются в противофазе для компенсации постоянных составляющих магнитных потоков в сердечниках.

Такое конструктивное расположение датчиков Холла обеспечивает измерение только разности магнитных потенциалов в смежных магнитопроводах, исключив синфазные составляющие от динамического (в процессе движения) изменения магнитовоздушного зазора двигателя. В технологическом отношении такая конструкция не критична в отношении разности потоков постоянных магнитов NS в смежных магнитопроводах. На полюсах сердечников каждого магнитопровода сформированы зубцы. Разность координат расположения между одноименными зубцами (групповых координат) двух полюсов в П-образных магнитопроводах равна $(a \pm \frac{1}{2})\tau_z$.

Работа датчика. Рассмотрим работу предлагаемого датчика на примере использования его в планарном магнитоэлектрическом двигателе с совмещенными координатами. Планарный двигатель содержит ферромагнитный зубчатый статор и якорь. Статор выполнен в виде листа из ферромагнитного материала с пазами на верхней поверхности, заполненными немагнитным материалом. Пазы расположены по осям X, Y декартовой системы координат. При работе двигателя на его якоре закрепляют три датчика положения: два датчика, например, на ось X, и один – на ось Y (рис. 2).

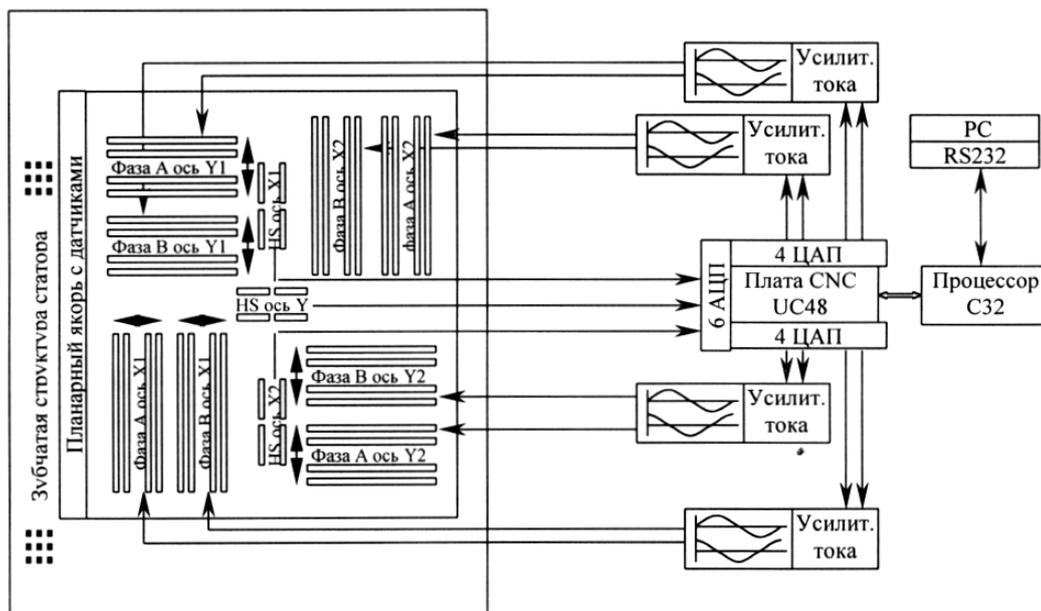


Рис. 2. Схема системы управления планарным ЛШД с датчиками Холла

Два датчика положения на одной из осей двигателя позволяют по разности их показаний легко установить факт разворота якоря и, следовательно, бороться посредством соответствующего алгоритма управления с этим нежелательным явлением. На практике датчики положения уже на этапе изготовления якоря двигателя конструктивно встраиваются в корпус якоря. Чтобы X-овый (Y-овый) датчик не чувствовал перемещения в ортогональном направлении, длина зубцов выбрана по величине близкой к целому числу периодов расположения зубцов. Рабочий зазор между якорем и статором обеспечивается воздушной подушкой (в общем случае – различными типами подшипников). Сила притяжения, создаваемая постоянными магнитами якоря, к статору при этом уравновешивается силой отталкивания, обусловленной давлением воздуха, и якорь «всплывает» над статором. Якорь перемещается вдоль статора за счет энергии электромагнитного взаимодействия тяговых электромагнитов якоря с зубчатой структурой статора.

Схема замещения. Рассмотрим схему замещения магнитной системы датчиков Холла, приведенную на рис. 3, и фазовую диаграмму, показанную на рис. 4.

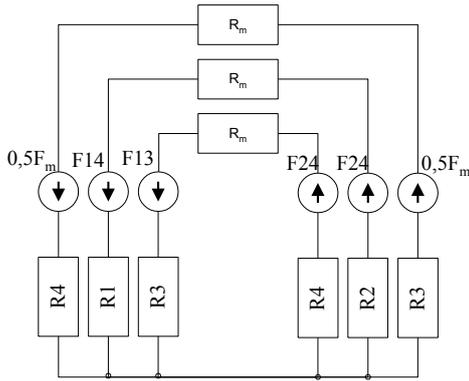


Рис. 3. Схема замещения магнитной цепи

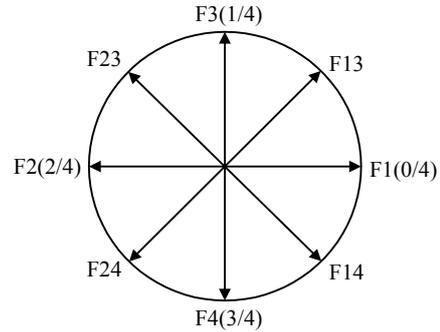


Рис. 4. Фазовая диаграмма

В первом приближении можно принять, что

$$R_1 = R_0 - R_m \cos\left(\frac{2\pi x}{\tau_z}\right),$$

где R_1 – магнитное сопротивление воздушного зазора между статором и полюсом сердечника П-образного магнитопровода датчика, у которого зубцы расположены напротив зубцов статора двигателя; R_0 , R_m – соответственно постоянная составляющая и амплитуда первой гармоники магнитного сопротивления R_1 при перемещении якоря относительно статора; x – координата, вдоль которой перемещается датчик [7, 8].

В свою очередь, магнитные сопротивления воздушных зазоров для полюсов сердечников магнитопроводов, у которых зубцы сдвинуты по отношению к нулевому положению на $0,5\tau_z$; $0,25\tau_z$; $-0,25\tau_z$, будут, соответственно, равны

$$R_2 = R_0 + R_m \cos\left(\frac{2\pi x}{\tau_z}\right); \quad R_3 = R_0 - R_m \sin\left(\frac{2\pi x}{\tau_z}\right); \quad R_4 = R_0 + R_m \sin\left(\frac{2\pi x}{\tau_z}\right). \quad (1)$$

Магнитные потоки Φ_1 и Φ_2 , создаваемые постоянными магнитами датчика, равны:

$$\Phi_2 = \Phi_2 = \frac{F_M}{R_M + R_1 + R_2} = \frac{F_M}{R_M + R_0} = \Phi.$$

Тогда магнитодвижущая сила (МДС)

$$F_{12} = -F_{21} = \Phi(R_2 - R_1) = 2\Phi R_m \cos\left(\frac{2\pi x}{\tau_z}\right). \quad (2)$$

Поскольку преобразователи Холла расположены между магнитными сопротивлениями R_1 и R_2 , то их информационные сигналы e_x прямо пропорциональны амплитудам МДС F_{12} , F_{21} и сдвинуты по фазе на 180° (рис. 4).

На практике из-за разброса технологических и конструктивных параметров датчика положения в выходном сигнале e_x помимо первой гармоники присутствуют небольшая постоянная составляющая, вторая гармоника одного знака. Для их устранения используется дифференциальное включение преобразователей Холла.

Следует обратить внимание на то, что по выражению (2) положение шагового двигателя таким датчиком можно определять, если априори известно, в каком квадранте единичного круга находишься. Однако этот недостаток легко устраняется использованием второго аналогичного датчика (рис. 1), сдвинутого по отношению к первому в направлении перемещения на четверть периода. Действительно, в этом случае, согласно формул (1), выходной сигнал второго датчика имеет вид

$$F_{43} = 2\Phi R_m \sin\left(\frac{2\pi x}{\tau_z}\right).$$

Таким образом, предлагаемый датчик позволяет сформировать два ортогональных сигнала, по которым однозначно определяется положение якоря шагового двигателя относительно зубцовой структуры статора.

Вычислительный алгоритм. Вычислительный алгоритм замкнутого управления на основе использования датчиков Холла и ПИД-регулятора следующий.

При поступлении команд на перемещение происходит предварительный расчет траектории движения с учетом заданной скорости и ускорения, строятся интерполяционные трапеции задания скорости, по которым в дальнейшем происходит обработка. На основании расчета приращения фазных токов подаются на ЦАП и далее, усиленные источниками тока, поступают в обмотки якоря двигателя. При этом при фазовом управлении дается приращение фазы управляющих токов по алгоритму:

$$\begin{aligned} T_1 &= V_M / A_M ; X_1 = X_B + V_M^2 / 2A_M ; \\ X_2 &= X_E - V_M^2 / 2A_M ; T_2 = T_1 + (X_2 - X_1) / V_M ; \\ X_B &< X_I < X_1 ? X_I = X_B + A_M T^2 / 2 ; \\ X_1 &< X_I < X_2 ? X_I = X_1 + V_M (T - T_1) ; \\ X_2 &< X_I < X_E ? X_I = X_2 + V_M (T - T_2) - A_M (T - T_2) / 2 , \end{aligned}$$

где X_B и X_E – начальные и конечные значения перемещения; X_I – расчетные значения положения в i -е интервалы времени; A_M и V_M – максимальные значения ускорения и скорости; T_I – дискретные интервалы времени.

Ток в фазах A и B рассчитывается по следующим формулам:

$$\begin{aligned} I_U &= \frac{I_M}{1 + K_3} \left(\sin \frac{2\pi X_I}{\tau_z} - K_3 \sin \frac{6\pi X_I}{\tau_z} \right); \\ I_V &= \frac{I_M}{1 + K_3} \left(\cos \frac{2\pi X_I}{\tau_z} + K_3 \cos \frac{6\pi X_I}{\tau_z} \right), \end{aligned}$$

где I_M – амплитудное значение фазного тока; τ_z – период зубцовой структуры; K_3 – коэффициент функциональной коррекции токового годографа.

При амплитудном управлении управляющим входным сигналом для интерполятора является разность между заданным положением и текущим значением положения, снимаемым с датчика положения. Интерpolator при этом интерполирует от начального значения X_B до конечного значения X_E с расчетным значением положения X_I по следующему алгоритму:

$$\begin{aligned} T_1 &= V_M / A_M ; X_1 = X_B + V_M^2 / 2A_M ; \\ X_2 &= X_E - V_M^2 / 2A_M ; T_2 = T_1 + (X_2 - X_1) / V_M ; \\ X_B &< X_I < X_1 ? X_I = X_B + A_M T^2 / 2 ; \\ X_1 &< X_I < X_2 ? X_I = X_1 + V_M (T - T_1) ; \\ X_2 &< X_I < X_E ? X_I = X_2 + V_M (T - T_2) - A_M (T - T_2) / 2 . \end{aligned}$$

Выражение для определения тока ПИД-регулятора имеет вид:

$$\begin{aligned} I_R(n) &= I_R(n-1) + [K_n + K_{np} + K_d][X_I(n) - X_F(n)] + \\ &+ [K_{np} + 2K_d][X_I(n-1) - X_F(n-1)] + K_d[X_I(n-2) - X_F(n-2)]. \end{aligned}$$

Токи фаз A, B рассчитываются следующим образом:

$$I_A = \frac{I_R}{1-K_3} \left(\sin \left(\frac{2\pi X_F}{\tau_z} + F(V) \right) + K_3 \sin \left(\frac{6\pi X_F}{\tau_z} + F(V) \right) \right);$$

$$I_B = \frac{I_R}{1-K_3} \left(\cos \left(\frac{2\pi X_F}{\tau_z} + F(V) \right) - K_3 \cos \left(\frac{6\pi X_F}{\tau_z} + F(V) \right) \right),$$

где K_3 – определяет амплитудное значение корректирующей функции; X_F – сигнал положения, получаемый с датчика; τ_z – период зубцовой структуры (1 мм); $F(V)$ – функция фазовой коррекции нейтрали коллектора в зависимости от скорости ($0 \dots \pi/2$); $V(n) = X_F(n)X_F(n-1)$ – функция скорости.

График позиционной ошибки замкнутой системы управления при использовании обратных связей на базе датчиков Холла и при значениях коэффициентов регулятора $K_{пр} = 100$, $K_{и} = 1$ и $K_{д} = 2000$ приведен на рис. 5.

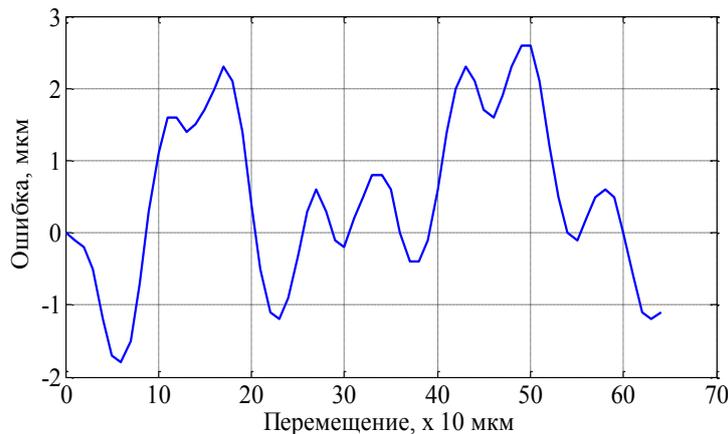


Рис. 5. График позиционной ошибки ЛШД в замкнутом режиме управления с датчиком Холла

Как видно из графика, применение датчиков Холла позволяет достичь точности перемещения в пределах ± 3 мкм для приводов на базе ЛШД.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аваков, С.М. Автоматический контроль топологии планарных структур : моногр. / С.М. Аваков ; науч. ред. С.Е. Карпович. – Минск : ФУАинформ, 2007. – 168 с.
2. Аваков, С.М. Система перемещений для оптико-механического оборудования микроэлектроники / С.М. Аваков, В.В. Жарский, С.А. Русецкий // Доклады БГУИР. – 2007. – № 6. – С. 39–43.
3. Луценко, В.Е. Электропривод с шаговыми двигателями / В.Е. Луценко, В.П. Рубцов // Итоги науки и техники: Электропривод с шаговыми двигателями. – М. : ВИНТИ, 1978. – Т. 6. – С. 125.
4. Жарский, В.В. Измерительная система для реализации обратных связей в координатных позиционерах на линейных шаговых двигателях / В.В. Жарский // Вестник БНТУ. – 2009. – № 6. – С. 66–70.
5. Карпович, С.Е. Имитационное моделирование кинематики системы перемещений с интерактивной визуализацией результатов / С.Е. Карпович, В.В. Кузнецов, М.М. Форуфан // Докл. БГУИР – Минск, 2016. – №. 3. – С 22–28.
6. Jarski, V. Modelling of planar linear motor for microelectronic equipment / V. Jarski // SPIE. – 2009. – Vol. 7377. – CID 7377 1A.

7. Zentner, J. *Zur optimalen Gestaltung von Parallelkinematikmaschinen mit Planarantrieben* / J. Zentner. – Illmenau : ISLE, 2006. – 123 s.
8. Vaughan, M. *Integrated piezoelectric linear motor for vehicle applications* / M. Vaughan, D.J. Leo // *ASME International Adaptive Structures Materials Systems Symposium*, New Orleans, LA, USA, Nov. 17–22, 2002.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ НАИБОЛЕЕ ОПАСНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ СЛОЯ ЖИДКОСТИ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ И ИХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ

к.ф.-м.н. Конон П.Н., к.ф.-м.н. Докукова Н.А., маг. Нестерович С.С.

Белорусский государственный университет, Минск

Процессы, использующие движение жидкости на внешней поверхности вращающегося цилиндра, встречаются при производстве волокнистых материалов центробежно-валковым способом, при нанесении покрытия на вращающуюся цилиндрическую поверхность и в других технологических процессах. В первом из них необходимо проследить за неустойчивостью слоя, во втором – выбрать оптимальное вращение, обеспечивающее равномерное нанесение покрытия.

Исследования устойчивости течений на вращающемся цилиндре проведено в работах [1,2], экспериментальные результаты течений представлены в работах [5,6], нелинейное развитие возмущений в тонком и нетонком слоях исследовано в [3,4]. Общие вопросы математической теории устойчивости гидродинамических течений даны в книге [7]. В данном исследовании особое внимание обращено на определение интенсивности нарастания неустойчивых возмущений, выявлению и локализации наиболее опасных нарастающих волн, экспериментальной верификации результатов.

Постановка задачи и исследование устойчивости движения. Исследуем линейную устойчивость слоя на горизонтальном вращающемся с постоянной угловой скоростью ω_0 цилиндре в невязкой постановке. Исследование устойчивости течения в указанном приближении состоит в том, что профиль основного течения удовлетворяет вязким стационарным уравнениям, а само исследование устойчивости проводится с использованием уравнений движения невязкой жидкости. Это позволяет не только упростить решение задачи, но и в итоге явно выделить наиболее опасные возмущения.

Для описания движения невязкой жидкости используются уравнения Эйлера, неразрывности и неизвестной свободной поверхности в безразмерном виде в цилиндрической системе координат X, Y, θ , в которой ось X направлена вдоль оси цилиндра, ось Y – по его радиусу [7]. В качестве характерного размера используется радиус цилиндра R_0 , а скорости – величина $\omega_0 R_0$. На свободной поверхности $y=h(x, \theta, t)$ выполняется условие Лапласа, выражающее скачок нормальных напряжений, вызванный действием сил поверхностного натяжения. Нормальная компонента скорости жидкости на поверхности цилиндра $y=1$ равна нулю.

Рассмотрим задачу линейной устойчивости слоя жидкости на внешней поверхности горизонтального вращающегося цилиндра. В случае слоя жидкости постоянной толщины, неподвижного относительно поверхности вращающегося цилиндра, при пренебрежении массовых сил стационарные решения имеют вид:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = y, \quad p = p(y), \quad h = h_0 = \text{const} > 1. \quad (1)$$

Следуя линейной теории гидродинамической устойчивости, предположим, на стационарный слой (1) наложены бесконечно малые возмущения скорости $\vec{v} = (u, v, w)$, давления p и свободной поверхности $y=h(x, \theta, t)$, периодические по углу θ :

$$\begin{aligned} u(x, y, \theta, t) &= u'(x, y, \theta, t), & v(x, y, \theta, t) &= v'(x, y, \theta, t), \\ w(x, y, \theta, t) &= y + w'(x, y, \theta, t), & p(x, y, \theta, t) &= P(y) + p'(x, y, \theta, t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$h(x, \theta, t) = h_0 + h'(x, \theta, t).$$

Штрихом обозначены малые возмущения скорости, произведениями которых в дальнейшем будем пренебрегать.

Линеаризация уравнений (2) неустановившегося движения позволяет получить уравнения для возмущений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial \theta} &= -\frac{\partial p'}{\partial x}, & \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial v'}{\partial \theta} - 2w' &= -\frac{\partial p'}{\partial y}, \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + 2v' + \frac{\partial w'}{\partial \theta} &= -\frac{1}{y} \frac{\partial p'}{\partial \theta}, & y \frac{\partial u'}{\partial x} + v' + y \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{\partial h'}{\partial \theta} &= v', & y &= h_0 + h'. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение уравнений (3) ищем в виде бегущих в осевом и окружном направлении волн:

$$\begin{aligned} u'(x, y, \theta, t) &= u_1(y) e^{i(\alpha x + n\theta - ct)}, & v'(x, y, \theta, t) &= v_1(y) e^{i(\alpha x + n\theta - ct)}, \\ w'(x, y, \theta, t) &= w_1(y) e^{i(\alpha x + n\theta - ct)}, & p'(x, y, \theta, t) &= p_1(y) e^{i(\alpha x + n\theta - ct)}, \\ h'(x, \theta, t) &= h_1 e^{i(\alpha x + n\theta - ct)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $u_1(y)$, $v_1(y)$, $w_1(y)$, $p_1(y)$, h_1 - комплексные амплитуды возмущений, α и n - волновые числа в осевом и окружном направлениях, $c = c_r + ic_i$, c_i - скорость нарастания возмущений. Из линейной невязкой теории гидродинамической устойчивости известно, что при $c_i \neq 0$ течение неустойчиво.

Подставляя (3.4) в уравнения (3.3), получим:

$$\begin{aligned} i(n-c)u_1 &= -i\alpha p_1, & i(n-c)v_1 - 2w_1 &= -\frac{dp_1}{dy}, \\ i(n-c)w_1 + 2v_1 &= -\frac{in}{y} p_1, & i\alpha y u_1 + y \frac{dv_1}{dy} + v_1 + inw_1 &= 0, \\ i(n-c)h_1 &= v_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим устойчивость слоя по отношению к бесконечно малым азимутальным возмущениям, т. е. случай, когда $\alpha = 0$, $u_1 = 0$. Это обусловлено тем, что наиболее опасными, быстрорастущими, как следует из результатов работ [3,4] являются именно плоские возмущения. Из (5) получим систему для определения амплитуд возмущений:

$$\begin{aligned} i(n-c)v_1 - 2w_1 &= -\frac{dp_1}{dy}, & i(n-c)w_1 + 2v_1 &= -\frac{in}{y} p_1, \\ v_1 + y \frac{dv_1}{dy} + inw_1 &= 0, & i(n-c)h_1 &= v_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражая из первых двух уравнений системы (6) значения v_1 и w_1 , и подставляя в третье уравнение этой системы, получим уравнение для $p_1(y)$, имеющее аналитическое решение при $y \geq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p_1}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dp_1}{dy} - n^2 \frac{p_1}{y^2} &= 0, \\ p_1(y) &= Ay^n + \frac{B}{y^n}. \end{aligned} \quad (7)$$

Постоянные A и B связаны условием, что радиальная составляющая амплитуды скорости возмущений $v_1 = 0$ при $y = 1$, так что

$$B = A \frac{(c-n)-2}{(c-n)+2}. \quad (8)$$

Комплексные амплитуды возмущений, как решение системы (6) с учетом (8)) представим в виде:

$$\begin{aligned} v_1(y) &= \frac{-inA}{2+c-n} \left(y^{n-1} - \frac{1}{y^{n+1}} \right), & w_1(y) &= \frac{nA}{2+c-n} \left(y^{n-1} - \frac{1}{y^{n+1}} \right), \\ p_1(y) &= A \left(y^n - \frac{c-n-2}{c-n+2} \frac{1}{y^n} \right), & h_1 &= \frac{nA}{(c-n)(2+c-n)} \left(h_0^{n-1} - \frac{1}{h_0^{n+1}} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

На свободной поверхности слоя $h = h(\theta, t)$ выполнено уравнение Лапласа на нормальные напряжения

$$p - p_a = \frac{1}{We} \frac{2}{R_s} \quad (10)$$

где p_a – внешнее давление, $We = \rho R_0^3 \omega_0^2 / \sigma$ – число Вебера, ρ – плотность жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения, а выражение для кривизны поверхности в полярных координатах имеет вид:

$$\frac{2}{R_s} = \left(h^2 + 2 \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 - h \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right) \left(\left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 + h^2 \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Линеаризация уравнения Лапласа и соотношение (4) позволяет получить уравнение для амплитуды возмущений давления:

$$p_1(h_0) = -\frac{1}{We} \frac{1}{h_0^2} (h_1(1-n^2)) - h_0 h_1. \quad (11)$$

Подставляя в (11) значения амплитуды возмущения поверхности и давления из (9), получаем характеристическое уравнение для определения собственного значения c :

$$\begin{aligned} (1+h_0^{2n})c^2 - 2c(nh_0^{2n} - h_0^{2n} + n+1) + n(h_0^{2n} - 1)D_n + (n^2 - 2n)h_0^{2n} + n^2 + 2n &= 0, \\ D_n &= \frac{1}{We} \frac{1}{h_0^3} (1-n^2) + 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Течение будет устойчивым, если $c_i = 0$, и дискриминант квадратного уравнения (12) неотрицателен. Тогда

$$(h_0^{2n} - 1) - n(h_0^{2n} + 1)D_n \geq 0.$$

Отсюда выводим условие устойчивости течения по отношению к бесконечно малым азимутальным возмущениям в невязкой постановке:

$$We \leq \frac{n^2 - 1}{h_0 \left(1 - \frac{1}{n} A_n \right)}, \quad A_n = \frac{h_0^{2n} - 1}{h_0^{2n} + 1}. \quad (13)$$

Вычисление значений c_i из (12) позволяют получить соотношение для определения максимальных растущих колебаний:

$$c_i^2 = A_n \left[n \left(\frac{(1-n^2)}{h_0^3 We} + 1 \right) - A_n \right] \quad (13)$$

Результаты исследования устойчивости, определение максимальных растущих возмущений. Результаты исследований вычислений, основанные на анализе соотношений (13)- (14), сведены таблицы и представлены в графическом виде.

В таблице 1 представлены результаты исследования невязкой неустойчивости движения слоя глицерина на внешней поверхности цилиндра радиуса $R_0 = 2,5$ см, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 2\pi n_0$, в зависимости от толщины слоя h_0 .

Таблица 1 – Результаты исследования устойчивости при $h_0 = 1,01$ и $h_0 = 1,1$

n_0 (об/с)	ω_0 (рад/с)	We	$N, h_0 = 1,01$	$N, h_0 = 1,1$
1	6,28	11,10	3	3
2	12,57	44,41	6	7
3	18,85	99,93	10	11
4	25,27	177,65	13	14
5	31,42	277,58	16	18

Из таблицы 1 следует, что невязкая неустойчивость проявляется при модах возмущений $n \leq N$, а длинноволновые возмущения с $n > N$ - устойчивы. С ростом относительной толщины слоя h_0 области неустойчивых возмущений растут вследствие возрастающего влияния центробежных сил. Так, при изменении средней толщины слоя с 1,01 до 1,1 область неустойчивых возмущений при $We=277,58$ увеличивается с $n \leq 16$ до $n \leq 18$.

Анализ соотношения (13) позволяет разделить области устойчивых и неустойчивых возмущений при различных значениях волнового числа n . На рисунке 1 изображены графики функции $lg(We(h_0))$ в зависимости от различных значений моды возмущений n , изменяющейся от 2 (нижняя кривая) до 10 (верхняя кривая). Области неустойчивых возмущений для каждого случая располагается ниже соответствующего графика.

Исследуем наиболее опасные максимально растущие возмущения с помощью выражения (14). На рисунке 2а) изображены зависимости квадрата коэффициента нарастания неустойчивых возмущений слоя от дискретных значений мод n азимутальных волн при трех различных значениях относительной толщины: $h_0 = 1,01$ (нижний график), $h_0 = 1,05$ и $h_0 = 1,1$ (верхний график) при $We=277,58$. Нарастание неустойчивых азимутальных волн и расширение областей неустойчивости с увеличением влияния инерционных возмущений и числа We отражено на рисунке 2б).

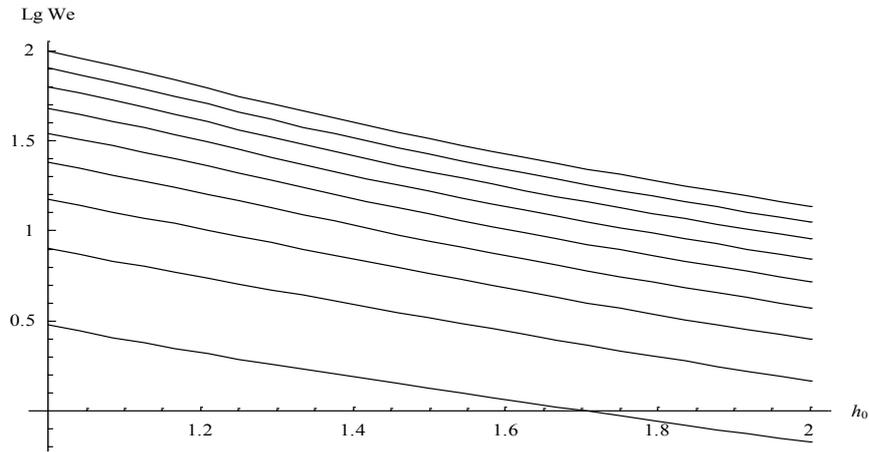


Рис. 1. Зависимость $\lg(We)$ от толщины слоя h_0 при значениях волнового числа $n=2$ (нижний график) до $n=10$ (верхний график)

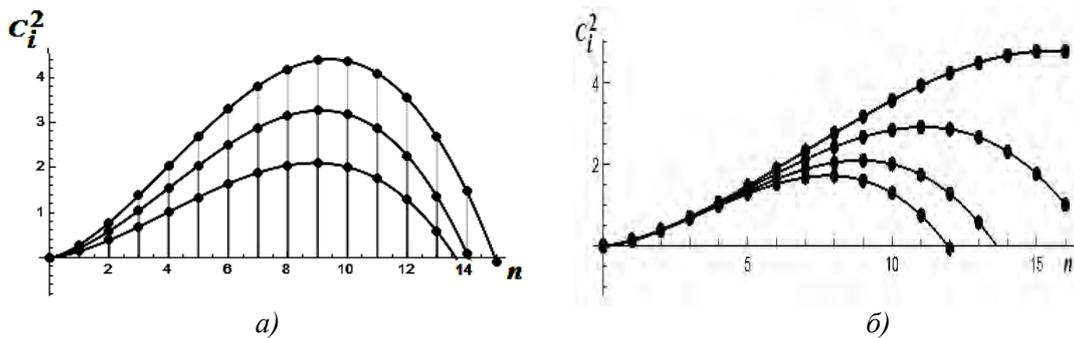


Рис. 2. Зависимость квадрата коэффициента нарастания неустойчивых возмущений c_i^2 от дискретных значений мод n а) при $We=277,58$ и $h_0=1,01$ – нижний график, выше графики соответственно при $h_0=1,05$, $h_0=1,1$; б) при $h_0=1,1$ и различных значениях числа We : $We=11,10$ – нижний график, выше графики соответственно при $We=99,93$, $We=277,58$, $We=544,06$

Анализ двух последних рисунков позволяет определить области неустойчивости и выделить значения мод азимутальных возмущений с максимальным коэффициентом роста c_i . Так, при $We=99,93$ и $h_0=1,1$ неустойчивыми являются возмущения с модой $n \leq 13$, а наиболее растущими - колебания с $n=9$.

Экспериментальная верификация. Исследование соотношения (14) позволяет сделать вывод, что если $We_N < We < We_{N+1}$, то азимутальные возмущения с $n \leq N$ неустойчивы, а с $n > N$ – устойчивы. В результате решения линейной задачи гидродинамической устойчивости получено, что квадрат коэффициента нарастания неустойчивых возмущений в случае идеальной жидкости имеет вид (14). Правая часть (14) обращается в нуль при $n=0$ и меньше нуля при $n=N+1$, поэтому при некотором промежуточном значении $0 < n_* < N+1$ коэффициент нарастания c_i имеет максимум. Так, например, при $We=47$, $h_0=1,0945$ максимальное значение $c_i^2(n)$ достигается при $n_*=5$ и $c_i^2(n) < 0$ при $n \geq 8$. Можно ожидать, что соответствующее этому n_* возмущение будет наиболее неустойчивым и при прочих равных условиях реализуется в эксперименте.

На графике 3 представлено сравнение экспериментальных данных исследования плоских слоев глицерина на вращающемся цилиндре [5,6] при $\sigma=0,07$ н/м, $T=20^\circ\text{C}$ с теоретическими по дискретным модам, величина которых растет с увеличением влияния инерционных сил и числа We . Сравнение дает удовлетворительное соответствие.

Экспериментальные результаты получены с фотографий, а наиболее нарастающие моды – с учетом формулы (14). Некоторое рассогласование результатов вычисленной и экспериментально наблюдаемой моды n объясняется неучетом вязкости и силы тяжести при выводе формулы (14).

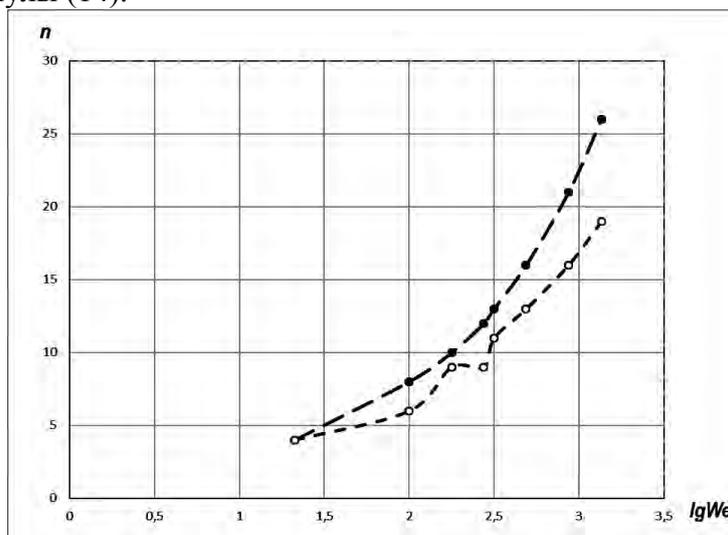


Рис. 3. Определение моды максимально растущих возмущений n в зависимости от числа We : жирные точки – теоретический расчет, светлые точки – экспериментальная кривая

На рисунке 4 представлено фото слоя глицерина на цилиндре радиуса 2,5 см, вращающемся с угловой скоростью $n_0 = 3$ об/сек. Сравнение по модам азимутальных возмущений с аналитическими результатами дает удовлетворительное согласование, что следует из рисунка 3.

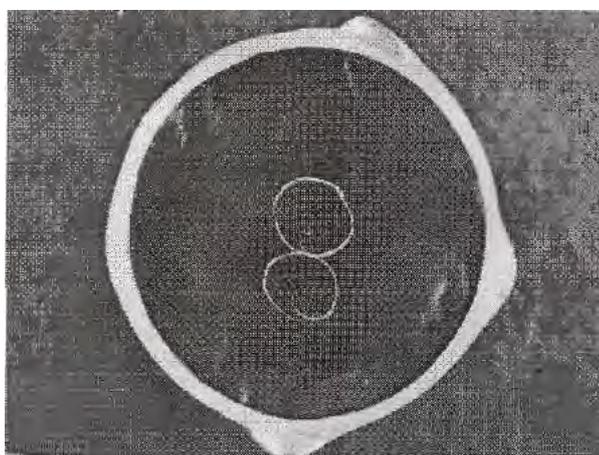


Рис. 4. Возмущения слоя глицерина на цилиндре радиуса 2,5 см, вращающемся с угловой скоростью $n_0 = 3$ об/сек

Таким образом, в экспериментах наблюдаются оптимальные возмущения, соответствующие неустойчивым модам, максимально нарастающие во времени согласно теории гидродинамической устойчивости.

Работа выполнена в рамках задания 2.48 ГПНИ Беларуси «Энергетические системы, процессы и технологии».

ЛИТЕРАТУРА

1. Chia-Shun Yih *Instability of a rotating liquid film with a free surface* // *Proc. Roy. Soc., Vol. A 258*, 1960, p. 1149-1155.
2. Pedley T.I. *The stability of rotating flows with a cylindrical free surface* // *J. of Fluid Mech. Vol. 30, Part I*, 1967, p.127-147.
3. Епихин В.Е., Конон П.Н., Шкадов В.Я. *О возмущенном движении слоя вязкой жидкости на поверхности вращающегося цилиндра* // *ИФЖ-1994.- Т.66, N 6.-С. 689-694.*
4. Evans P.L., Schwartz L.W., Roy R.V. *Three-dimensional solutions for coating flow on a rotating horizontal cylinder: Theory and experiment*// *Physics of fluids*, 17, 2005.
5. Кулаго А.Е. и др. *Экспериментальное и теоретическое исследование слоя жидкости на вращающемся цилиндре* // *Сб. трудов ВНИПИ Теплопроект. М., 1981. - С. 76-81.*
6. Конон П.Н., Кулаго А.Е., Докукова Н.А. *Экспериментальные и теоретические исследования механизма образования металлических и минеральных волокон/ VI Международный симпозиум по трибофатике. Минск, 2010 г., С. 333-335.*
7. Шкадов В.Я. *Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости* // *Ин-т механики МГУ. Научн. тр.- М., 1973. Вып. 25.- 192 с.*

**SPATIAL STRESS-STRAIN STATE OF THE BORING BAR FRONT-END
STRUCTURE OF HEAVY-DUTY HORIZONTAL BORING LATHE
DEPENDING ON THE BORING RADIUS**

¹Sherbakov S.S., PhD, DSc, ²Wu S., PhD, ²Shao J., PhD, ¹Nasan Aleh A.

¹*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

²*Harbin University of Science and Technology, Harbin, China*

Introduction. The object of the research is the multi-element tribo-fatigue boring bar front-end structure which is one of the most critical components of heavy-duty horizontal boring lathe (see Figure 1a). Contact interaction with friction between its various elements and a non-contact bending are implemented in this system.

The aim of the work was to determine stress-strain state of the system and to find out the position of its bodies for minimizing stress while increasing the boring radius.

FEM based computer simulation of the boring bar front-end structure was made considering its contact interactions during the boring process and non-contact deformation occurring due to the bending of the cutter.

Problem statement. Suppose that \mathbf{r}^k is the position of the particular configuration of the k -th body in space for calculated system, shown on Figure 1b, 1c. For them the following relations that determine the mechanical state of the particle of the body (the elementary volume) are carried out: the continuity equation, the equation of equilibrium of the body's particles, dependency between displacements and strains, and Hooke's law [1, 2].

Boundary conditions of the first type for the surface S_u of the lower body of analyzed system on the axes Y on the Figure 1b, where displacements $\bar{u}_i^{k*}(\mathbf{r}^k)$ are set, are added to the equations that determine the mechanical state:

$$u_i^k = \bar{u}_i^{k*}(\mathbf{r}^k), i = x, y, z, \quad (1)$$

and the second type for all other elements of the system, on the surface S_σ of which the effort distributions \bar{p}_i , represented on Figures 1b and 1c are set:

$$\sigma_{ij}^k \alpha_j^k = \bar{p}_i^k(\bar{\mathbf{F}}_N, \mathbf{r}^k), \quad (2)$$

where α_j^k – direction cosines.

Interaction of n deformable bodies of the system can be described with the help of the contact boundary conditions, defined by the next relations:

$$\bar{\mathbf{u}}_l|_{S_u^{(lm)}} - \bar{\mathbf{u}}_m|_{S_u^{(lm)}} = \delta_{lm}^{(u)}(f_{lm}, \mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t)|_{S_u^{(lm)}}, \quad (3)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_l|_{S_\sigma^{(lm)}} - \bar{\mathbf{p}}_m|_{S_\sigma^{(lm)}} = \delta_{lm}^{(\sigma)}(f_{lm}, \mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t)|_{S_\sigma^{(lm)}}, \quad (4)$$

where $S^{(lm)}$ – contact surface for bodies l and m , $S_\sigma^{(lm)} \subset S^{(lm)}$, $S_u^{(lm)} \subset S^{(lm)}$,

$\bar{\mathbf{p}}_k = \{\bar{p}_1^k, \bar{p}_2^k, \bar{p}_3^k\} = \{p_n^k, p_{\tau 1}^k, p_{\tau 2}^k\}$ and $\bar{\mathbf{u}}_k = \{\bar{u}_1^k, \bar{u}_2^k, \bar{u}_3^k\}$ – vectors of forces and displacements on the surface of k -th body, $p_n^k, p_{\tau 1}^k, p_{\tau 2}^k$ – normal and tangential components of the vector forces, $\delta_{lm}^{(u)} = \{\delta_{lm}^{(n,u)}, \delta_{lm}^{(\tau 1,u)}, \delta_{lm}^{(\tau 2,u)}\}$, $\delta_{lm}^{(\sigma)} = \{\delta_{lm}^{(n,\sigma)}, \delta_{lm}^{(\tau 1,\sigma)}, \delta_{lm}^{(\tau 2,\sigma)}\}$ – vectors of displacements and forces on the contact surface, f_{lm} – friction coefficients for the corresponding pairs of bodies.

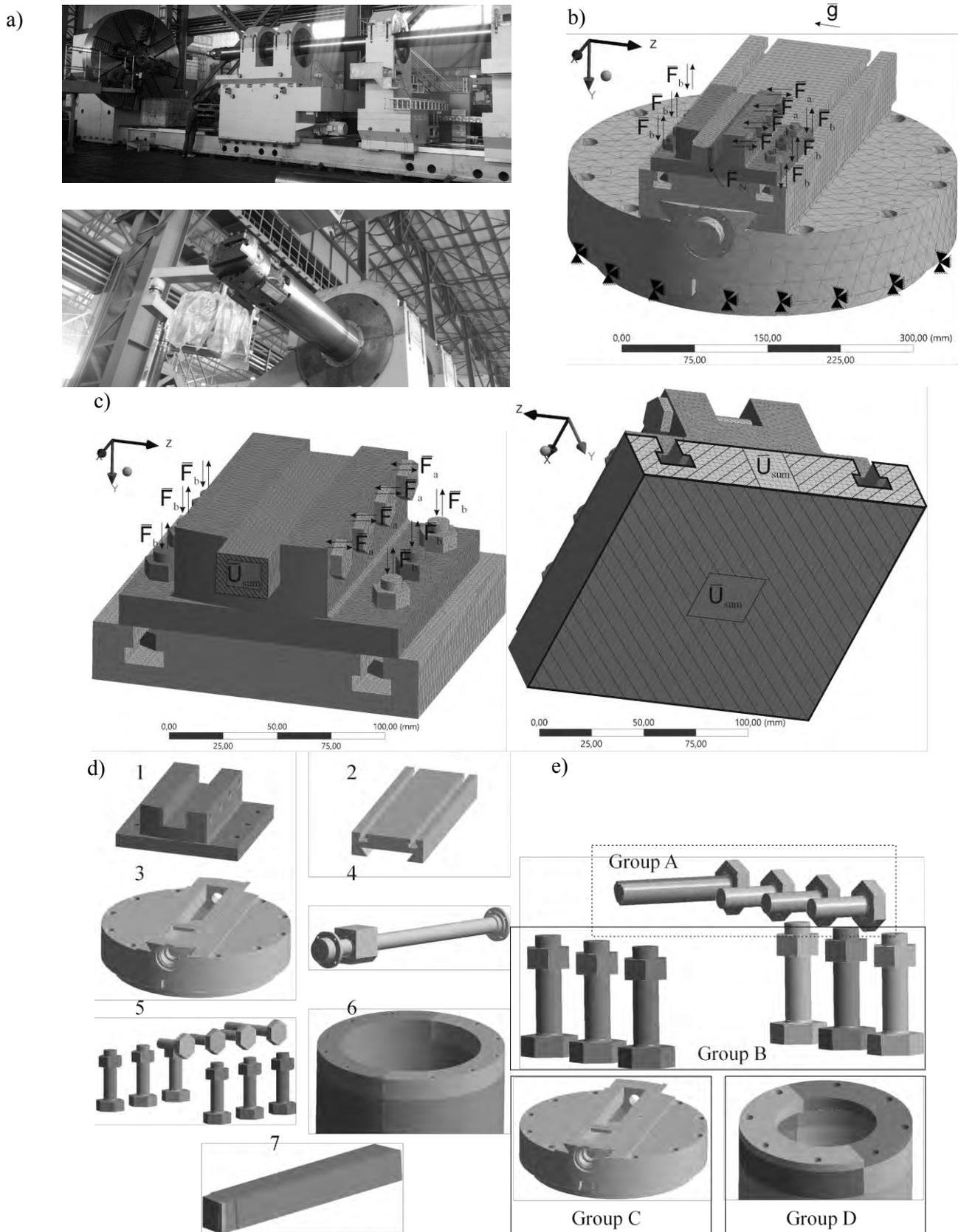


Fig. 1. Studied system: a) heavy-duty horizontal boring lathe and its front-end structure; b) finite element mesh and loading scheme for full model of the front-end structure; c) finite element mesh and loading scheme for submodeling regions of the front-end structure; d) elements of the boring bar front-end structure (1 – upper base, 2 – middle base, 3 – lower base, 4 – shaft, 5 – bolts, 6 – boring bar, 7 – cutter); e) groups of bolted connections

Finite-element models with applied boundary conditions are shown in Figures 1b-1c and the mechanical characteristics of the materials used are given in Table 1.

Friction coefficient f equals 0.18 for all contact interactions.

Boring load was defined according to the data provided by the Harbin University of Science and Technology: $\bar{F}_N = \{-3118; 3619; -8620\}$ N. Force \bar{F}_N was applied to the three external faces of the cube of the boring part of the knife with an edge length of 4 mm.

Table 1 – Mechanical characteristics

Material	Poisson's Ratio, ν	Young's modulus, E, GPa	Yield strength, σ_T , MPa	Strength limit, σ_c , MPa
Steel 18XГТ, (for bolts)	0.3	211	885	980
Steel 18XГТ	0.3	211	730	980

For calculation of tightening force of bolt joints the methodology described in [3] was used. Considering a metric thread and the beginning of the plasticity in the bolts rods, tighten force in bolt joints, represented on Figures 1b, 1c, 1e, are shown in the Table 2.

Table 2 – Bolts pretension

Screw type	Group	Bolt pretension, N
M8x1 – 6g	A	$F_a = 24949.5$
M10x1 – 6g	B	$F_b = 43048.7$
M14x1,5 – 6g	C	$F_c = 82341.3$
M24x2 – 6g	D	$F_d = 264903$

Let us denote generalized coordinate q_1 according to the notation given on Figure 1d which represents the displacement of the upper support relative to the middle support in the guides of the middle support.

Let us also denote generalized coordinate q_2 that represents the displacement of the middle support on the shaft relative to the lower support fixed on the boring bar.

Positive direction of generalized coordinates q_1 and q_2 is defined as a movement in the direction of increasing the boring radius. Origin for q_1 and q_2 is the position of the system provided by the Harbin University of Science and Technology and presented in Figures 1b-1c. In this case, the parameterization of the calculation grid can be specified in the form Q_{ij} , where i takes the calculated values of q_1 , and j are the discrete values of q_2 , respectively. Thus, in Table 3, a correspondence was made between the codification of the calculations Q_{ij} and the boring radii.

It can be seen from Table 3 that exactly the same boring radii can be achieved by different displacements of the upper and middle supports.

All calculations were performed in the finite element simulation program ANSYS Workbench considering gravitational force field in a static formulation.

In accordance with well-proven technology provided in [4] calculations for all models were divided into two phases: the first step took into account the tightening of bolted joints, during the second one the boring load was added.

At the second step the distribution of forces and displacements produced by the tightening of bolted joints were applied as the boundary conditions.

For a more accurate finite element evaluation of stress-strain state of the front-end system of the boring bar the submodeling of the front end system (cutter, upper base and a piece of middle base) was made. It was carried out by transferring displacements which were derived from calculations of the full models to the submodeled faces shown in Figure 1c as well

as the application of remaining boundary conditions in this domain. After that new boundary problem was solved.

Table 3 – Boring radii for calculations $Q_{i,j}$ (mm)

		j			
		1, $q_2 = 0$ mm	2, $q_2 = 21.65$ m m	3, $q_2 = 94.15$ m m	4, $q_2 = 111.65$ m m
i	1, $q_1 = -18.756$ mm	218.24	239.89	312.39	329.89
	2, $q_1 = 0$ mm	236.996	258.646	331.146	348.646
	3, $q_1 = 18.756$ mm	255.752	277.402	349.902	367.402

Stress state. Figure 2 represents distributions of equivalent stress σ_{eqv} for the calculations which correspond to the extreme values of the generalized coordinates q_1 and q_2 : $Q_{1,1}$, $Q_{3,1}$, $Q_{1,4}$, $Q_{3,4}$.

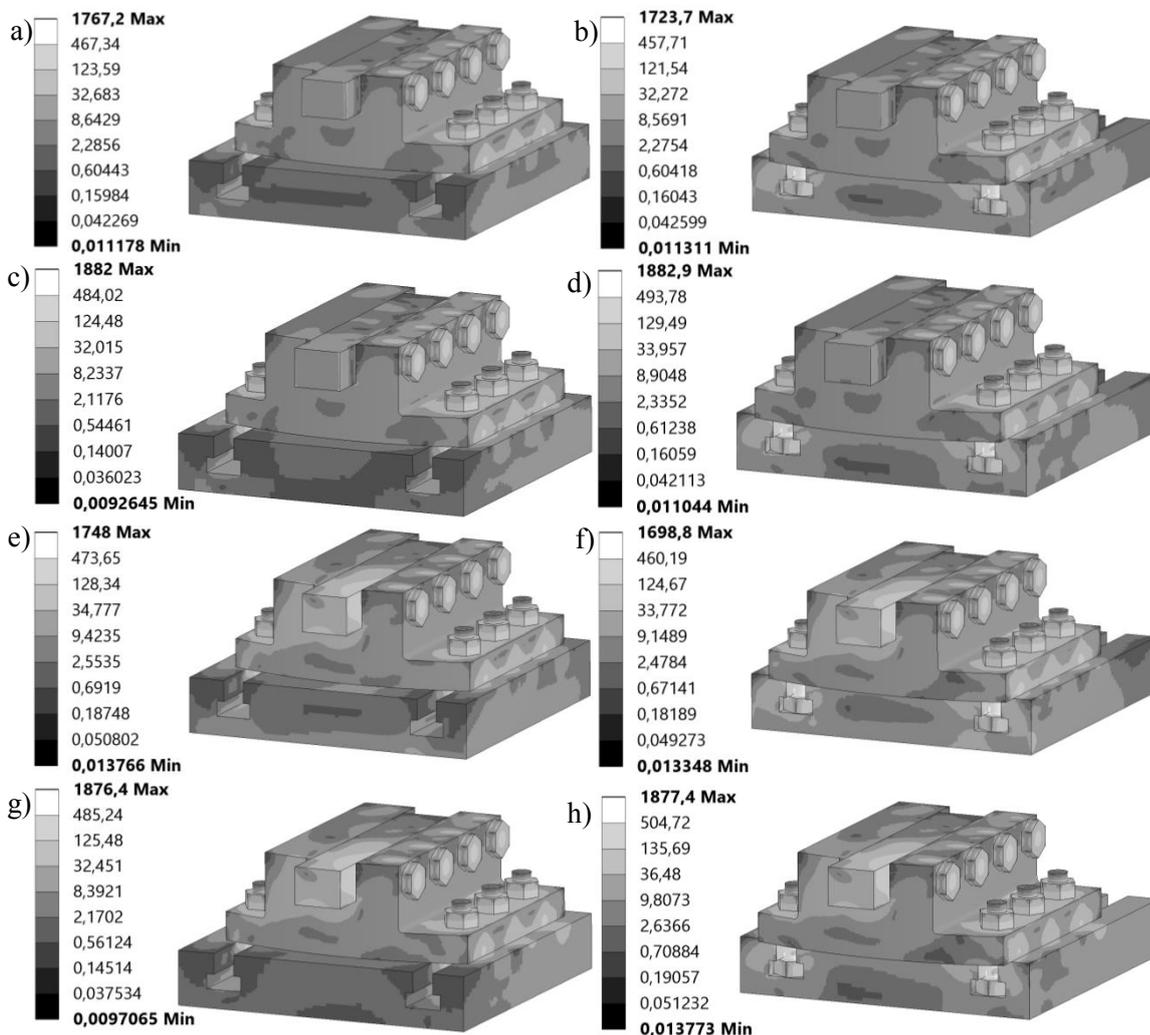


Fig. 2. Distributions of equivalent stress σ_{eqv} after tightening the bolted joints in the submodels, MPa: a) $Q_{1,1}$; b) $Q_{3,1}$; c) $Q_{1,4}$; d) $Q_{3,4}$ and distributions of equivalent stress σ_{eqv} during boring process in the submodels, MPa: e) $Q_{1,1}$; f) $Q_{3,1}$; g) $Q_{1,4}$; h) $Q_{3,4}$;

According to Figures 2-3 depending on the different radii of boring it is seen that in the system during submodeling after tightening the bolted joints the maximum value of the equivalent stress σ_{eqv} appears to be the least in the calculation $Q_{1,2}$, amounting to 1702.7 MPa and σ_{eqv} increases by 10.69 % to the highest value of 1884.8 MPa in the calculation $Q_{2,4}$.

In the submodeled system during the boring process, the maximum value of the equivalent stress σ_{eqv} appears to be the least in the calculation $Q_{1,2}$, amounting to 1645.1 MPa and σ_{eqv} increases by 14.18 %, to the highest value of 1878.5 MPa in the calculation $Q_{2,4}$.

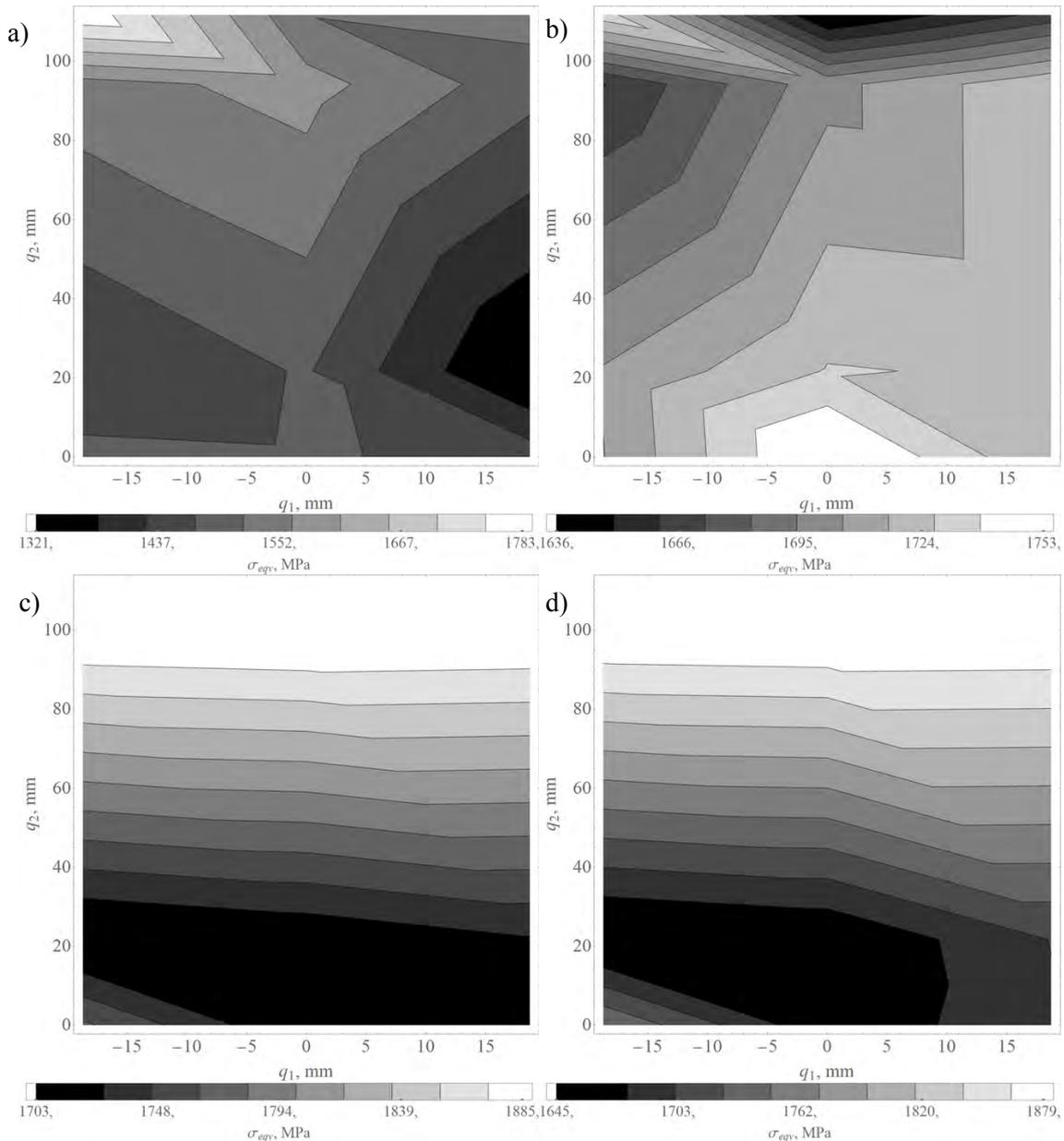


Fig. 3. Maximum equivalent stress σ_{eqv} in the whole system depending on the value of the generalized coordinates q_1 and q_2 (positions of the bases), MPa: a) after tightening the bolted joint in the full models; b) during boring process in full models; c) after tightening the bolted joint in submodels; d) during boring process in submodels

After tightening the bolted joints in the full model in the system the maximum value of the equivalent stress σ_{eqv} appears to be the least in the calculation $Q_{3,2}$, amounting to 1321.1 MPa and σ_{eqv} increases by 34.95 % to the highest value of 1782.8 MPa in the calculation $Q_{1,4}$. The minimum and maximum values of the maximum equivalent stress in full model decrease

by 22.41 % and 5.41 % as compared with the lowest and highest values in the submodels respectively.

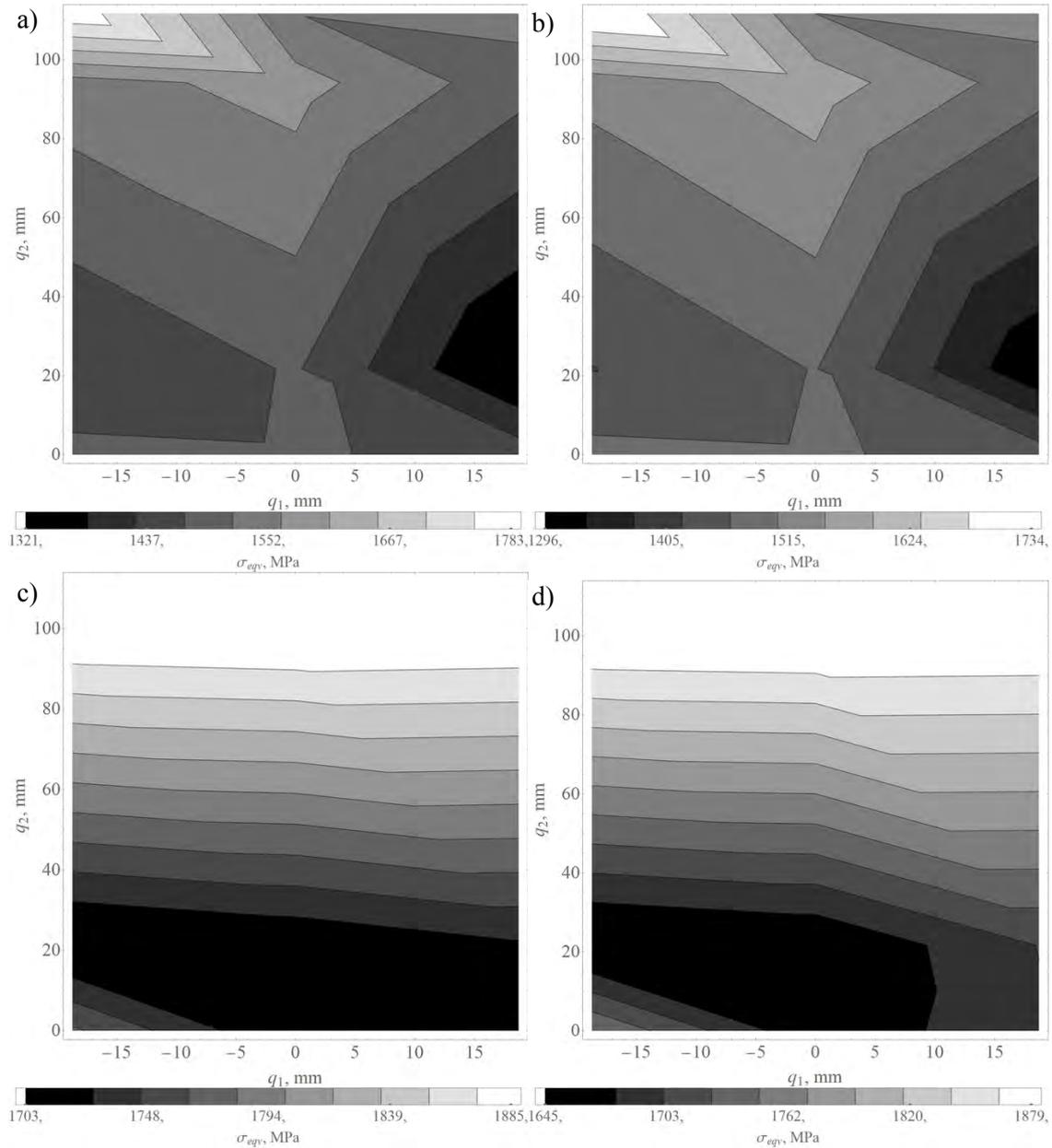


Fig. 4. Maximum equivalent stress σ_{eqv} in the bolted joints of group A and B depending on the value of the generalized coordinates q_1 and q_2 (positions of the bases), MPa: a) after tightening the bolted joint in full models; b) during boring process in full models; c) after tightening the bolted joint in submodels; d) during boring process in submodels

During the boring process in the full model in the system, the maximum value of the equivalent stress σ_{eqv} appears to be the least in the calculation Q_{2,4}, amounting to 1636.3 MPa and σ_{eqv} increases by 7.14 % to the highest value of 1753.2 MPa in the calculation Q_{2,1}. The minimum and maximum values of the maximum equivalent stress in full model decrease by 0.53 % and 6.67 % as compared to the lowest and highest values in the submodels, respectively.

As it's shown on Figure 4, after tightening the bolted joints in the full model in the bolts of both group A and B, the maximum value of the equivalent stress σ_{eqv} appears to be the least in the calculation Q_{3,2}, amounting to 1321.1 MPa and σ_{eqv} increases by 34.95 % to the highest value of 1782.8 MPa in the calculation Q_{1,4}. The minimum and maximum values of the max-

imum equivalent stress in full model decrease by 22.41 % and 5.41 % as compared with the lowest and highest values in the submodels, respectively.

During the boring process in the full model in the bolts of both group A and B, the maximum value of the equivalent stress σ_{eqv} appears to be the least in the calculation Q_{3,2}, amounting to 1295.8 MPa and σ_{eqv} increases by 33.78 % to the highest value of 1733.5 MPa in the calculation Q_{1,4}. The minimum and maximum values of the maximum equivalent stress in full model decrease by 21.23 % and 7.72 % as compared to the lowest and highest values in the submodels, respectively.

Conclusion. During this study 24 mechanical and mathematical models allowing description of the three-dimensional stress-strain state of the boring bar front-end structure of heavy-duty horizontal boring lathe depending on the boring radius were developed. The effect of the bolts tightening on the upper base was investigated.

The use of submodeling made possible the research of the nature of the changes in the investigated distributions in more detail and indirectly confirmed the convergence of the solutions.

In general, it should be noted that the tightening forces of the bolted joints of groups A and B are extreme and contribute significantly to the stress-strain state of the elastic elements of the front-end structure of heavy-duty horizontal boring lathe in comparison to the impact of boring process.

The obtained results indicate that in order to minimize von-Mises stress of the most loaded bodies of the system with increasing boring radius it is better to move the middle base (increase q_2) than the upper one. Moreover, it is advisable to push the upper base as much as possible in the direction of decreasing the boring radius (decrease q_1).

Further, it is recommended to carry out additional studies of this model by making analysis focused not on local characteristics of damageability (components of stress tensor), but on integral ones such as dangerous volumes. Also it is reasonable to adjust the tightening values of bolted joints within the analysis of damageability reduction.

And it is also advisable to vary the basic sizes of bolts of groups A and B in order to determine the least damageability at an acceptable price and manufacturability of these elements.

This work was supported by National special project for international scientific and technological cooperation of the People's Republic of China (2012DFR70840).

REFERENCES

1. Sosnovskiy, L.A. *Mechanothermodynamics* / L.A. Sosnovskiy, S.S. Sherbakov // – Springer, 2016. – 155 p.
2. Sosnovskiy, L.A. *Methods and main results of Tribo-Fatigue tests* / L.A. Sosnovskiy, A.V. Bogdanovich, O.M. Yelovoy, S.A. Tyurin, V.V. Komissarov, S.S. Sherbakov // *International Journal of Fatigue*. –2014. –Vol. 66. –pp.207-219.
3. Birger, I.A. *Threaded and flanged joints* / I.A. Birger, G.B. Iosilevich / – M.: Mashinostroenie, 1990, – 368 p. (in Russian).
4. Sherbakov, S.S. *Spatial stress-strain state of boring bar front-end structure of heavy-duty horizontal boring lathe* / S.S. Sherbakov, W. Shi, Sh. Junpeng, A. Nasan // *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*, 2017. №3 (40) P. 102 – 108.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО МАНИПУЛЯТОРА С ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ*

проф. Карпович С.Е., студ. Войтов А.Ю., маг. Нестеренко В.Н., маг. Манин А.С.

*УО «Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники», Минск*

Введение. В настоящей статье рассматривается предложенный параллельный манипулятор с шестью степенями свободы на гибридном приводе прямого действия [1, 2], содержащем жёсткое треугольное основание с тремя магнитными направляющими для шести линейных подвижных координатных электромагнитных модулей. Структурно-кинематическая схема параллельного манипулятора приведена на рис. 1.

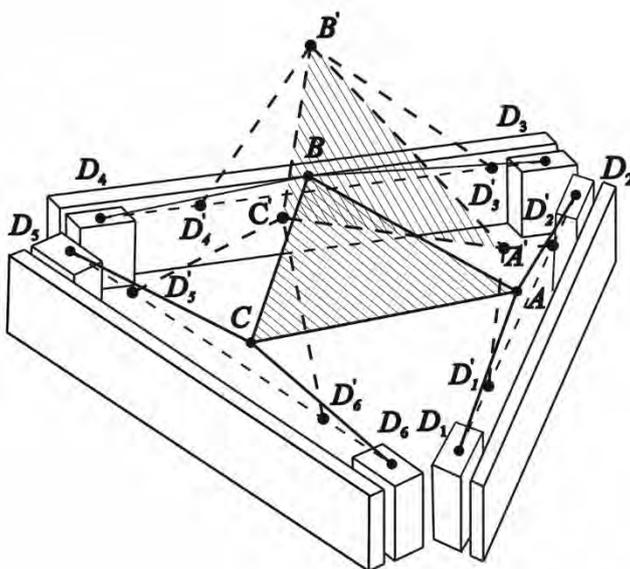


Рис. 1. Схема параллельного манипулятора с шестью степенями свободы

Особенностью схемы является предложенная конфигурация гибридного привода со спаренными координатными модулями на каждой из трёх направляющих, линейные перемещения которых $s_i (i = 1, 2, \dots, 6)$, как задаваемые функции положения ведущих звеньев исполнительного механизма параллельной кинематики, преобразуются в шесть независимых между собой координатных функций положения подвижного исполнительного элемента, треугольной платформы ABC , включая три линейных $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$ и три угловых φ, θ, ψ .

Расчётная схема. Формальная постановка прямой задачи [3] состоит в том, что предполагаются заданными в системе координат S_0 фиксированные положения точек M, N и P вершин треугольного гибридного привода, определяющих направляющие MN, NP и PM для подвижных управляемых модулей, положение которых задаётся управляющими функциями положения, соответственно точек $D_i (i = 1, 2, \dots, 6)$. В результате решения прямой задачи необходимо определить функции положения и ориентации платформы ABC в зависимости от управляющих функций и конфигурации механизма параллельной кинематики. Расчётная схема с принятыми для формирования математической модели системами координат S_0 и S_1 , связанных со звеньями исполнительного механизма, представлена на рис. 2.

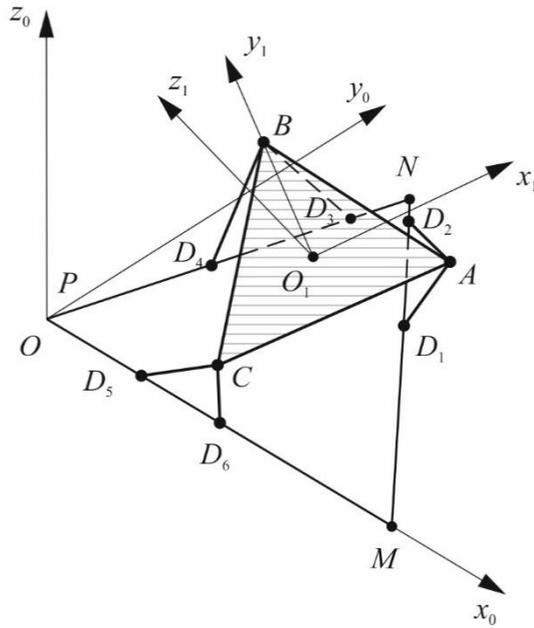


Рис. 2. Расчётная схема параллельного манипулятора

С учётом того, что плоскость треугольника MNP совмещена с координатной плоскостью x_0Oy_0 (рис. 2) получим координатное представление точек M, N, P в виде: $M(x_M, y_M, 0), N(x_N, y_N, 0), P(x_P, y_P, 0)$. Не нарушая общности решения прямой задачи кинематики, примем линейные размеры сторон треугольника ABC равными между собой и равными a . Длины промежуточных звеньев (шатунов) механизма параллельной кинематики, примем тоже равными между собой и равными l . То есть $D_1A = D_2A = D_3B = D_4B = D_5C = D_6C = l$. По этим исходным данным будем решать прямую задачу кинематики, как позиционную параметрическую, заключающуюся, в нашем случае, в нахождении координат положения точек A, B и C подвижной треугольной платформы ABC , выраженных в неподвижной системе координат $S_0(x_0, y_0, z_0)$ в зависимости от параметрического задания положения шести линейных подвижных модулей.

Математическая модель. Для решения поставленной задачи вначале необходимо получить аналитическое параметрическое задание положения шести подвижных линейных модулей, характеризуемых положением точек D_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) в системе координат S_0 . Для этого в системе координат S_0 зададим направляющие векторы $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ возможных перемещений парных подвижных линейных модулей по направляющим MN, NP и PM в виде:

$$\begin{aligned} \vec{q}_1 &= \overrightarrow{MN} = (x_N - x_M, y_N - y_M, 0), \\ \vec{q}_2 &= \overrightarrow{NP} = (x_P - x_N, y_P - y_N, 0), \\ \vec{q}_3 &= \overrightarrow{PM} = (x_M - x_P, y_M - y_P, 0). \end{aligned} \quad (1)$$

На основании условия коллинеарности соответствующей направляющей и вектора перемещения, расположенного на ней линейного подвижного модуля окончательно получим параметрическое представление положения точек D_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) в виде:

$$\begin{aligned}
x_{D_1} &= \lambda_1(x_N - x_M) + x_M, & y_{D_1} &= \lambda_1(y_N - y_M) + y_M, \\
x_{D_2} &= \lambda_2(x_N - x_M) + x_M, & y_{D_2} &= \lambda_2(y_N - y_M) + y_M, \\
x_{D_3} &= \lambda_3(x_P - x_N) + x_N, & y_{D_3} &= \lambda_3(y_P - y_N) + y_N, \\
x_{D_4} &= \lambda_4(x_P - x_N) + x_N, & y_{D_4} &= \lambda_4(y_P - y_N) + y_N, \\
x_{D_5} &= \lambda_5(x_M - x_P) + x_P, & y_{D_5} &= \lambda_5(y_M - y_P) + y_P, \\
x_{D_6} &= \lambda_6(x_M - x_P) + x_P, & y_{D_6} &= \lambda_6(y_M - y_P) + y_P,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ - параметры, определяющие положения соответствующих точек $D_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ на направляющих треугольного гибридного привода. При этом без учёта линейных размеров модулей теоретический диапазон изменения λ_i будет следующим: $0 \leq \lambda_i \leq 1$. Из условия отсутствия геометрической интерференции парных подвижных модулей при их независимом движении между их параметрами λ_i должны выполняться условия: $\lambda_{2k-1} < \lambda_{2k}$, $k = 1, 2, 3$. Это значит, что все модули, обозначаемые D_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) с нечётными индексами, будут иметь параметры λ меньшие, чем параметры λ с чётными индексами. Приняв начальные значения всех $\lambda_i^0 = 0$ из выражений (2) получим текущие траекторные задания всех входных переменных s_i , показанных на рис. 2 в следующем виде:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \lambda_1 \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}, \\
s_2 &= \lambda_2 \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}, \\
s_3 &= \lambda_3 \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2}, \\
s_4 &= \lambda_4 \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2}, \\
s_5 &= \lambda_5 \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2}, \\
s_6 &= \lambda_6 \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

При заданных входных переменных s_i по формулам (3) могут быть рассчитаны соответствующие параметры λ_i , а затем по ним однозначно рассчитываются координаты всех точек D_i , характеризующих положения подвижных модулей гибридного привода. Положения искоемых точек A , B и C зависят одновременно от положения точек $D_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ и текущей конфигурации реконфигурируемого механизма параллельной кинематики (рис. 1). В рассматриваемом случае механизм параллельной кинематики содержит треугольное звено ABC и шесть связанных с ним подвижных шатунов $AD_1, AD_2, BD_3, BD_4, CD_5, CD_6$. Полное условие замкнутости такой кинематической цепи с замыканием в точках $D_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ подвижных управляемых модулей будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_{D_1} - x_A)^2 + (y_{D_1} - y_A)^2 + (z_{D_1} - z_A)^2 = l^2 \\ (x_{D_2} - x_A)^2 + (y_{D_2} - y_A)^2 + (z_{D_2} - z_A)^2 = l^2 \\ (x_{D_3} - x_B)^2 + (y_{D_3} - y_B)^2 + (z_{D_3} - z_B)^2 = l^2 \\ (x_{D_4} - x_B)^2 + (y_{D_4} - y_B)^2 + (z_{D_4} - z_B)^2 = l^2 \\ (x_{D_5} - x_C)^2 + (y_{D_5} - y_C)^2 + (z_{D_5} - z_C)^2 = l^2 \\ (x_{D_6} - x_C)^2 + (y_{D_6} - y_C)^2 + (z_{D_6} - z_C)^2 = l^2 \\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = l^2 \\ (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = l^2 \\ (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = l^2 \end{array} \right. \quad (4)$$

Система нелинейных уравнений (4) содержит 9 уравнений с 9-ю неизвестными. В качестве неизвестных выступают искомые координаты трёх точек A, B, C , положение которых полностью определяется положением задаваемых точек $D_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ на управляемых модулях привода. Решая систему нелинейных уравнений (4) численными методами, например, используя вычислительные инструменты среды MATLAB, окончательно получим искомые координаты $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$. При решении систем такого размера как (4) возникают сложности, связанные с проблемой сходимости и объёмом вычислений используемых вычислительных алгоритмов, а также многоэкстремальностью целевой функции в области поиска решения. Также надо учитывать, что при разработке алгоритмов решения задач кинематики, предназначенных для встраивания в программное обеспечение реальных систем управления необходимо стремиться к высокой адекватности алгоритмов, абсолютной их сходимости и минимальной вычислительной процедуре. В связи с вышесказанным в настоящей работе были проведены аналитические исследования разработанного алгоритма решения прямой задачи кинематики, основанного на системе из девяти нелинейных уравнений (4) с целью сокращения и оптимизации вычислительной процедуры. Для формирования уравнений замкнутости было предложено воспользоваться методом условного размыкания [1], на основании которого были получены расчётные уравнения прямой задачи кинематики с минимальным числом уравнений и неизвестных. Это стало возможным так же благодаря предложенному формализованному математическому описанию отдельных разомкнутых параллельных кинематических цепей, аналитические условия замкнутости которых на сферические шарниры управляемых модулей движения нами формировались через введённые в рассмотрение обобщённые углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, определяющие текущее угловое положение треугольного контура каждой из трёх параллельных кинематических цепей. Расчётная схема задания углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ представлена на рис. 3, на примере отдельного конкретного фрагмента параллельной кинематической цепи D_1AD_2 .

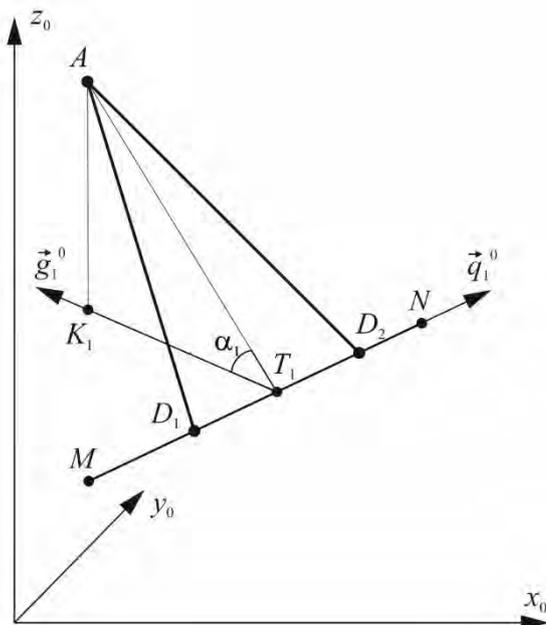


Рис. 3. Векторное представление одного параллельного фрагмента манипулятора

В результате этого стало возможным использование математического описания условия размыкания не всего исполнительного механизма общим условием в виде (4), а выделением параллельных кинематических цепей и формированием отдельно для каждой из них аналитических условий замкнутости, через соответствующие обобщённые углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Для вывода, не нарушая общности решения, рассмотрим конкретный фрагмент параллельной кинематической цепи исполнительного механизма, например D_1AD_2 , представленный на рис. 3, из которого следует, что два условия кинематических связей, налагаемых звеньями D_1A и D_2A , вошедшие в виде двух уравнений в систему (4) можно заменить одним аналитическим условием через переменный угол α_1 , тем самым сократив в системе уравнений (4) два уравнения и два неизвестных. Аналогичная ситуация и с математическим описанием параллельных кинематических цепей D_3BD_4 и D_5CD_6 . Аналитические выражения кинематических связей в этих цепях через соответствующие углы α_2 и α_3 приводят к сокращению ещё четырёх уравнений и четырёх неизвестных в системе (4).

Алгоритмизация прямой задачи кинематики. Таким образом, полное решение прямой задачи кинематики будет сведено к решению системы из трёх вместо девяти нелинейных уравнений с тремя вместо девяти неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. При этом алгебраическая структура уравнений в системе из трёх уравнений и в системе из девяти уравнений практически одинакова. Рассмотрим подробно вывод базовой системы из трёх уравнений на основе алгоритмизации параллельного фрагмента D_1AD_2 . Для этого по уже найденному из (1) направляющему вектору \vec{q}_1 найдём его орт \vec{q}_1^{-0} по выражению:

$$\vec{q}_1^{-0} = (m_1, n_1) = \left(\frac{x_N - x_M}{MN}, \frac{y_N - y_M}{MN}, 0 \right) \quad (5)$$

где $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.

Аналогично для двух других направляющих из выражения (1) найдём:

$$\vec{q}_2^{-0} = (m_2, n_2) = \left(\frac{x_P - x_N}{PN}, \frac{y_P - y_N}{PN}, 0 \right) \quad (6)$$

где $PN = \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2}$.

А также получим:

$$\vec{q}_3^0 = (m_3, n_3) = \left(\frac{x_M - x_P}{MP}, \frac{y_M - y_P}{MP}, 0 \right) \quad (7)$$

где $MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}$.

Для представления расчётной модели решения прямой задачи кинематики через обобщённый переменный угол α_1 , согласно рис. 3, необходимо задать в середине переменного отрезка D_1D_2 в точке T_1 вектор \vec{g}_1^0 , а лучше орт этого вектора \vec{g}_1^0 , перпендикулярный орту \vec{q}_1^0 . Из условия ортогональности этих ортов ($\vec{q}_1^0 \perp \vec{g}_1^0$) получим: $\vec{g}_1^0 = (-n_1, m_1)$. Аналогично этому получим, что орты \vec{g}_2^0 и \vec{g}_3^0 будут равны: $\vec{g}_2^0 = (-n_2, m_2)$ и $\vec{g}_3^0 = (-n_3, m_3)$. С учётом найденных ортов по расчётной модели, представленной на рис. 2 и рис. 3 окончательно получим искомые координаты точек A , B и C через им соответствующие обобщённые углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Так для точки A будет справедливо следующее векторное её представление:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_M + \overrightarrow{MT_1} + \overrightarrow{T_1A}, \quad (8)$$

или в координатном представлении в системе координат S_0 из (8) окончательно получим:

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{1}{2}(x_{D_1} + x_{D_2}) - n_1 AT_1 \cos \alpha_1, \\ y_A &= \frac{1}{2}(y_{D_1} + y_{D_2}) + m_1 AT_1 \cos \alpha_1, \\ z_A &= AT_1 \sin \alpha_1, \end{aligned} \quad (9)$$

где $AT_1 = \sqrt{AD_1^2 - \frac{1}{4}((x_{D_1} - x_{D_2})^2 + (y_{D_1} - y_{D_2})^2)}$.

Аналогично для точки B окончательно получим её координаты:

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{2}(x_{D_3} + x_{D_4}) - n_2 BT_2 \cos \alpha_2, \\ y_B &= \frac{1}{2}(y_{D_3} + y_{D_4}) + m_2 BT_2 \cos \alpha_2, \\ z_B &= BT_2 \sin \alpha_2, \end{aligned} \quad (10)$$

где $BT_2 = \sqrt{AD_3^2 - \frac{1}{4}((x_{D_3} - x_{D_4})^2 + (y_{D_3} - y_{D_4})^2)}$.

Координата точки C окончательно найдём из следующих выражений:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{2}(x_{D_5} + x_{D_6}) - n_3 CT_3 \cos \alpha_3, \\ y_C &= \frac{1}{2}(y_{D_5} + y_{D_6}) + m_3 CT_3 \cos \alpha_3, \\ z_C &= CT_3 \sin \alpha_3, \end{aligned} \quad (11)$$

где $CT_3 = \sqrt{CD_5^2 - \frac{1}{4}((x_{D_5} - x_{D_6})^2 + (y_{D_5} - y_{D_6})^2)}$.

Из трёх выражений (9)-(11) видно, что координаты всех трёх точек зависят только от переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, которые, в свою очередь, определяются замыканием соответствующих трёх параллельных кинематических цепей на вершины треугольника ABC . С учётом этого условия кинематического замыкания будут выражаться тремя уравнениями вида:

$$\begin{cases} (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = a^2 \\ (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = a^2 \\ (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = a^2, \end{cases} \quad (12)$$

где $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$ - координаты соответствующих точек A, B, C получаемые по выражениям (9)-(11) через искомые обобщённые углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Так как система (12) представляет собой систему из трёх нелинейных трансцендентных уравнений с тремя неизвестными углами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, которая не имеет аналитического точного решения, то решать её необходимо численными методами. Проведенный анализ и тестовый и расчёт показали, что численные методы, реализованные в среде MATLAB, вполне обеспечивают решение системы (12) с высокой сходимостью результатов и значительно меньшим объемом вычислений чем при решении системы (4). Далее получаемые в результате численного решения углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ необходимо подставить в выражения (9)-(11) и получить текущие координаты точек $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ и $C(x_C, y_C, z_C)$, однозначно определяющие положение платформы ABC в системе координат S_0 .

Работа выполнялась в рамках гранта БРФФИ № T16-M108 «Мехатронные системы параллельной кинематики на кольцевом приводе прямого действия».

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович, С.Е. Системы перемещений на основе привода прямого действия : моногр. / С.Е. Карпович, В.В. Жарский, И.В. Дайняк. – Минск : БГУИР, 2008. – 239 с.
2. Математическая модель кинематики для системы перемещений на кольцевом приводе прямого действия / С.Е. Карпович, А.Ю. Войтов, В.В. Кузнецов, В.В. Поляковский // Теоретическая и прикладная механика. – 2016. – №31. – С. 156–161.
3. Heimann, B. Mechatronika. Komponenty, metody, przyklady / B. Heimann, W. Gerth, K. Popp. – Warszawa : PWN, 2001. – 351 s.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В МИКРОСЛОИСТОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ ХРУПКОМ И ПЛАСТИЧЕСКОМ РАЗРУШЕНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

¹Плескачевский Ю.М., ²Чигарева Ю.А.

¹Национальная академия наук Беларуси, Минск

²Белорусский государственный аграрнотехнический университет, Минск

Ключевые слова: пластичность, разрезы, разрушение, коэффициенты интенсивности напряжений, ортотропность.

Разрушение элементов конструкций из композитных материалов под воздействием резкого изменения температуры может происходить по хрупкой или пластической схемам в зависимости от физико-механических свойств материала. Знание типа разрушения позволяет прогнозировать поведение конструкции в предельном состоянии, что важно, например, в случае аварийных ситуаций при резкой смене температурных воздействий. В этом случае разрушение по пластической схеме может быть предпочтительнее с точки зрения живучести конструкции и сохранения экологии окружающей среды. При авариях на ядерных, химических реакторах при ликвидации аварии могут возникать резкие перепады температуры, при которых элементы реакторов могут разрушаться хрупко или пластически.

1. Схема пластического разрушения.

В случае, если предельное состояние возникает в пластическом материале, то в рассматриваемой задаче для достаточно широкой пластины в приближении эффективной среды может в среднем реализоваться схема линий скольжения, изображенная на рис. 1. Это следует из эквивалентности в определенных случаях температурного и силового нагружения [1]. В рассматриваемой задаче симметричное охлаждение пластины от границ $y = \pm H$ можно моделировать растяжением пластины симметричными нагрузками, нестационарность температурного поля можно учесть, считая, что кинематика пластины соответствует растяжению со скоростью V в направлениях $y \sim \pm \infty$. Пусть микронеоднородный материал пластины в среднем однородный, изотропный, тогда у кончиков разрезов возникают симметричные картины полос скольжения, которые строятся самоподобным образом до тех пор, пока пластические зоны не соединяются в центре пластины. Вводя коэффициент C -объемной концентрации пластического материала в виде отношения объема тела в пластическом состоянии V_p к общему

объему V_0 (площади) пластины - $C = \frac{V_p}{V_0}$ можем считать, что когда пластические зоны

смыкаются происходит макроскопическое необратимое формоизменение пластины, которое можно трактовать как перколяцию пластичности в широком смысле. Образование глобальной сети линий скольжения, трактуемое как развитое пластическое течение, находит объяснение в процессах, самоорганизующихся полей дислокаций и как следствие возникновения пластических кластеров фрактальной структуры. Пластическое макродеформирование рассматривается как потеря устойчивости дислокационной конфигурацией и переход ее в другое равновесное состояние, характеризуемой геометрически макроскопической сеткой линий скольжения.

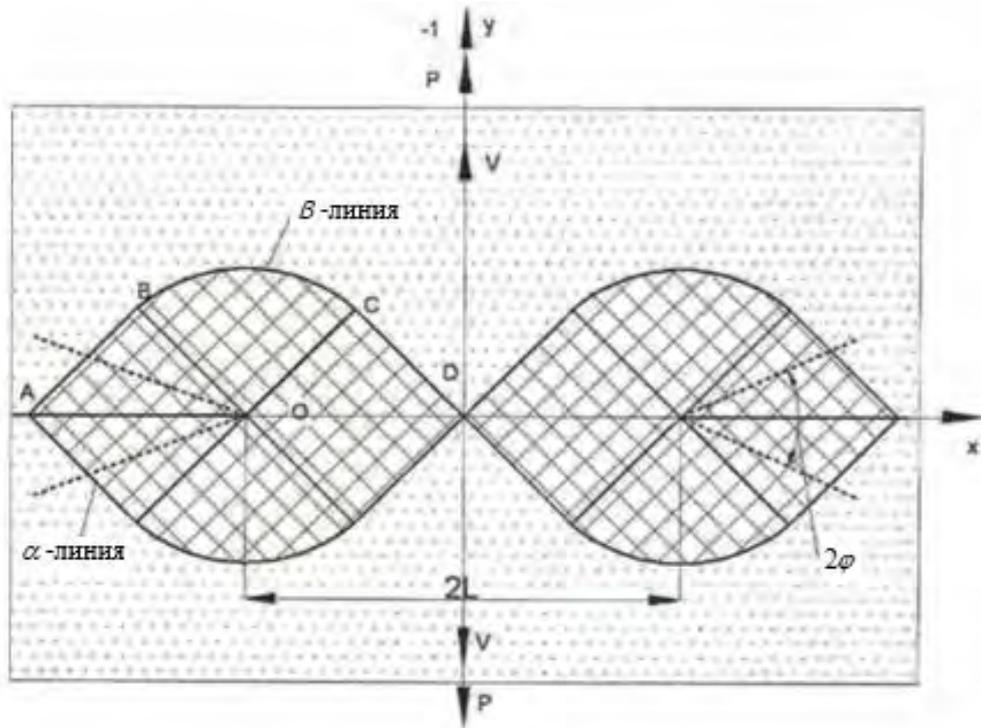


Рис. 1. Схема пластического состояния в пластине с разрезом

Охлаждение полосы инициирует развитие пластических зон в окрестности кончиков разрезов, причем рост пластической зоны происходит самоподобным образом. Используя термосиловую аналогию рассмотрим эквивалентную схему при кинематическом воздействии, эквивалентном термическому [1].

Тогда поле линий скольжения имеет вид, изображенный на рис. 1.

Условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2 = 4k^2 \quad (1.1)$$

удовлетворяется, если выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - k \sin 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma + k \sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

где в $\triangle OAB$ $\sigma = k, \theta = -\pi/4$, в $\triangle ODC$ $\sigma = k(1 + \pi), \theta = -3/4\pi$, тогда

$$\sigma_x = k\pi, \sigma_y = k(2 + \pi) \quad (1.3)$$

Предельному состоянию соответствует

$$P_{*np} = 4kh \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = P_{*np}^0 \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.4)$$

Здесь P_{*np}^0 – предельная нагрузка для полосы без разрезов ширины $2h$.

Скорости пластического течения точек полосы выражаются через макроскопическую скорость V растяжения полосы. В силу симметрии точки на линии OD имеют нулевую скорость вдоль оси y . Так на границе CD нормальная составляющая скорости непрерывна, тогда вдоль CD она постоянна и равна $\frac{1}{\sqrt{2}}V$. Из условия того, что

$u = u(\beta), v = v(\alpha)$ (α, β – координаты вдоль линий скольжения), что в

$\Delta ODC u = -\frac{1}{\sqrt{2}}V, v = \frac{1}{\sqrt{2}}V$. Таким образом, в предельном состоянии ΔODC перемещается со скоростью V в направлении OD как твердое целое. В криволинейном треугольнике OBC и постоянно вдоль прямых линий $\alpha - u = V \sin \theta, v = V(\cos \theta + \sqrt{2})$. Треугольник OAB движется как твердое тело со скоростями $v_x = V, v_y = 2V$. Касательная составляющая скорости вдоль линий $ABCD$ терпит разрыв.

В результате того, что берега трещин расходятся, разрезы превращаются в вырезы, указанные на рис. 1 пунктиром, причем угол выреза равен 2α . Вследствие превращения разрезов в вырезы уменьшается концентрация напряжений и предельная нагрузка соответственно может быть оценена по формуле:

$$P_{np} = P_{np}^0 \left(1 + \frac{\pi}{2} - \frac{V \cdot t}{h - L} \right) \quad (1.5)$$

где t – время.

Таким образом, при пластическом разрушении процесс обладает свойством самоторможения за счет расхождения берегов трещин.

В первом приближении можно считать скорость V пропорциональной перепаду температуры ΔT [2]

$$V = \alpha \Delta T \quad (1.6)$$

где α – коэффициент, определяемый экспериментально.

Подставляя (1.6) в (1.5), получим оценку зависимости предельной нагрузки от скачка температуры ΔT , времени и геометрии задачи, что позволяет решать задачи проектирования пластически деформирующихся элементов. Информация о физико-механических свойствах материала содержится в коэффициенте α .

2. Схема хрупкого разрушения.

Рассмотрим пластину толщиной $H = H_1 + H_2$ ($-H_2 \leq y \leq H_1$), размеры которой по z и x – неограниченные. Пластина подвергается вдоль оси y сверху и снизу действию тепловых потоков так, что плоскости $y = h_1, y = -h_2$ перпендикулярны вектору градиента потока.

На рисунке 2 в плоскости Oxy изображена схема задачи.

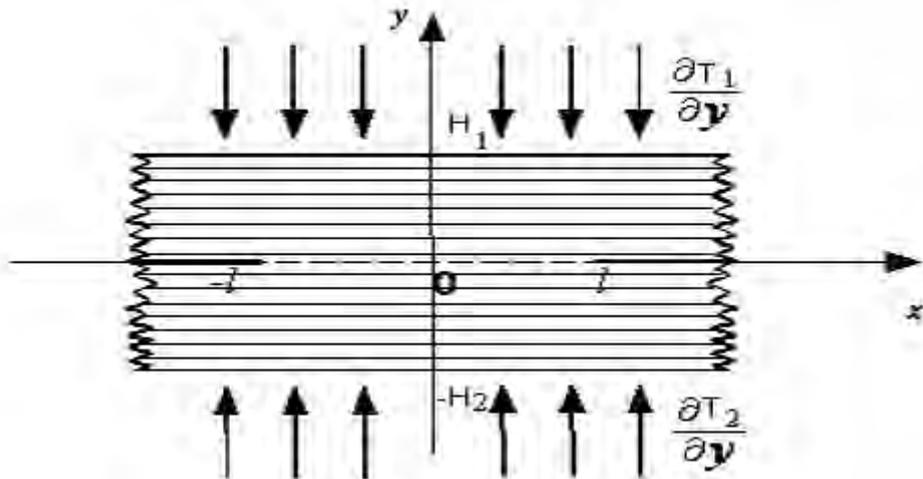


Рис. 2. Схема хрупкого состояния в слоистой пластине с разрезами

Материал пластины представляет собой микрослоистый, композит такой, что все материальные коэффициенты являются функциями только y , причем характер неоднородности меняется при переходе через плоскость $y=0$ таким образом, что градиент не-

однородности при $y=0$ имеет скачок. Верхний слой толщины H_1 жестко скреплен с нижним слоем толщины H_2 по плоскости $y=0$, $-\ell < x \leq \ell$. Поскольку микroneоднородность является концентратором напряжений, то в схеме хрупкого разрушения осреднение даст завышенную оценку предельного состояния, поэтому здесь учет микроструктуры проводится без осреднения.

Уравнения, описывающие стационарные температурные поля $T^{(\tau)}(x, y)$ в среде имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\Lambda_{11}^{(\tau)}(y) \frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y} \right] + \Lambda_{22}^{(\tau)}(y) \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial x^2} = 0, \quad \tau = 1, 2, \quad (2.1)$$

где $\tau = 1$ соответствует верхнему слою, $\tau = 2$ – нижнему.

В уравнении (2.1) $\Lambda_{11}^{(\tau)}(y)$, $\Lambda_{22}^{(\tau)}(y)$ переменные коэффициенты теплопроводности и для произвольных $\Lambda_{11}^{(\tau)}(y)$, $\Lambda_{22}^{(\tau)}(y)$ уравнение (2.1) не может быть решено в общем виде. Запишем $\Lambda_{ij}^{(\tau)}(y)$ в виде

$$\Lambda_{ij}^{(\tau)} = \Lambda_{ij}^{0(\tau)} f_{(\tau)}(y) \quad (2.2)$$

где $\Lambda_{ij}^{0(\tau)}$ - константы.

Тогда уравнение (2.1) представится следующим образом

$$\frac{d \ln f_{(\tau)}}{dy} \frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y} + \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial y^2} + \frac{\Lambda_{22}^{0(\tau)}}{\Lambda_{11}^{0(\tau)}} \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial x^2} = 0, (\tau = 1, 2). \quad (2.3)$$

Рассмотрим случай неоднородности такой, что уравнения (2.3) являются уравнениями с постоянным коэффициентом при $\frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y}$, тогда $f_{(\tau)}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d \ln f_{(\tau)}}{dy} = c_{(\tau)}. \quad (2.4)$$

Наиболее общий вид экспоненциальной зависимости можно представить в виде

$$\Lambda_{ij}^{(\tau)}(y) = \Lambda_{ij}^{0(\tau)} \exp(\delta^{(\tau)} y / l), \quad i, j = 1, 2 \quad (2.5)$$

где учтены микрослоистость, ортотропность и макроскопическая двухслойность. Разрезы моделируют трещины между двумя пластинами из композиционных микрослоистых материалов по границе разрыва градиента неоднородности.

Таким образом, на основании уравнения (2.4) можно рассмотреть класс микрослоистых сред, описываемых функциями экспоненциального типа, причем для всех этих типов функций уравнение (2.3) является уравнением с постоянными коэффициентами, которое можно записать в виде

$$\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y} + k_0^{(\tau)} \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial y^2} = 0; \quad (2.6)$$

$$k_0^{(\tau)} = \frac{\Lambda_{22}^{0(\tau)}}{\Lambda_{11}^{0(\tau)}}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad \tau = 1, 2,$$

где константа $c_{(\alpha)}^{(\tau)}$ меняется в зависимости от α -типа неоднородности в нижнем и верхнем слоях и в зависимости от $\tau = 1, 2$ при переходе от верхнего слоя к нижнему слою.

Решение уравнения теплопроводности (2.6) исходя из симметрии задачи будем искать в виде [2]

$$T^{(\tau)}(x, y) = T_{(0)}^{(\tau)}(y) + T_{(1)}^{(\tau)}(x, y), \quad \tau = 1, 2, \quad (2.7)$$

где $T_{(0)}^{(\tau)}(y)$ — решение задачи теплопроводности для пластины без разрезов и без расслоения с граничными условиями заданными на плоскостях $y = H_1$, $y = -H_2$, не зависящими от координаты x ;

$T_{(1)}^{(\tau)}(x, y)$ — решение задачи теплопроводности для пластины без разрезов с граничными условиями заданными на плоскостях $y = H_1$, $y = -H_2$, не зависящим от координаты x , $T_{(\tau)}^{(1)}(x, y)$ - решение задачи теплопроводности при нулевых граничных условиях при $y = H_1$, $y = -H_2$ и краевых условиях на разрезах, полученных из решения задачи для $T_{(0)}^{(\tau)}(y)$.

Подставляя (2.7) в (2.6) и разделяя уравнения для $T_{(0)}^{(\tau)}$, $T_{(1)}^{(\tau)}$, получим

$$\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \frac{dT_{(0)}^{(\tau)}}{dy} + k_0^{(\tau)} \frac{d^2 T_{(1)}^{(\tau)}}{\partial y^2} = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \frac{\partial T_{(1)}^{(\tau)}}{\partial y} + k_0^{(\tau)} \frac{\partial^2 T_{(1)}^{(\tau)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{(1)}^{(\tau)}}{\partial y^2} = 0. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) запишем в виде

$$T_{y(0)}^{(\tau)} = \theta^{(\tau)}(y), \quad \frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \theta^{(\tau)}(y) + \theta'^{(\tau)}(y) = 0. \quad (2.10)$$

Тогда имеем

$$\theta^{(\tau)}(y) = e^{-\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} y} + a^{(\tau)} = T_{(0)}^{(\tau)}(y), \quad T_{(0)}^{(\tau)}(y) = b^{(\tau)} - \frac{e^{a^{(\tau)}}}{c_{(\alpha)}^{(\tau)}} e^{-\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} y} \quad (2.11)$$

В (2.11) константы $a^{(\tau)}$, $b^{(\tau)}$ должны быть определены из граничных условий при $y = H_1$, $y = -H_2$.

Рассмотрим теперь уравнения (2.9), которые могут быть решены различными способами, однако в данном случае необходимо учитывать, что граничные условия формулируются на разрезах. Кроме того в случае несвязной термоупругой задачи необходимо в дальнейшем получить также решение упругой краевой задачи для напряжений, поэтому используем для решения метод интегральных преобразований, который в данном случае позволяет применить по x преобразование Фурье. Преобразуя (2.9) по x , находим

$$\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \frac{d\tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y)}{dy} - k_0^{(\tau)} \lambda^2 \tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y) + \frac{d^2 \tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y)}{dy^2} = 0, \quad (2.12)$$

$$\tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} T^{(1)(\tau)}(x, y) e^{-i\lambda x} dx.$$

Решение уравнения (2.12) можно получить методом характеристического уравнения, которое в данном случае имеет вид

$$p^2 + \frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} p - k_0^{(\tau)} \lambda^2 = 0 \quad (2.13)$$

Решение (2.12) запишется в виде

$$\tilde{T}_{(\tau)}^{(1)}(\lambda, y) = A^{(\tau)}(\lambda) e^{\lambda_1 y} + B^{(\tau)}(\lambda) e^{\lambda_2 y};$$

где λ_i ($i = 1, 2$) находятся из уравнения (2.13) в виде

$$\lambda_{1,2(\alpha)}^{(\tau)} = -\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{2l} \pm \sqrt{\frac{c_{(\alpha)}^{2(\tau)}}{2l} + k_0^{(\tau)} \lambda^2}. \quad (2.14)$$

В (2.14) произвольные неизвестные $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ должны быть определены из граничных условий. Решение уравнения (2.9) с учетом (2.14) с помощью обратного преобразования Фурье запишется в виде

$$\begin{aligned} T_{(1)}^{(\tau)}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_{(1)}^{(\tau)}(\lambda, y) e^{i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(A^{(\tau)}(\lambda) e^{i\lambda_1^{(\alpha)} y} + B^{(\tau)}(\lambda) e^{i\lambda_2^{(\alpha)} y} \right) e^{i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Вычислим деформации и напряжения

$$\begin{aligned} e_x^{(\tau)} &= \frac{\partial U^{(\tau)}}{\partial x} = ip \left[U_{(0)}^{(\tau)}(x, y) + u_{(1)}^{(\tau)}(x, y) \right]; \\ e_y^{(\tau)} &= \frac{\partial v^{(\tau)}}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n \mu_k^{(\tau)} S_k^{(\tau)}(\lambda) \eta_k^{(\tau)}(\lambda) e^{\eta_k^{(\tau)} y} + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(0)}(\lambda, y)}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(1)}(\lambda, y)}{\partial y} \right] e^{i\lambda x} d\lambda; \\ e_{xy}^{(\tau)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n \eta_k^{(\tau)} S_k^{(\tau)}(\lambda) e^{\eta_k^{(\tau)} y} + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(0)}(\lambda, y)}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(1)}(\lambda, y)}{\partial y} \right] e^{i\lambda x} d\lambda + \\ &\quad + ip \left[V_{(0)}^{(\tau)}(x, y) + V_{(1)}^{(\tau)}(x, y) \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в соотношения для напряжений получим выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(\tau)} &= c_{11}^{(\tau)}(y) e_x^{(\tau)} + c_{12}^{(\tau)}(y) e_y^{(\tau)} + \alpha_1^{(\tau)}(y) T^{(\tau)}; \\ \sigma_y^{(\tau)} &= c_{12}^{(\tau)}(y) e_x^{(\tau)} + c_{22}^{(\tau)}(y) e_y^{(\tau)} + \alpha_2^{(\tau)}(y) T^{(\tau)}; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\tau_{xy}^{(\tau)} = c_{66}^{(\tau)}(y) e_{xy}^{(\tau)}.$$

Граничные условия в напряжениях рассмотрим для случая, когда границы $y = H_1$, $y = -H_2$ свободны от силовых нагрузок и подвергаются только действию потоков тепла

$$\sigma_y^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} \Big|_{|x| < \infty} = \sigma_y^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_2}^{\tau=2} \Big|_{|x| < \infty} = \quad (2.18)$$

$$= \tau_{xy}^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} \Big|_{|x| < \infty} = \tau_{xy}^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_2}^{\tau=2} \Big|_{|x| < \infty} = 0.$$

Граничные условия на разрезах имеют вид

$$\tau_{xy}^+(x, y) \Big|_{y=0^+}^{\tau=1} \Big|_{-\infty < |x| < -l, \infty < |x| < \infty} = \tau_{xy}^-(x, y) \Big|_{y=0^-} = \Gamma_1(x); \quad (2.19)$$

$$\sigma_{yy}^+(x, y) \Big|_{y=0^+}^{\tau=1} \Big|_{-\infty < |x| < -l, \infty < |x| < \infty} = \sigma_{yy}^-(x, y) \Big|_{y=0^-} = \Gamma_2(x).$$

В области перемычки $y=0$, $-l \leq x \leq l$ для производных полевых величин u , v имеем соотношения

$$\frac{\partial u^+(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u^-(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial v^+(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v^-(x, y)}{\partial x} \quad (2.20)$$

В соотношениях (2.46), (2.47) знак «+» соответствует $\tau=1$, знак «-» соответствует $\tau=2$. Для дальнейшего рассмотрения целесообразно перейти к безразмерным величинам, по формулам

$$T^{(\tau)} = \hat{T}^{(\tau)} / (-Q_0 l / \Lambda_{22}^0), \quad \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x^{(\tau)} \\ \hat{\sigma}_y^{(\tau)} \\ \hat{\tau}_{xy}^{(\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^{(\tau)} \\ \sigma_y^{(\tau)} \\ \tau_{xy}^{(\tau)} \end{pmatrix} (-E_0 Q_0 \alpha_0 l / \Lambda_{22}^0)^{-1}; \quad (2.21)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u}^{(\tau)} \\ \hat{v}^{(\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(\tau)} \\ v^{(\tau)} \end{pmatrix} (-Q_0 \alpha_0 l^2 / \Lambda_{22})^{-1}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\delta}^{(\tau)} \\ \hat{\beta}^{(\tau)} \\ \hat{\gamma}^{(\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^{(\tau)} \\ \beta^{(\tau)} \\ \gamma^{(\tau)} \end{pmatrix} l, \quad \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} l^{-1}.$$

Здесь верхний символ «^» сверху, которым обозначены безразмерные величины в дальнейших рассмотрениях опускаем имея в виду, что все величины являются безразмерными. В безразмерных величинах перемычка в пластине будет расположена в плоскости $y=0$ для $-1 < x < 1$, а разрезы простираются в плоскости $y=0$ для $-\infty < x \leq -1$, $1 \leq x < \infty$. В дальнейшем будем рассматривать случай микрослоистой среды, в которой теплофизические и упругие коэффициенты в зависимости от y изменяются непрерывно, а их градиенты (производные) терпят скачок при $y=0$. Это означает, что $\Lambda_{ij}^{(1)} = \Lambda_{ij}^{(2)}$, $\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(2)}$, $c_{ij}^{(1)} = c_{ij}^{(2)}$, $\delta^{(2)} - \delta^{(1)} \neq 0$, $\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)} \neq 0$, $\beta^{(2)} - \beta^{(1)} \neq 0$, $k_0^{(1)} = k_0^{(2)}$.

Выпишем выражения для $\sigma_y^{(\tau)}$ в явном виде для $\tau=1$ в верхнем слое и для $\tau=2$ в нижнем слое соответственно

$$\sigma_y^{(1)}(x, y) = \frac{e^{-\beta_1 y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^4 S_{1k}(\lambda) M_{3k}(\lambda) e^{\eta_k^{(1)} y} + T_{3\zeta_1}(\lambda, y) \right) e^{i\lambda x} d\lambda - \beta_{20} \frac{1}{\delta_1} e^{(\gamma_1 - \beta_1)y} + \frac{1}{\delta_1} \beta_{20} e^{(\gamma_1 - \beta_1 - \beta_1)y} \quad (2.22)$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, y) = \frac{e^{-\beta_1 y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^4 S_{1k}(\lambda) M_{4k}(\lambda) e^{\eta_k^{(1)} y} + T_{3\zeta_2}(\lambda, y) \right) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (2.23)$$

$$\sigma_y^{(2)}(x, y) = \frac{e^{-\beta_2 y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^4 S_{2k}(\lambda) M_{5k}(\lambda) e^{\eta_k^{(2)} y} + T_{3\zeta_3}(\lambda, y) \right) e^{i\lambda x} d\lambda - \beta_{20} \frac{1}{\delta_2} e^{(\gamma_2 - \beta_2)y} + \frac{\beta_{20}}{\delta_1} e^{(\gamma_2 - \delta_2 - \beta_2)y} \quad (2.24)$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, y) = \frac{e^{-\beta_2 y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^4 S_{2k}(\lambda) M_{6k}(\lambda) e^{\eta_k^{(2)} y} + T_{3\zeta_4}(\lambda, y) \right) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (2.25)$$

Выражения для $S_{\alpha k}(\lambda), T_{\alpha \beta}(\lambda)$ здесь не приводятся ввиду громоздкости.

3. Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений в пластине с разрезами.

Рассмотрим влияние характера микroneоднородности коэффициентов теплопроводности, упругости, теплоемкости на коэффициенты интенсивности напряжений.

Коэффициенты интенсивности напряжений вычисляются по формулам [2]

$$K_I^{\pm} - iK_{II}^{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm 1} \left[\sqrt{1-x^2} \left(\sigma_y^{\pm}(x) - i\tau_{xy}^{\pm}(x) \right) \right] \quad (3.1)$$

где для данного раздела знак «+» принято относить к правой трещине ($x > 0$), знак «-» относится к левой ($x < 0$).

Коэффициенты K_I^{\pm} и K_{II}^{\pm} выражаются непосредственно через функции G_i ($i = 1, 2$), вычисляемые в точках $x = \pm 1$

$$K_I^{\pm} \leftarrow (\pm 1) = G_1(\pm 1); \quad K_{II}^{\pm} \leftarrow (\pm 1) = G_2(\pm 1) \quad (3.2)$$

Подставляя $G_i(\pm 1)$ в (3.2), получим выражения для коэффициентов интенсивности напряжений. Предельные случаи изотропной однородной неограниченной пластины с двумя разрезами находим, полагая в полученных формулах параметры $\delta^{(r)} = \beta^{(r)} = \gamma^{(r)} = 1$, $\Lambda_{11} = \Lambda_{22}$, $c_{11} = c_{66}$, $\alpha_1 = \alpha_2$.

Зависимости безразмерных коэффициентов интенсивности напряжений $K_i^{\pm} = K_i^{\pm} / K_0$, $i = I, II$, ($K_0 = -E_0 \alpha_0 l q_H / \Lambda_{22}^0$) от безразмерной величины H_1 / l , характеризующей толщину слоя (H_1), и расстояние между трещинами (l) изображены на рисунках 2.2–2.7. Здесь учитывается влияние безразмерных параметров $\delta_2 \delta_1^{-1}$, $\gamma_2 \gamma_1^{-1}$, $\beta_2 \beta_1^{-1}$, характеризующих изменение теплопроводных, теплоемкостных, упругих свойств при переходе от одного слоя к другому.

В случае равенства этих параметров единице неоднородность от слоя к слою, имеет один и тот же тип. Меняя распределение неоднородных свойств по слою, а также от макрослоя к макрослою получаем возможность влиять на величину коэффициентов концентрации напряжений. Изменение неоднородности от макрослоя к макрослою учитывается на уровне изменения градиента неоднородности при $y = 0$. Как следует из (2.19) и (2.49) сами коэффициенты при переходе через $y = 0$ непрерывны, а скачок, равный разностям $|\beta_2 - \beta_1| l^{-1}$, $|\gamma_2 - \gamma_1| l^{-1}$, $|\delta_2 - \delta_1| l^{-1}$, испытывают их производные. Таким образом, микрослоистость имеет кусочно гладкий характер (слабо разрывная), когда на разрыве не требуется ставить граничные условия.

На рисунках 3.1 и 3.2 изображены зависимости K_I , K_{II} от $l_* = H_1 / l$ для случая, когда при переходе через $y = 0$ скачок испытывает только градиент упругих свойств, а градиенты теплопроводности и теплоемкости непрерывны.

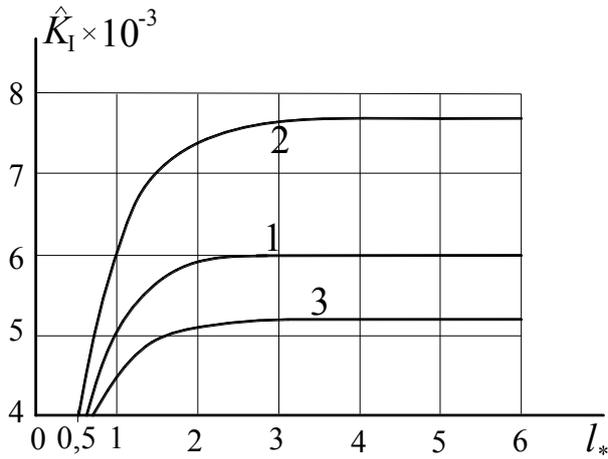


Рис. 3.1. Зависимость \hat{K}_1 от l_*
 при $\gamma_2/\gamma_1 = \delta_2/\delta_1 = 1$ $1 - \beta_2/\beta_1 = 1$; ...;
 $3 - \beta_2/\beta_1 = 2$

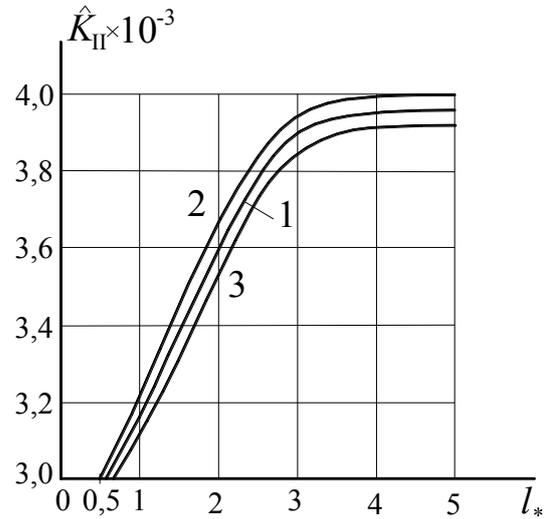


Рис. 3.2. Зависимость \hat{K}_{II} от l_*
 при $\gamma_2/\gamma_1 = \delta_2/\delta_1 = 1$ $1 - \beta_2/\beta_1 = 1$;
 $2 - \beta_2/\beta_1 = 0,5$; $3 - \beta_2/\beta_1 = 2$

На рисунках 3.3 и 3.4 изображены зависимости \hat{K}_1, \hat{K}_{II} от $l_* = H_1/l$ для случая, когда при переходе через $y=0$ скачок испытывает только градиент теплопроводных свойств, а градиенты упругости и теплоемкости непрерывны.

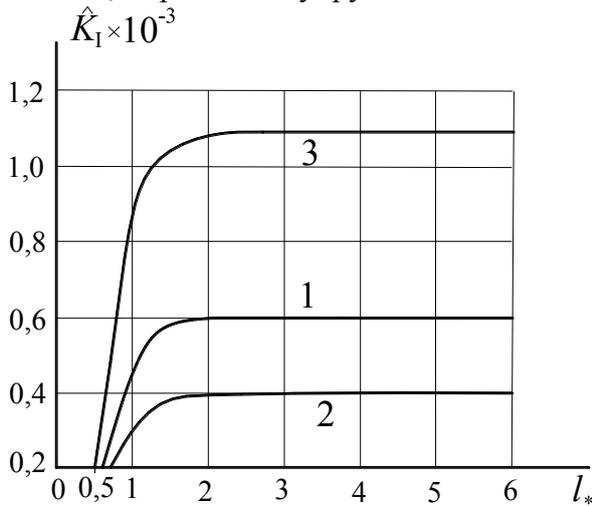


Рис. 3.3. Зависимость \hat{K}_1 от l_* при
 $\beta_2/\beta_1 = \gamma_2/\gamma_1 = 1$ $1 - \delta_2/\delta_1 = 1$;
 $2 - \delta_2/\delta_1 = 0,5$; $3 - \delta_2/\delta_1 = 2$

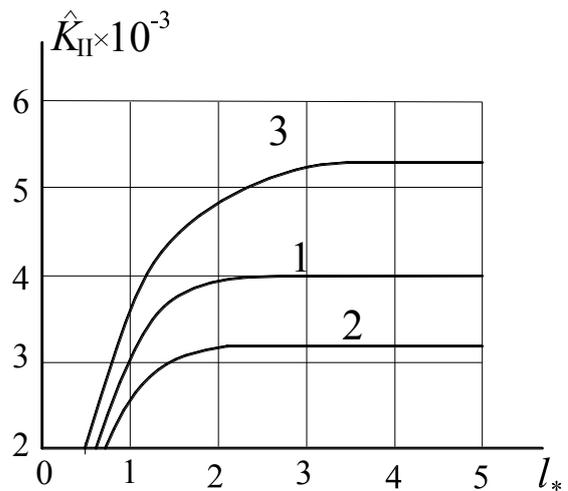


Рис. 3.4. Зависимость \hat{K}_{II} от l_* при
 $\beta_2/\beta_1 = \gamma_2/\gamma_1 = 1$ $1 - \delta_2/\delta_1 = 1$;
 $2 - \delta_2/\delta_1 = 0,5$; $3 - \delta_2/\delta_1 = 2$

На рисунках 3.5 и 3.6 изображены зависимости \hat{K}_1, \hat{K}_{II} от $l_* = H_1/l$ для случая, когда при переходе через $y=0$ скачок испытывает только градиент теплоемкости, а градиенты упругих и теплопроводных свойств непрерывны.

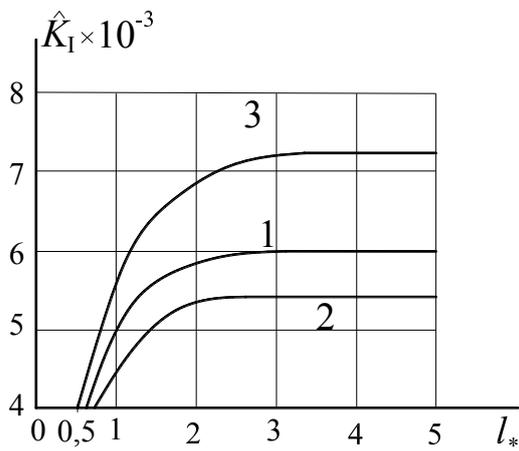


Рис. 3.5. Зависимость \hat{K}_I от l_* ,
 при $\beta_2/\beta_1 = \delta_2/\delta_1 = 1$ $1-\gamma_2/\gamma_1 = 1$;
 $2-\gamma_2/\gamma_1 = 0,5$; $3-\gamma_2/\gamma_1 = 2$

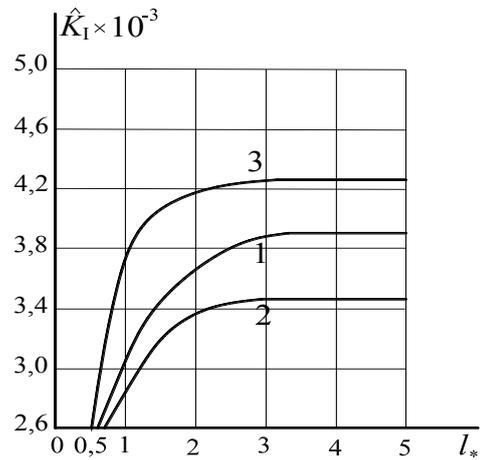


Рис. 3.6. Зависимость \hat{K}_{II} от l_* ,
 при $\beta_2/\beta_1 = \delta_2/\delta_1 = 1$ $1-\gamma_2/\gamma_1 = 1$;
 $2-\gamma_2/\gamma_1 = 0,5$; $3-\gamma_2/\gamma_1 = 2$

Из рисунков 3.1–3.6 следует, что зависимости \hat{K}_I и \hat{K}_{II} от отношения толщины верхнего макрослоя к расстоянию между трещинами качественно выглядят одинаково, однако есть различия. Если жесткость верхнего слоя больше, чем нижнего, то коэффициенты \hat{K}_I и \hat{K}_{II} больше по сравнению со средой, в которой градиент упругости непрерывен (см. рисунки 3.1 и 3.2).

Если теплопроводность верхнего слоя выше теплопроводности нижнего, то это ведет к снижению величин \hat{K}_I, \hat{K}_{II} по сравнению с гладким изменением градиента теплопроводности при переходе через границу $y = 0$.

Представляет интерес оценить влияние отношения H_2/H_1 на зависимость \hat{K}_I, \hat{K}_{II} от l_* , т.е. от глубины, на которой происходит расслоение полосы. На рисунках 3.7 и 3.8 изображены зависимости \hat{K}_I, \hat{K}_{II} от l_* для случаев $H_1 \geq H_2$. Неоднородность физико-механических параметров гладкая.

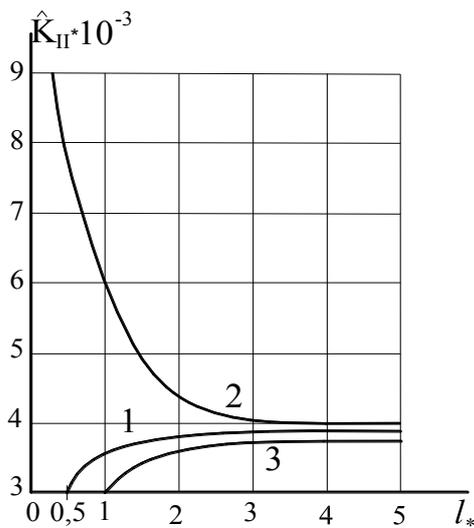


Рис. 3.7. Зависимость \hat{K}_{II} от l_* ,
 при $\gamma_1/\gamma_2 = \delta_2/\delta_1 = \beta_2/\beta_1 = 1$ $1-H_2/H_1 = 1$
 $; 2-H_2/H_1 = 0,5$; $3-H_2/H_1 = 2$

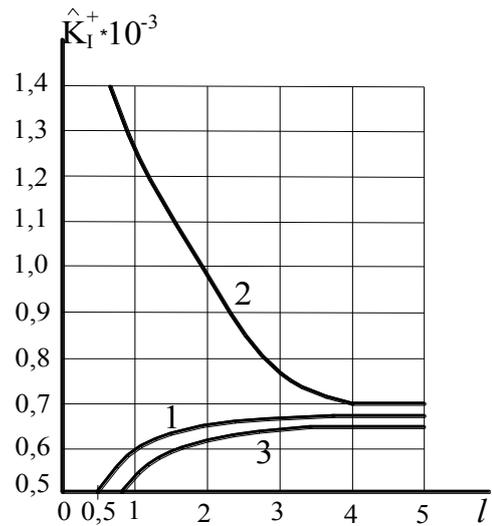


Рис. 3.8. Зависимость \hat{K}_I от l_* ,
 при $\gamma_1/\gamma_2 = \delta_2/\delta_1 = \beta_2/\beta_1 = 1$ $1-H_2/H_1 = 1$;
 $2-H_2/H_1 = 0,5$; $3-H_2/H_1 = 2$

Из рисунков 3.7 и 3.8 следует, что если верхний слой толще нижнего, то величина концентрации напряжений возрастает по сравнению с полосой, для которой $H_1 = H_2$.

Как известно, в общем случае сложного трехмерного напряженно-деформированного состояния твердого тела с трещинами условия предельного равновесия могут быть записаны в виде

$$f(K_1, K_2, K_3) = 0. \quad (3.3)$$

В рассматриваемом случае неоднородной ортотропной полосы воздействие несимметричных тепловых потоков эквивалентно силовым нагрузкам, создающим сложное двумерное состояние, следствием чего является непрямолинейное распространение трещины между разрезами. Из кончиков разрезов трещины будут расти не вдоль оси y (симметричный случай), как это было бы в случае, если бы линия $y = 0$ была линией разрыва материальных коэффициентов. В этом случае разрез является трещиной расслоения. В случае, когда на линии $y = 0$ материальные коэффициенты непрерывны, а их первые производные терпят разрыв (слабый разрыв), направление распространения трещины зависит от градиентов неоднородности и тепловых потоков.

Заключение. Учет анизотропии оказывает существенное влияние на распределение напряжений в пластинах с разрезами. Учет неоднородности на макроуровне обычно проводится на основе моделей кусочно-однородных пластин и оболочек, а на микроуровне с помощью функциональных зависимостей физико-механических параметров среды от пространственных координат. В работе рассмотрена неоднородная среда градиентного типа, что стимулируется проблемами, возникающими в практике использования различных композитных материалов в машинах, реакторах, технологических процессах, связанных с температурным воздействием на них. Получены оценки, обусловленные учетом анизотропии, неоднородности, что сильно усложняет задачу, но позволяет ставить задачи управления процессами деформирования и разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. М., Наука, 1968, 420 с.
2. Плескачевский Ю.М., Чigareва Ю.А. *Концентрация термических напряжений в ортотропной пластине с двухмасштабной градиентной неоднородностью и разрезами // Материалы. Технологии. Инструменты*. – 2013. – №2. – с. 5–16.
3. Прусов И.А. *Термоупругие анизотропные пластины*. Минск, Изд-во БГУ 1978, 200 с.
4. Куликов И.С., Нестеренко В.Б., Тверкович Б.Е. *Прочность элементов конструкций при облучении*. Минск, Навука і тэхніка, 1990, 144с.
5. Черепанов Г.П. *Механика хрупкого разрушения*. М., Наука, 1974, 640 с.
6. Atkinson C. *The propagation of a brittle crack in anisotropic material*. *Inbern. J.Engng Sci.*, 1965. Vol. 3, № 6.
7. Черепанов Г.П., Ершов Л.В. *Механика разрушения*. Москва, Машиностроение, 1977, 224 с.

НДС ШЕСТИГРАННОЙ ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

¹Куликов И.С., ²Шкиндер И.В.

¹ООО «Плазмакрафт», Смоленск

²ОУ Белорусский национальный технический университет, Минск

В настоящее время в Республике Беларусь по российскому проекту строится АЭС. Одним из важнейших элементов активной зоны ядерного реактора является чехол тепловыделяющей сборки, представляющий собой тонкостенную шестигранную оболочку. Данная оболочка работает в условиях механической нагрузки (внутреннее или внешнее давление, зависящее от конструкции ядерного реактора) и неравномерного нагрева в условиях тепловой или радиационной ползучести. Упругое напряженно-деформированное состояние таких оболочек рассмотрено в работах Власова В.З./1,2/. Приближенное численное решение задачи с учетом ползучести и радиационного набухания дано в монографии /3/. Учитывая наличие сегодня таких мощных вычислительных инструментов как программные пакеты Ansys и SolidWorks, в статье представлено решение, которое получено с применением последнего пакета и его дополнения «SolidWorks Simulation».

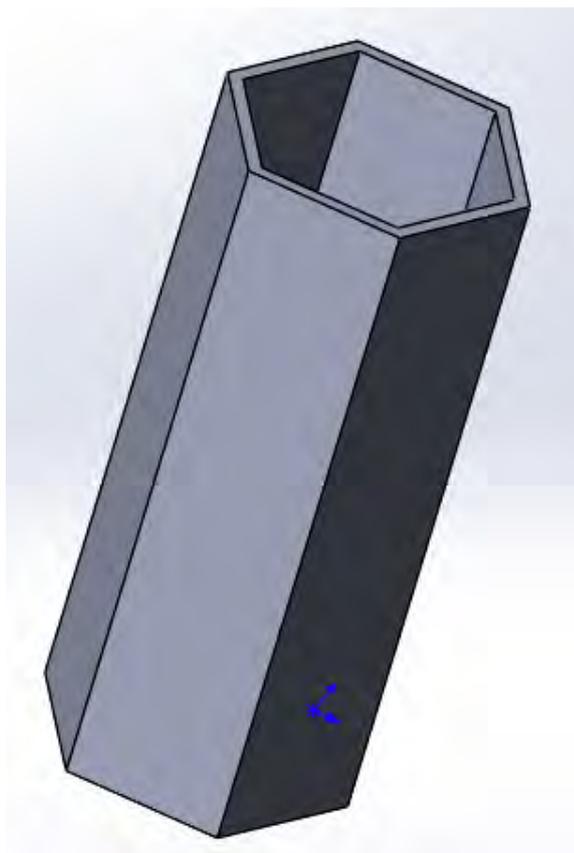
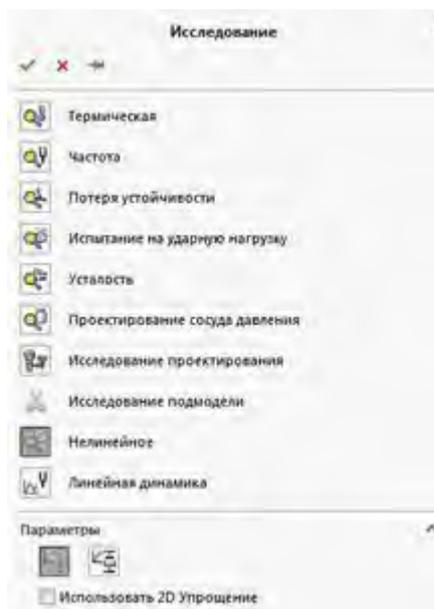


Рис. 1. Модель шестигранной оболочки

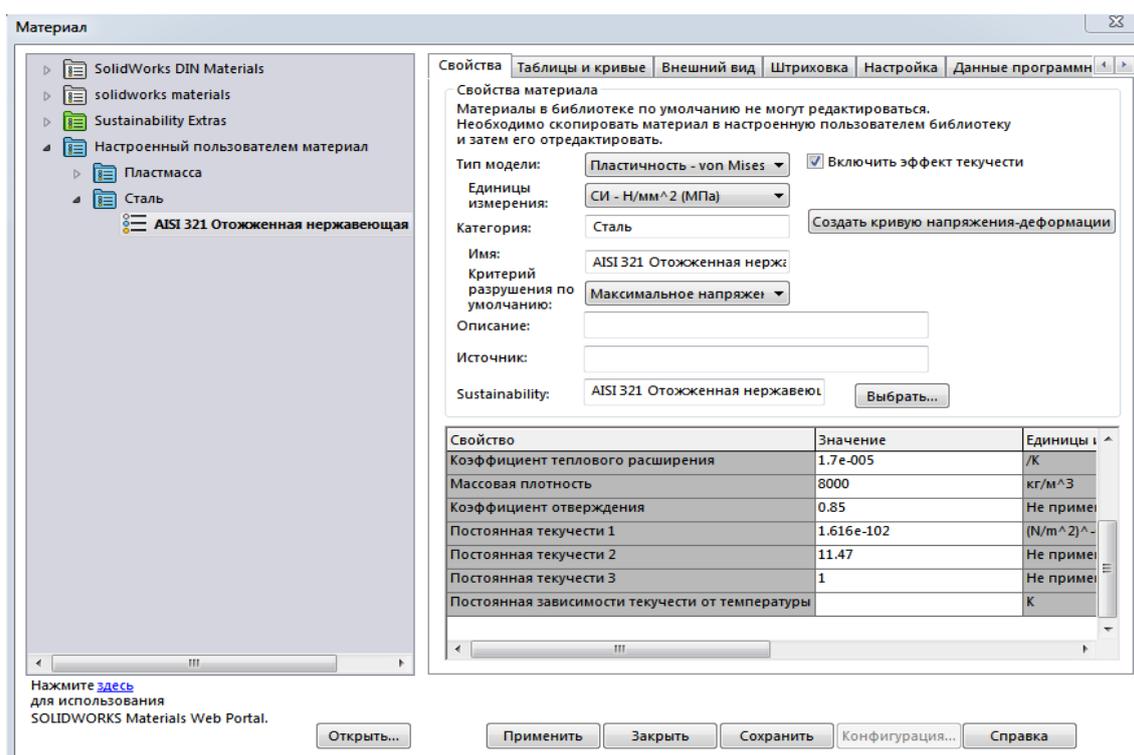
Длина оболочки $L = 1000$ мм, сторона шестигранного сечения $a = 200$ мм, толщина $h = 20$ мм. Равномерно распределённое внутреннее давление $q = 12$ МПа. Предпо-

лагалось, что материал оболочки, нержавеющая сталь X18H10T, подвержен ползучести..

Начало исследование начинается с выбора типа исследования, в нашем случае - нелинейное:



Свойства материала оболочки задаются во вкладке «Свойства материала»



Для расчета были использованы свойства стали AISI 321, которая является аналогом стали X18H10T.

После задания всех параметров и проведения расчетов были получены следующие результаты:

Картины напряжений, деформаций и перемещений изображены рис. 2 а, б, в. соответственно

Как можно видеть из рис. 2 а , максимальные напряжения возникают на боковых гранях оболочки, величина интенсивности которых составляет 233,34 МПа

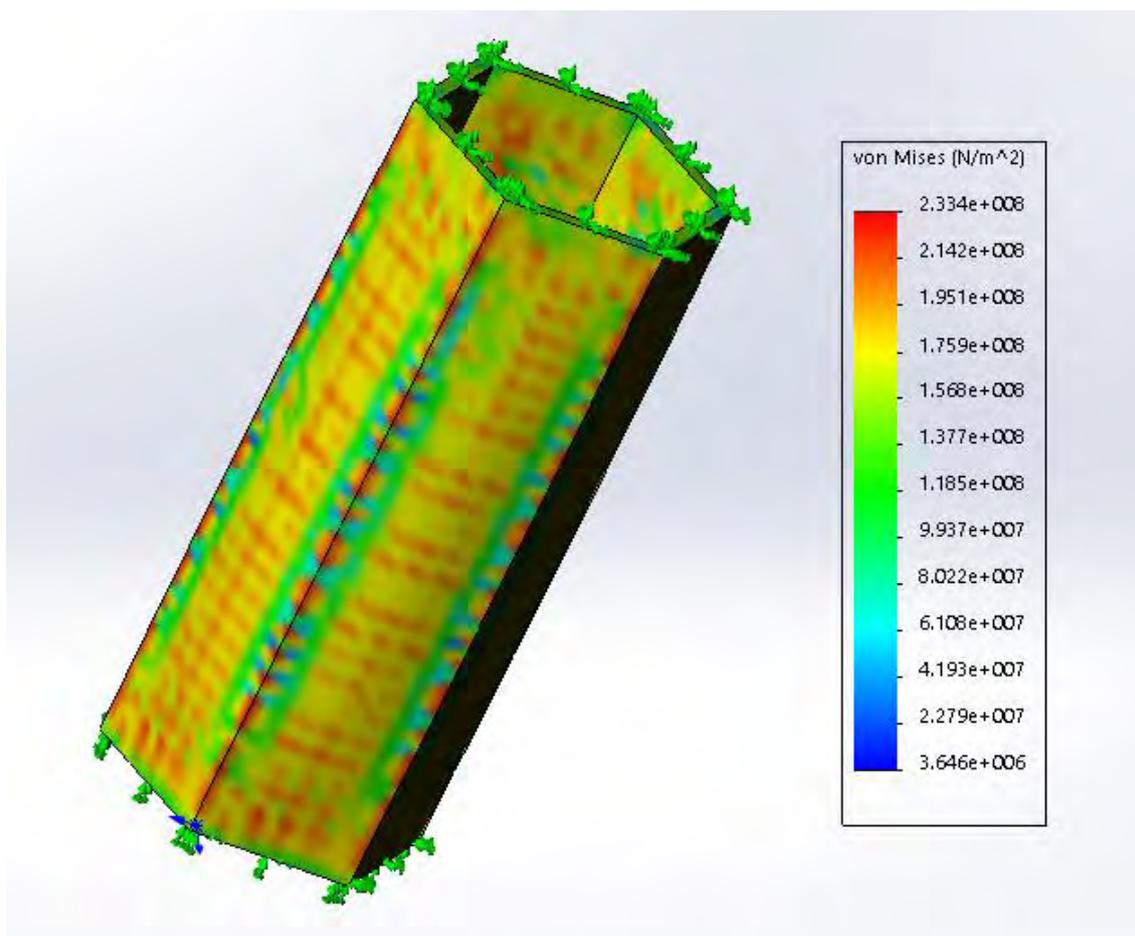


Рис. 2 а. Распределение интенсивности напряжений

Максимальная интенсивность деформаций была равна 6,683e-002 (рис. 2б)

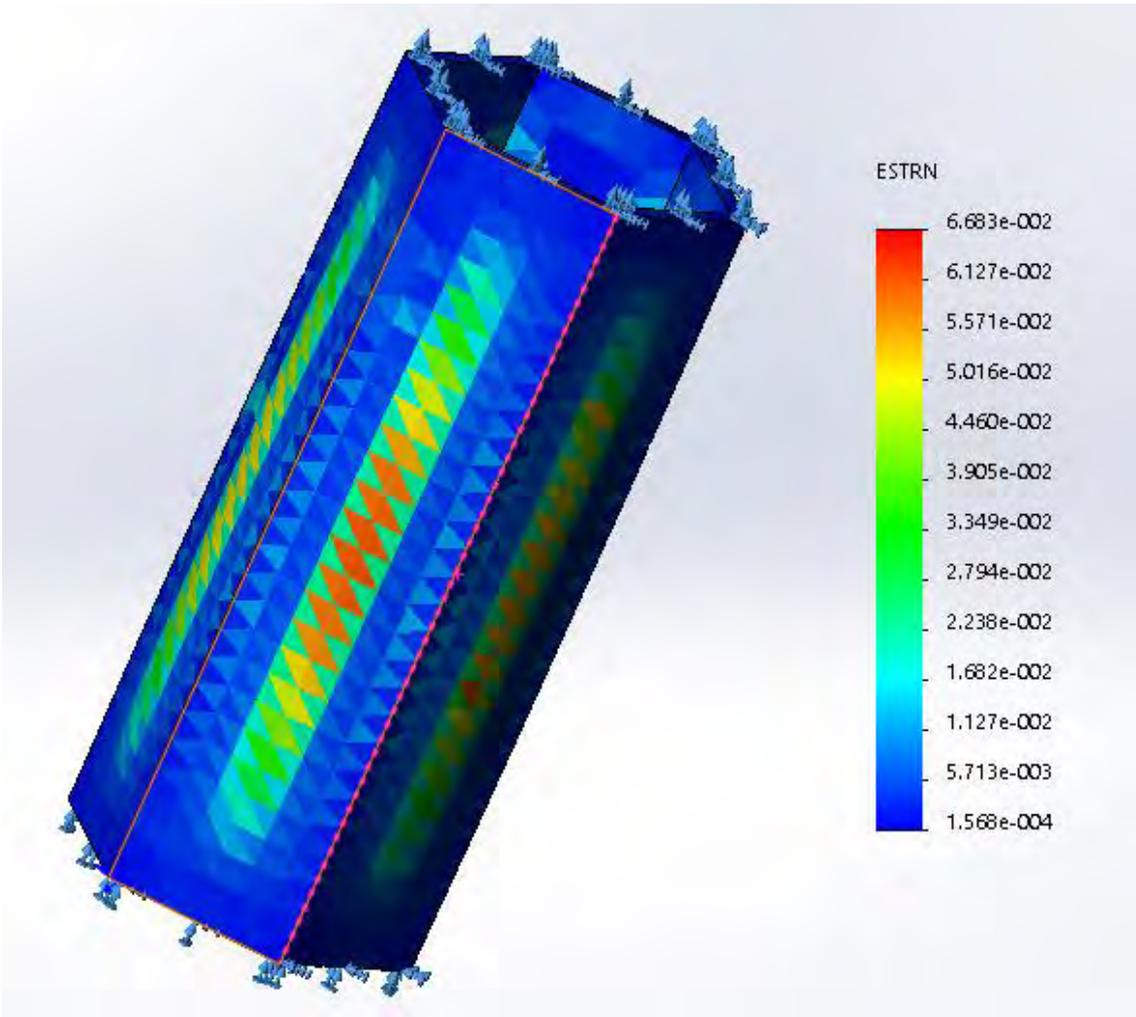


Рис. 2 б. Распределение интенсивности деформаций

Как видно из рис. 2 в, максимальные перемещения составили 1,127 мм.

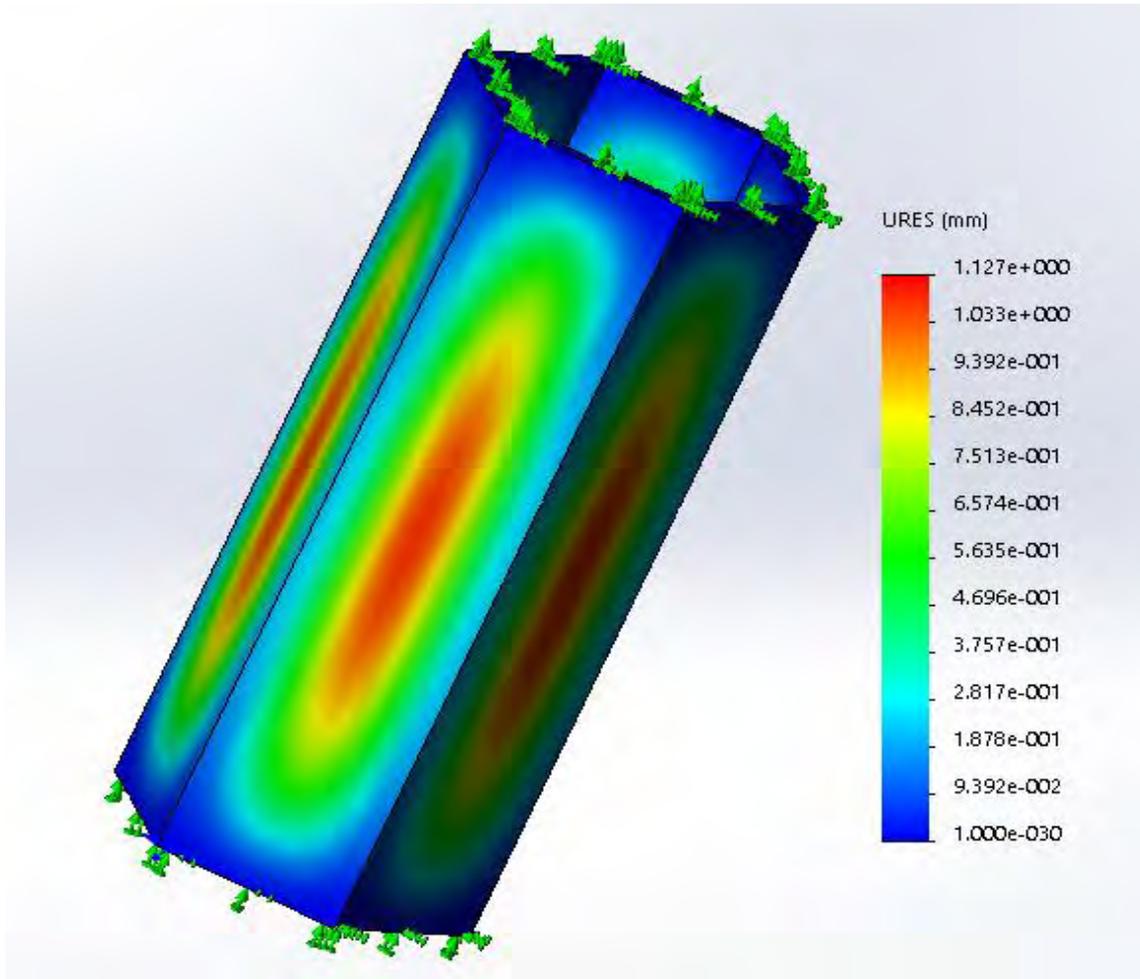


Рис. 2 в. Распределение перемещений точек оболочки

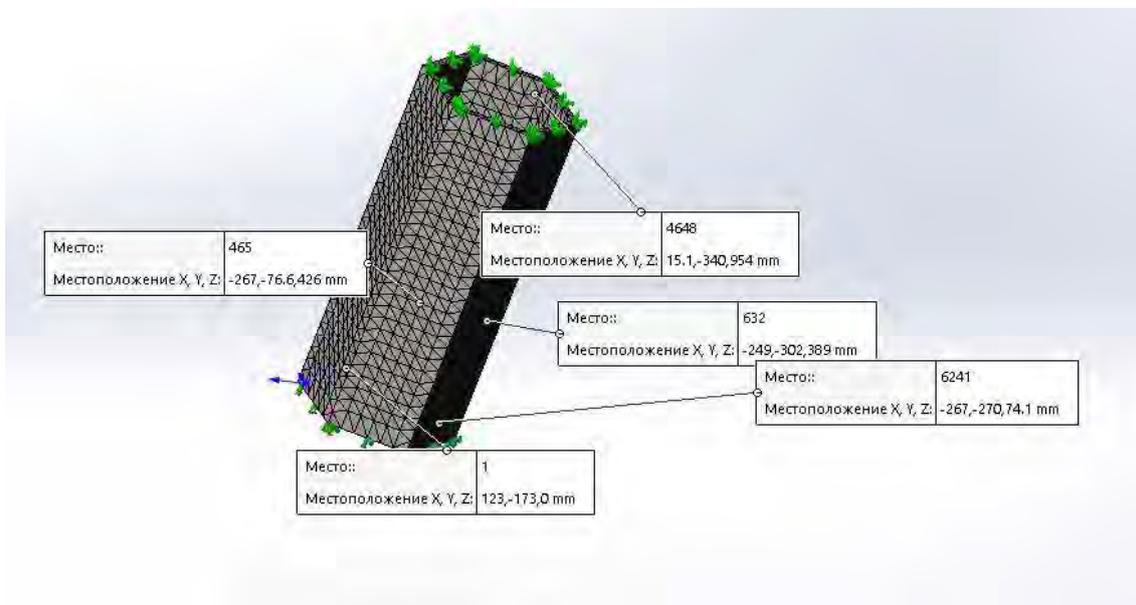


Рис. 3. Выбор точек для построения графиков зависимости перемещений и напряжений от времени, показанных на рис. 4 а ,б

Нелинейная реакция

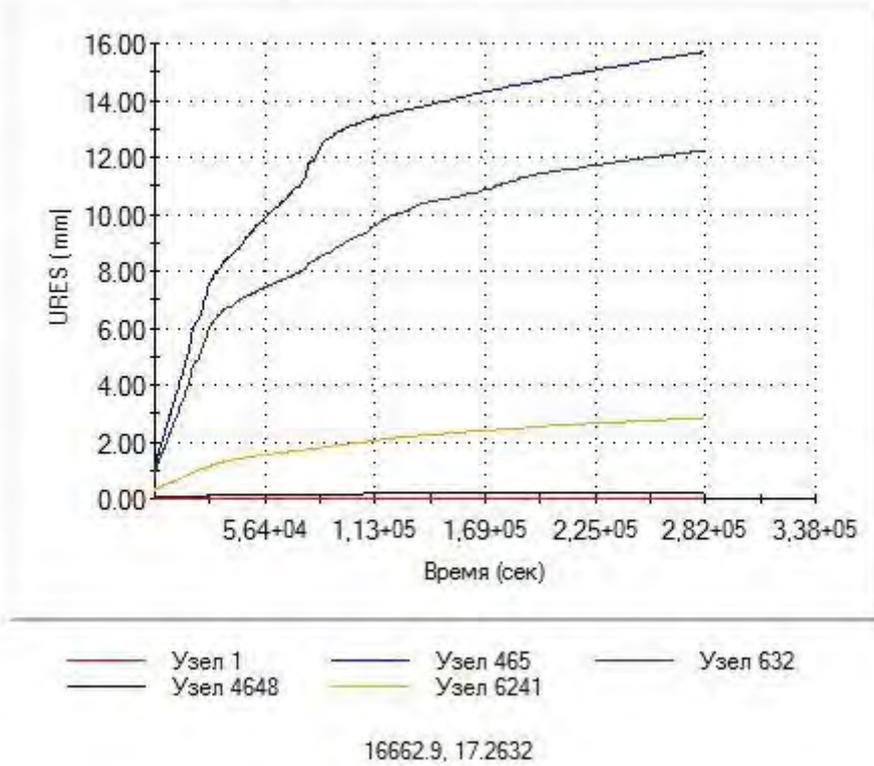


Рис. 4 а . График зависимости перемещений от времени.

Нелинейная реакция

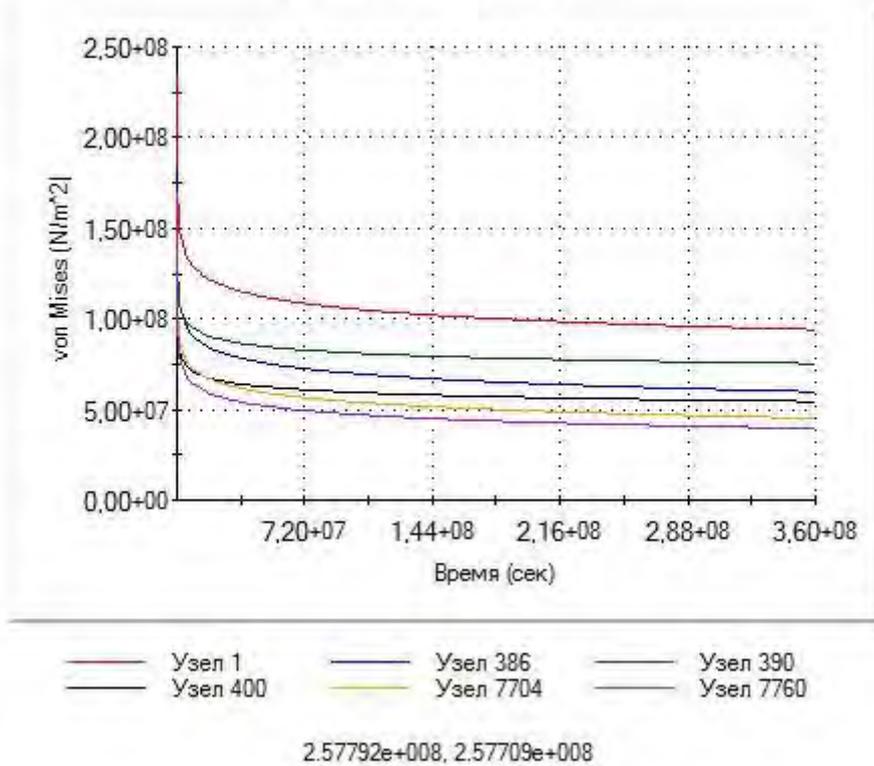


Рис. 4 б. График изменения интенсивности максимальных напряжений

Таким образом, с использованием программного пакета SolidWorks решена задача определения НДС тонкостенной шестигранной оболочки в условиях ползучести. В качестве примера был проведен расчет НДС оболочки из нержавеющей стали X18H10T длиной $L=1000$ мм, стороной шестигранного сечения $a=200$ мм, толщиной $h=20$ мм, нагруженной равномерным внутренним давлением $q=12$ МПа. Полученные результаты нуждаются в экспериментальном подтверждении с целью доказательства правомерности использования 3D модели в программном комплексе SolidWorks для решения такого класса задач. В дальнейшем также следует провести компьютерный эксперимент для изучения влияния заданных констант ползучести (степени физической нелинейности) на устойчивость предлагаемой численной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Избранные труды. Том I. Общая теория оболочек.* / В.З. Власов Москва: АН СССР, 1963.— 507 с. OCR.
2. *Избранные труды. Том III. Тонкостенные пространственные системы.* / В.З. Власов; Москва: издательство академии наук СССР, 1964 г. - 472 стр.
3. *Прочность элементов конструкций при облучении* / И. С. Куликов, В. Б. Нестеренко, Б. Е. Тверковкин; АН БССР, Ин-т ядер. энергетики. - Минск : Навука і тэхніка, 1990. - 143,[1] с. : ил.; 20 см.; ISBN 5-343-00557-8.

РАЗРАБОТКА МОДЕЛЕЙ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ В СОВРЕМЕННЫХ ПАКЕТАХ ТРЕХМЕРНОГО КОМПЬЮТЕРНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Лапо И.А., Лукьянчик А.Ю., Букса Д.А., к.ф.-м.н. Чигарев В.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Система автоматизированного проектирования SolidWorks [1] создана для использования на персональном компьютере в операционной среде Microsoft Windows. В SolidWorks используется принцип трехмерного твердотельного и поверхностного параметрического проектирования, что позволяет конструктору создавать объемные детали и компоновать сборки в виде трехмерных электронных моделей, по которым создаются двухмерные чертежи и спецификации. Трехмерное моделирование изделий дает массу преимуществ перед традиционным двумерным проектированием, например, исключение ошибок собираемости изделия еще на этапе проектирования. С помощью программы SolidWorks можно увидеть будущее изделие со всех сторон в объеме и придать ему реалистичное отображение в соответствии с выбранным материалом для предварительной оценки дизайна. Трехмерная деталь SolidWorks получается в результате комбинации трехмерных примитивов. Большинство элементов основаны на плоском эскизе, по которому создается базовый трехмерный объект. Последовательное наращивание 3D объектов и позволяет в итоге получить желаемый результат. Двухнаправленные ассоциативные взаимосвязи между деталями, сборками и их чертежами SolidWorks гарантируют соответствие модели и чертежа, так как все изменения, сделанные в детали, автоматически передаются связанную с ней сборку и чертеж.

Для удобства проектирования [1] имеются все необходимые инструменты для просмотра информации в области моделирования выбор стандартных видов, увеличение и вращение модели, создание быстрых аналитических разрезов и т.д. Имеются возможности получения статистической информации, характерные только для трехмерного твердотельного моделирования, это, например, измерение расстояний и углов пространственной модели, определение массовых характеристик, определение количества компонентов в сборке.

Проектирование сборок в SolidWorks [1] осуществляется по двум основным методам: "снизу-вверх" или "сверху вниз", а также их сочетанием. При проектировании "снизу-вверх" сначала создаются детали, затем они вставляются в сборку и сопрягаются согласно требованиям проекта. Метод проектирования "сверху вниз" отличается тем, что работа начинается в сборке. Проектирование "сверху вниз" в контексте сборки позволяет создавать ссылки на геометрию исходной модели, таким образом, что, если изменяется размер исходной модели, связанная с ней деталь, обновляется автоматически. Для повышения производительности и удобства работы с большими сборками и их чертежами, содержащими десятки тысяч деталей, в SolidWorks предусмотрен специальный режим, позволяющий сократить время загрузки файла и рационально распределить ресурсы компьютера за счет отображения сокращенной информации о компонентах сборки.

В настоящее время одной из наиболее актуальных тем, является конструирование и проектирование беспилотных летательных аппаратов (БПЛА). В данной работе, в программном пакете SolidWorks, была спроектирована и реализована модель квадрокоптера. Модель состоит из 100 деталей, в которые входят: полётный котроллер, бесколлекторные двигатели, антенна, регуляторы оборотов, источника питания, рамы, видеокамеры, пропеллеры, радиопередатчик, крепёжные элементы. На рисунке 1, приведены

результаты данной работы. Наибольшую сложность в моделировании данной конструкции представлял бесколлекторный двигатель, изображённый на рисунке 2.



Рис. 1. 3-D модель квадрокоптера (общий вид)



Рис. 2. 3-D модель бесколлекторного двигателя

Другой актуальной темой, является увеличение вычислительной мощности персональных компьютеров, обусловленное развитием микроэлектроники. Поэтому в данной работе, в программном пакете SolidWorks, была смоделирована материнская плата персонального компьютера GA-78LMT-S2P, имеющая форм-фактор Mini-ATX.

Материнская плата GA-78LMT-S2P [2] является продуктом всемирно известной компании GIGABYTE, имеет поддержку процессоров AMD AM3+ и AM3 PhenomII/

AthlonII, встроенное графическое ядро ATI Radeon HD3000 (DX10), уникальную производительность графической подсистемы благодаря слоту PCI-E 2.0 x16, уникальная технология On/Off Charge ускоренной зарядки Apple iPad, iPhone и iPod Touch, полноценная поддержка 3TB HDD благодаря технологиям Hybrid EFI и DualBIOS и все это умещается на плате форм-фактором Micro-ATX с габаритами 244x206 мм. Южный мост материнской платы GA-78LMT-S2P представлен микросхемой AMD SB710, а северный мост – микросхемой AMD 760G.

В программном пакете SolidWorks была разработана 3D модель сборки материнской платы персонального компьютера, GA-78LMT-S2P изображенная на рисунке 3, состоящая более чем из 160 компонентов, таких как: процессорное гнездо AM3+ Socket, гнездо для подключения оперативной памяти DRR, гнездо для подключения видеокарт PCI, разъем USB, разъем Ethernet, VGA разъем, а так же модели различных микросхем, например BIOS. Наиболее трудоемкой моделью оказалась модель процессорного гнезда AM3+ Socket, изображенная на рисунке 4.



Рис. 3. 3-D модель материнской платы персонального компьютера

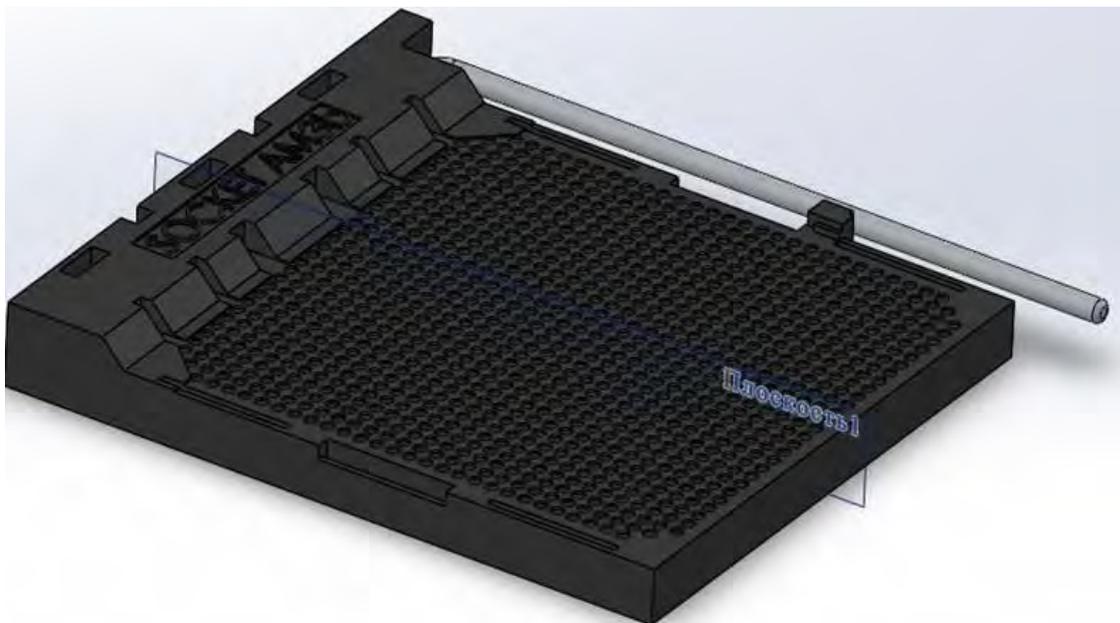


Рис. 4. 3-D модель процессорного гнезда AM3+ Socket

Не стоит забывать и о увеличении мощности автомобилей. В данной работе, в программном пакете Autodesk inventor был создан V-образный двигатель от Ford Mustang 1965 года, изображенный на рисунке 5. V-образный двигатель — конфигурация, часто используемая в автомобильных двигателях большого рабочего объема. Редкие V8 обладают рабочим объемом менее трёх литров. Максимальный же рабочий объем современных серийных V8 для легковых автомобилей достигает 13 литров.

Данная модель оснащена нагнетателем воздуха с электронным управлением. Сборка состоит 196 деталей, к примеру: блок цилиндров, коленвал, кулачковый вал, поршень, цилиндр, клапана, винт радиатора, крышка блока цилиндров и т.д. Модель, представленная на рисунке 6 оказалась самой сложной в моделирование, так как при ее создании использовались почти все инструменты Autodesk Inventor.

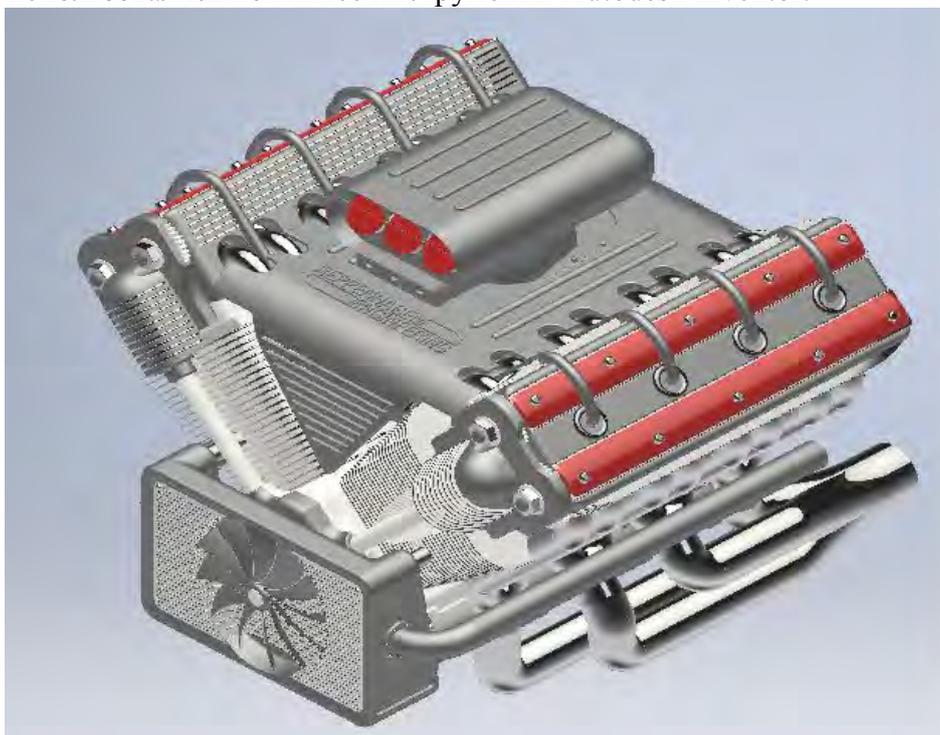


Рис. 5. 3-D модель V-образного двигателя

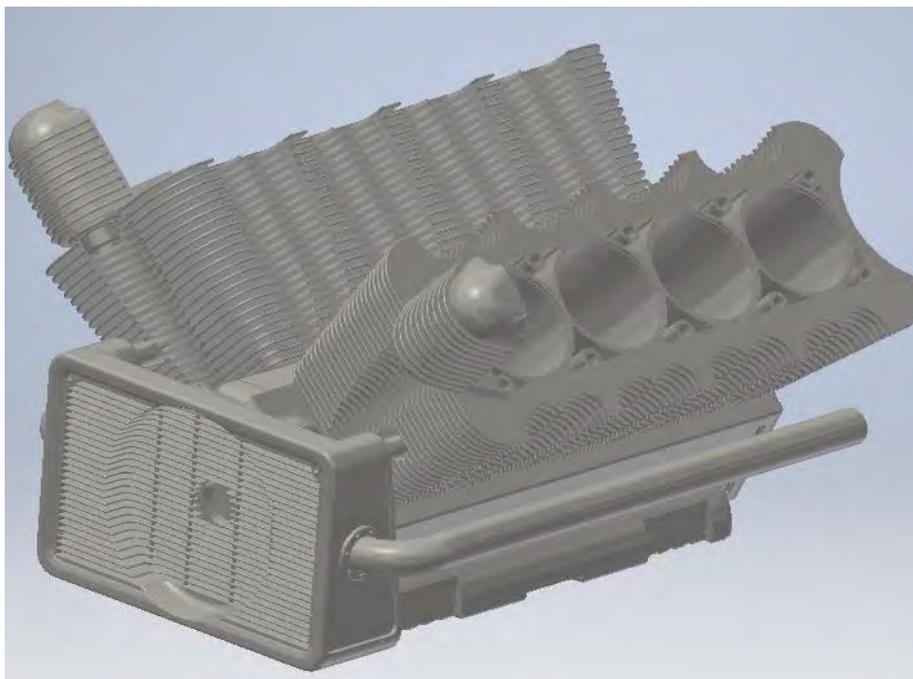


Рис. 6. 3-D модель блока цилиндров.

В целом можно заключить, что разработанные 3-D модели свидетельствуют о применимости программного пакета SolidWorks при моделировании сложных мехатронных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Система автоматизированного проектирования SolidWorks [Электронный ресурс]: URL: <http://seniga.ru/index.php/sapr/ssapr/62-solidworks.html>
2. GA-78LMT-S2P [Электронный ресурс]: URL: http://www.gigabyte.by/products/page/mb/ga-78lmt-s2prev_31#kf

ПРИМЕНЕНИЕ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА «АССИСТЕНТ» ДЛЯ АКТИВИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ОБЩЕТЕХНИЧЕСКИМ И СПЕЦИАЛЬНЫМ ДИСЦИПЛИНАМ

к.т.н. Хвисевич В.М., к. ф.-м. н. Веремейчик А.И., Мазырка М.В.

УО «Брестский государственный технический университет», Брест

В современных условиях развития техники и технологий возрастают требования к профессиональной подготовке инженеров. Это обстоятельство требует повышения качества преподавания общетехнических и специальных дисциплин. Студент должен уметь не только применять известные формулы для решения задач, но и находить оптимальный алгоритм их решения. Такие навыки прививаются главным образом при соответствующей организации самостоятельной работы студентов. Поэтому достижение положительных результатов при изучении общетехнических дисциплин в большой степени зависит от того, насколько методически обоснована и продумана самостоятельная работа студентов.

Достичь повышения уровня преподавания общетехнических дисциплин можно за счёт использования индивидуального подхода к обучению каждого студента либо использованием компьютерных технологий на всех этапах обучения. По сложившейся традиции задания на расчетно-графические (РГР) и контрольные работы (КР) по дисциплинам выдаются преподавателем для самостоятельного выполнения из учебной литературы или разработанных методических указаний. После их выполнения студенты представляют задания преподавателю для проверки и их защищают. Преподаватель, имея непосредственный контакт со студентом, может не только воздействовать на процесс работы студента, но и способствовать выработке у него навыков логического мышления.

Задания на выполнение РГР, КР, как правило, выдаются из изданных кафедрой или издательством учебных пособий. В таких учебных пособиях, как правило, ограничено количество вариантов, что не позволяет в достаточной мере осуществить индивидуализацию заданий и приводит к затратам времени преподавателя на выдачу заданий и проверку работ. Для увеличения количества вариантов в учреждении образования «Брестский государственный технический университет» на кафедре сопротивления материалов и теоретической механики были разработаны три специализированных пакета программ по теоретической и прикладной механике для студентов механических специальностей [1]. Одним из достоинств разработанных программ является то, что осуществляется генерация не только исходных данных (нагрузок, температур, геометрических размеров и т.д.), но и самих расчётных схем. Данное обстоятельство позволяет значительно упростить процесс подготовки и выдачи заданий студентам и увеличить их разнообразие. Вторым преимуществом является тот факт, что параллельно с генерацией заданий автоматически производится и их расчёт. Полученные результаты для каждого варианта значительно упрощают процесс проверки заданий, сокращают затраты времени преподавателя и гарантируют высокий уровень самостоятельного выполнения работ студентами. Построение студентами расчетных схем на основе выданных индивидуальных заданий прививает навыки инженерного мышления.

В продолжение разработанных пакетов программ [1] в УО «Брестский государственный технический университет» коллективом преподавателей кафедры прикладной механики создан автоматизированный программный комплекс «АССИСТЕНТ», пред-

назначенный для увеличения разнообразия выдаваемых вариантов заданий для расчетно-графических и контрольных работ, автоматизации работы преподавателя и улучшения контакта со студентами (рис. 1, 2).

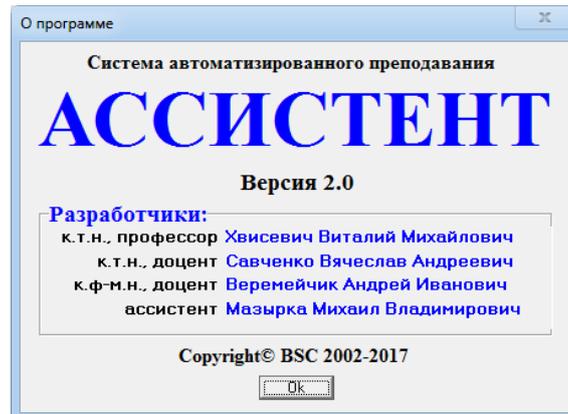


Рис. 1. Информация о разработчиках программы



Рис. 2. Схема взаимодействия модулей

Система состоит из основного и расчетных модулей и является многопользовательской: каждый пользователь может входить в систему под своим паролем. В ней предусмотрены четыре роли: администратор, секретарь (лаборант), преподаватель, студент.

Главное окно системы для роли администратора приведено на рис. 3.

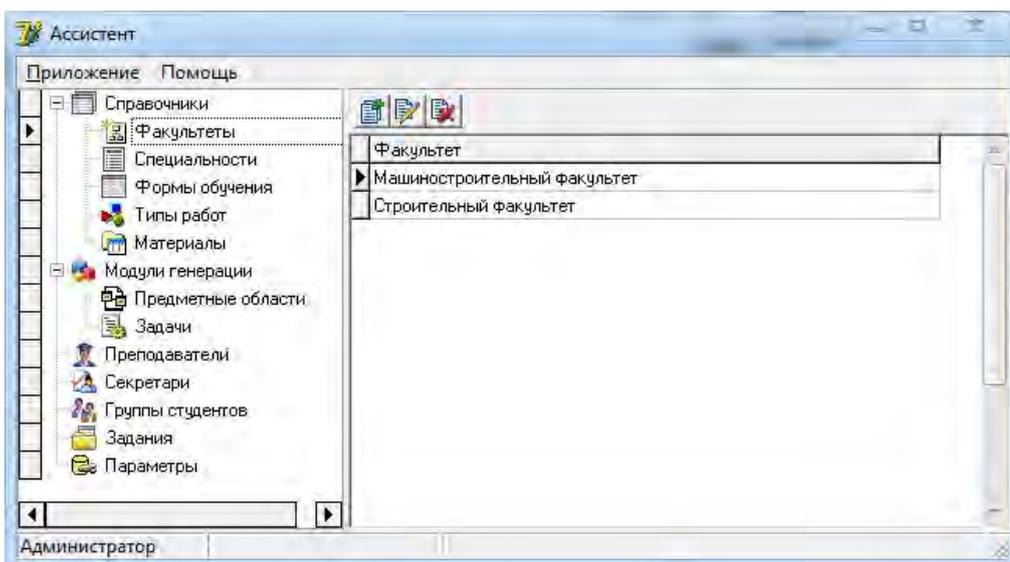


Рис. 3. Главное окно системы для роли администратор

Пользователь, обладающий ролью администратор, ведёт справочники факультетов, специальностей, форм обучения и типов работ (расчетно-графическая, расчетно-проектировочная, контрольная). Администратор также ведёт справочник материалов, который используется при выполнении расчетных заданий. Узел «Модули генерации» предназначен для визуализации списков задач, по которым может проводиться генерация заданий с разбивкой по предметным областям. Кроме того, администратор может добавлять-удалять из базы данных преподавателей и секретарей, работающих с системой. Узел «Параметры» предназначен для ведения списка параметров, используемых при формировании титульного листа РГР, КР. В узле «Группы студентов» сосредоточены сервисные команды по управлению группами студентов, в узле «Задания» - сервисные функции по управлению заданиями к РГР, КР (к примеру, имеется возможность снять ту или иную РГР с рабочего стола преподавателя).

Главное окно системы для роли секретарь приведено на рис. 4.

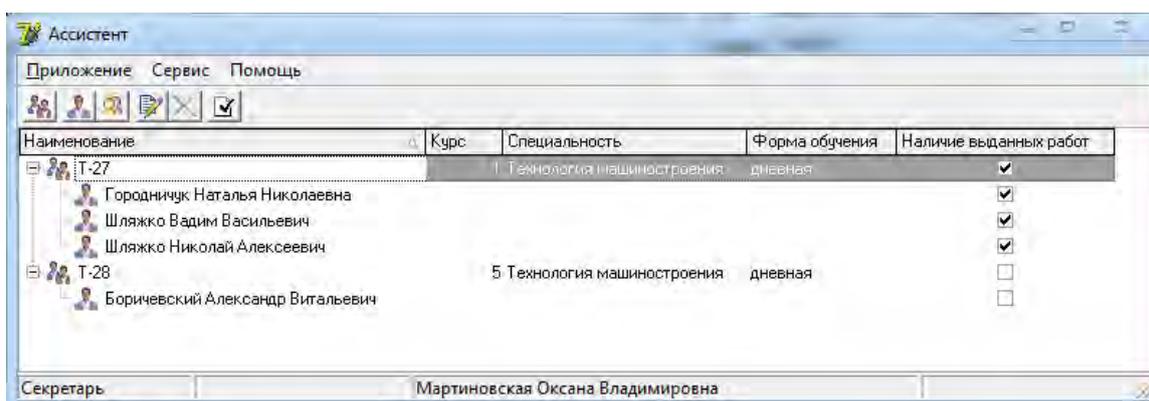


Рис. 4. Главное окно системы для роли секретарь

Секретарь ведет списки групп студентов по каждому деканату, может добавлять группы или ставить отметки о завершении обучения для групп, окончивших обучение, а также добавлять студентов или удалять их при отчислении. Эта работа обычно закрепляется за лаборантом кафедры или оператором ЭВМ.

Главное окно системы для роли преподаватель приведено на рисунке 5.

В левой части окна расположена навигационная панель, на которой присутствуют два узла: рабочий стол и задания (рис. 5, 6).

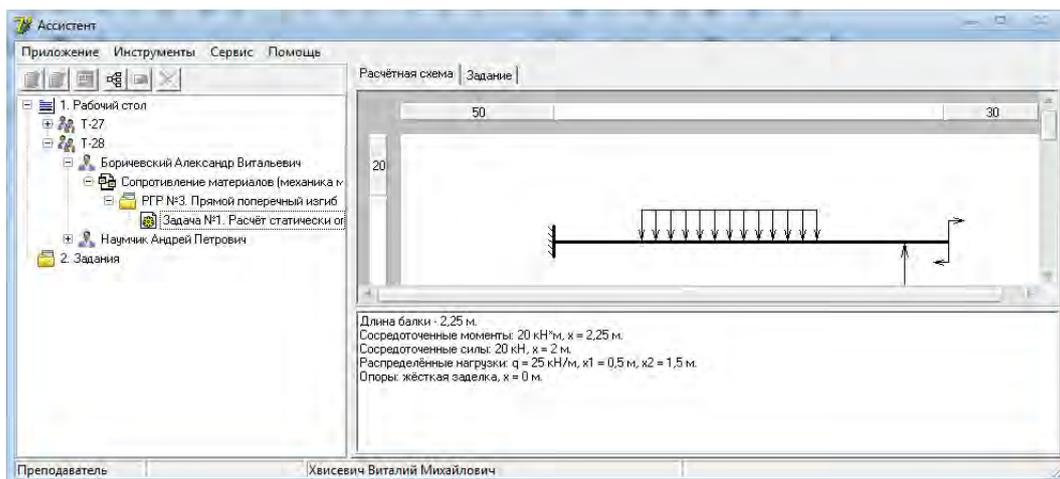


Рис. 5. Главное окно системы для роли преподаватель

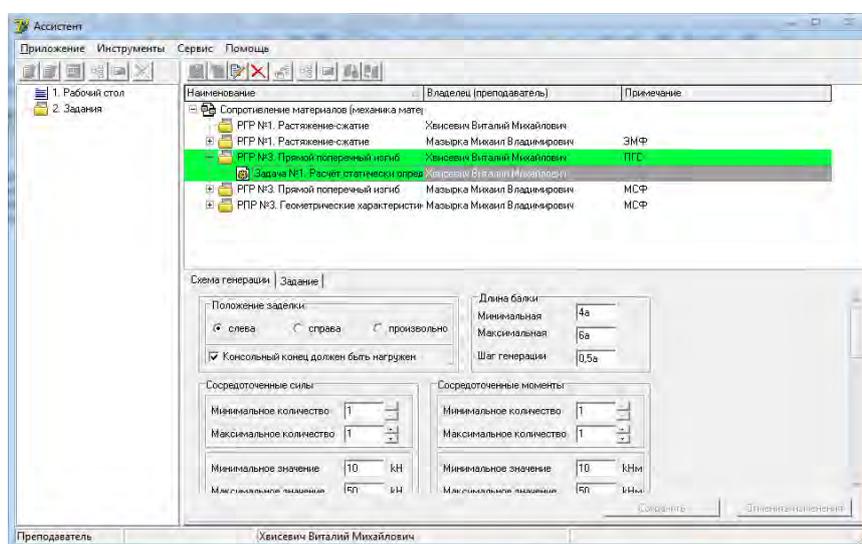


Рис. 6. Главное окно системы для роли преподаватель с активным узлом «Задания»

В левой части окна при активном узле «Задания» (рис. 6) преподаватель формирует для каждой из групп соответствующего факультета перечень расчетно-графических (расчетно-проектировочных, контрольных) работ и объем заданий, входящих в каждую работу, в соответствии с блоками заданий [1]. Преподаватель может добавлять или удалять задачи, а также указывать диапазон значений, количество нагрузок и силовых участков (например, по сопротивлению материалов) (рис. 6). После формирования расчетно-графических работ преподаватель осуществляет генерацию заданий и рассылку их студентам. Помимо этого он может контролировать ход их выполнения (к примеру, преподаватель может контролировать некоторые промежуточные величины, полученные студентом при решении задачи).

Главное окно системы для роли студент приведено на рис. 7.

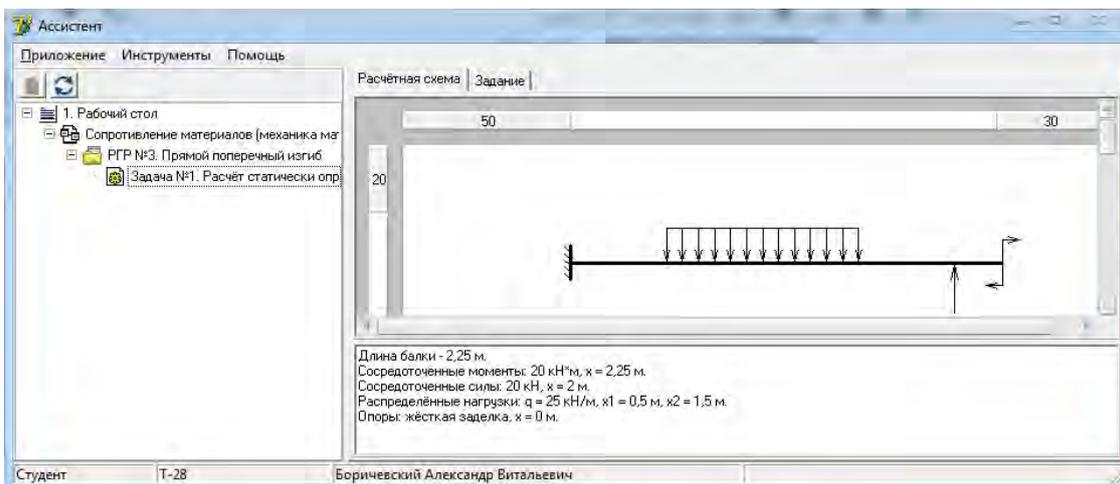


Рис. 7. Главное окно системы для роли студент

Студент, войдя в систему, получает на рабочий стол задания, которые нужно выполнять. Он может сформировать для себя техническое задание к РГР и произвести проверочный расчёт задачи. По окончании проверочного расчёта при правильном его выполнении в базе ставится отметка о его выполнении, что позволяет преподавателю осуществлять активный контроль за ходом выполнения РГР студентами.

Главное окно модуля расчета балок на изгиб приведено на рис. 8.

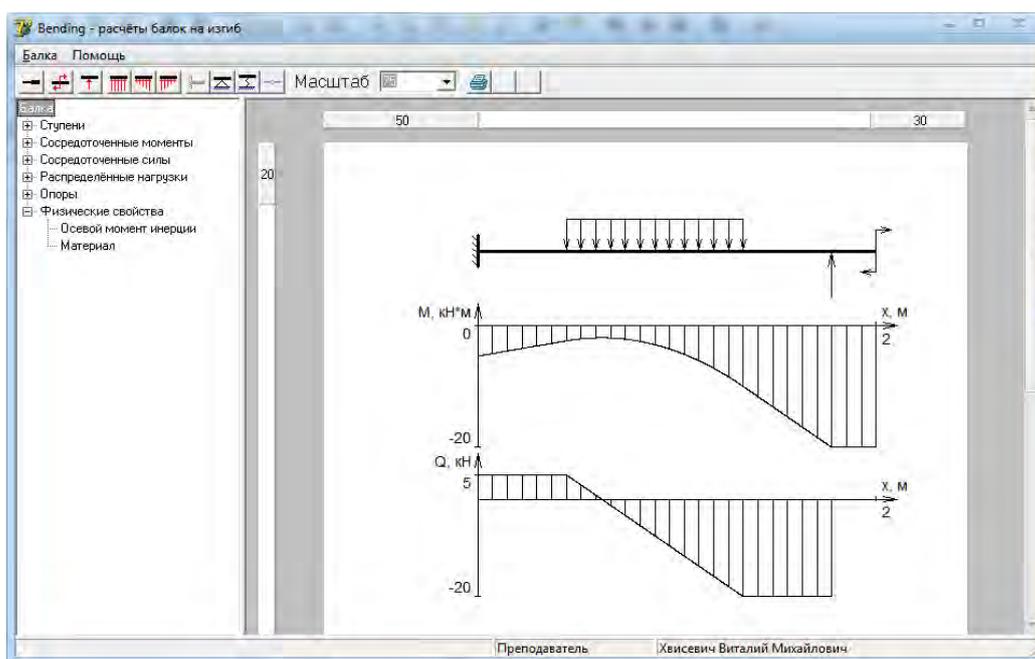


Рис. 8. Главное окно модуля расчёта балок на изгиб

Применение такой автоматизированной системы для выполнения РГР, КР позволит улучшить качество изучения студентами преподаваемых на кафедре дисциплин и повысить их успеваемость, а также облегчить труд преподавателя и сократить затраты времени на проверку заданий.

Как показали наблюдения, в результате реализации предлагаемой системы приобретенные студентами в процессе изучения общетехнических дисциплин навыки инженерного мышления создают хорошую базу для изучения специальных дисциплин (теория машин и механизмов, детали машин и т.д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хвисевич, В.М. Некоторые аспекты автоматизации учебного процесса теоретической механики и механики материалов / В.М. Хвисевич, А.И. Веремейчик, М.В. Мазырка // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. журнал / БНТУ.– Минск, 2006. – Вып. 20. – С. 62–63.*

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СЕКЦИИ НЕФТЕПРОВОДА С УЧЕТОМ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ КОРРОЗИОННЫХ ДЕФЕКТОВ И РЕМОНТНЫХ РАБОТ

д.ф.-м.н. ¹Щербаков С.С., к.т.н. ²Козик А.Н., ¹Насань О.А., ¹Подгайская Д.А.

¹Белорусский государственный университет, Минск

²ОАО «Гомельтранснефть Дружба», Гомель

Введение. При анализе напряженно-деформированного состояния моделей неповрежденных участков трубопровода достаточно гипотезы о большой длине трубопровода для перехода к двумерной постановке, в которой поперечное сечение моделируют кольцом. Постановка граничной задачи обычно заключается в рассмотрении внутреннего давления или температуры. Решение поставленных таким образом задач дает приемлемые результаты при сравнительно несложной процедуре расчета как аналитического, так и численного. Для учета влияния коррозионного дефекта на напряженно-деформированное состояние чаще всего необходим переход к трехмерной постановке, что также связано с определением геометрических характеристик дефекта. В данной работе рассматриваются внутренние дефекты наиболее распространенной трубы с внешним диаметром 720 мм и толщиной стенки 8,8 мм [1].

Постановка задачи. В данной работе рассмотрено конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния характерной секции трубы, расположенной на участке ННС Пинск нефтепровода Мозырь – Брест 3, при действии на нее внутреннего давления и заглублении в грунт на 0,8 м с учетом гравитационного поля и различных типов коррозионных дефектов, а также с учетом проводимых ремонтных работ по различным технологиям (см. табл. 1) [2]. В качестве ремонтных конструкций рассмотрены обжимная стальная муфта с набивными кольцами (см. рис. 1,в), а также стеклополимерная манжета «Акварэп» (см. рис. 1,г).

Для анализа были выбраны существенно отличающиеся внутренние дефекты: отдельный крупный протяженный дефект и множество мелких, суммарно равных ему по объему. Механические характеристики трубы и ремонтных конструкций приведены в табл. 2.

Протяженный дефект моделировался как эллипсоид вращения, расположенный в центре нижней части секции трубопровода [3] с полуосями 117 мм, 1146 мм, 1,5 мм, характеризующими ширину, длину и глубину дефекта, соответственно.

Множество мелких повреждений моделировалось на основе предположения об их эллипсоидальной форме. По данным о расположении и геометрических характеристиках дефектов в секциях трубопровода были определены параметры распределений Вэйбулла, описывающих длины, ширины и глубины дефектов. Угловое положение на внутренней окружности трубы описывалось распределением Гаусса. Распределение дефектов в продольном направлении секции трубы задавалось равномерным. Подробное описание параметров соответствующих распределений проведено в работах [1, 6]. На рис. 1,а представлены сгенерированные по данным распределениям дефекты на развертке секции трубы, имеющие тот же объем, что и протяженное повреждение.

Для анализа напряженно-деформированного состояния в силу симметрии модели рассмотрены четверти секций труб в линейной статической постановке.

Технологии ремонта обжимной муфтой и стеклополимерной манжетой, а также метод моделирования изотропной усадки манжеты изложены в [6].

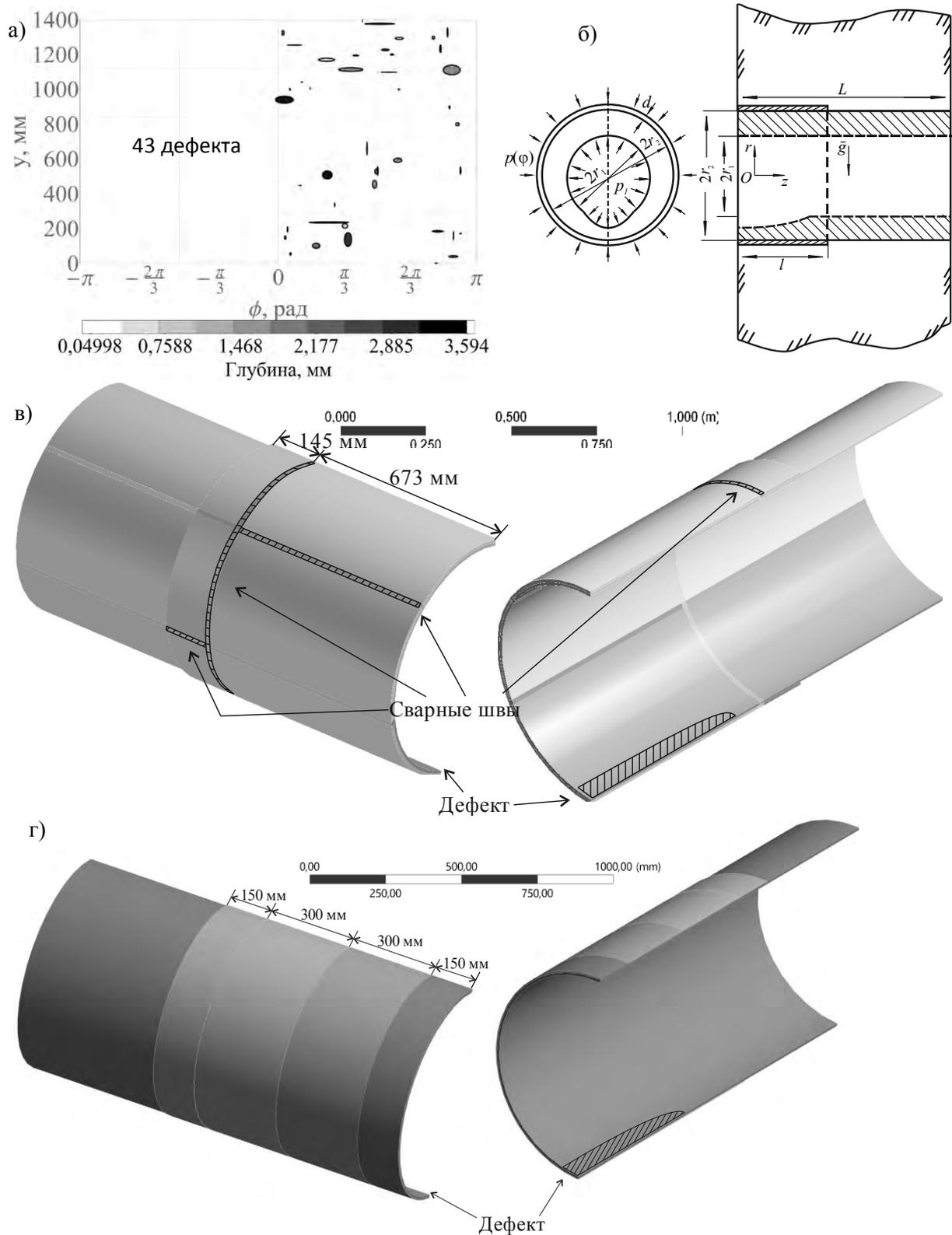


Рис. 4. Модели секции трубы: а) развертка со множественными внутренними дефектами; б) расчетная схема; в) с дефектом и приварной муфтой; г) с дефектом и стеклополимерной манжетой

Граничные условия схемы нагружения рис. 1,б задаются следующими соотношениями

- для внутренней поверхности секции трубопровода:

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=r_1} = p_1, \quad (1)$$

- для контактных поверхностей между муфтой длины l и секцией трубопровода, между муфтой (композитной манжетой) длины l и грунтом, секцией трубопровода и грунтом:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=r_2, z \in [0; l]} &= -\sigma_r^{(2)} \Big|_{r=r_2, z \in [0; l]}, \sigma_{r\tau}^{(1)} \Big|_{r=r_2, z \in [0; l]} = -\sigma_{r\tau}^{(2)} \Big|_{r=r_2, z \in [0; l]} \leq f_{12} \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=r_2, z \in [0; l]}, \\ \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=r_2+d, z \in [0; l]} &= -\sigma_r^{(3)} \Big|_{r=r_2+d, z \in [0; l]}, \sigma_{r\tau}^{(2)} \Big|_{r=r_2+d, z \in [0; l]} = -\sigma_{r\tau}^{(3)} \Big|_{r=r_2+d, z \in [0; l]} \leq f_{12} \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=r_2+d, z \in [0; l]}, \\ \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=r_2, z > l} &= -\sigma_r^{(3)} \Big|_{r=r_2, z > l}, \sigma_{r\tau}^{(1)} \Big|_{r=r_2, z > l} = -\sigma_{r\tau}^{(3)} \Big|_{r=r_2, z > l} \leq f_{13} \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=r_2, z > l}, \end{aligned} \quad (2)$$

- для сварных соединений между муфтой и секцией трубопровода и для жесткой сцепки контактных поверхностей между композитной манжетой и секцией трубопровода:

$$\mathbf{u}^{(1)} \Big|_{r=r_2, z \in [0; l]} = \mathbf{u}^{(2)} \Big|_{r=r_2, z \in [0; l]}, \quad (3)$$

- для верхней, нижней и боковых поверхностей грунта:

$$\sigma_n \Big|_{y=3r} = 0, \sigma_{n\tau}^{(3)} \Big|_{y=3r} = 0, \mathbf{u}^{(3)} \Big|_{y=-3r_1} = 0, u_x^{(3)}, u_z^{(3)} \Big|_{x=-3r_1, -3r_1 \leq y \leq 3r_1} = 0, \quad (4)$$

где индекс 1 соответствует трубе, 2 – муфте или манжете, 3 – грунту, d – толщина муфты или манжеты, $\tau = \varphi, z$, f – соответствующие коэффициенты трения, определяемые из таблицы 3.

Таблица 1 – Кодификация расчетов

Условия нагружения	Стальная труба на воздухе	Со стальной обжимной муфтой и набивным кольцом	С композитной манжетой с ее утяжкой (при высыхании)
Стальная труба с протяженным внутренним дефектом	DTG	DTIG	DTSPG
Стальная труба с множественными внутренними дефектами	MDTG	MDTIG	MDTSPG

Таблица 2 – Механические характеристики материалов системы

Название материала	Механические характеристики			
	E , ГПа	ν	σ_t , МПа	ρ , кг/м ³
09Г2С (обжимная муфта)	210	0,3	395	7850
17ГС (секция трубопровода)	210	0,3	360	7850
Грунт [4]	0,0051	0,25	–	2500
Стеклополимерная лента «Акварэп»[5]	25,786	0,4	–	1800

Таблица 3 – Коэффициенты трения скольжения

Пара трения	Коэффициент трения	Пара трения	Коэффициент трения
09Г2С – 17ГС	0,18	«Акварэп» – «Акварэп»	0,4
09Г2С – грунт	0,8	«Акварэп» – грунт	0,8
17ГС – грунт	0,8	«Акварэп» – 17ГС	жесткая сцепка

Напряженное состояние. Максимальные напряжения сосредоточены в области дефектов во всех моделях. На рисунке 2 показано, что в модели с грунтом и множественными повреждениями максимальная интенсивность напряжений σ_{int} примерно на 35 % больше чем в модели с одним крупным повреждением. Максимальные значения эквивалентных напряжений σ_{int} в области ремонта увеличиваются на 15,7 % и 15,3 %

при сравнении единичного крупного протяженного повреждения со множественными для расчетов DTIG и MDTIG, DTSPG и MDTSPG соответственно.

Согласно данным рис. 3, максимальные окружные напряжения σ_ϕ на внутренней поверхности трубы в наиболее поврежденной области и на внутренней бездефектной поверхности трубы увеличиваются на 23 %, 37 % при переходе от расчета DTIG к DTSPG соответственно.

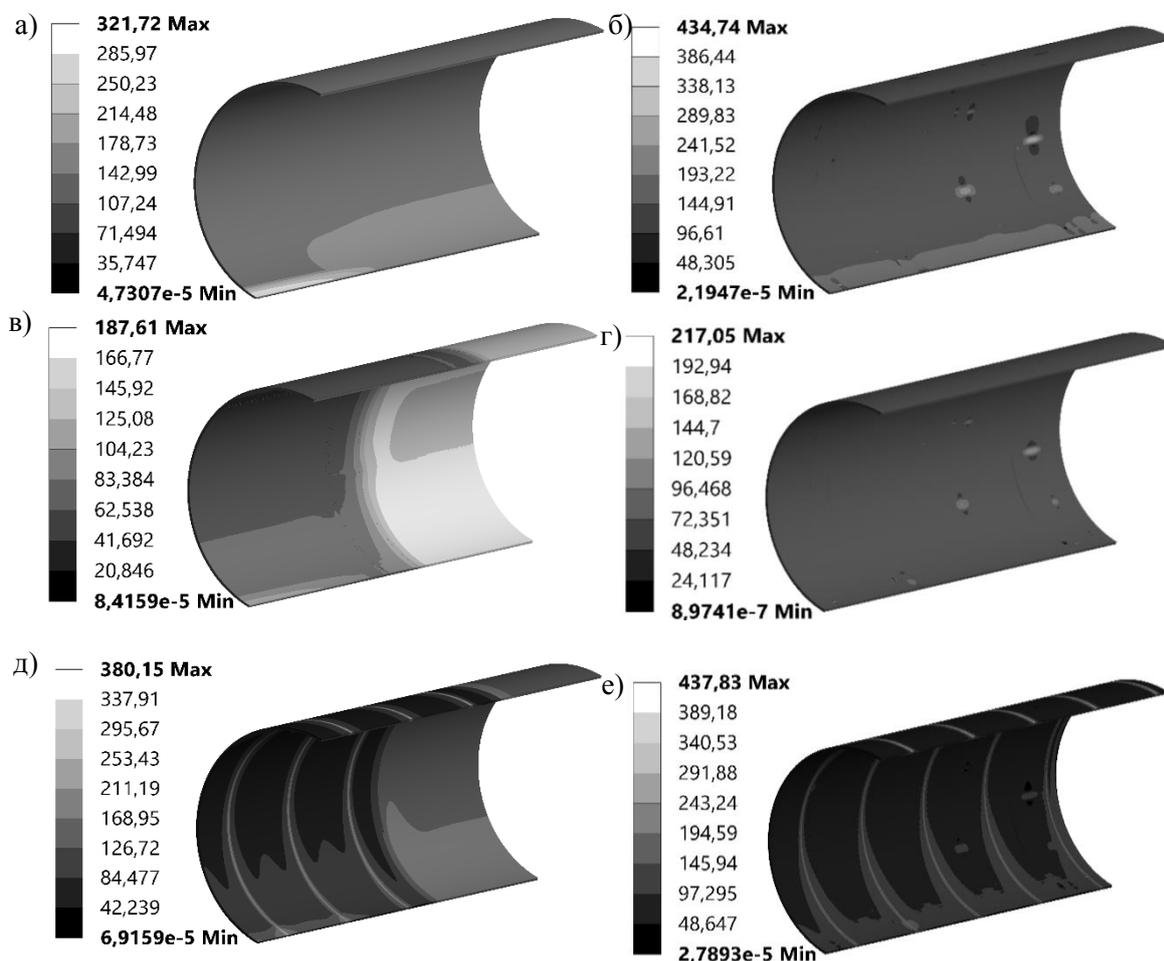


Рис. 2. Распределения интенсивности напряжений σ_{int} в сечении трубы: а) DTG; б) MDTG; в) DTIG; г) MDTIG; д) DTSPG; е) MDTSPG

В поврежденной трубе стальная муфта и композитная манжета в грунте уменьшают максимальные σ_ϕ в области протяженного дефекта на 58,6 % и на 35,7 % соответственно. В свою очередь у трубы с множественными повреждениями стальная муфта и композитная манжета на внутренней поверхности уменьшают максимальные σ_ϕ на 54 % и на 40,7 % соответственно. В целом, у трубы с множественными повреждениями стальная муфта и композитная манжета уменьшают максимальные σ_ϕ на 40,6 % и на 40,7 % соответственно.

В модели со множественными повреждениями появляются сжимающие окружные напряжения. Данный эффект уточняет обнаруженное ранее влияние коррозионных повреждений цилиндрического вида на формирование сжимающих окружных напряжений на внешней стенке сечения трубы [7].

Из рисунка 4 видно, что максимальные растягивающие продольные напряжения σ_z увеличиваются в 5,7 и в 5,8 раза при замене стальной муфты стеклополимерной манжетой в расчетах DTIG и MDTIG соответственно. Максимальные сжимающие продольные напряжения σ_z увеличиваются в 6,8 и в 5,7 раза при замене стальной муфты

стеклополимерной манжетой в расчетах DTIG и MDTIG соответственно. Данные значительные увеличения напряжений имеют место только в окрестности стыков рулонов манжеты.

Влияние грунта увеличивает окружные напряжения σ_ϕ на внутренней поверхности трубы в наиболее поврежденной области на 18 % и 10 %, продольные напряжения σ_z на 70 % и 50 % при сравнении с результатами на воздухе для моделей DTSP и DTI соответственно. В случае ремонта секции с протяженным дефектом стальной муфтой, грунт продлевает ремонтное действие на расстояние около 15 см в осевом направлении трубы по сравнению с той же моделью на воздухе [6].

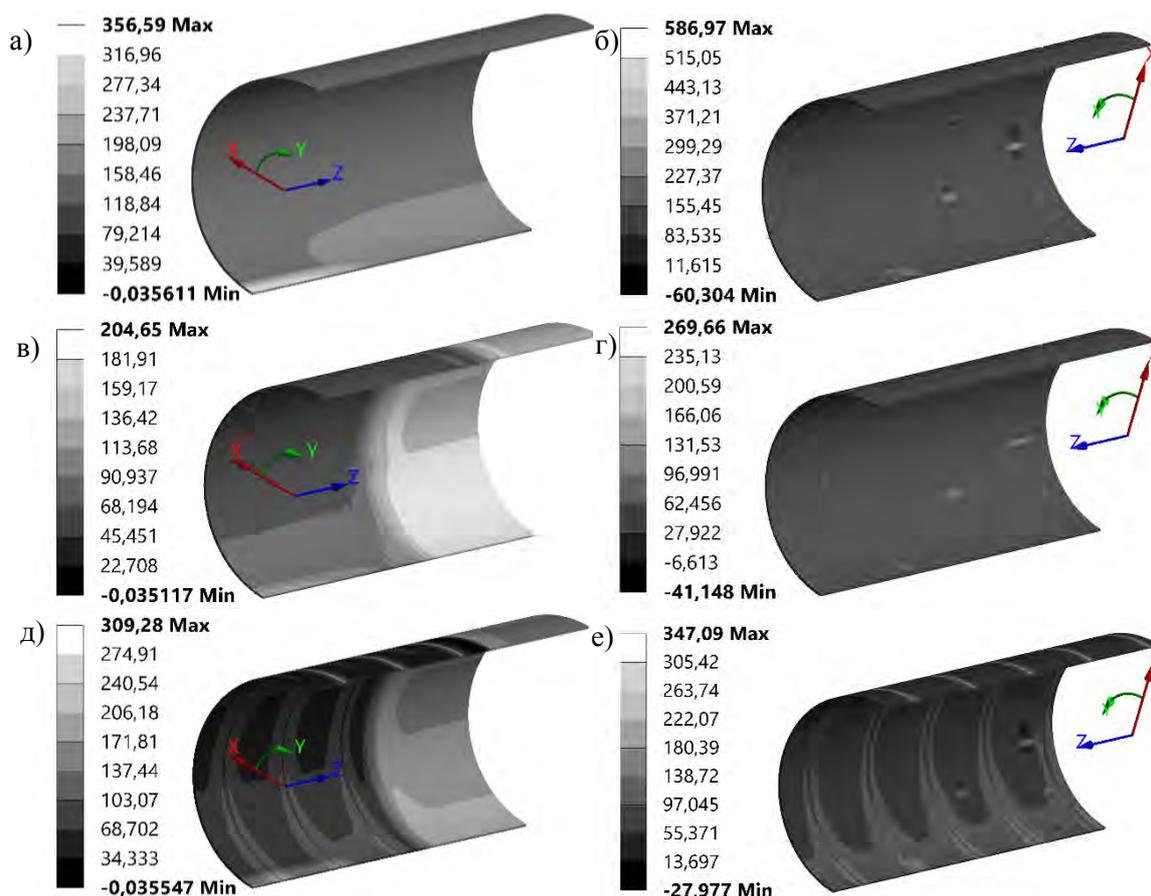


Рис. 3. Распределения окружных напряжений σ_ϕ в секции трубы: а) DTG; б) MDTG; в) DTIG; г) MDTIG; д) DTSPG; е) MDTSPG

В поврежденной трубе стальная муфта и композитная манжета уменьшают максимальные σ_z в области протяженного дефекта на 57 % и на 40 % соответственно. В свою очередь у трубы с множественными повреждениями σ_z на внутренней поверхности уменьшается на 40,6 % и увеличивается на 31,9 % при ремонте стальной муфтой и композитной манжетой соответственно.

В продольном направлении значительный эффект оказывают технологии ремонта: в местах сварки со стальной муфтой и стыках композитной манжеты на поверхности трубы образуются концентраторы напряжений, причем окружные напряжения растягивающие, а продольные сжимающие. Данные всплески являются следствием отсутствия учета пластических течений. В целом, при замене стальной муфты на манжету σ_ϕ в области повреждения в среднем увеличивается примерно на 50 МПа.

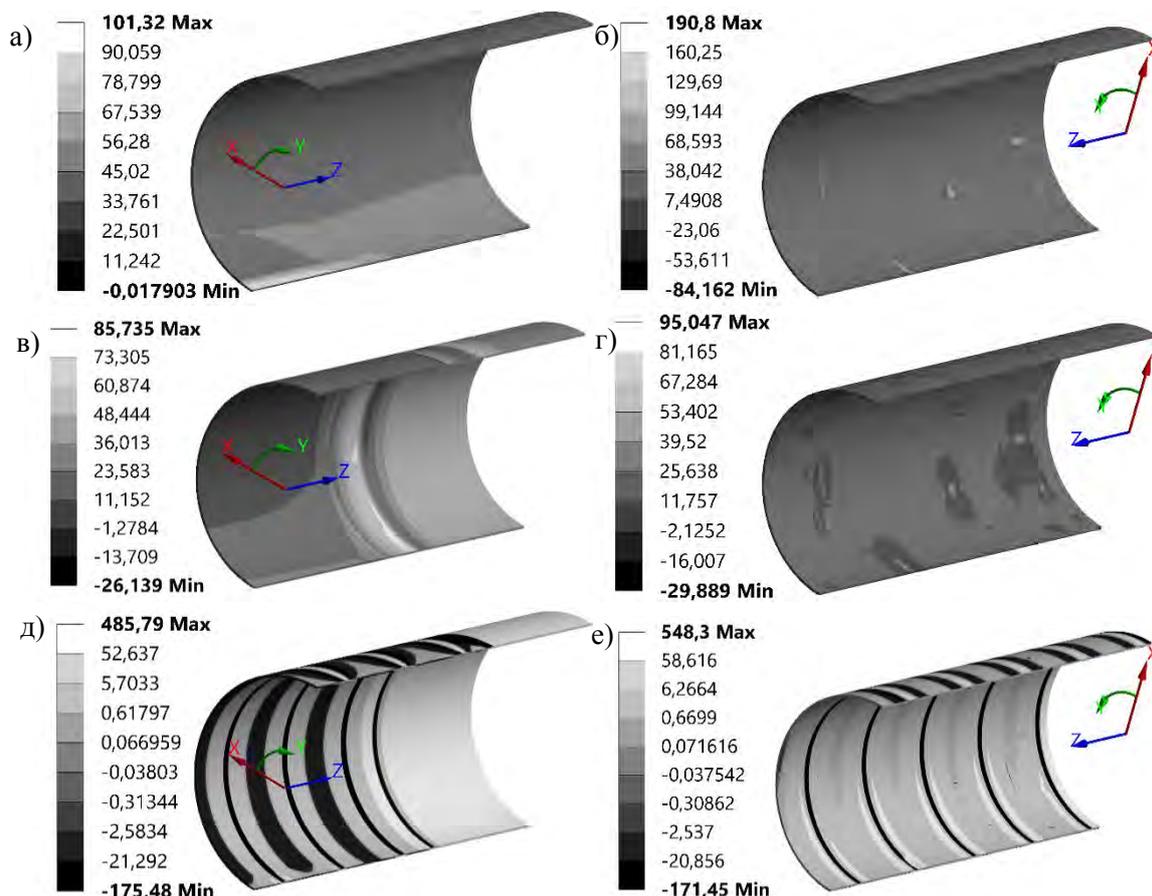


Рис. 4. Распределения продольных напряжений σ_z в сечении трубы: а) DTG; б) MDTG; в) DTIG; г) MDTIG; д) DTSPG; е) MDTSPG

Заключение. Разработаны компьютерные модели для расчета напряженно-деформированного состояния секций труб магистрального нефтепровода «Дружба» диаметром 720 мм после длительной эксплуатации. С помощью данных моделей были проанализированы секции трубы с внутренними единичным крупным протяженным коррозионным дефектом и с множественными небольшими дефектами в грунте с учетом гравитационного поля. Проведена сравнительная оценка эффективности способов ремонта секции трубы обжимной муфтой с технологическими кольцами и стеклополимерной лентой «Акварэп».

В модели со множественными коррозионными дефектами без ремонтных конструкций максимальная интенсивность напряжений σ_{int} больше чем в модели с одним крупным дефектом примерно на 35,1 %. Этот эффект обусловлен большой глубиной одного из множественных мелких дефектов.

Для трубы с крупным протяженным внутренним дефектом в грунте стальная муфта уменьшает σ_ϕ и σ_z в области дефекта примерно на 58,6 % и 57 % соответственно. Стеклополимерная композитная манжета в этом случае уменьшает максимальные σ_ϕ и σ_z на 35,7 % и 40 %.

По сравнению со стальной муфтой при применении полимерной манжеты в расчетах с крупным дефектом максимальные окружные напряжения σ_ϕ в наиболее поврежденной области увеличиваются на 16 %.

В области ремонтных работ происходят значительные как количественные, так и качественные изменения в напряженно-деформированном состоянии. В целом, ремонт стальной муфтой уменьшает максимальные окружные σ_ϕ напряжения в области дефекта не менее чем в 2 раза. Также стальная муфта в секции трубопровода обеспечивает

о́кружные напряжения в среднем на 50 МПа меньше чем композитная манжета с учетом ее усадки.

При применении стеклополимерной композитной манжеты на внешней поверхности трубы возникают значительные концентраторы осевых напряжений σ_z на границах полос манжеты. Данный эффект наблюдается вследствие усадки манжеты при ее высушивании в статической упругой постановке задачи для жесткой сцепки внешней поверхности трубы и манжеты. Жесткая сцепка моделирует адгезионное действие праймера, наносимого на поверхности контакта трубы и манжеты.

Таким образом, полученные результаты позволяют рекомендовать использование стеклополимерной манжеты из ленты вместо стальной муфты в силу ее умеренной стоимости, простоты использования и сравнимой эффективности ремонта, оцениваемой по степени снижения максимальных напряжений.

Также представляется целесообразным рассчитывать толщину стеклополимерной манжеты из ленты не по требуемому усилению в единицах внутреннего давления, как предлагается в инструкции по эксплуатации [5], а по требуемому снижению максимальных напряжений для реальных внутренних коррозионных дефектов, определенных методами внутритрубной диагностики. Например, в условиях проведенных расчетов толщину муфты следовало бы увеличить на 10-20 %, чтобы получить эффект уменьшения напряжений сравнимый с эффектом от применения стальной муфты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков, С.С. Напряженно-деформированное состояние линейного участка нефтепровода с учетом коррозионных дефектов и ремонтных работ / С.С. Щербаков, А.Н. Козик, О.А. Насань // *Тр. 32-й Международной научно-технической конференции «Теоретическая и прикладная механика»*, 2017г., Минск (Беларусь) / Редкол.: А.В. Чигарев [и др.] – БНТУ, 2017. – 381 с. – С. 352 – 358.
2. Перечень методов ремонта по РД-23.040.00-КТН-140-11 ОАО «АК «Транснефть».
3. Тюрин, И.Г. Технический отчет по диагностическому обследованию нефтепровода внутритрубными инспекционными приборами «Многоканальный профилемер ПРН», «Дефектоскоп внутритрубный магнитный МСК», «Комбинированный ультразвуковой дефектоскоп ДКУ», / И.Г. Тюрин, В.П. Авдеев, М.В. Масленников, А.Б. // 2013. 326 с.
4. Болдырев Г.Г., Муйземнек А.Ю., Малышев И.М. Моделирование деформационных процессов в грунтах с использованием программ ANSYS и LS-DYNA. Сб. трудов шестой конференции пользователей программного обеспечения CAD-FEM GMBH 20-21 апреля 2006 г., с. 9 – 20. <http://www.cadfem.ru>.
5. Композитные материалы «Акварэн» для ремонта трубопроводов. Технический паспорт и инструкция по применению. Лондон, 2007. 21 с.
6. Щербаков, С.С. Сравнительный анализ напряженно-деформированных состояний участков трубопровода с коррозионными дефектами при комплексном нагружении / С.С. Щербаков, А.Н. Козик, О.А. Насань // *Актуальные вопросы машиноведения*, 2017. №6 С. 78 – 84.
7. Щербаков, С.С. Напряженно-деформированное состояние и повреждаемость линейного участка нефтепровода с учетом коррозионных дефектов / С.С. Щербаков, О.А. Насань, А.Н. Козик // *Актуальные вопросы машиноведения. Выпуск 5*, 2016. – С. 223-227.

УДАЛЁННОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЧЕРЕЗ ИНТЕРНЕТ

асп. ¹Титко Д.В., асп. ¹Зубов Г.А. маг. ¹Чеушев К.В. студ. ¹Марко А.Ф.

¹УО «Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники», Минск

Проблемы удалённого управления техническими системами становится всё более актуальной и востребованной особенно для высокотехнологичного оборудования [1, 2], требующего регулярной переналадки, текущего контроля с последующей программной коррекцией и юстировкой отдельных узлов в процессе эксплуатации. Такое оборудование может быть рассредоточено по потребителям в разных странах на разных континентах и только интернет даёт возможность быстро и эффективно корректировать и, если надо, изменять программное обеспечение локальной системы управления. Системы удалённого управления не только существенно ускоряет процесс регулирования, наладки, перепрограммирования и операционного контроля автоматизированного оборудования, но и обеспечивает сбор объективных данных о текущем состоянии задействованных систем, поэтому позволяющих быстро принимать оптимальные решения [3-5]. В настоящей статье рассмотрена возможность реализации удалённого управления системами многокоординатных перемещений на основе протокола Ethernet. Такая технология позволяет быстро и детерменированно организовывать дистанционное взаимодействие с контроллером системы управления.

Веб-приложения для удаленного управления микроконтроллером системы многокоординатных перемещений отличается от локальных систем контроля тем, что программные возможности микроконтроллера при этом ограничены. Для разработчиков такой удаленной системы управления микроконтроллером важно выбрать виртуализацию рабочего стола для обеспечения отладки, которая позволила бы пользователям загружать код, просматривать и управлять значениями регистров, содержимым памяти и выполнением программ. Виртуализация приложения возможна с отладкой кодов микроконтроллера используя программное обеспечение для удаленного управления VNC (Virtual Network Computing) и LabVIEW для удаленного взаимодействия между системами [6].

Для тестовой конфигурации нами был разработан веб-интерфейс для микроконтроллерной системы, использующей LabVIEW и устройство ССД (Система сбора данных). Был выбран микроконтроллер с RISC-архитектурой, так как он обладает меньшим набором команд и идеально подходит для целей отладки и экспериментов. Главные функциональные блоки разработанной экспериментальной системой удаленного управления микроконтроллером (рис. 1) включают веб-сервер, VNC-сервер и ССД. Плата микроконтроллера сопряжена с VNC-сервером для обеспечения удаленной отладки программного кода. Веб-сервер использует LabVIEW как главный инструмент для управления приложением и установки соединения с удаленными клиентами. Команды управления для удаленного приложения генерируются при помощи *Boolean and Numeric control functions* LabVIEW и передаются на плату контроллера через ССД. Пользовательский интерфейс LabVIEW доступен для пользователей удаленно через веб-страницу, где доступны средства для управления системой многокоординатных перемещений.

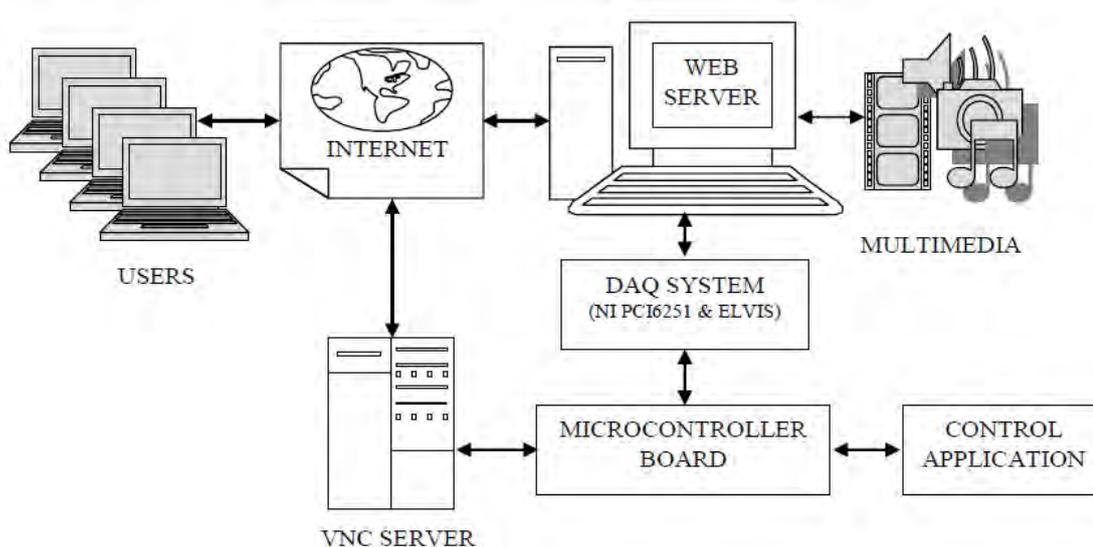


Рис. 1. Структура экспериментального комплекса для удаленного управления микроконтроллером

Техника удаленной отладки использует удаленный рабочий стол, где пользователь имеет доступ к платформе разработки микроконтроллера после прохождения проверки прав доступа. Уровень отладки позволяет пользователю скачивать код, наблюдать и изменять значения регистров, содержимое памяти и процесс выполнения. Микроконтроллер подключен к VNC-серверу через параллельный порт RS-232. Программа контроллера разрабатывается в среде разработки MPLAB, код загружается в микроконтроллер посредством программного обеспечения WinPicProg.

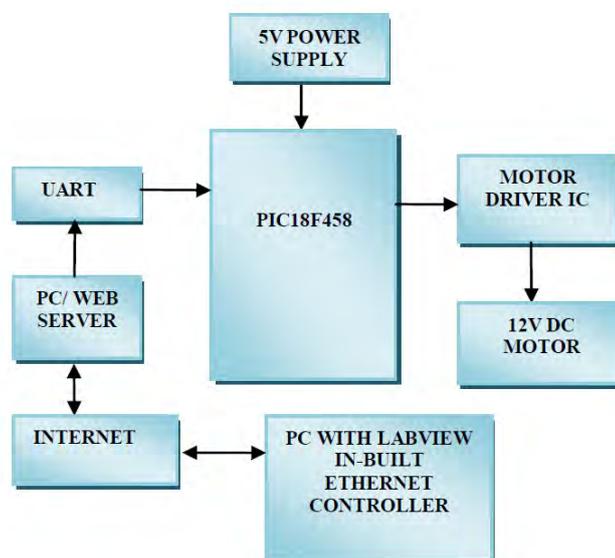


Рис. 2. Схема удаленного управления микроконтроллером системы перемещений через UART

В этом случае для реализации клиент-серверной архитектуры удаленного управления системой перемещений для технологического оборудования применяется протокол TCP/IP, что позволяет использовать такую систему как в локальной сети, так и в сети Интернет. Однако для сопряжения микроконтроллера с веб-сервером используется медленный протокол RS-232. Также используется система сбора данных на базе ПО для исследовательских лабораторий NI ELVIS, которая не подходит для реальных приложений. На рис. 2 представлена диаграмма, где контроллер сопряжен с веб-сервером

через универсальный асинхронный приемопередатчика UART (Universal Asynchronous Receiver-Transmitter). Это отдельная плата либо микрочип, используемый для обмена данными с серийными устройствами. Существуют реализации UART, которые используют более быстрые интерфейсы чем RS-232, например промышленный стандартный протокол RS-485 с максимальной скоростью 35 мегабит в секунду (при длине кабеля 10м).

Большинство микроконтроллерных систем позволяют загружать программу через последовательный интерфейс между компьютером и микроконтроллером. Разработанный компаниями Dallas Semiconductor и Maxim Integrated Products, MxTNI-микроконтроллер позволяет удаленную загрузку и выполнение программ через Ethernet порт. Эта платформа состоит из микроконтроллера, включающего в себя компоненты, необходимые для подключения к сети Интернет. Она представляет собой комбинацию I/O портов, полного TCP/IP стека протоколов и Java среды выполнения, что упрощает разработку оборудования, подключаемого к сети. Как правило, MxTNI-контроллеры используют протокол FTP (File Transport Protocol) для доступа к папкам, созданным пользователем в файловой системе микроконтроллера. Используя протокол Telnet, пользователь может удаленно подключаться с компьютера с Ethernet-портом к MxTNI-микроконтроллеру и взаимодействовать с программой. В частности, пользователь может запускать и останавливать программы, хранящиеся в папках операционной системы контроллера, или собирать данные программы при помощи выполнения простых команд.

Данный микроконтроллер [7, 8] обладает мультизадачностью, и позволяет одновременное выполнение как программ встроенной ОС, так пользовательских программ в фоновом режиме. Каждая программа, выполняемая в фоновом режиме, помещается в очередь приоритетов. Программа в начале очереди использует время CPU заданное планировщиком задач. Когда время CPU, отведенное программе было исчерпано, она при необходимости помещается обратно в очередь. Операционная система MxTNI-микроконтроллера так же позволяет выполнять только одну программу, в таком случае пользователь должен дождаться ее выполнения для выполнения следующих программ или команд. Основные преимущества такого микроконтроллера с Ethernet-портом, это:

- более быстрая загрузка программ в контроллер по сравнению с классическими серийными интерфейсами;
- возможность удаленной работы с программами;
- возможность многопользовательской работы с контроллером.

На рис. 3 приведены возможные методы пользовательского взаимодействия с MxTNI-микроконтроллером.

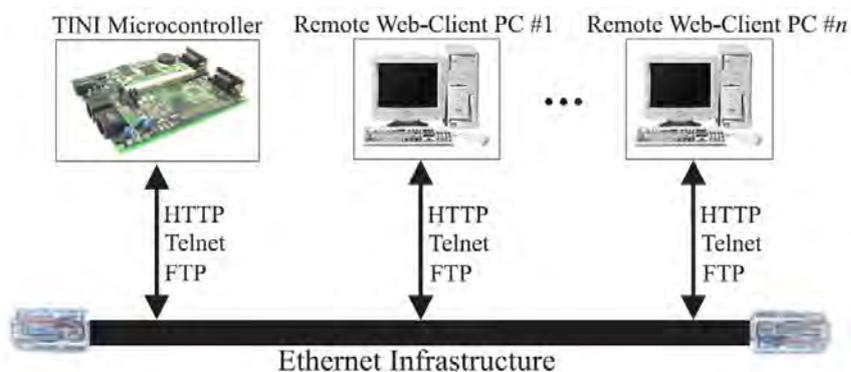


Рис. 3. Методы взаимодействия между удаленным веб клиентом и MxTNI-микроконтроллером

В конце 90-х годов прошлого столетия благодаря росту популярности протокола Ethernet для локальных сетей и периферийного оборудования его начали использовать

так же в системах управления оборудованием. На сегодняшний день Ethernet является самым широко используемым сетевым протоколом обмена данными для систем управления.

В системах управления на Ethernet используются два основных протокола передачи данных UDP/IP и TCP/IP. Простейшим протоколом является UDP/IP, между получателем и отправителем нет установки соединения, отправитель не требует подтверждения получения телеграмм, тем самым уменьшая количество передаваемых пакетов. Если происходит ошибка, мастер может автоматически не распознать данную ситуацию. Протокол UDP/IP подходит для систем управления только в закрытых сетях (не подключенных во внешнюю сеть).

TCP/IP является наиболее распространенным Ethernet протоколом передачи данных. Он гарантирует доставку пакетов в правильной последовательности, которая необходима для передачи потоковых видео и аудио данных, а так же команд и данных системы управления. Передаваемые TCP/IP пакеты не теряются. Протокол обеспечивает управление перегрузкой, которое важно для открытых сетей, таких как Интернет. В системах управления, которые организованы в закрытых сетях, потеря пакетов возможна главным образом из-за технических проблем, таких как электрические помехи. Перегрузка закрытых сетей так же не является типичной проблемой, так как разработчик имеет полный контроль над сетевым трафиком. TCP/IP подходит для больших закрытых сетей, таких как приложения автоматизации производства, где есть интенсивный трафик, длинные линии связи и многочисленные разрозненные устройства.

Тем самым технология Ethernet обеспечивает альтернативный путь для организации систем управления, так как она является масштабируемой, доступной и гибкой. Протокол Ethernet стал широко распространен, совместимое аппаратное обеспечение легко приобрести относительно недорого. Однако все еще вопросы относительно того, будет ли жизнеспособным недетерминированный Ethernet в системах многокоординатных перемещений. Недетерминированные сети позволяют любому устройству сети передачу в любой момент времени. Может быть одновременно много мастер-устройств и подчиненных устройств. Недостатком таких сетей является возможность коллизий пакетов. Если два устройства начали передачу данных в один и тот же момент времени, то происходит коллизия и задержка сети, которая является чрезвычайно критичной в системах управления перемещениями.

В детерминированных сетях существует гарантированный интервал времени для передачи данных. При этом в сети может быть только одно мастер-устройство и много подчиненных устройств. Недостатком детерминированных сетей является то, что если выделенный интервал времени не был использован для передачи данных, то он считается потерянным. Примеры таких протоколов это CanOpen и EtherCAT. Однако использование детерминированных сетей не является обязательным требованием, так как можно организовать закрытый управляющий цикл внутри микроконтроллера. В таком случае, на микроконтроллер возлагается задача передачи данных в одно и тоже время.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования / В.В. Жарский [и др.] ; под ред. д-ра техн. наук, проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2013. – 208 с.*
2. *Heimann, B. Mechatronika. Komponenty, metody, przyklady / B. Heimann, W. Gerth, K. Popp. – Warszawa : PWN, 2001. – 351 s.*
3. *Valvano, J. Embedded Microcomputer Systems: Real Time Interfacing, Cengage Learning, 2011. – 793 p.*
4. *Siripala, P.J., Sekercioglu, Y.A. A generalised solution for generating stepper motor speed profiles in real time, Mechatronics, 2013 – 23(5) – P 541–547.*

5. Ogata, K. *Designing linear control systems with MATLAB* / K. Ogata. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2000. – 420 p.
6. *Innovative Algorithms and Techniques in Automation, Industrial Electronics and Telecommunications* / T. Sobh [and oth.]. – Springer Science & Business Media, 2007. – 552 p.
7. El-Khoury, J. *Towards a toolset for architectural design of distributed real-time control systems* / J. El-Khoury, M. Torngren // 22nd IEEE Real-Time Systems Symposium, London, England, 2001.
8. *Real-Time Workshop. Real-Time Workshop User's Guide*. – The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2004.

МОДЕЛИ ГРУНТОВ И ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ КОНЕЧНО ЭЛЕМЕНТНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

¹Пронкевич С.А., ²Шпургалова М.Ю.

¹Конструкторское бюро “Инженерные расчёты”, Минск

²УО “Белорусский национальный технический университет” Минск

Введение. Физико-механические свойства грунтов и горных пород варьируются в широких пределах. При различных механических воздействиях их свойства проявляются в деформациях и снижении прочности (разрушении).

При конечно-элементном моделировании геотехнических процессов в горных породах применяют механические модели, которые описывают основные физические закономерности деформирования и разрушения горных пород. Математическая модель в большей или меньшей степени идеализирует реальные свойства горных пород как механической среды.

Основой механической модели среды служит модель линейно-упругого тела, которая описывается линейными соотношениями между напряжениями и деформациями. Другие свойства пород: прочность, упругая нелинейность, пластичность, хрупкость, вязкость - описываются нелинейными, часто дифференциальными связями.

1. Упругие свойства горных пород.

Упругость пород – это их способность восстанавливать свою форму и объем после прекращения действия нагрузки. Упругая деформация полностью исчезает после снятия нагрузки. Различают упругую линейную деформацию, когда она пропорциональна напряжению и упругую нелинейную деформацию.

Упругие свойства горных пород характеризуются модулем продольной упругости E , модулем сдвига G , модулем объемной упругости K , коэффициентом Пуассона μ – это коэффициенты пропорциональности между напряжениями и упругими деформациями для соответствующего вида приложенных напряжений.

Из осадочных пород только некоторые обладают упругостью. Минералы в основном упруги при любых видах приложения нагрузки. Отличие горных пород от упругих тел, подчиняющихся закону Гука, в основном в том, что для них характерны такие явления, как упругий гистерезис и упругое последствие [1, 2]. На рисунке 1 показана остаточная деформация $\epsilon_{ост}$ при гистерезисе и упругом последствии.

При нагрузке и разгрузке пород, если нагружение проходило в упругой области, кривые $P = f(\epsilon)$ не совпадают (рисунок 1 а), образуя характерную петлю упругого гистерезиса. В случае, если при деформации наблюдение за величиной остаточной деформации будет продолжено, то с течением времени она исчезнет, а образец восстановит свои размеры (рисунок 1 б). Это явление носит название упругого последствия.

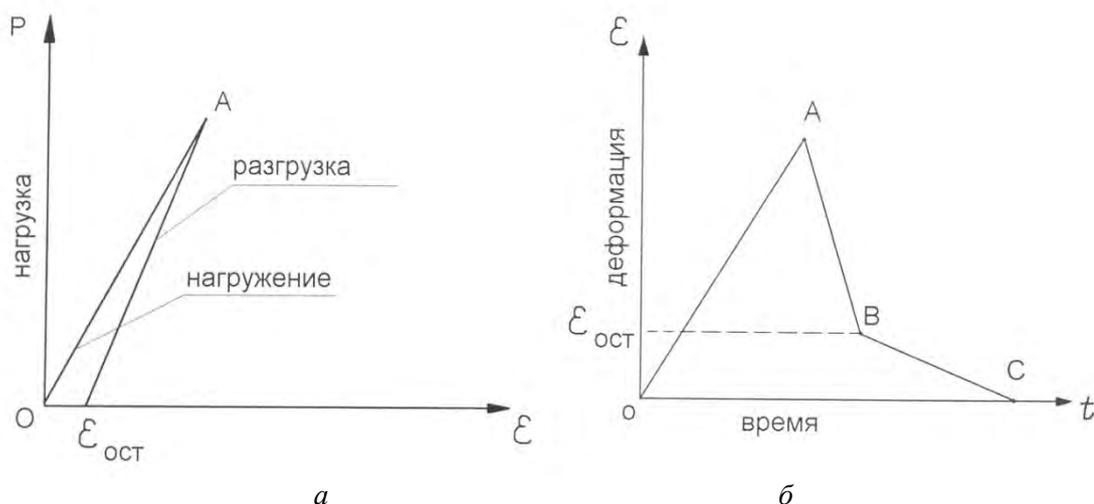


Рис. 1. Упругий гистерезис и упругое последствие

Модули упругости пород колеблются в диапазоне $1 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^5$ МПа. Для большинства горных пород коэффициент Пуассона находится в пределах от 0,1 до 0,45. Известно, что плотность влияет на коэффициент Пуассона. Чем плотнее порода, тем меньше ее коэффициент Пуассона.

2. Прочностные свойства горных пород

Прочность определяется способностью пород сопротивляться разрушению под действием нагрузок. Критические значения напряжений, при которых происходит разрушение породы, называют пределом прочности. Различают пределы прочности пород на одноосное сжатие, растяжение, изгиба, сдвига (среза) $\tau_{сдв}$. При проходке глубоких скважин разрушение горных пород на забое происходит в условиях всестороннего сжатия, поэтому рассматривается также понятие «предел прочности при всестороннем сжатии» $\sigma_{сж}$ [1-5].

Одной из известных теорий разрушения пород в горном деле следует назвать теорию хрупкого разрушения, предложенную А. Гриффитсом [2]. Основой теории считается наличие в горных породах множества трещин, которые определяют ослабление связей в породе. Решающее значение для начального процесса разрушения играют так называемые критические трещины, на краях которых происходит концентрации напряжений. Трещины начинают расти при превышающих в данной точке приложенной нагрузки над прочностью породы при растяжении.

Пластическое разрушение в кристаллической решетке горных пород состоит из соскальзывания, сдвига одних атомов на другой.

По данным Шрейнера Л.А. [2,4,6] хрупкие деформации происходят также внутри пластических деформаций, поэтому во многих горных породах процесс разрушения лучше описывается теорией А. Гриффитса.

Широко применяется в горном деле теория прочности Мора, которая основана на предположении наличия в каждой точке деформированного образца горных пород зависимости между касательными и нормальными напряжениями. По Мору, разрушения горной породы наступает при совместном воздействии нормальных и касательных напряжений.

3. Математические модели грунтов.

В современной практике геотехнических расчетов используются математические модели грунта разной степени сложности. Преимущество простых моделей заключается в меньшем количестве входных параметров, а также в простоте и ясности определяющих уравнений. Однако результаты моделирования в этом случае могут быть достаточно грубыми и плохо согласующимися с реальными данными. Сложные, усовершен-

ствованные модели позволяют описать поведение грунта более точно, но они требуют более широкого набора характеристик грунта, а также достаточной осведомленности и опытности инженера при выборе модели, ее параметров и анализе полученных результатов расчетов. [7]

Наиболее простая модель – идеально упругопластическая модель с предельной поверхностью, определяемой критерием Кулона-Мора (рисунок 2). Эта модель требует определения всего четырех расчетных параметров грунта, которые можно почерпнуть в любом отчете по инженерно-геологическим изысканиям: модуля общей деформации E , коэффициента Пуассона ν , сцепления c и угла трения φ .

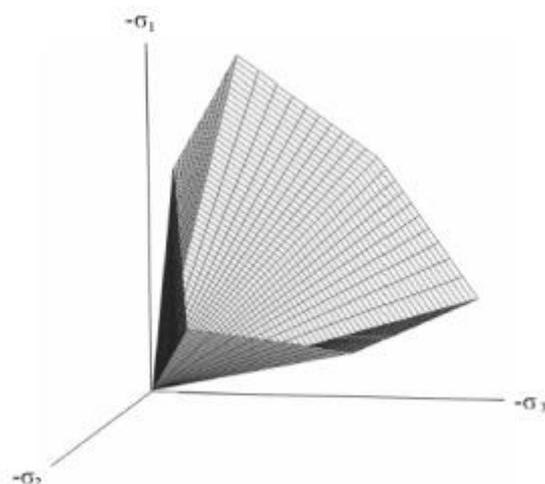


Рис. 2. Предельная поверхность, определяемая критерием Кулона-Мора

Критерий прочности Мора – Кулона представляет собой билинейную зависимость касательных напряжений материала от величины приложенных нормальных напряжений. Эта зависимость может быть представлена как:

$$\tau = \sigma \tan \varphi + c,$$

где τ – величина касательных напряжений, σ – величина нормальных напряжений, c – пересечение кривой критерия прочности с осью τ , а $\tan \varphi$ – тангенс угла наклона кривой критерия прочности. Величину c часто называют *сцеплением*, а угол φ называют *углом внутреннего трения*. Принято, что направление сжатия имеет положительный знак.

Если $\varphi=0$, критерий прочности Мора-Кулона превращается в критерий Треска. Если же $\varphi=90$, то критерий прочности Мора-Кулона соответствует модели вязкой среды Ранкина.

Теория прочности Мора-Кулона широко используется в горном деле применительно к рыхлым несвязным и связным горным породам, а также применительно к обломочным цементированным горным породам.

Для кругов Мора верно, что:

$$\sigma = \sigma_m - \tau_m \sin \varphi \quad \tau = \tau_m \cos \varphi \quad (1)$$

где

$$\tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (2)$$

σ_1 – максимальное главное напряжение, а σ_3 – минимальное главное напряжение.

Следовательно, критерий прочности Мора-Кулона может быть представлен как:

$$\tau_m = \sigma_m \sin \varphi + c \cos \varphi \quad (3)$$

Этот вид критерия прочности Мора-Кулона соответствует разрушению на плоскости, параллельной направлению главного напряжения σ_2 .

Введём следующие обозначения:

E_0 - модуль упругости, кН/м^2 ;

ν - число Пуассона;

c - сцепление, кН/м^2 ;

φ' - угол внутреннего трения, град;

ψ - угол дилатансии, $0 \leq \psi \leq \varphi$, град.

Уругопластическая модель с изотропным упрочнением Hardening Soil Model [1,8,9] включает: в качестве поверхности разрушения формулировку Мора-Кулона; для описания упругой области напряженно деформированного состояния – гиперболическую формулировку Duncan-Chang [2] с изменяемыми модулями упругости для траектории первичного нагружения и траектории разгрузки – повторного нагружения; для описания пластических сдвиговых и объемных деформаций – две функции текучести для девиаторного f^s и изотропного f^c нагружений, соответственно, (рисунок 3, б).

Асимптотическое девиаторное напряжение q_a связано с максимальным девиаторным напряжением q_f уравнением $q_a = \frac{q_f}{R_f}$, где

$$q_f = \left(c' \cdot \text{ctg} \varphi' + \sigma_3' \right) \frac{2 \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} \quad (4)$$

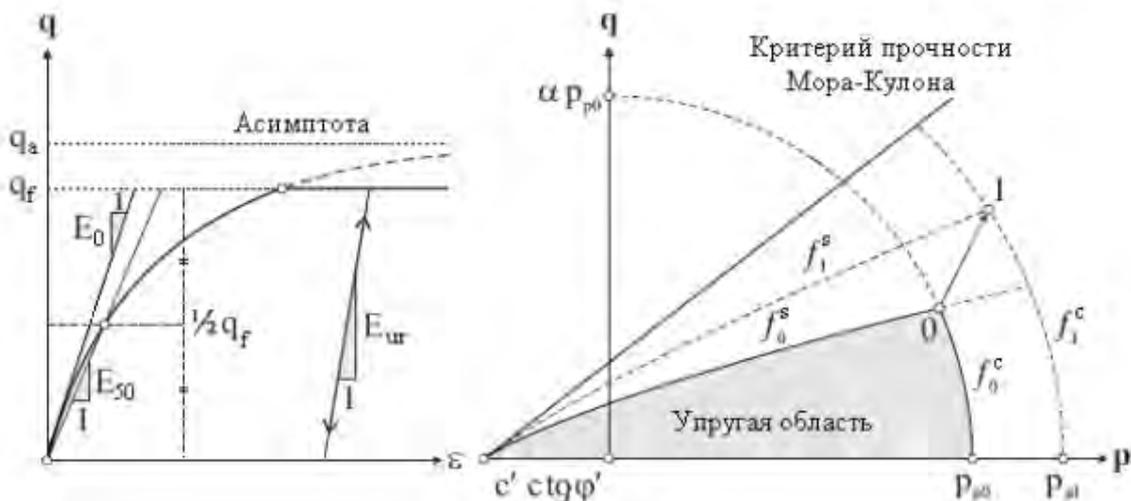


Рис. 3. Гиперболическое отношение между напряжениями и деформациями (слева) и поверхностью текучести уругопластической модели

Величина R_f для большинства грунтов изменяется в пределах 0,75...1 [2]. Секущий модуль упругости E_{50}^{ref} и модуль упругости при разгрузке – повторном нагружении E_{ur}^{ref} являются величинами, зависящими от сдерживающего напряжения σ_3' , определяются из трехосных испытаний по формулам

$$E_{50} = E_{50}^{\text{ref}} \left(\frac{c \cos \varphi - \sigma_3' \sin \varphi}{c \cos \varphi - p^{\text{ref}} \sin \varphi} \right)^m$$

$$E_{ur} = E_{ur}^{\text{ref}} \left(\frac{c \cos \varphi - \sigma_3' \sin \varphi}{c \cos \varphi - p^{\text{ref}} \sin \varphi} \right)^m \quad (5)$$

Для описания нелинейной упругой области используется гиперболическое отношение между напряжениями и деформациями в ходе дренированных трехосных испы-

таний (рисунок 3, а), впервые предложенное R.L. Kondner и J.S. Zelasko в 1963 г., дополненное J.M. Duncan и С. Y. Chang в 1970 г.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2E_{50}} \cdot \frac{q}{1 - \frac{q}{q_a}} \quad (6)$$

Более полно работу грунта описывают шатровые модели. Наиболее известной моделью из этого класса является «модифицированная модель Cam Clay (Roscoe К.Н. Borland J.B., 1968). В этой модели область упругого состояния ограничивается не только поверхностью, описываемой критерием Кулона-Мора, но также дополнительной эллиптической поверхностью «шатра». Обычно модель строят в координатах

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \text{ и } q = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (7)$$

В этих координатах поверхность шатра может быть записана в виде уравнения эллипса:

$$F(p, q) = p + \frac{q^2}{M^2 p} - p_e$$

или

$$p_e = p + \frac{q^2}{M^2 p} \quad (8)$$

где p_e – параметр, определяющий размеры эллипса в направлении оси p ; M – параметр, определяющий наклон «линии критического состояния», описываемой уравнением

$$q = Mp,$$

Параметр M в формуле (8) связан с углом внутреннего трения следующей зависимостью:

$$M = \frac{3 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \quad (9)$$

Деформации грунта полностью обратимы, если уровень напряжений, действующих на элементарный объем грунта, не выходит за пределы поверхности нагружения, ограничивающей зону I на рисунке 4. Активное нагружение грунта, выходящее за пределы упругой зоны приводит к развитию как обратимых, так и необратимых деформаций, а также к изменению положения поверхности нагружения (рисунок 4).

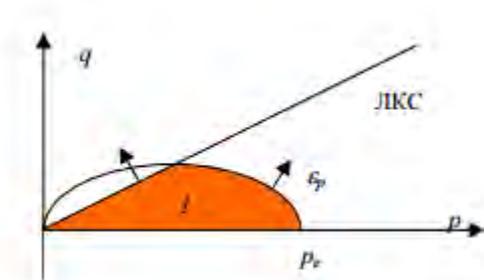


Рис. 4. Отношение между напряжениями и деформациями для шатровой модели

Предполагается, что вектор пластических деформаций ε_p направлен перпендикулярно поверхности нагружения, т. е. последняя является поверхностью пластического потенциала:

$$\Delta \varepsilon_{vp} = \Delta \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial p}; \quad \Delta \gamma_p = \Delta \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial q} \quad (10)$$

В модели предполагается, что точки, лежащие на поверхности «шатра» соответствуют одинаковой объемной деформации, таким образом, эллиптические поверхности представляют собой изолинии равных объемных деформаций при различном напряженном состоянии. Для завершения описания модели вводится функция зависимости объемной пластической деформации от «эквивалентного» напряжения p_e . Обычно используется логарифмическая функция:

$$\varepsilon_{vp} = \lambda \ln \left(\frac{p_e}{p_0} \right) \quad (11)$$

Модель Cam Clay стала одной из первых попыток целостного взгляда на нелинейное поведение грунта. Модель позволяет учесть нелинейное работу среды как при сдвиге, так и при объемном сжатии. Тем самым учитывается разница работы грунта при активном нагружении и при разгрузке/повторном нагружении. Это позволяет более адекватно моделировать поведение грунтов. Модель Cam Clay предполагает, что прочность грунта является следствием его предварительного уплотнения. Таким образом с глубиной прочность грунтов должна возрастать, т.е. грунты должны находиться либо в нормально уплотненном, либо в переуплотненном состоянии.

4. Модели грунтов, используемых в программе LS-DYNA и ANSYS.

ANSYS – универсальная система конечно-элементного моделирования, рассчитанная на решение широкого спектра задач.

LS-DYNA – система конечно-элементного моделирования, ориентированная на проведение динамических расчетов в различных областях.

Для описания поведения грунтов и скальных пород в программе LS-DYNA предлагаются, прежде всего, следующие модели – грунт Крейга (#5, Soil and Foam), грунт Крейга с разрушением (#14, Soil and Foam w/ Failure), (#16, Pseudo Geologic), геологическая модель, учитывающая два инварианта тензора напряжений – CAP-модель (#25, Geologic Cap), модель бетона (#72), модель бетона (# 78, Soil Concrete), Идеально упруго-пластическая модель грунта (#79, Elasto-Perfectly Plastic Soil), модель хрупкого разрушения (#96, Brittle Damage) упругая изотропная модель, учитывающая разрушение (#105), модель Джонсона-Холмквиста (#111), геологическая модель Швера-Мюрея (#145), модель FHWA (#147), модель CSCM (#159), модель глины (#192, Soil Brick) и модель Друкера-Прагера (#193, Drucker-Prager).

Для описания поведения грунтов в программе ANSYS имеется две модели материала – модель Друкера-Прагера (DP) и усовершенствованная модель Друкера-Прагера (EDP).

Модель Друкера-Прагера - зависящая от нагружения модель, определяющая поведение или разрушение некоторых материалов под влиянием пластической деформации. Данный критерий был разработан для описания пластических деформаций глинистых грунтов, также он может применяться для описания разрушения скальных грунтов, бетона, полимеров, пены и других, зависящих от давления, материалов.

Уравнение поверхности текучести в модели Друкера-Прагера (DP) имеет вид [10]

$$F = T + 3\beta\sigma_m - \sigma_y = 0 \quad (12)$$

где T – интенсивность касательных напряжений; σ_m - среднее напряжение; β , σ_y - параметры модели.

$$\beta = -\frac{1}{3} \frac{T_2 - T_1}{\sigma_{m2} - \sigma_{m1}}; \quad \sigma_y = T_1 + 3\beta\sigma_{m1} \quad (13)$$

Параметры β , σ_y связаны с параметрами Кулона-Мора следующими зависимостями [2]

$$\beta = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}; \quad \sigma_y = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad (14)$$

где c – сцепление, φ - угол внутреннего трения. Из первого выражения (14) по известному значению параметра β численно или графически можно определить угол внутреннего трения. Тогда, сцепление может быть определено из второго уравнения (14):

$$c = \frac{\sqrt{3}\sigma_y(3 - \sin \varphi)}{6 \cos \varphi} \quad (15)$$

Третьим параметром модели Друкера-Прагера (DP) является угол дилатации φ' . С помощью этого угла определяется параметр

$$\beta' = \frac{2 \sin \varphi'}{\sqrt{3(3 - \sin \varphi')}} \quad (16)$$

который входит в выражение пластического потенциала

$$Q = T + 3\beta'\sigma_m - \sigma_y = 0 \quad (17)$$

По определенным в результате испытаний цилиндрических образцов на трехосное сжатие величинам пластической деформации по соответствующим координатным осям ε_x^p , ε_y^p , ε_z^p может быть определено значение

$$\beta' = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \left(a \sin \left(\frac{\varepsilon_x^p + \varepsilon_y^p + \varepsilon_z^p}{\sqrt{3((\varepsilon_x^p)^2 + (\varepsilon_y^p)^2 + (\varepsilon_z^p)^2)}} \right) \right) \quad (18)$$

По определенному значению β' , используя выражение (5), численно или графически можно определить угол дилатации φ' .

Усовершенствованная модель Друкера-Прагера (EDP) при использовании параболических или гиперболических поверхности текучести и пластического потенциала для определения соответствующих параметров требует проведения большего числа испытаний, а для определения параметров реализованной в программе LS-DYNA CAP-модели (#25) требуется проведения дополнительно и компрессионных испытаний. Точность определения параметров моделей материалов может быть повышена при увеличении числа испытаний и использовании для аппроксимации программы LS-DYNA метода наименьших квадратов.

Отличие CAP-модели от Друкера-Прагера это учет разрушения частиц грунта при сжатии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Спивак А.И. Разрушение горных пород при бурении скважин /А.И. Спивак, А.Н. Попов.- М.: Недра, 1994.
2. Ржевский В.В. Основы физики горных пород /В.В. Ржевский, Г.Я. Новик.- М.:Недра, 1978.- 390 с.
3. Ильницкая Е.И. Свойства горных пород и методы их определения.- М.: Недра, 1973.
4. Сулакшин С.С. Технология бурения геологоразведочных скважин.- М.: Недра, 1973.- 320 с.
5. Голубинцев О.Н. Механические и абразивные свойства горных пород и их буримость. – М.:Недра, 1968.- 198 с.
6. Латинская Т.А. Основы петрографии /Т.А. Латинская, Б.К. Прошляков.-М.: Недра, 1981.- 232 с.
7. Голубев А. И., ГОУ ВПО СПбГПУ, Санкт-Петербург, Россия, А. В. Селецкий, ООО «НИИ-Информатика», Санкт-Петербург, Россия. Выбор модели грунта и её параметров в расчётах геотехнических объектов
8. Кобранова В.Н. Петрофизика.- М.: Недра, 1986.

9. Гиматудинов Ш.К. Физика нефтяного и газового пласта: Учеб. для вузов / Ш.К. Гиматудинов Ш.К., А.И. Ширковский.- М.:Недра, 1982.- 311 с.
10. Kohnke P. ANSYS. Theory Reference. – Southpointe, ANSYS, inc. 1998.

ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ МНОГОСЛОЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО ГРУНТА И ИХ РЕШЕНИЯ

¹Алтынбеков Ш.А., ¹Ниязымбетов А.Д., ²Такибаева Г.А., ¹Алимкулова Б.Т.

¹Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, г. Шымкент;

²Южно-Казахстанский государственный университет, г. Шымкент.

Введение. Теория консолидации грунтов, начиная с 22-го года прошлого столетия, интенсивно развивается, охватывая все новые области исследований. Причем развитие идет фактически по всем направлениям, начиная с анализа физико-химических и механических свойств грунтов, кончая созданием универсальных различных физико-математических моделей, позволяющих с помощью мощных современных персональных компьютеров моделировать напряженно-деформированное состояние изучаемого объекта. Однако, несмотря на это, в этой области исследования достаточно много нерешенных вопросов. В существующих работах [1,2,3] модельно выделяется грунтовый массив от их естественного состояния, и изучаются осадки многослойных (двух- и трехслойных) грунтов. При этом считают, что уплотняющая нагрузка, приложенная к нижним слоям, равна сумме весов каждого слоя грунтового массива и внешней нагрузки. Такая постановка задачи противоречит законам сплошной среды. Так, например, недостаточно изучена консолидация многослойных грунтов.

В отличие от этих работ, в данной работе решены задачи теории фильтрационной консолидации k -слойных неоднородных грунтовых оснований в виде параллелепипеда и цилиндра. При этом величины уплотняющих нагрузок, приложенных к нижним слоям грунтовых массивов, определены в ходе решения задачи.

Постановка задачи и ее решение. Рассмотрим процесс уплотнения многослойных грунтов в виде параллелепипеда (рис. 1) и цилиндра (рис. 2) под действием распределенной нагрузки q_s , приложенной к части наружной площади. При этом предполагаем, что:

- грунт состоит из твердой и жидкой фаз;
- движение воды, заполняющего поры грунта, подчинено обобщающему закону Дарси-Герсеванова;
- функция, характеризующая упруго-мгновенную деформацию скелета каждого слоя грунта, представлена так [4]:

$$E_s(x_n) = E_{0s}(\alpha_{1s} + \alpha_{2s}e^{-\alpha_{3s}x_n})^{-1},$$

$$\alpha_s(x_n) = 1/E_s(x_n), \quad s = 1, 2, \dots, k,$$

где $E_{0s}, \alpha_{1s}, \alpha_{2s}$ и α_{3s} – опытные данные;

- НДС скелета каждого слоя грунта описывается линейным уравнением вида [4]:

$$\varepsilon_s(t) = \varepsilon_{0s} - \frac{\alpha_{0s}(\alpha_{1s} + \alpha_{2s}e^{-\alpha_{3s}x_n})}{1 + (n-1)\xi_{0s}} \theta_s(t).$$

Здесь: $n = 1, 2, 3$ в зависимости от мерности задачи; ξ_{0s} – коэффициент бокового давления; $\theta_s(t)$ – сумма нормальных напряжений, соответствующих моменту времени t ;

- грунты по водопроницаемости являются ортотропной средой;
- процесс уплотнения каждого слоя подчинен модели К.Терцаги-В.А.Флорина [5,6];
- на поверхности уплотняемого массива грунта происходит свободный водообмен со средой, а на поверхности соприкосновения выполняются условия сопряжения.

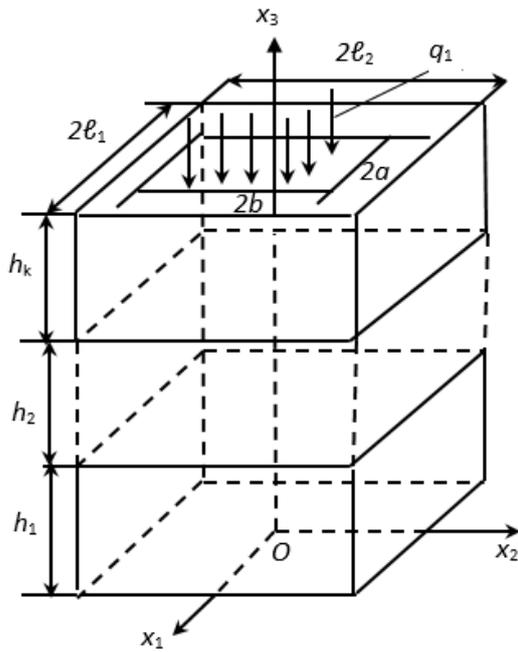


Рис. 1. Расчетная схема в виде параллелепипеда

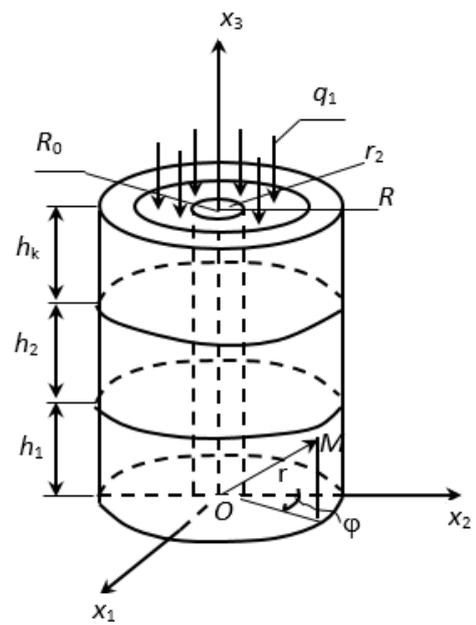


Рис. 2. Расчетная схема в виде цилиндра

Тогда решение задачи консолидации многослойных грунтов может быть сведено к решению краевых задач:

А.

$$\frac{\partial H_s}{\partial t} = C_{vs} e^{\alpha_{3s} x_3} \left(K_{1s} \frac{\partial^2 H_s}{\partial x_1^2} + K_{2s} \frac{\partial^2 H_s}{\partial x_2^2} + K_{3s} \frac{\partial^2 H_s}{\partial x_3^2} \right),$$

$$H_s(x_1, x_2, x_3, \tau_1) = H_{0s}(x_1, x_2, x_3),$$

$$\begin{cases} h_{1s}^{(1)} \frac{\partial H_s}{\partial x_1} - h_{1s}^{(2)} H_s \Big|_{x_1 = -l_1} = 0, & h_{2s}^{(1)} \frac{\partial H_s}{\partial x_2} - h_{2s}^{(2)} H_s \Big|_{x_2 = -l_2} = 0, \\ h_{1s}^{(3)} \frac{\partial H_s}{\partial x_1} - h_{1s}^{(4)} H_s \Big|_{x_1 = +l_1} = 0, & h_{2s}^{(3)} \frac{\partial H_s}{\partial x_2} - h_{2s}^{(4)} H_s \Big|_{x_2 = +l_2} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_{31}^{(1)} \frac{\partial H_s}{\partial x_3} - h_{31}^{(2)} H_s \Big|_{x_3=0} = 0, & H_s \left(x_1, x_2, \sum_{s=1}^{k-i} h_s, t \right) = H_{s+1} \left(x_1, x_2, \sum_{s=1}^{k-i} h_s, t \right), \\ h_{3k}^{(3)} \frac{\partial H_k}{\partial x_3} - h_{3k}^{(4)} H_k \Big|_{x_3 = \sum_{s=1}^k h_s} = 0, & K_{3s} \frac{\partial H_s}{\partial x_3} \Big|_{x_3 = h_{s-1}} = -K_{3s+1} \frac{\partial H_{s+1}}{\partial x_3} \Big|_{x_3 = h_s - 1}, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, k-1; \quad s = 1, 2, \dots, k-1.$$

В.

$$\frac{\partial H_s}{\partial t} = C_{vs} e^{\alpha_{3s} x_3} \left(K_{3s} \frac{\partial^2 H_s}{\partial x_3^2} + K_{rs} \left(\frac{\partial^2 H_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_s}{\partial r} \right) \right),$$

$$H_s(x_3, r, \tau_1) = H_{0s}(x_3, r),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{1s}^{(1)} \frac{\partial H_s}{\partial r} - h_{1s}^{(2)} H_s \Big|_{r=r_0} = 0, \\ h_{1s}^{(3)} \frac{\partial H_s}{\partial x_1} - h_{1s}^{(4)} H_s \Big|_{r=R} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} h_{31}^{(1)} \frac{\partial H_s}{\partial x_3} - h_{31}^{(2)} H_s \Big|_{x_3=0} = 0, \\ h_{3k}^{(3)} \frac{\partial H_k}{\partial x_3} + h_{3k}^{(4)} H_k \Big|_{x_3=\sum_{s=1}^k h_s} = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_s \left(\sum_{s=1}^{k-i} h_s, r, t \right) = H_{s+1} \left(\sum_{s=1}^{k-i} h_s, r, t \right), \\ K_{3s} \frac{\partial H_s}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h_{s-1}} = -K_{3s+1} \frac{\partial H_{s+1}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h_{s-1}}, \end{array} \right.$$

$$i = 1, 2, \dots, k-1; \quad s = 1, 2, \dots, k-1$$

решениями которых являются:

$$H_s(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} \sum_{i_3=1}^{\infty} D_{s i_1 i_2 i_3} \left(\cos \frac{\mu_{s i_1}}{2\ell_1} x_1 + B_{s i_1} \sin \frac{\mu_{s i_1}}{2\ell_1} x_1 \right) \times$$

$$\times \left(\cos \frac{\eta_{s i_2}}{2\ell_2} x_2 + C_{s i_2} \sin \frac{\eta_{s i_2}}{2\ell_2} x_2 \right) \cdot V_{vs i_2} \left(\frac{2\lambda_{s i_1 i_2 i_3}}{\alpha_s \sqrt{K_{3s}}} \cdot e^{-\frac{\alpha_s}{2} x_3} \right) \cdot e^{-\lambda_{s i_1 i_2 i_3}^2 \cdot t};$$

$$H_s(x_3, r, t) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} A_{s i_1 i_2} V_0(\lambda_{s i_1} r) \cdot V_{vs i_1} \left(\frac{2\lambda_{s i_1 i_2}}{\alpha_s \sqrt{K_{3s}}} \cdot e^{-\frac{\alpha_s}{2} x_3} \right) \cdot e^{-\lambda_{s i_1 i_2}^2 \cdot t}.$$

Здесь:

$$H_{0s}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} \tilde{D}_{s i_1 i_2} \left(\cos \frac{\mu_{s i_1}}{2\ell_1} x_1 + B_{s i_1} \sin \frac{\mu_{s i_1}}{2\ell_1} x_1 \right) \times$$

$$\times \left(\cos \frac{\eta_{s i_2}}{2\ell_2} x_2 + C_{s i_2} \sin \frac{\eta_{s i_2}}{2\ell_2} x_2 \right) \cdot (\text{ch } B_{s i_1}^* x_3 + E_{s i_1} \text{sh } B_{s i_1}^* x_3);$$

$$H_{0s}(x_3, r) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \tilde{A}_{s i_1} V_0(\lambda_{s i_1} r) \cdot (\text{ch } B_{s i_1}^* x_3 + E_{s i_1} \text{sh } B_{s i_1}^* x_3),$$

соответственно решения граничных задач.

\tilde{A} .

$$K_{1s} \frac{\partial^2 H_{0s}}{\partial x_1^2} + K_{2s} \frac{\partial^2 H_{0s}}{\partial x_2^2} + K_{3s} \frac{\partial^2 H_{0s}}{\partial x_3^2} = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{1s}^{(1)} \frac{\partial H_{0s}}{\partial x_1} - h_{1s}^{(2)} H_{0s} \Big|_{x_1=-\ell_1} = 0, \\ h_{1s}^{(3)} \frac{\partial H_{0s}}{\partial x_1} - h_{1s}^{(4)} H_{0s} \Big|_{x_1=+\ell_1} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} h_{2s}^{(1)} \frac{\partial H_{0s}}{\partial x_2} - h_{2s}^{(2)} H_{0s} \Big|_{x_2=-\ell_2} = 0, \\ h_{2s}^{(3)} \frac{\partial H_{0s}}{\partial x_2} - h_{2s}^{(4)} H_{0s} \Big|_{x_2=+\ell_2} = 0, \end{array} \right.$$

$$h_{3k+1-i}^{(3)} \frac{\partial H_{0k+1-i}}{\partial x_3} + h_{3k+1-i}^{(4)} H_{0k+1-i} \Big|_{x_3=\sum_{s=1}^{k+1-i} h_s} = \frac{q_{k+1-i}}{\gamma},$$

$$|x_1| \leq a, \quad |x_2| \leq b, \quad i = 1, 2, \dots, k;$$

$$\begin{aligned}
& h_{3k+1-i}^{(3)} \frac{\partial H_{0k+1-i}}{\partial x_3} + h_{3k+1-i}^{(4)} H_{0k+1-i} \Big|_{x_3 = \sum_{s=1}^{k+1-i} h_s} = 0, \\
& -\ell_1 < x_1 < -a, \quad a < x_1 < \ell_1, \\
& -\ell_2 < x_2 < -b, \quad b < x_2 < \ell_2, \quad i = 1, 2, \dots, k; \\
& h_{31}^{(1)} \frac{\partial H_{01}}{\partial x_3} + h_{31}^{(2)} H_{01} \Big|_{x_3=0} = 0, \quad \left\{ \begin{aligned} H_{0s} \left(x_1, x_2, \sum_{s=1}^{k-i} h_s \right) &= H_{0s+1} \left(x_1, x_2, \sum_{s=1}^{k-i} h_s \right), \\ K_{3s} \frac{\partial H_{0s}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h_s-1} &= -K_{3s+1} \frac{\partial H_{0s+1}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h_s-1}, \end{aligned} \right. \\
& i = 1, 2, \dots, k-1; \quad s = 1, 2, \dots, k-1.
\end{aligned}$$

\tilde{B} .

$$\begin{aligned}
& K_{3s} \frac{\partial^2 H_{0s}}{\partial x_3^2} + K_{\varepsilon s} \left(\frac{\partial^2 H_{0s}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{0s}}{\partial r} \right) = 0, \\
& \left\{ \begin{aligned} h_{1s}^{(1)} \frac{\partial H_{0s}}{\partial r} - h_{1s}^{(2)} H_{0s} \Big|_{r=r_0} &= 0, \\ h_{1s}^{(3)} \frac{\partial H_{0s}}{\partial x_1} + h_{1s}^{(4)} H_{0s} \Big|_{r=R} &= 0, \end{aligned} \right. \\
& h_{3k+1-i}^{(3)} \frac{\partial H_{0k+1-i}}{\partial x_3} + h_{3k+1-i}^{(4)} H_{0k+1-i} \Big|_{x_3 = \sum_{s=1}^{k+1-i} h_s} = \frac{q_{k+1-i}}{\gamma}, \\
& |r_0| \leq r \leq R_0, \quad i = 1, 2, \dots, k; \\
& h_{3k+1-i}^{(3)} \frac{\partial H_{0k+1-i}}{\partial x_3} + h_{3k+1-i}^{(4)} H_{0k+1-i} \Big|_{x_3 = \sum_{s=1}^{k+1-i} h_s} = 0, \\
& R_0 < r < R, \quad i = 1, 2, \dots, k; \\
& h_{31}^{(1)} \frac{\partial H_{01}}{\partial x_3} + h_{31}^{(2)} H_{01} \Big|_{x_3=0} = 0, \quad \left\{ \begin{aligned} H_{0s} \left(\sum_{s=1}^{k-i} h_s, r \right) &= H_{0s+1} \left(\sum_{s=1}^{k-i} h_s, r \right), \\ K_{3s} \frac{\partial H_{0s}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h_s-1} &= -K_{3s+1} \frac{\partial H_{0s+1}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h_s-1}, \end{aligned} \right. \\
& i = 1, 2, \dots, k-1; \quad s = 1, 2, \dots, k-1.
\end{aligned}$$

Здесь зависимость между нагрузками q_1 и q_2, q_3, \dots, q_s определены формулами:

$$q_2 = M_{1i_1 i_2} q_1,$$

$$q_3 = (M_{2i_1 i_2} + M_{1i_1 i_2}) q_1,$$

$$q_4 = (M_{3i_1 i_2} + M_{1i_1 i_2} \cdot M_{3i_1 i_2} + M_{1i_1 i_2} M_{2i_1 i_2} M_{3i_1 i_2} + M_{2i_1 i_2} M_{3i_1 i_2}) q_1,$$

$$q_s = (M_{s-1i_1 i_2} + M_{1i_1 i_2} \cdot M_{s-1i_1 i_2} + \dots + M_{s-2i_1 i_2} M_{s-1i_1 i_2}) q_1 -$$

– для расчетной схемы 1;

$$\begin{aligned}
q_2 &= \tilde{M}_{1i_1} q_1, \\
q_3 &= (\tilde{M}_{2i_1} + \tilde{M}_{1i_1}) q_1, \\
q_4 &= (\tilde{M}_{3i_1} + \tilde{M}_{1i_1} \cdot \tilde{M}_{3i_1} + \tilde{M}_{1i_1} \tilde{M}_{2i_1} \tilde{M}_{3i_1} + \tilde{M}_{2i_1} \tilde{M}_{3i_1}) q_1, \\
&\dots \\
q_s &= (\tilde{M}_{s-1i_1} + \tilde{M}_{1i_1} \cdot \tilde{M}_{s-1i_1} + \dots + \tilde{M}_{s-2i_1} \tilde{M}_{s-1i_1}) q_1 -
\end{aligned}$$

– для расчетной схемы 2.

Здесь: $M_{s\dot{h}i_2}, \tilde{M}_{s\dot{h}i_1}$ – известные коэффициенты, определенные в ходе решения задачи, и зависят от коэффициентов проницаемости грунтов и от пути фильтрации; H_s – избыточный напор поровой жидкости; K_{ns}, K_{rs} – коэффициенты фильтрации; $h_{1s}^{(1)}, h_{1s}^{(2)}, \dots, h_{3s}^{(4)}$ – коэффициенты водоотдачи; $\mu_{s\dot{h}i_1}$ и $\eta_{s\dot{h}i_2}$ ($B_{s\dot{h}i_2}^*$ и $B_{s\dot{h}i_1}^*$) – положительные корни уравнения, составленного из комбинации тригонометрических функций; $V_\nu(x_3)$ ($V_\nu(r)$) – функция из комбинации Бесселя первого и второго рода индекса ν ; $\lambda_{s\dot{h}i_2i_3}$ ($\lambda_{s\dot{h}i_2}, \lambda_{s\dot{h}i_1}$) – положительные корни системы уравнения, составленного из комбинации этих функций; $A_{s\dot{h}i_2i_3}, A_{s\dot{h}i_2}, B_{s\dot{h}i_1}, B_{s\dot{h}i_2}, C_{s\dot{h}i_2}, E_{s\dot{h}i_2}, D_{s\dot{h}i_1}, E_{s\dot{h}i_1}, C_{vs}$ – известные коэффициенты, определяемые из начально-граничных условий; α_s – опытные данные; γ – удельный вес воды.

Для решения дифференциального уравнения

$$Z''(x_3) + \frac{\lambda^2(\alpha_{1s} + \alpha_{2s}e^{-\alpha_{3s}x_3}) - (v^2 + \rho^2)}{K_{3s}} Z(x_3) = 0 \quad (1)$$

был применен метод аппроксимации [7].

Согласно этому методу функция $(\alpha_{1s} + \alpha_{2s} \exp(-\alpha_{3s}x_3))$ в (1) приближенно заменена функцией $\tilde{a}(x_3)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(x_3) &= (\alpha_{1s} + \alpha_{2s}) \cdot \exp\left[\left(\ln \frac{\alpha_{1s} + \alpha_{2s} \exp(-\alpha_{3s}x_3)}{\alpha_{1s} + \alpha_{2s}}\right) \cdot \frac{x_3}{h_s}\right], \text{ т.е.} \\
\alpha_{1s} + \alpha_{2s} \exp(-\alpha_{3s}x_3) &\approx (\alpha_{1s} + \alpha_{2s}) \cdot \exp\left[\left(\ln \frac{\alpha_{1s} + \alpha_{2s} \exp(-\alpha_{3s}x_3)}{\alpha_{1s} + \alpha_{2s}}\right) \cdot \frac{x_3}{h_s}\right] \quad (2)
\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что при $x_3 = 0$ и $x_3 = h_s$ аппроксимация вида (2) абсолютно точная и при $\alpha_{3s} \rightarrow 0$ погрешность аппроксимации стремится к нулю. Следовательно, она для малых значений α_{3s} вполне приемлема в практических расчетах.

Далее, имея в виду (2), последовательным введением новых переменных

$$z = -\frac{\alpha_3}{2h_s} x_3 + \frac{1}{2} \ln \frac{4h_s^2 \lambda^2}{\alpha_s^2 K_{3s}} \quad \text{и} \quad y = e^z$$

дифференциальное уравнение (1) приведено к уравнению Бесселя [8], общее решение которого известно. Здесь

$$\alpha_3 = \ln \frac{\alpha_{1s} + \alpha_{2s}}{\alpha_{1s} + \alpha_{2s} \exp(-\alpha_{3s}h_s)} / h_s.$$

Расчетный осадок произведен по методу В.А.Флорина [9].

Выводы:

- Полученные результаты показывают, что величины уплотняющих нагрузок, приложенных к нижним слоям грунтовых массивов, зависят от нагрузки, приложенной к верхнему слою и от коэффициентов проницаемости грунтов, а также от пути фильтрации.

- Если земляная масса каждого слоя является нессыпучей связной средой, то осадки в нижних слоях незначительные.

- Результаты исследований могут быть использованы при расчете осадка грунтовых оснований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асибеков А.Ж. Консолидация многослойных грунтовых оснований //Тр. межд. научно-техн. и учебно-метод. конф. «Актуальные проблемы науки. Технологии производств и образование», посв. 50-летию КазХТИ.– Шымкент, 1993.- Т.2.- 344 с.
2. Асибеков А.Ж. Об уплотнении многослойных грунтовых оснований //Наука и образование Южного Казахстана. Серия: Механика и машиностроение.- 1996.– С. 171-179. Серия: Механика и машиностроение.- 1996.– С. 171-179.
3. Асибеков А.Ж. Одномерное уплотнение кусочно-однородного трехслойного упругого основания //Вестник МКТУ Х.А. Яссави.– 1998, №2.- С. 48-52.
4. Алтынбеков Ш.А., Дасибеков А. О консолидации неоднородных грунтов //Проблемы механики.- 1995, №3-4.- С. 7-9.
5. Терцаги К., Пек Р. Механика грунтов в инженерной практике //Литература по строительству, архитектуре и строительным материалам.- М., 1958.- 607 с.
6. Флорин В.А. Основное уравнение консолидации земляной сребды /ДАН СССР.- 1948.- Т.59.- С.21-24.
7. Алтынбеков Ш.А. Об одном методе аппроксимации //Проблемы механики.- 1995, №3-4.- С.7-9.
8. Кузнецов Д.С. Специальные функции.– М.: Высшая школа, 1965.- 423 с.
9. Флорин В.А. Основы механики грунтов.– М.: Стройиздат, 1961.– Т.2.- 543 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРЫХЛЕНИЯ ПОЧВЫ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ОБРАБАТЫВАЮЩИХ УСТРОЙСТВ

¹Чigareва Ю.А., ²Чigareв Ю.В.

¹Белорусский государственный аграрно технический университет, Минск
²Западно-Померанский Университет Технологий, Щецин

Разрыхление обрабатываемой почвы должно обеспечивать аэрогидрофильтрацию верхнего слоя, который под действием естественных (гравитация) и техногенных факторов (проезд техники) уплотняется, что ухудшает его свойства, необходимые для растениеводства [1]. Процесс обработки (рыхления) представляет собой разрушение связей между компонентам почвенного агрегата с целью создания слоя с необходимой фильтрацией. В теории перколяции (протекания) [2] разработаны различные модели на основе континуальных и дискретных подходов, которые позволяют получать численные оценки различных величин.

В работе рассмотрено применение методов узлов, связей, эффективной среды для процессов разрыхления почвенного слоя.

Рассмотрим поверхностный слой, в котором под воздействием обработки идут процессы разрыхления, характеризующиеся изменением упругих свойств почвы с помощью индикаторной функции

$$\eta(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \bar{x} \in V_H \\ 0 & \text{при } \bar{x} \in V_\Pi \end{cases} \quad (1)$$

где V_Π - объем разрыхленной почвы, V_H - объем неразрыхленной почвы, $V = V_\Pi + V_H$, где V - полный объем слоя, прилегающего к свободной поверхности.

Разрыхление представляет собой процесс образования пористости за счет микротрещин в поверхностном слое.

С помощью функции $\eta(\bar{x})$ согласно (1) упругие модули могут быть записаны в виде

$$\lambda_{ijke}^{(x)} = \lambda_{ijke}^0 \eta(\bar{x}) \quad (2)$$

Функция разрыхленности почвы Ω определяется как относительный разрыхленный объем, который зависит от времени или числа циклов обработки в виде

$$\Omega = V_\Pi / V, \quad 0 \leq \omega \leq 1 \quad (3)$$

Кинетическое уравнение для Ω в общем виде записывается в виде

$$\frac{d\Omega}{dt} = f(\Omega, \sigma_{ij}, t) \text{ или } \frac{d\Omega}{dn} = \varphi(\Omega, \sigma_{ij}, n) \quad (4)$$

где t – время, n – число рыхлений, σ_{ij} – напряжения при воздействии обрабатывающих устройств.

Процессы накопления поверхностных разрыхлений могут идти по разным схемам. Единичные разрыхления (трещины, поры) равномерно распределены по объему разрыхленной почвы и являются зародышами кластеров, которые могут образовать перколяционный кластер, что означает макроскопическую разрыхленность объема для сво-

бодного протекания жидкости и газа. Критическое значение Ω_c , при котором наступает перколяция, называется порогом перколяции (протекания). Нахождение Ω_c является основной задачей в теории перколяции и основными расчетными моделями, используемыми при этом являются решеточные модели, на основе которых решаются задачи разрушения узлов и связей.

При решении задачи на основе модели разрушения по связям находится доля (концентрация) связей, которую необходимо разрушить, чтобы решетка, моделирующая объем (агрегат) почвы, распалась на две части, что соответствует макротрещине, прорезающей обрабатываемый слой.

В модели узлов вычисляется доля узлов, которые необходимо разрушить, чтобы сетка распалась на части.

Вычисление уровня разрыхленности рабочего объема на основе континуальной модели, описываемой уравнением (4) дает завышенные значения для времени разрыхления или числа циклов. Действительно, если записать уравнение (4) для времени накопления трещин, пор

$$\frac{dt}{d\Omega} = f^{-1}(\Omega, \sigma_{ij}, t) \quad (5)$$

и проинтегрировать (5), то получим

$$t = \int_0^1 f^{-1}(\Omega, \sigma_{ij}, t) d\Omega \quad (6)$$

где верхний предел $\Omega = 1$ соответствует 100% разрыхлению рабочего объема. На самом деле разрыхление (перколяция) происходит при $\Omega_{кр} < 1$, т.е. (6) можно представить в виде

$$t = \int_0^{\omega_{кр}} f^{-1}(\Omega, \sigma_{ij}, t) d\Omega, \quad t = t_{np} + t_{дон} \quad (7)$$

$$\text{где } t_{кр} = \int_0^{\omega_{кр}} f^{-1}(\Omega, \sigma_{ij}, t) d\Omega, \quad t_{дон} = \int_{\omega_{кр}}^1 f^{-1}(\Omega, \sigma_{ij}, t) d\Omega$$

Задачи нахождения $\Omega_{кр}$ и $t_{кр}$ решаются различными способами. Наиболее точными из них являются подходы, основанные на теории перколяции в моделях узлов и связей [2]. Математическими моделями здесь служат модели случайного блуждания траектории трещины на решетках. Методы марковских цепей и процессов, а также теории потенциала составляют основу для получения численных результатов [3].

Пусть верхний слой представляет собой упругую среду, состояние которой описывается динамическими уравнениями в перемещениях

$$(\lambda + \mu)(u_{i,j}) + \mu \cdot u_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (8)$$

где λ, μ - упругие константы Ламе, ρ - плотность, u_i - перемещения.

Определяющими уравнениями являются закон Гука для однородной изотропной среды

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad \theta = e_{ii} = \text{div} \bar{u}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (9)$$

где σ_{ij} - напряжение, e_{ij} - деформации, связанные с перемещениями соотношениями Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (10)$$

Для продольной и сдвиговых волн, возбужденных в слое при обработке, имеют место уравнения

$$c_1^2 \cdot \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0, \quad c_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho}} \quad (11)$$

$$c_2^2 \cdot \bar{\Omega} - \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial t^2} \leq 0, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (12)$$

$$2\bar{\Omega} = \text{rot } \bar{u}$$

Если процесс обработки представляет собой повторение некоторой операции такой, что можно считать $\bar{u} = \bar{u}_0(\bar{x})e^{i\omega t}$, где ω - частота повторения нагружения рабочей поверхности слоя, тогда уравнения (11), (12) преобразуются к виду

$$c_1 \cdot \theta + \omega^2 \theta = 0 \quad (13)$$

$$c_2 \cdot \bar{Q} + \omega^2 \bar{Q} = 0 \quad (14)$$

Уравнения (13), (14) при использовании методов узлов и связей дискретизируются на решетках подходящей конфигурации. Например, для квадратной решетки дискретный аналог уравнения (13) имеет вид

$$\sum_{k=1}^4 G_k(i, j) \{u_k(i, j) - u(i, j)\} = 0 \quad (15)$$

Применение метода расчета перколяции по узлам и связям для задачи обработки облегчается по сравнению с другими используемыми в различных физико-технических задачах [2].

Особенностью данной задачи является нахождение напряжений, деформаций внутри слоя под воздействием внешней нагрузки. Требуется описать разрыхление обрабатываемого слоя в результате его взаимодействия с обрабатывающим инструментом. В данном случае граничные условия на контуре, ограничивающим рабочую поверхность сохраняются постоянными, например $u_i^*(\bar{x}^s) = 0 (i = 1, 2, 3)$ где \bar{x}^s - координаты точек контура. При каждом цикле за счет трения происходит смещение точек рабочей области, которое при известной кинематике режущего тела может быть определено. Это соответствует заданию перемещения $u(i, j)$ в (15), что позволяет решать систему алгебраических уравнений (15) обычным образом. Однако, в результате взаимодействия изменяется жесткость $G_k(i, j)$ случайным образом, что моделирует возникновение микротрещин за счет разрыва упругих связей. Вариант квадратной решетки для моделирования разрыхления изображен на рис. 1

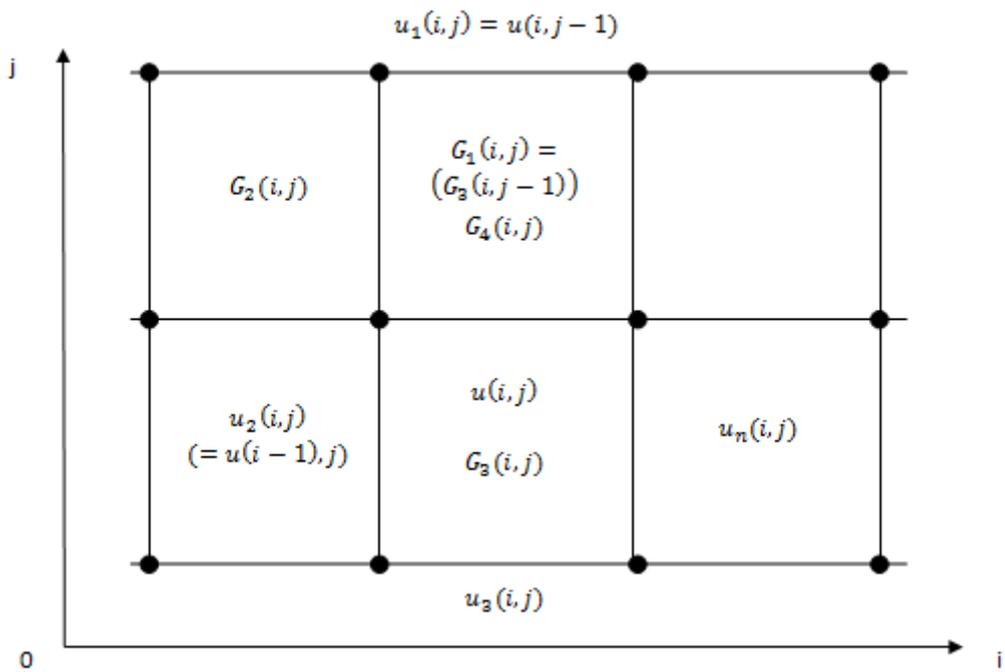


Рис. 1. Модель узлов и связей

Эволюцию процесса разрыхления представим как процесс достижения перемещением $u(i, j)$ некоторого критического значения, при котором происходит разрыв связи и жесткость G скачком изменяется до очень малого значения $\varepsilon G (0 < \varepsilon \ll 1)$ Рис. 2, т.е. используем модель идеального разрушаемого тела.

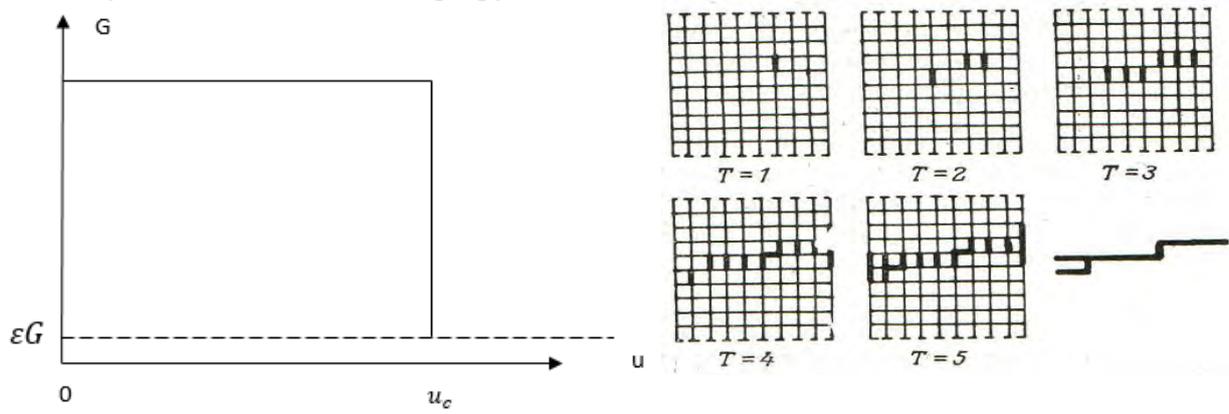


Рис. 2. Падение прочности слоя при образовании сквозного канала

Пусть после N циклов трещина прорезает рабочую поверхность в направлении перпендикулярном движению инструмента Рис. 3 [2].

В результате разрыхления изменяется фрактальная размерность почвенного пространства, причем уменьшается до величины

$$D = 1.65 \pm 0.05 \tag{16}$$

Среднее число разрушенных на N -том цикле связей подчиняется степенному закону [2]

$$N = N^{-\alpha}, \alpha = 2.4 \pm 0.2 \tag{17}$$

где N – номер шага (цикла) во времени.

Математически эта задача описывается случайным блужданием трещины на двумерной решетке [2, 3]. Сплошность среды определяется ее эффективной прочностью, зависящей от эффективной жесткости. В рамках моделей эффективной среды выражение для макроскопических коэффициентов жесткости обрабатываемого слоя записывается в виде [1, 4]

$$\lambda_{ijke}^* = (1 - \Omega) \lambda_{ijke}^0 \quad (18)$$

где Ω имеет смысл концентрации пор, микротрещин.

Пороговое значение концентрации $\Omega_{кр}$, при котором происходит перколяция (протекание), находится различными методами, в частности, методами узлов и связей, коррелированных связей [2, 3]. Установлено, что в окрестности $\sigma_{кр}$ статистические характеристики кластеров поврежденных связей, узлов описываются показательной функцией с различными критическими показателями

$$\xi(\sigma) \sim (\sigma_{кр} - \sigma)^{-V} \quad (19)$$

где $\xi(\sigma)^2 = \left(2 \sum_s R_s^2 i^2 n_i \right) \left(\sum_s s^2 n_s \right)$ – длина (радиус) корреляции,

$R_s^2 = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (\bar{r}_i - \bar{r})^2$, $r = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \bar{r}_i$ – радиус – вектор центра масс кластера разрыхленной почвы.

Распределение кластеров повреждений по размерам в объеме определяется формулой

$$n_s(\sigma) = N_s N_p^{-1}, \sum_s n_s(\sigma) \sim |\sigma - \sigma_{кр}|^\alpha \quad (20)$$

где N_s – среднее число кластеров размера s , N_p – полное число связей или узлов.

Полное число поврежденных (разрушенных) элементов (комков) почвы

$$\sum_s s n_s(\Omega) \sim h^{\sigma^{-1}} \quad (21)$$

Средний размер кластеров вычисляется по формуле

$$S = \sum_s s \Omega_s |\sigma - \sigma_{кр}|^\gamma \quad (22)$$

где $\Omega_s = s n_s(\sigma) \left(\sum_s n_s(\sigma) \right)^{-1}$ – вероятность, что случайно выбранный узел принадлежит кластеру размера s .

По формуле

$$P_{\infty(\sigma)} = \frac{N_\infty}{N_{запятых}} \sim |\sigma - \sigma_{кр}|^\beta \quad (23)$$

вычисляется вероятность того, что случайным образом выбранный узел принадлежит данному кластеру. Важно, что эти показатели являются универсальными, не зависящими от типа решетки, типа перколяции, а зависят только от размерности пространства задач в соответствии с таблицей 1 [2].

Таблица 1.1 – Значения критических показателей

	Размерность пространства	
	$d = 2$	$d = 3$
β	$5/36$	0.417 ± 0.003
ν	$4/3$	0.875 ± 0.008
γ	$43/18$	1.795 ± 0.005

Экспериментальные данные показывают, что разрыхление многих материалов происходит по схеме ветвящихся процессов [3]. В этом случае используют модели графов, имеющих геометрию деревьев, в частности дерево Кэли [2].

Дерево Кэли с $z = 3$ изображено на рис. 3

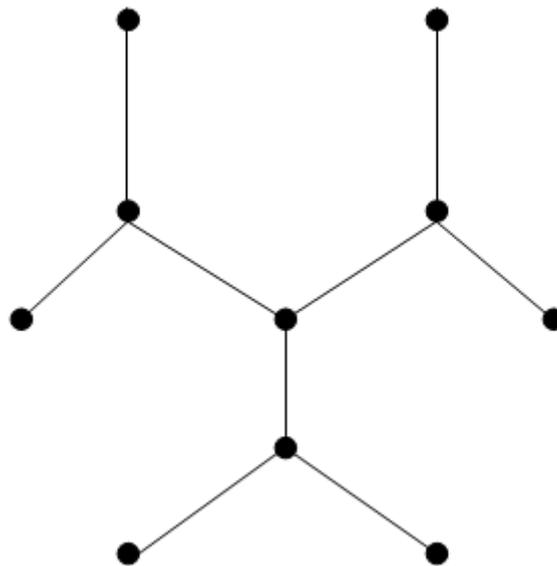


Рис. 3. Дерево Кэли

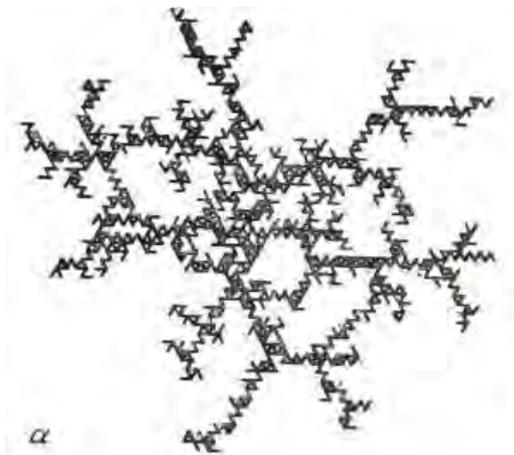
Обозначим через z – количество ветвей единичной длины выходящих из центрального узла. Из каждого узла выходит $z - 1$ ветвей. Узлы, лежащие на одинаковом расстоянии от центрального узла, образуют оболочки (кусты). На первой оболочке (окружности) радиуса ℓ расположено z узлов, $z(z - 1)$ – на второй и т.д.

Обозначим через ℓ расстояние от центрального узла до произвольного узла, принадлежащего ℓ -той оболочке, содержащей $z(z - 1)^{\ell - 1}$ узлов.

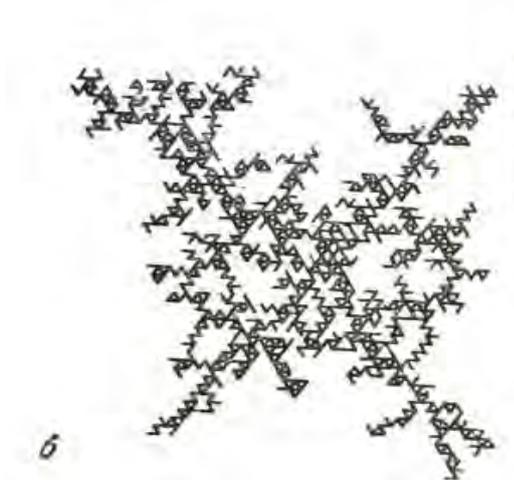
Обозначим среднее число узлов кластера $g(\ell)$, находящихся на расстоянии ℓ от произвольно выбранного занятого узла. Считая, что узлы точки поворота (траектории трещины) случайным образом занимают узлы с вероятностью Ω , а каждая ℓ -тая оболочка содержит $z(z - 1)^{\ell - 1}$ узлов, тогда $g(\ell)$ вычисляется по формуле

$$g(\ell) = z(z - 1)^{\ell - 1} \Omega^\ell = \frac{z}{z - 1} ((z - 1)\Omega)^\ell \quad (24)$$

Пример модели разрыхления изображен на рис. 4.1, 4.2

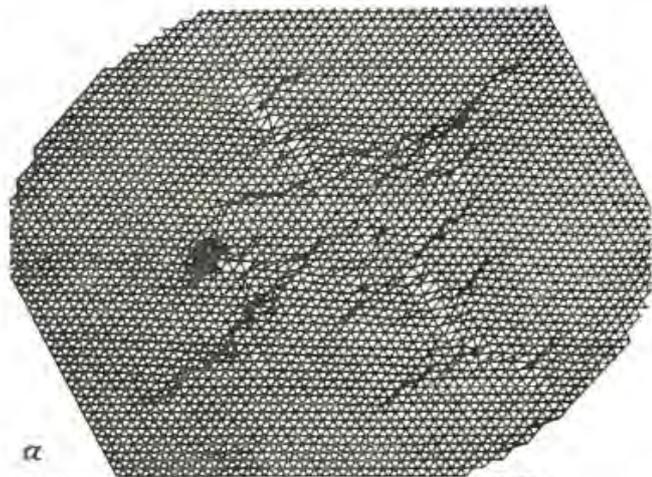


а

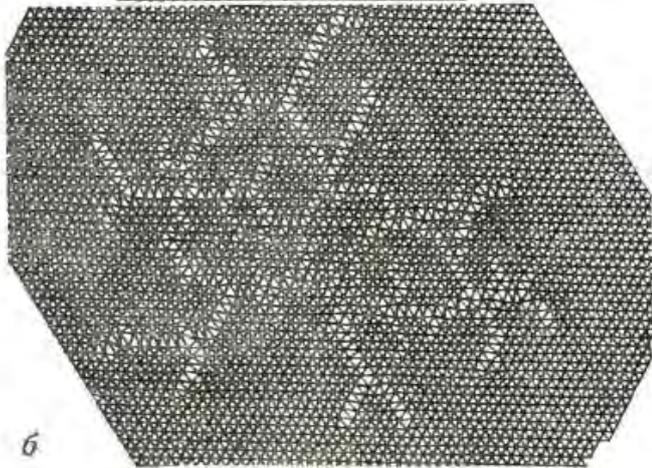


б

Рис. 4.1. Разрушенные связи:
а – при растяжении; б – при сдвиге слоя
почвы



а



б

Рис. 4.2. Перемещение частиц:
а – при растяжении;
б – при сдвиге слоя почвы

На основе (24) могут быть вычислены статистические характеристики разрыхляемого объема. Функция $g(\ell)$ имеет смысл корреляционной функции так, что $g(\ell)$ при $\ell \rightarrow \infty$ стремится к нулю экспоненциально при $\Omega(z-1) < 1$. Перколяция (бесконечный кластер) возникает при $\Omega \geq (z-1)^{-1}$, тогда $\Omega_{кр}$ вычисляется по формуле

$$\Omega_{кр} = \frac{1}{z-1} \quad (25)$$

Радиус корреляции вычисляется по формуле

$$\xi^2 = \frac{\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^2 g(\ell)}{\sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell)} = \Omega_{кр} \frac{\Omega_{кр} + \Omega}{(\Omega_{кр} - \Omega)^2} \text{ при } \Omega < \Omega_{кр} \quad (26)$$

Выражение для S имеет вид

$$S = 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) = \Omega_{кр} \frac{\Omega_{кр} + \Omega}{\Omega_{кр} - \Omega} \text{ при } \Omega < \Omega_{кр} \quad (27)$$

Из (27) следует, что критический показатель $\gamma = 1$.

Для n_s на решетке Кэли имеет место выражение

$$n_s = \sum_t q_{s,t} \Omega^s (1-\omega)^t \quad (28)$$

где $q_{s,t}$ - число конфигураций кластера из s узлов с периметром t , причем

$$t(s) = z + (s-1)(z-2) \quad (29)$$

Для модели разрыхления по схеме дерева Кэли вычисляются критические показатели

$$\gamma = 1, \quad \beta = 1, \quad \alpha = -1 \quad (30)$$

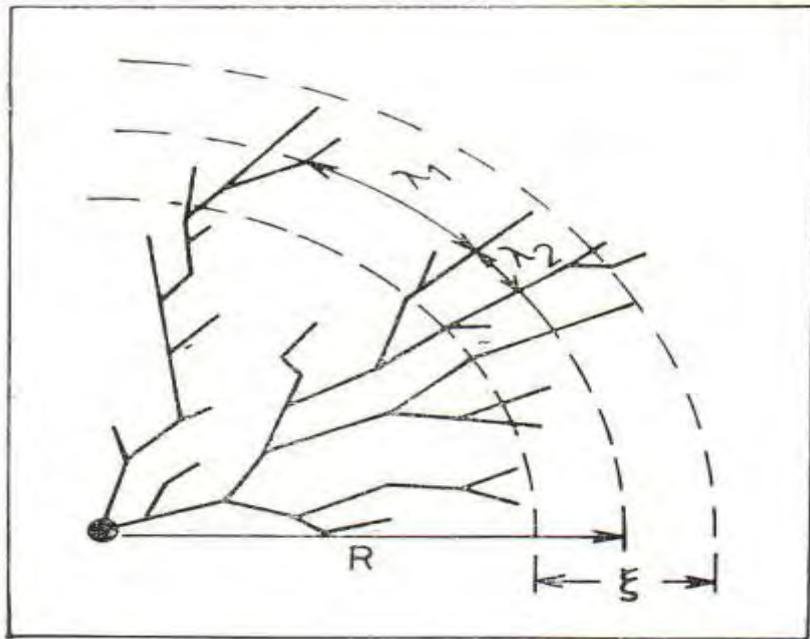


Рис. 5. Схема прорастания (ветвления) трещин из начальной поры

На рис. 5 приведен пример схемы разрыхления и оболочек, на которых находятся (в среднем располагаются) точки ветвления трещин (разрывов).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев Ю.В., Сенкевич В.Т. Математические модели механики почв, Минск, 2007, 208 с.
2. Fractals in physics, Proc. of VI Int. Symp. on Fractals in Physics IC TP, Trieste, Italy, July 9-12, 1985.
3. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова, М., Наука, 1970, 271 с.
4. Островский Т.М. Прикладная механика неоднородных сред, Санкт-Петербург, Наука, 2000, 359 с.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ПОСРЕДНИКА ДЛЯ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА НАНОЧАСТИЦУ В НЕЛИНЕЙНОМ КАНАЛЕ С ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

д.ф.-м.н. Щербаков С.С., маг. Полещук М.М.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. В различных отраслях физики, техники, биологии и медицины требуется не только изучать индивидуальные нанообъекты, но и манипулировать ими: захватывать, перемещать, деформировать. Этими объектами могут быть углеродные нанотрубки, органические и неорганические частицы различной природы, элементы микросхем, молекулы и даже атомы. На данный момент существует несколько способов манипулирования частицами наноразмеров. Например, оптический [1] или же механические способы (рука робота, микро- и наноинструменты) [2]. Также рассматривается возможность управления движением наночастицы с помощью эффекта памяти формы [3]. Следует отметить, что для манипулирования наночастицами зачастую необходим инструмент крайне малых размеров. Однако изготовление такого рода инструмента весьма затруднительно, и на сегодняшний день размеры «наноманипулятора» составляет несколько сантиметров или десятков сантиметров. Однако для более широкого и эффективного применения большинства из них требуется уменьшение размеров и улучшение функциональных характеристик. Поэтому применение для управления нанообъектами физических эффектов, которые не связаны с механическим воздействием на частицы, представляется перспективным.

Постановка задачи. Основой электромагнитно-силового метода является перемещение нанообъекта с помощью макрочастицы (посредника) [4-6]. Под действием электромагнитного поля токопроводящий (заряженный) посредник подводится к частице и «захватывает» её с помощью сил Ван-дер-Ваальса, которые при взаимодействии, например, двух сферических тел с радиусами R_1 и R_2 , если расстояние между ними $r \ll R_1$ или R_2 , имеют вид

$$F^{(vw)}(r) = \frac{AR_1R_2}{(R_1 + R_2)^6 r}, \quad (1)$$

где A – постоянная Хамакера.

Далее осуществляется движение посредника в заданную точку по некоторой траектории таким образом, чтобы не произошёл «отрыв» наночастицы, т.е. при обеспечении условия

$$m\ddot{r} \leq F^{vw}. \quad (2)$$

В настоящей работе решалась задача определения закона изменения напряженности электромагнитного поля, обеспечивающего перемещение посредника по заданной нелинейной траектории в цилиндрическом канале с жидкостью, моделирующем человеческую вену (см. рис. 1). Течение жидкости описывалось законом Пуазейля при пульсирующем давлении [7]. Расчёты проводились с учетом как электромагнитного, так и гидродинамического сопротивления жидкости.

Так как наночастица по сравнению с посредником крайне мала (в т.ч. ее масса и заряд), то во всех дальнейших расчётах будем учитывать лишь посредник. Как известно, заряженное тело (частица) может быть приведено в движение с помощью сил Лоренца [4-6]

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + m\vec{g}, \quad (3)$$

Поскольку движение частицы рассматривается в потоке жидкости, то было учтено гидродинамическое сопротивление:

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \vec{F}_s + m\vec{g}, \quad (4)$$

где m – масса посредника, q – электрический заряд, \vec{E} и \vec{B} – векторы электрического и магнитного полей, \vec{v} – вектор скорости посредника, \vec{g} – ускорение свободного падения, \vec{F}_s – гидродинамическое сопротивление

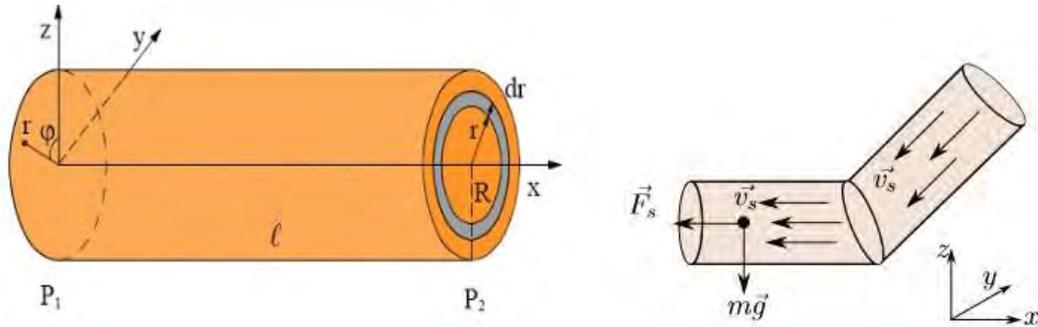


Рис. 1. Схема движения частицы в цилиндрическом канале

Гидродинамическое сопротивление описывается следующей формулой [8]:

$$\vec{F}_s = \pm \frac{1}{2} \rho S c \vec{v}_s^2, \quad (5)$$

где ρ – плотность жидкости, S – площадь поперечного сечения тела, c – безразмерный коэффициент сопротивления,

$$\vec{v}_s = \mp \left(\dot{r}_i \pm \frac{\delta P}{4\eta l} (R^2 - r^2) \right), \quad (6)$$

где \dot{r}_i – скорость частицы, δP – разность давлений на участке движения, η – вязкость жидкости, l – длина участка движения, R – радиус участка движения, r – расстояние от частицы до центра, а знаки зависят от направления движения частицы относительно течения (см. рис. 1).

В вене из-за сердцебиения происходят колебания давления крови, что было учтено в разности давлений δP :

$$\begin{aligned} \delta P &= P_0 + P_1 \sin\left(2\pi\nu_{0,0} t + \frac{\pi}{2}\right) \\ P_0 &= P_{\min} + \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2} \\ P_1 &= \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

На основе (4-7) была построена система разрешающих дифференциальных уравнений относительно неизвестных полей \vec{E} и \vec{B} для реализации метода управления объектами наноразмеров посредством токопроводящего посредника.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q(\varepsilon_0 E_x + \dot{y}\mu_0 B_z - \dot{z}\mu_0 B_y) - F_{sx}(\dot{x}) \\ m\ddot{y} = q(\varepsilon_0 E_y + \dot{x}\mu_0 B_z - \dot{z}\mu_0 B_x) \\ m\ddot{z} = q(\varepsilon_0 E_z + \dot{x}\mu_0 B_y - \dot{y}\mu_0 B_x) - F_{sz}(\dot{z}) - mg \end{cases} \quad (8)$$

Траектория движения частиц задавалась координатным либо аналитическим способом. Были проведены моделирование и сравнительный анализ движения частицы по

трём различным траекториям в меняющемся направлении канала (см. рис.2), а также рассмотрены случаи движения частицы как по течению, так и против него.

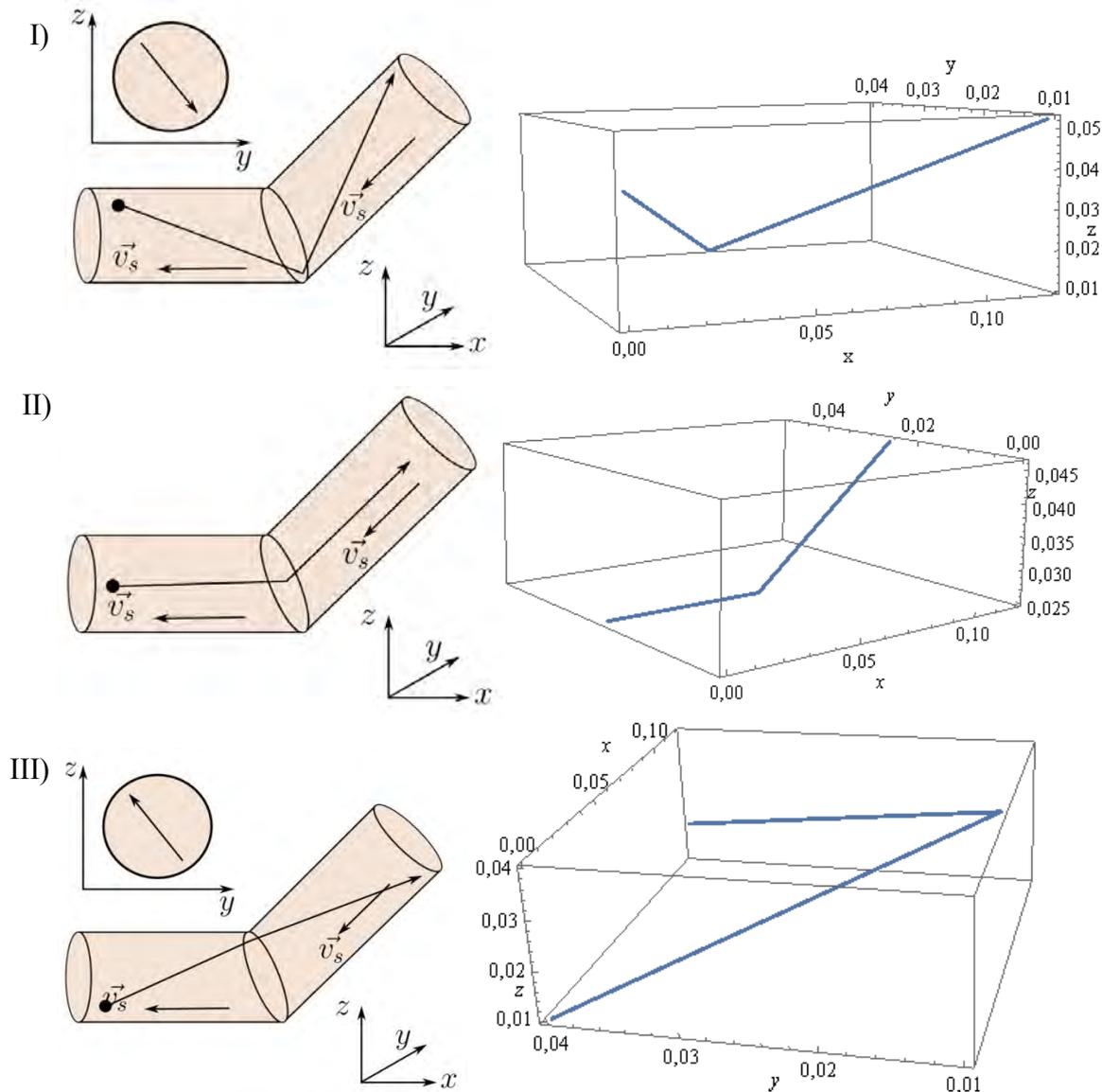


Рис. 2. Траектории движения частицы

Для нелинейной траектории движения система (8) может быть решена численно методом Эйлера [9]. Разностный аналог системы (8) в этом случае был следующим:

$$\begin{cases} m \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\delta t^2} = q(\varepsilon_0 E_x + \frac{y_i - y_{i-1}}{\delta t} \mu_0 B_z - \frac{z_i - z_{i-1}}{\delta t} \mu_0 B_y) - F_{sx}(\dot{x}) \\ m \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\delta t^2} = q(\varepsilon_0 E_y + \frac{x_i - x_{i-1}}{\delta t} \mu_0 B_z - \frac{z_i - z_{i-1}}{\delta t} \mu_0 B_x) \\ m \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{\delta t^2} = q(\varepsilon_0 E_z + \frac{x_i - x_{i-1}}{\delta t} \mu_0 B_y - \frac{y_i - y_{i-1}}{\delta t} \mu_0 B_x) - F_{sz}(\dot{z}) - mg \end{cases} \quad (9)$$

Следует принять во внимание, что движение осуществляется за счёт шести неизвестных компонент электромагнитного поля, а уравнений в системе три, поэтому для замыкания системы предположим, что движение будет осуществляться за счёт лишь трёх компонент поля. Сделать это возможно, поскольку трёх компонент достаточно, чтобы осуществлять движение тела по трём различным направлениям.

Тогда система (9) примет вид

$$\begin{cases} m \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\delta t^2} = q(\varepsilon_0 E_x - \frac{z_i - z_{i-1}}{\delta t} \mu_0 B_y) - F_{sx} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\delta t} \right) \\ m \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\delta t^2} = q\varepsilon_0 E_y \\ m \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{\delta t^2} = q \frac{x_i - x_{i-1}}{\delta t} \mu_0 B_y - F_{sz} \left(\frac{z_i - z_{i-1}}{\delta t} \right) - mg \end{cases} \quad (10)$$

Для проведения расчетов были приняты следующие исходные данные:

$$q = 1 \times 10^{-6} \text{ Кл}, r = 1 \times 10^{-6} \text{ м}, l = 0,12 \text{ м}, \eta = 3,5 \times 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}, R = 0,025 \text{ м}, \delta t = 0,01 \text{ с},$$

$$\mu_0 = 1, \varepsilon_0 = \frac{1}{85}, \rho = 1050 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, P_{\min} = 0,55 \text{ Па}, P_{\max} = 750 \text{ Па}, \nu = 0,05.$$

Траектории были заданы точками пространства при фиксированном шаге по времени таким образом, чтобы выполнялось условие (2). На каждом графике рис. 3 приведены изменения составляющих электромагнитного поля для трёх разных траекторий (I – сплошная, II – пунктирная, III – прерывистая); а) и в) – по течению, б) и г) – против течения. Составляющая E_y была нулевой для всех трёх траекторий, так как движение вдоль оси y отсутствует.

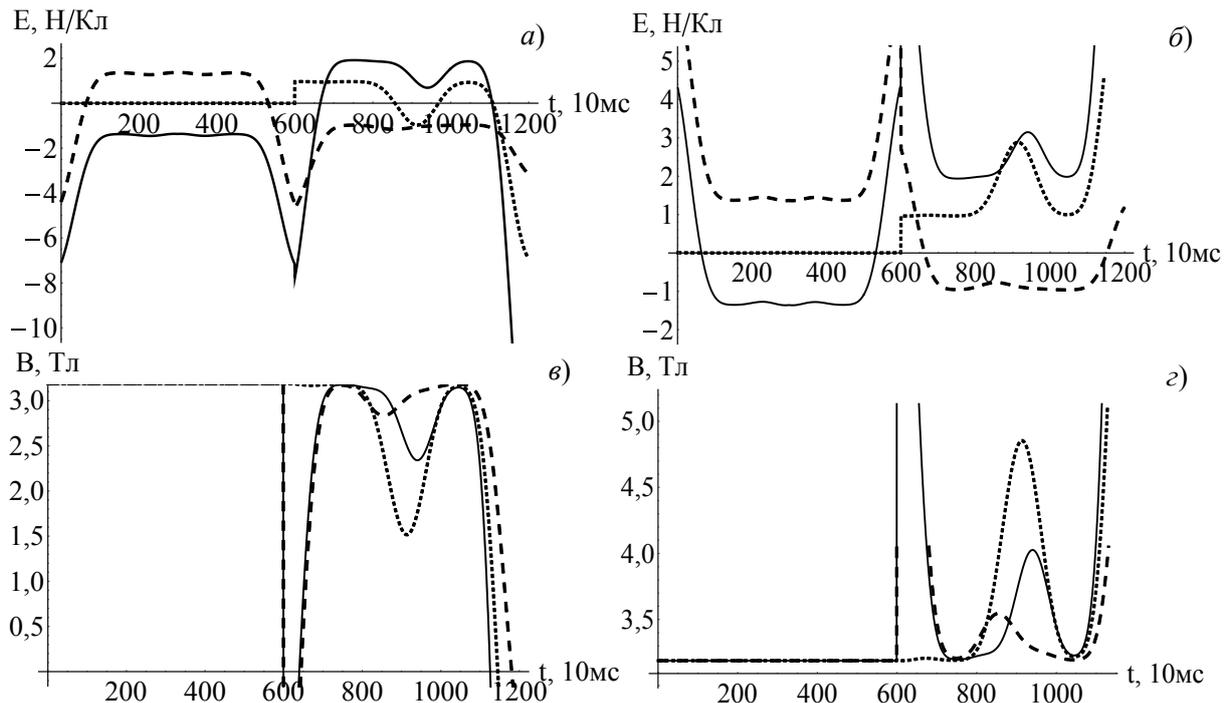


Рис. 3. Распределение полей для трёх разных траекторий а), б) – E_x ; в), г) – B_y

Из рис. 4 видно, что изменение направления движения (по или против течения) влечёт за собой почти симметричное изменение в значениях интенсивности соответствующих полей.

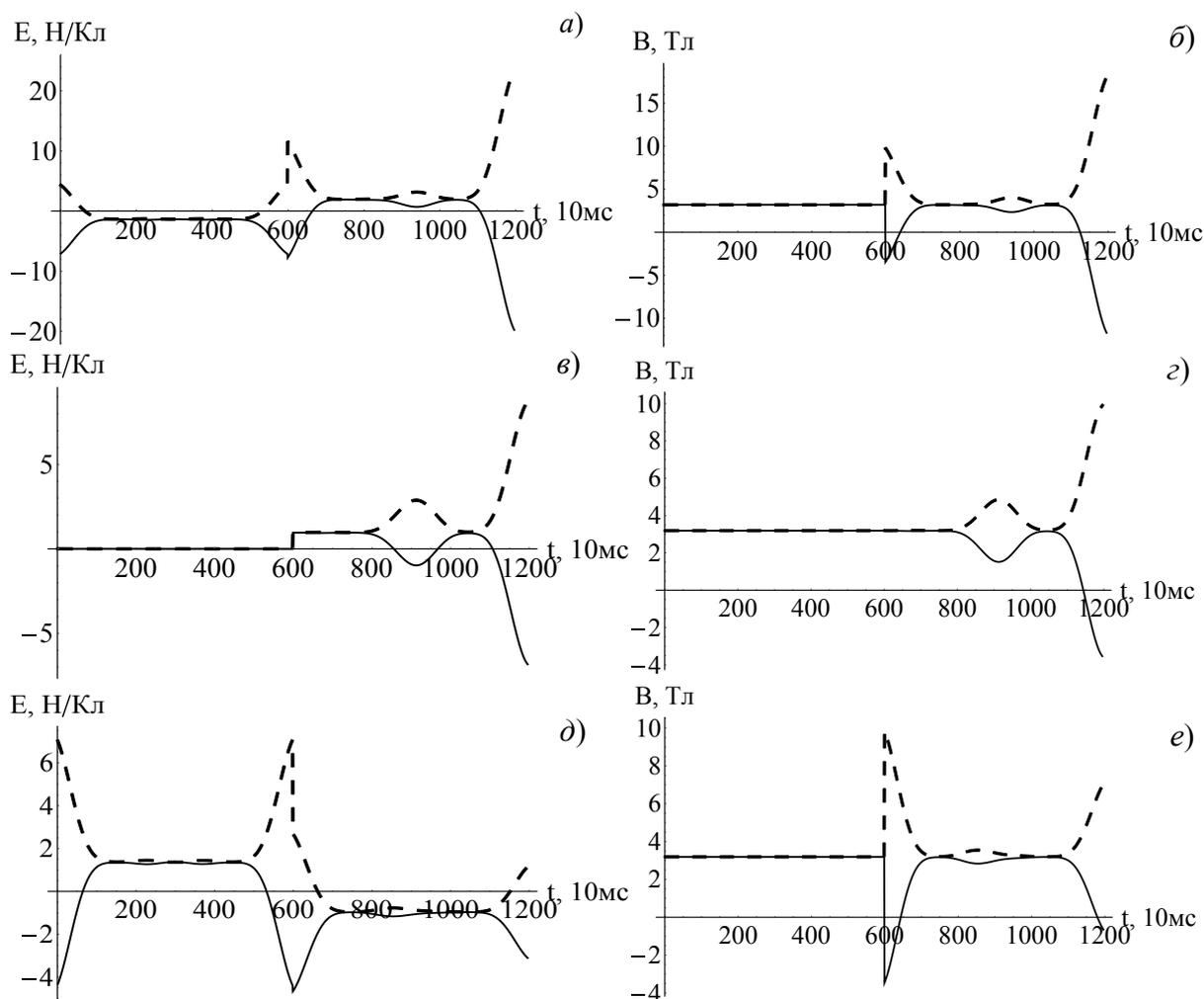


Рис. 4. Изменения компонент полей а), в), д) – E_x ; б), г), е) – B_y) при движении частицы по течению и против – сплошная и пунктирная линии соответственно, а) и б) траектория I, в) и г) траектория II, д) и е) траектория III.

Заключение. Рассмотрен метод управления движением токопроводящего посредника для манипулирования наночастицей в канале с жидкостью. Метод основан на применении электромагнитных полей и учете как гидродинамического, так и электромагнитного сопротивления. Данный способ не предполагает механического воздействия на посредник, а лишь требует задания полей с параметрами необходимыми для движения посредника по требуемой траектории. Крепление наночастицы к посреднику может быть осуществлено с помощью сил межмолекулярного взаимодействия Ван-Дер-Ваальса.

Решен ряд модельных обратных задач определения компонент электромагнитного поля, обеспечивающего движение макросредника по заданной траектории в нелинейном канале с потоком жидкости с учётом колебания давления в нем, профиля и направления скорости жидкости, а также сил магнитного сопротивления и электрической проницаемости среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соيفер, В.А., Котляр, В.В., Хонина, С.Н. Оптическое манипулирование микрообъектами: достижения и новые возможности, порождённые дифракционной оптикой / В.А. Соифер, В.В. Котляр, С.Н. Хонина // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 2004. – Т. 35, № 6. – С. 1368-1432.

2. Коледов, В. "Нанопальцы" для наноинженеров / Коледов, В. // *Наноиндустрия*. – 2014, № 6. – С. 52-57.
3. Маширов, А.В. и др. Манипулирование микро- и нанообъектами при помощи эффекта памяти формы/ А.В. Маширов, В.А. Дикан, А.В. Иржак, Д.И. Захаров, П.В. Мазаев, А.М. Жихарев, А.П. Каманцев, В.С. Калашиников, В.В. Коледов, А.В. Шеляков, В.Г. Шавров // *Журнал радиоэлектроники*. – 2014, № 12. – С. 1-26.
4. Sherbakov, S.S. Manipulation of nanoobjects by electromagnetic and van der Waals forces / S.S. Sherbakov, L.A. Sosnovskiy // *Proc. of 8-th International Symposium on Mechanics of Materials and Structures and Fracture and Fragmentation in Science and Engineering Conference, May 31 – June 3, Augustow, (Poland) / Ed.: A. Seweryn – Bialystok university of Technology. 2015. –P. 147-148.*
5. Щербаков, С.С. Управление нанообъектами с помощью электромагнитных сил и сил межмолекулярного взаимодействия / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский // *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сб. докладов, Казань, 20-24 августа 2015 г./ КФУ; составители: Д.Ю. Ахметов [и др.]*. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2015. – С. 4278-4280.
6. Щербаков, С.С., Электромагнитно-силовой метод манипулирования нанообъектами с учетом сопротивления среды / С.С. Щербаков, М.М. Полецук // *Теоретическая и прикладная механика: Межведомственный сборник научно-методических статей*. – Вып.32. –Минск: БНТУ, –2017. –С.40-45.
7. Савельев, И.В. Курс общей физики, т. 1. Механика. Молекулярная физика: Учебное пособие/ И.В. Савельев. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 432 с.
8. Бродский, А.К. Механика полета насекомых и эволюция их крылового аппарата / А.К. Бродский. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1988. – 208 с.
9. Самарский, А.А. Введение в численные методы: учебн. пособие для вузов / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1987. – 288 с.

АНАЛИЗ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ТРИБОФАТИЧЕСКИХ И МЕХАНОТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ: ЭНТРОПИЙНЫЙ ПОДХОД

д.ф.-м.н. Щербаков С.С.

Белорусский государственный университет, Минск

1. Термодинамическая энтропия. Для описания состояния термодинамических систем используют функции [34]

$$U = U(T, V, N_k) \text{ или } S = S(T, V, N_k), \quad (1)$$

в которых температура T , объем V , число молей химических компонентов N_k – макроскопические переменные состояния.

В общем случае открытой системы изменение dU внутренней энергии U представляется [34] в виде

$$dU = dQ + dA + dU_{sub} = TdS - pdV + \sum_1^n \mu_k dN_k, \quad (2)$$

где dQ – количество тепла; dA – количество механической энергии; dU_{sub} – количество вещества, которым система обменивалась с окружающей средой за интервал времени dt ; p – давление; μ_k – химические потенциалы. Планк особо подчеркивал, что в формуле (2) dU есть бесконечно малая разность, тогда как dQ , dA , dU_{sub} – бесконечно малые количества.

Из (2) следует, что изменение энтропии S в термодинамической системе (индекс T)

$$dS = \left(\frac{dU + pdV}{T} - \frac{1}{T} \sum_1^n \mu_k dN_k \right)_T, \quad (3)$$

Приращение энтропии (3) может быть представлено [3, 34] как сумма ее изменения $d_e S \geq 0$, обусловленного обменом системы энергией и веществом с внешней средой, и изменения $d_i S \geq 0$, обусловленного необратимыми процессами внутри системы:

$$(dS)_T = d_e S + d_i S, \quad (4)$$

Таким образом, в термодинамике энтропия S – это мера необратимого рассеяния энергии [10, 34], которая характеризует состояние системы с точки зрения ее внутренней упорядоченности, или структуры.

В уравнениях (2) и (3) не принимаются во внимание многие процессы, например, изменение внутренней энергии при повреждении движущихся и деформируемых твердых тел и силовых систем [7, 11, 44]. А обмен веществом рассматривается [34] лишь в результате таких процессов, как диффузия и химические реакции, тогда как обмен веществом при поверхностном изнашивании и объемном (например, усталостном) разрушении не учитывается. Поэтому возникает задача об оценке изменения энтропии в указанных (и других) условиях в связи с развитием многообразных явлений повреждаемости твердых тел.

Заметим также, что в (2) и (3), как и в самом общем анализе изменения термодинамических сил и термодинамических потоков [34], не обнаруживается каких-либо критических состояний системы. А между тем, применительно, например, к процессам изнашивания и усталости твердых тел, очень важно иметь прогноз, достигнут или не достигнут они такого состояния в заданных условиях работы.

2. Термомеханическая энтропия. В механике сплошной среды [2, 4] тензор напряжений для деформируемого твердого тела разлагают на две части

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(c)} + \sigma_{ij}^{(d)}, \quad (5)$$

где индекс (c) указывает *тензор консервативных напряжений*, а индекс (d) – *тензор диссипативных напряжений*.

И тогда, проведя соответствующий энергетический анализ, получают *термомеханическую функцию энтропии*

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij}^{(d)} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (6)$$

где dq/dt – скорость притока тепла к среде на единицу массы; $\frac{1}{\rho T} \sigma_{ij}^{(d)} \dot{\epsilon}_{ij}$ – скорость диссипации энергии в единице массы (ρ – плотность среды).

Уравнение (6) справедливо лишь для сплошной среды. Если сплошность деформируемого твердого тела нарушается (например, путем возникновения и развития соответствующих повреждений), оно не может быть использовано. Таким образом, (6) не описывает физической повреждаемости твердых тел. Здесь тоже нет речи об условиях достижения ими критического состояния (например, разрушения на части). Кроме того, в (6) речь идет об энтропии, обусловленной только статическим деформированием, тогда как важное практическое значение имеет повторно-переменное, в частности, циклическое деформирование.

3. Энтропия в процессах трения и изнашивания. В ряде работ по трибологии [12–14, 20, 22–27, 29, 36] и др. исследовано влияние процессов трения и изнашивания системы двух твердых тел на изменение термодинамической энтропии S_i . Ее производство записывается как сумма термодинамических сил X_j^k и термодинамических потоков J_j^k в виде

$$\frac{d_i S}{dt} = \sum_j \sum_k \left(\frac{\partial_i S}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \zeta_j^k} \right) \frac{\partial \zeta_j^k}{\partial t} = \sum_j \sum_k X_j^k J_j^k, \quad (7)$$

Брайант [24] предложил концепцию деградации пары трения

$$\frac{dw}{dt} = \sum_j \sum_k \left(\frac{\partial w}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \zeta_j^k} \right) \frac{\partial \zeta_j^k}{\partial t} = \sum_j \sum_k Y_j^k J_j^k, \quad (8)$$

в которой параметр деградации $w = w\{p_j(\zeta_j^k)\}$ рассматривается как (термодинамическая Y_j^k) сила деградации.

Трение и износ связаны через общие диссипативные процессы, действующие в условиях трения скольжения. В [25, 27] рассмотрены трение и износ с целью выявления распространенных диссипативных процессов в трибологии и оценки необратимой энтропии. Диссипативные процессы, связанные с изменением энтропии включают несколько механизмов.

Адгезия поверхностей и пленок (адгезионный износ и трение)

$$\Delta S' = \frac{\gamma}{T_m} \Delta A_s, \quad (9)$$

где γ – поверхностная энергия в области контакта (работа на единицу площади для создания новой поверхности площадью A_s), T_m – локальная температура среды.

Пластическая деформация, связанная с абразивным износом, фрикционным повреждением и / или резкой,

$$\Delta S' = \frac{U_c}{T_m} \Delta V, \quad (10)$$

где U_c – работа (пластической деформации), расходуемая на единицу объема ΔV , а T_m – температура повреждаемых материальных сред.

Разрушение, связанное с усталостным износом и поверхностным повреждением,

$$\Delta S' = \frac{G - 2\gamma_o}{T_{cr}} da, \quad (11)$$

где a – длина трещины, $G = -\partial U_s / \partial a$ – скорость высвобождения энергии, зависящая от энергии деформации U_s , γ_o – поверхностная энергия, а T_{cr} – температура разрушаемого материала в вершине трещины.

Фазовые изменения, связанные с поверхностным плавлением и перекристаллизацией металлов,

$$\Delta S' = \frac{\Delta H}{T_{phase}}, \quad (12)$$

где ΔH – изменение энтальпии (теплота, поглощенная во время фазового изменения), а T_{phase} – температура, связанная с фазовым изменением.

Химические реакции, связанные с химическим и окислительным износом

$$\Delta S' = \frac{\bar{A}}{T_{cr}} d\xi, \quad \bar{A} = \sum_{\text{reactants}} \kappa_i \eta_i - \sum_{\text{products}} \kappa_i \eta_i, \quad (13)$$

где химическое сродство A зависит от химических потенциалов η_i и стехиометрических коэффициентов κ_i реакции.

Поскольку стехиометрия реакции связана с изменением молярных масс dN'_i реагентов и продуктов, степень реакции ξ имеет дифференциальное изменение $d\xi = \pm dN'_i / \kappa_i$, где минус относится к реакциям, а плюс к продуктам.

Диффузия, связанная с миграцией материала аналогично изменению для химических реакций.

Перемешивание, которое для трибологии включает перемешивание материала третьего тела [30, 41], увлекаемого в зазор между контактирующими поверхностями

$$\Delta S' = -R \sum_i^n \frac{N_i}{N} \ln \frac{N_i}{N}, \quad N = \sum_i^n N_i, \quad (14)$$

где R – универсальная газовая постоянная, N_i обозначает молярные массы n видов, а отношения N_i / N обозначают молярные фракции.

Теплопередача, связанная с диффузией тепла dQ из области с более высокой температурой T_h в область с более низкой T_l

$$\Delta S' = \left(\frac{1}{T_l} - \frac{1}{T_h} \right) dQ, \quad (15)$$

В работе [35] проведен теоретический и экспериментальный анализ для неравновесной термодинамической структуры с целью получения зависимости скорости износа от нагрузки в стационарном состоянии и конкретизации уравнений (14) для определения условий трения. Показано, что рост износа W при увеличении нагрузки может стать нелинейным из-за уменьшения скорости износа в зависимости от давления p . То есть в определенном диапазоне нагрузок износ может уменьшаться за счет увеличения давления. Это явление объясняется трибологическими реакциями, которые приводят к

образованию износостойчивых оксидных слоев. В [35] учтено влияние другого независимого от непосредственно трения процесса, который представляет собой диффузию материала в трибопленку. Процесс диффузии можно рассматривать как внешний элемент, который приводит к самоорганизации и снижению износа. Рассматривая два диссипативных процесса: трение с силами и потоками в виде $X_1 = -\nabla T/T^2$ и $J_1 = -k\nabla T = \mu Nu$, а также диффузию $X_2 = -\nabla\varphi/T$ и $J_2 = -\gamma_D \nabla\varphi$, из уравнения (7) можно получить следующее выражение для порождения энтропии:

$$\frac{d_i S}{dt} = \frac{(pu)^2 \mu^2 A^2}{kT^2} + \frac{\gamma_D (\nabla\varphi)^2}{T}, \quad (16)$$

где φ – химический потенциал, γ_D – коэффициент переноса, p и A – давление и номинальная площадь контакта, $p = N/A$.

В работе [35] предполагается, что в неравновесном стационарном состоянии износ трибопленки пропорционален γ_D , а pu является характеристикой трения. Поэтому в стационарных условиях анализ выполняется для малых γ_D :

$$\left(\frac{d}{d(pu)} \right)_T \frac{d_i S}{dt} = \frac{2(pu)^2 \mu^2 A^2}{kT^2} + \frac{d\gamma_D (\nabla\varphi)^2}{T}, \quad (17)$$

Полагая (17) равным нулю и интегрируя, получаем:

$$\gamma_D = \gamma_{D0} - \frac{(pu)^2 \mu^2 A^2}{kT(\nabla\varphi)^2}, \quad (18)$$

где γ_{D0} – константа интегрирования.

Уравнение (18) показывает, что в стационарных условиях при увеличении pu уменьшается γ_D . Следует упомянуть, что γ_D считается пропорциональным износу W . Поэтому в стационарных неравновесных условиях уравнение (18) предлагает процедуру уменьшения износа с увеличением pu .

Отметим, что взаимосвязь нормированного износа и нормированной энтропии экспериментально представляется (для различных условий трения) [29, 36] в виде квазилинейных зависимостей (рис. 1).

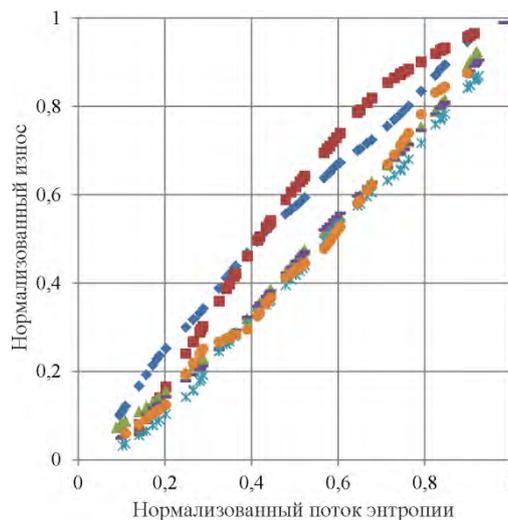


Рис. 1. Нормализованный износ от нормированной энтропии (Doelling и др. [29, 36])

Таким образом, учет процессов трения и изнашивания в производстве энтропии выполняется путем советующей корректировки ее традиционного термодинамического представления. Поэтому полученные решения имеют те же недостатки, которые при-

сути для термодинамической и термомеханической энтропии (см. пп. 1 и 2). Заметим также, что трибологический анализ ведется по параметру w термодинамической деградации пары трения, механическое содержание которого не вполне ясно. Однако ясно, что это не износ, т.е. не тот физический параметр, который может и должен быть измерен в условиях эксплуатации и испытаний.

4. Энтропия в процессах усталостного повреждения. В ряде работ [15–19, 28, 31–33, 38, 39, 40, 49] анализируются процессы накопления усталостного повреждения на базе традиционного представления об энтропии. Один из подходов изложен ниже.

Согласно неравенству Клаузиуса-Дюгема в твердых телах с внутренним трением образование энтропии, обусловленное пластической деформацией и тепловой диссипацией [38, 40].

$$\dot{s} = \frac{w_p}{T} - J_q \cdot \frac{\text{grad } T}{T^2}, \quad (19)$$

где \dot{s} – скорость производства энтропии ($\dot{s} \geq 0$), J_q – тепловой поток, T – температура поверхности, w_p – циклическая пластическая энергия на единицу объема, которая может быть рассчитана с использованием приближения Морроу [37]:

$$w_p = AN_f^\alpha, \quad (20)$$

где константы A и α являются характеристиками материала (см. табл. 1) и могут быть рассчитаны из следующего соотношения [37]:

$$A = 2^{2+b+c} \sigma'_f \varepsilon'_f \left(\frac{c-b}{c+b} \right), \quad (21)$$

$$a = b + c \quad (22)$$

где ε'_f – коэффициент усталостной пластичности и σ'_f – коэффициент усталостной прочности; b и c – параметры.

Таблица 1 – Усталостные свойства [29, 36]

Материал	A	α
Al-6061	930,8	-0,964
SS 304	236	-0,501

Таблица 2 – Условия усталостных испытаний

Усталостные испытания	Частота (Hz)	Амплитуда смещения (мм)	Толщина (мм)
Изгиб	6–18	20–51	3–7

В малоцикловой усталости, когда производство энтропии из-за пластической деформации доминирует, производство энтропии за счет теплопроводности пренебрежимо мало [38], и тогда:

$$\dot{s} = \frac{w_p}{T}, \quad (23)$$

Накопление производства энтропии можно получить в виде:

$$s = \int_0^t \left(\frac{w_p}{T} \right) dt, \quad (24)$$

В начале разрушения, т. е. когда $t = t_f$, энтропия усталости трещины (FFE) для данного материала соответствует значению s_g , а N_f – соответствующее число циклов [38].

Вычисление энтропии проводится на основе измерений температуры и приближения циклической энергии (23). Уравнение (7) затем используется для определения эволюции усталостного повреждения.

Согласно [38], одновременно с ростом деградации энтропия непрерывно возрастает в сторону энтропии усталостного разрушения (FFE). Исследования показывают, что независимо от схемы испытаний на механическую усталость (т. е. изгиб, кручение или сжатие–растяжение), FFE остается постоянной для данного материала. В частности, для Al 6061-T6, $FFE \cong 4 \text{ MJm}^{-3} \text{ K}^{-1}$ и для SS 304, $FFE \cong 60 \text{ MJm}^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Развитие повреждений и нормализованное производство энтропии показано на рисунках и 2а и 2б для Al 6061-T6 и SS 304 соответственно. Данные результаты нормированы относительно значений FFE для AL6061-T6 и SS 304. Эти результаты имеют два важных значения: (а) накопление усталостного повреждения не зависит от нагрузки, частоты и геометрии; (б) поведение повреждений при переменной нагрузке не имеет точки перелома и не зависит от многоступенчатой последовательности нагрузки. По мере того, как повреждение прогрессирует к окончательному разрушению, накопленная энтропия монотонно возрастает до энтропии усталостной трещины (FFE), которая постоянна для данного материала [38]. Заметим, что кумулятивное производство энтропии по отдельным амплитудам суммируется до единицы: $\sum_{k=1}^n (s_k / s_g) = 1$. Эта концепция может быть использована в качестве критерия мониторинга усталостного повреждения системы до наступления разрушения.

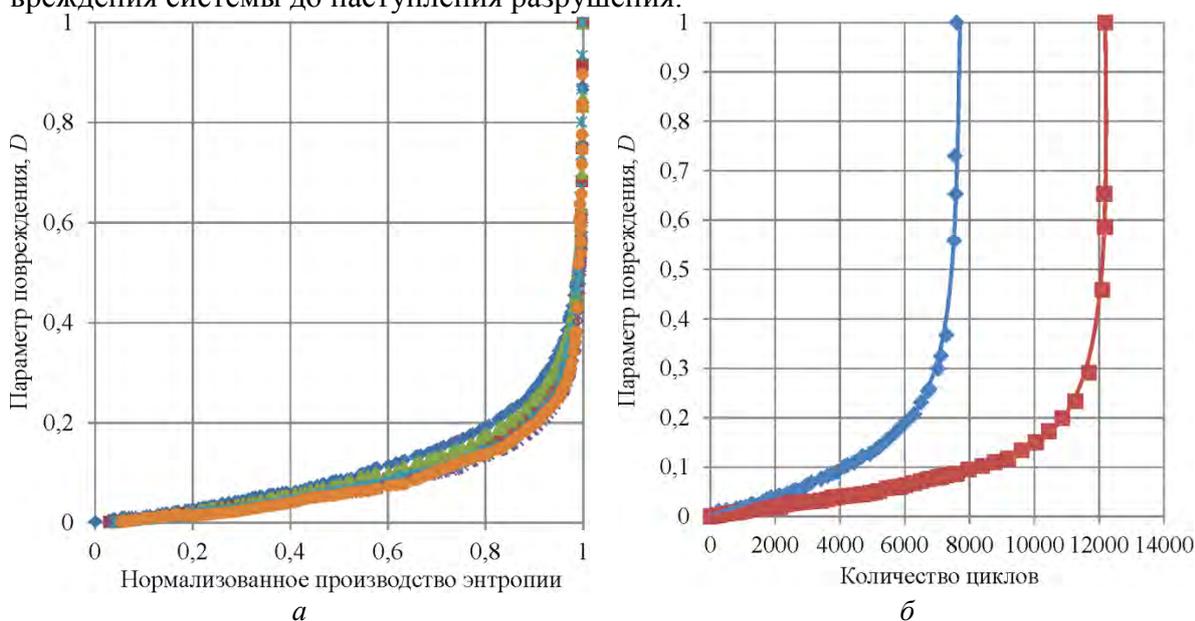


Рис. 2. Развитие повреждений по сравнению с нормализованным производством энтропии (нормализация по отношению к FFE) при различных схемах испытаний на усталость (испытание на изгиб, кручение и растяжение) [21] (а); эволюция повреждений в зависимости от усталостной долговечности [21] для SS 304 при нагрузке от 46,99 до 36,83 (мм) и от 36,83 до 46,99 (мм) (б)

Таким образом, учет усталостного повреждения в оценке энтропии базируется на оценке циклической пластической деформации w_p . Поэтому речь здесь идет только о малоцикловой усталости (рисунок 2,б). Процессы многоцикловой усталости, которые имеют важнейшее практическое значение, здесь не учитываются.

5. Трибофатическая энтропия. В трибофатике [7, 11, 44, 47] особое внимание уделяется анализу физико-механической повреждаемости твердых тел, работающих в сложных и многообразных условиях нагружения.

Согласно обобщенным представлениям [6, 21, 44, 45], повреждение есть изменение состава, строения, структуры, размеров, формы, объема, сплошности, массы и, следовательно, соответствующих физико-химических, механических и других свойств твердых тел; в конечном счете, повреждение связывают с нарушением сплошности и целостности объекта, вплоть до его разложения, например, на атомы (табл. 3) [6, 45]. Таким образом, повреждаемость трактуется как фундаментальное свойство (и обязанность) движущихся и деформируемых систем [6, 21, 44, 45], а разрушение рассматривается как специфический тип повреждения – соответствующее нарушение их сплошности и целостности [8, 46]. Всякое повреждение реально, так как его можно увидеть и измерить; оно, следовательно, объективно, поскольку существует и развивается независимо от нашего сознания, т.е. независимо от того, какие механизмы его образования и развития нам известны.

В трибофатике показано [44], что для силовых систем необратимая повреждаемость ω_Σ есть функция эффективных механической U_M^{eff} , тепловой U_T^{eff} и электрохимической U_{ch}^{eff} энергий, при этом различается эффективная механическая энергия, обусловленная изменением объема (размеров) тела (U_σ^{eff}), и эффективная механическая энергия, обусловленная изменением его формы (U_τ^{eff}):

$$\omega_\Sigma = \omega_\Sigma(U_\sigma^{eff}, U_\tau^{eff}, U_T^{eff}, U_{ch}^{eff}) = \omega_\Sigma(\sigma^2, \tau_w^2, T_\Sigma, v_{ch}(m_v), \Lambda_{\sigma\tau}, \Lambda_{T\setminus M}) = \omega_\Sigma(U_\Sigma^{eff}), \quad (25)$$

Таблица 3 – Характеристика состояний объектов

Основные виды состояния систем	Качественная характеристика поврежденности	Параметр (количественная характеристика) поврежденности	Тип эволюции
<i>A</i> -состояние	Неповрежденное	$\omega_\Sigma = 0$	<i>A</i> -эволюция: характерные состояния системы по поврежденности 
<i>B</i> -состояние	Поврежденные	$0 < \omega_\Sigma < 1$	
<i>C</i> -состояние	Критическое	$\omega_\Sigma = 1 = \omega_c$	
<i>D</i> -состояние	Закритические	$1 < \omega_\Sigma^* < \infty$	
<i>E</i> -состояние	Разложение	$\omega_\Sigma^* = \infty$	

Здесь Λ -функции характеризуют взаимодействие повреждений, обусловленных разными нагрузками (силовой и контактно-фрикционной – индекс $\sigma \setminus \tau$; тепловой и механической – индекс $T \setminus M$ [7]; методика их определения изложена, например в работах [6, 7, 46, 50].

В (25) принимаются известные связи энергии с соответствующими силовыми факторами (σ и τ_w – нормальные и фрикционные напряжения, v_{ch} – скорость электрохимических процессов с учетом свойств (m_v) материала). Эффективной называют энергию, непосредственно расходуемую на образование и развитие необратимых повреждений, т.е. U^{eff} – это поглощенная часть энергии [44], подведенной к системе. Методика ее определения изложена в работах [6, 7, 44, 46, 50]. Там же можно найти и формулы для оценки ω_Σ в различных условиях работы силовых систем. Согласно (25), поврежденность ω_Σ является термомеханической функцией, поскольку учитывает как силовые факторы, так и температуру T_Σ , обусловленную всеми источниками тепла (в том числе при трении и объемном деформировании).

Как правило, необратимые повреждения образуются и накапливаются не во всем (геометрическом) объеме деформируемого твердого тела, а лишь в некоторой его ко-

нечной области с критическим состоянием; эту область называют опасным объемом [44, 50]. Модель тела с опасным объемом разработана в [46], а в работе [7, 11, 44, 47] дано ее обобщение применительно к силовым системам. Так называют всякую механическую систему, которая воспринимает и передает повторно-переменную рабочую нагрузку и в которой одновременно реализуется процесс трения в любых его проявлениях [7, 11, 44, 47]. Для такой системы характерно комплексное – износоусталостное повреждение. Закономерности такого повреждения хорошо известны [7, 11, 44, 47].

Поскольку внутренние необратимые повреждения термомеханической природы возникают вследствие изменения эффективной энергии в опасном объеме $V_{P\gamma}$ системы, то в общем случае

$$dU_{\Sigma}^{eff} = \omega_{\Sigma} dV_{P\gamma}, \quad (26)$$

Методики расчета опасных объемов применительно к различным условиям деформирования твердых тел и силовых систем изложены в работах [7, 11, 44, 47].

И тогда, в соответствии с (2)– (4), можно ввести представление о трибофатической энтропии, изменение которой

$$(d_i S)_{TF} = \frac{\gamma_1^{(w)}}{T_{\Sigma}} \omega_{\Sigma} dV_{P\gamma}, \quad (27)$$

где $\gamma_1^{(w)}$ – давление в единичном опасном объеме.

Таким образом, трибофатическая энтропия служит мерой необратимого поглощения энергии U_{Σ}^{eff} в опасном объеме $w_{P\gamma}$ силовой системы.

Покажем аналогию представлений о трибофатической и термодинамической энтропии.

Согласно термодинамике, в общем случае необратимое изменение энтропии $d_i S$ связано с потоком некоторой величины X (например, теплоты или вещества):

$$d_i S = F dX, \quad (28)$$

где F – термодинамическая сила. Так, при расширении газа в поршневом двигателе давление в объеме газа (p_1) всегда больше, чем давление на поршень (p_2). Тогда разность ($p_1 - p_2$) характеризует градиент давления и представляет собой ту силу на единицу площади, которая перемещает поршень. В случае $T = \text{const}$ необратимое приращение энтропии [34]

$$(d_i S)_T = \frac{p_1 - p_2}{T} dV > 0, \quad (29)$$

Здесь $(p_1 - p_2)/T$ соответствует термодинамической силе (F), а dV характеризует сопряженный с ней термодинамический поток (dX).

Если ω_1 – концентрация повреждений в точке твердого тела с наибольшими напряжениями (p_1), а ω_2 – концентрация повреждений в любой другой точке, в которой напряжение меньше (p_2), то $\omega_2 < \omega_1$, т. е. имеет место градиент повреждений, характеризующий разностью ($\omega_1 - \omega_2$), которая сопряжена с величиной опасного объема $V_{P\gamma}$.

Тогда необратимое приращение трибофатической энтропии при $T_{\Sigma} = \text{const}$

$$(d_i S)_{TF} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{T_{\Sigma}} dV_{P\gamma} > 0, \quad (30)$$

Таким образом, здесь $(\omega_1 - \omega_2)/T_{\Sigma}$ соответствует термомеханической силе (F), поскольку $\omega_1 \sim p_1$ и $\omega_2 \sim p_2$, а $dV_{P\gamma}$ характеризует сопряженный с ней термомеханический поток (X).

Теперь известную сводку [3] термодинамических потоков и сил в некоторых часто наблюдаемых процессах можно дополнить (табл. 4) представлением о трибофатической энтропии.

Таблица 4 – Термодинамические потоки и силы в некоторых часто наблюдаемых необратимых процессах

Явление	Поток	Сила	Характер
Теплоперенос	Тепловой поток, J_{th}	$\nabla(1/T)$	Вектор
Диффузия	Поток массы компонента i , $J_{d,i}$	$-\nabla(\mu_i/T) - F_i$	Вектор
Вязкое течение	Диссипативная часть тензора давления, P	$\nabla v(1/T)$	Тензор 2-го ранга
Химическая реакция	Скорость реакции ρ , ω_ρ	Сродство реакции, деленное на T , A_ρ/T	Скаляр
Повреждение	Поток повреждений, $J_{V_{P\gamma}}$	$L_{\omega_\Sigma}(1/T_\Sigma)$	Тензор 2-го ранга

T – температура; μ_i – химический потенциал компонента i ; F_i – внешняя сила, действующая на единицу массы компонента i ; v – гидродинамическая скорость.
Сродство A_ρ связано с μ_i соотношением

$$A_\rho = -\sum_i \nu_{i\rho} \mu_i,$$

где стехиометрические коэффициенты ν_i дают полное число молекул, образующихся ($\nu > 0$) или исчезающих ($\nu < 0$) в реакции.

Обобщая, запишем (27) через определитель L_{ω_Σ} повреждений системы:

$$(d_i S)_{TF} = \gamma_1^{(w)} \frac{L_{\omega_\Sigma}}{T_\Sigma} dV_{P\gamma}, \quad (31)$$

$$L_{\omega_\Sigma} = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \dots & \omega_{nn} \end{vmatrix} \quad (32)$$

который может состоять из большого числа (n) компонент (ω) – соответственно числу явлений (событий, ситуаций), влияющих на изменение состояния поврежденности системы. Понятие о тензоре повреждений введено в [44, 45]. В общем случае, в соответствии с (25) и (32), имеем [5, 11, 44]

$$\omega_{ij} = \omega_{ij} (\sigma_{ij} / \sigma_*), \quad (33)$$

где σ^* – характеристическое предельное напряжение.

Таким образом, если термодинамическая энтропия есть характеристика рассеяния энергии в среде, то трибофатическая энтропия есть характеристика ее поглощения в деформируемом твердом теле. Было показано [8, 46], что трибофатическая энтропия применима для анализа любых процессов и явлений, сопровождающихся возникновением и развитием необратимых повреждений движущихся и деформируемых твердых тел при действии любых механических нагрузок.

6. Механотермодинамическая энтропия. Теперь рассмотрим открытую термодинамическую систему, содержащую повреждаемое твердое тело; это – механотермодинамическая система [6, 9, 45, 46, 50]. Характерная особенность механотермодинамической системы, в отличие от системы термодинамической, состоит в том, что в ней порождается как термодинамическая, так и трибофатическая энтропия. Полное изменение энтропии в такой системе, в отличие от традиционных представлений об аддитивности энергий, определяется с учетом диалектического взаимодействия (функция $\Lambda_{T\setminus TF}$) повреждений разной природы обусловленных термодинамической (индекс T) и трибофатической (индекс TF) энтропией.

$$(dS)_T + (d_i S)_{TF} = \left[\left(\frac{dU + \Delta p dV}{T} - \frac{1}{T} \sum_1^n \mu_k dN_k \right)_T + \left(\frac{\gamma_1^{(w)}}{T_\Sigma} \omega_\Sigma dW_{P_T} \right)_{TF} \right] \Lambda_{T\setminus TF}, \quad (34)$$

Здесь учтено, что $\Delta p dV = (p_M - p)dV$, $p_M dV$ – механическая энергия, поступающая в систему из внешней среды. Если $\omega_\Sigma = 0$, то (34) сводится к (2).

Уравнение (34) механотермодинамического состояния принципиально отличается от уравнения (3) термодинамического состояния: первое допускает анализ любого состояния системы (в том числе A -, B -, C -, D - и E -состояний поврежденности – см. табл. 3), так как в общем случае $0 \leq \omega_\Sigma \leq \infty$ [6, 44, 45, 50]. Следовательно, согласно (34), именно рост производства трибофатической энтропии (27), обусловленный термомеханическим состоянием системы, может привести ее и к разрушению, и к разложению; в термодинамическом уравнении (3) о подобных состояниях речи не идет.

Для анализа (34) воспользуемся тремя параметрами, которые приведены в табл. 5 [6].

Теперь можно построить, например, рис. 3. При определенных соотношениях параметров, приведенных в табл. 5, уравнение (34) прогнозирует разнообразные и сложные “траектории” энтропии.

Таблица 5 – Параметры, описывающие механотермодинамическое состояние различных систем

Параметр	Характеристика
$\text{div}F(\bullet) \geq 0$	Относительное движение физических точек материи или элементов системы (сходящиеся, расходящиеся и другие процессы)
$\omega_j \geq 0$	Природа процессов необратимой повреждаемости (упрочнение, разупрочнение и т. д.)
$\Lambda \geq 1$	Направленность и интенсивность взаимодействия необратимых повреждений любой природы

В процессе эволюции система может, например, входить в устойчивые и равновесные состояния и выходить из них – так много раз, как это возможно в конкретных условиях ее существования; наблюдаемые точки A_1 , A_2 системы могут сближаться и расходиться либо двигаться практически параллельно [8, 46, 47]; система может претерпевать бифуркации и другие (более сложные) преобразования. Из рис. 3,б следует, что *бифуркации характерны для разупрочняющихся систем*, для которых $\Lambda > 1$. И далее, естественно, возникает вопрос: в чем состоит различие механотермодинамических и термодинамических процессов?

Ответ на этот вопрос иллюстрирует рис. 4. Здесь сплошными линиями показано прогнозируемое поведение термодинамической системы, для которой в (34) принимается $S_{TF} = 0$ и $\Lambda_{T\setminus TF} = 1$; пусть энтропия S_T такой системы стремится к некоторому (например, локальному) максимуму. Поведение механотермодинамической системы

представлено на рис. 4 пунктирными линиями в предположении, что в (34) имеем $S_T \neq 0$ и $\Lambda_{T \setminus TF} > 1$. Принимается, что начальное состояние обеих систем одинаково (точки A_1, A_2). Судьба системы в обоих случаях определяется интенсивностью многообразных необратимых внутренних процессов, обусловленных множеством причин. Но она будет принципиально разной у сравниваемых систем.

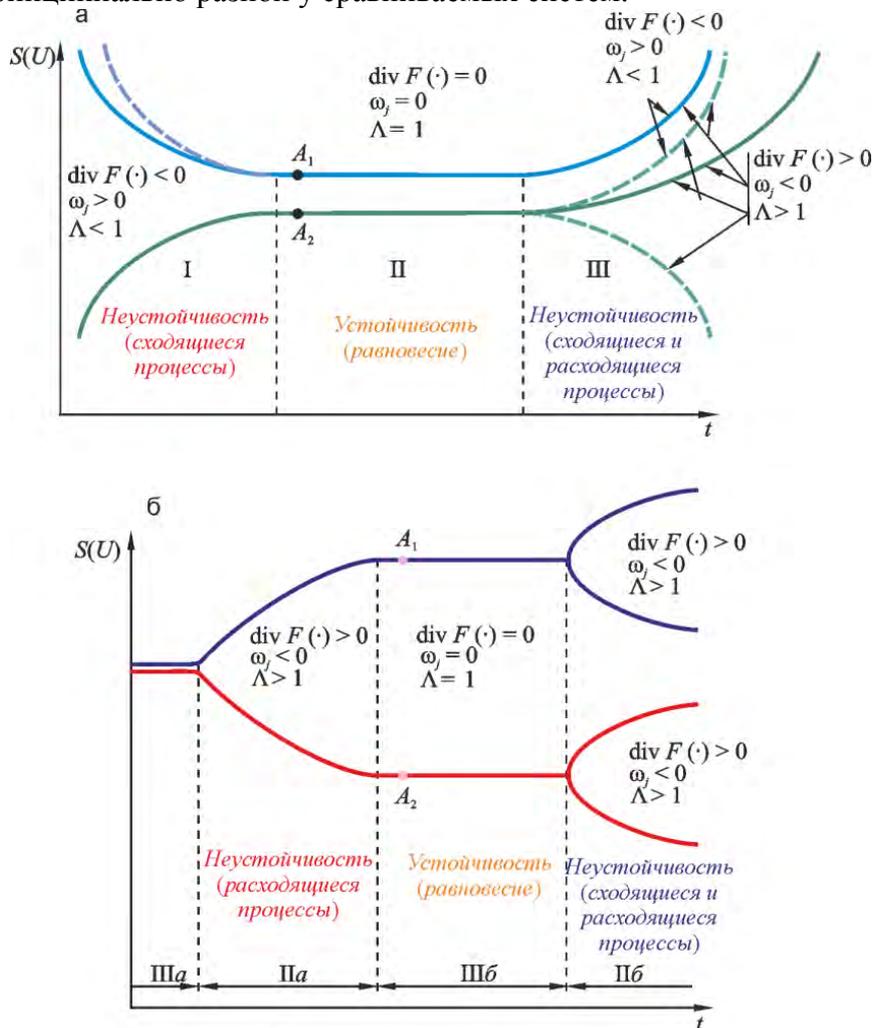


Рис. 3. Возможные переходы системы от неустойчивого к устойчивому состоянию и обратно (а) и возникновение бифуркаций (б)

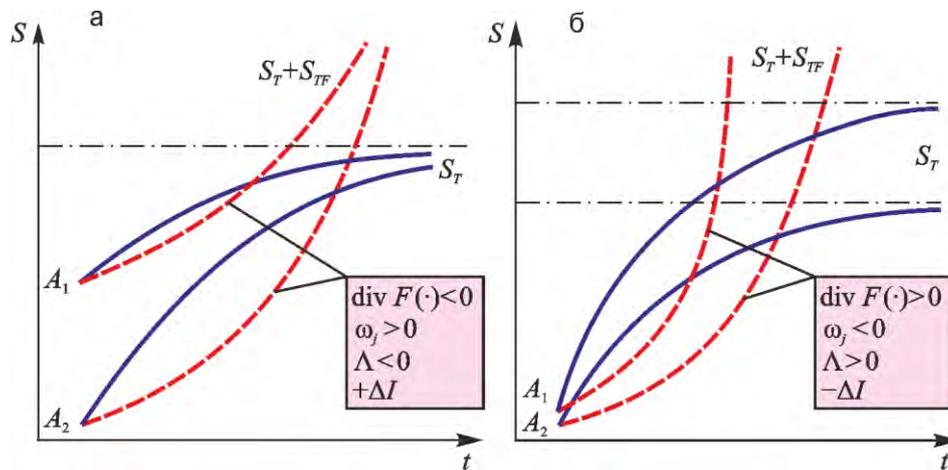


Рис. 4. Эволюция термодинамического (S_T) либо механотермодинамического ($S_T + S_{TF}$) состояния системы (A_1, A_2): а – колебательные и асимптотические сходящиеся процессы (упрочнения); б – колебательные и асимптотические расходящиеся процессы (разупрочнения)

С одной стороны, траектория механотермодинамического состояния ($S_T + S_{TF}$) не может совпадать с траекторией термодинамического состояния (S_T), поскольку в первом случае появляется ненулевая добавка трибофатической энтропии ($S_{TF} > 0$). Это обуславливает количественные различия в траекториях сравниваемых систем. С другой стороны, обнаруживается и принципиальное различие в их поведении: когда энтропия термодинамической системы достигает, например, локального максимума (равновесное состояние), механотермодинамическая система может не иметь такового – и она будет находиться в неравновесном состоянии. Это наблюдается в случаях и сходящихся (см. рисунок 4,а), и расходящихся (см. рис. 4,б) процессов движения, и для упрочняющихся и разупрочняющихся во времени систем, в которых порождается новая положительная либо отрицательная информация. Заметим: консервативная механическая система, по существу, идентична термодинамической системе, поскольку для нее $S_{TF} = 0$. В работах [8, 46] можно найти некоторые обобщения, касающиеся сравнительного поведения термодинамических и механотермодинамических систем.

Объединенная модель (34), как и частные модели (27), (31), прогнозируют гибель системы (например, путем ее разложения), если она эволюционирует по состояниям повреждаемости (25), описанным в табл.3; анализ эволюции такого типа дан в работах [8, 46]. Частная модель (3) является лишь мерой деструктуризации (или упорядоченности) диссипативных структур.

Таким образом, из изложенного следует, что долговечность (или судьба) системы в общем случае определяется интенсивностью процессов необратимого изменения энтропии – термодинамической и трибофатической; производство внутренней механотермодинамической энтропии так же вечно, как и движение и повреждение.

В трибофатике и механотермодинамике [44, 50] изучается взаимодействие между необратимыми повреждениями в движущейся и деформируемой системе; закономерности такого взаимодействия обусловлены полем напряжений (деформаций), возбуждаемых в ней соответствующими неньютоновскими – внутренними силовыми факторами. Пусть, например σ, p, T – такие факторы, генерирующие в МТД-системе соответствующие поля: термодинамические (T) и деформаций (напряжений σ_{ij} , давлений p). Тогда закон (обобщенное правило Сосновского) взаимодействия повреждений $\omega_\sigma, \omega_p, \omega_T$, обусловленных явлениями усталости, трения и изнашивания, изменением термодинамических состояний, дается в форме

$$F_{\Lambda} \left[(\omega_p \rightleftharpoons \omega_{\sigma}) \rightleftharpoons \omega_T] = \left[(\omega_p + \omega_{\sigma}) \Lambda_{\sigma \setminus p} + \omega_T \right] \Lambda_{M \setminus T} = \bar{\omega}_{\Sigma}, \quad \Lambda \geq 1, \quad (35)$$

где Λ – параметры (функции) взаимодействия, которые могут принимать три класса значений: $\Lambda > 1$, $\Lambda = 1$, $\Lambda < 1$ [6, 8, 42, 43, 45, 48, 50]. Если $\Lambda > 1$, для системы характерно разрушение. Если $\Lambda < 1$, в ней преимущественно развиваются процессы упрочнения. При $\Lambda = 1$ система стабильна.

Согласно (35), возможен как анализ системы (целое ω_{Σ} , мыслимое как многое ω_{σ} , ω_p , ω_T), так и ее синтез (многое, мыслимое как целое посредством функций взаимодействия Λ). При этом и анализ, и синтез имеют конкретное количественное выражение – в этом особенность и важное достоинство закона (35). Вторая его важная особенность – здесь речь идет не о внешних силах, как, например, в законах *Ньютона*, а о необратимых повреждениях системы, порождаемых полями внутренних усилий. И, наконец, главное: *не взаимное влияние факторов, а взаимодействия явлений – вот что должна и изучает механотермодинамика*. Тем самым в механике и термодинамике знаменуется переход к феноменоанализу – в дополнение к традиционному факторному анализу.

Изложенное находится в соответствии с первыми двумя принципами механотермодинамики, которые имеют фундаментальное значение (табл.6).

Согласно первому принципу, повреждаемость всего сущего не имеет мыслимых границ. Это, пожалуй, всеобщий закон Природы [8, 46], который, по существу, лежит в основе эволюции любых систем – неорганических и органических. Если диалектическая повреждаемость твердых тел обусловлена процессами упрочнения-разупрочнения, то аналогичные, но конечно, своеобразные процессы обнаруживаются в жидкости (например, рост-уменьшение вязкости), газах (например, повышение-снижение давления), организмах (например, образование-распад клеток) и т.д. Второй принцип механотермодинамики указывает главную причину повреждаемости систем – это внутренние необратимые Λ -взаимодействия составляющих эффективной энергии (энтропии), обусловленные источниками разной природы. Далее естественно возникают вопросы о масштабах повреждаемости, ибо, как показано, именно размеры опасного объема определяют состояние объекта по уровню повреждаемой энтропии. Следовательно, они непосредственно характеризуют опасность его функционирования.

Таблица 6 – Принципы механотермодинамики

Содержание	Формализация	Следствие
<p><i>Первый принцип</i> Повреждаемость всего сущего не имеет мыслимых границ</p>	$\bar{\omega}_{\Sigma} = \bar{\omega}_{\Sigma} (U_{\Sigma}^{eff}) \xrightarrow{t} \infty$ $d_{\omega}^* = e^{-\bar{\omega}_{\Sigma}} \xrightarrow{t} 0$	<p>Производство внутренней механотермодинамической энтропии так же вечно, как и движение и повреждение; это значит, что энтропия Вселенной возрастает.</p> <p>Закон возрастания энтропии</p> $dS_{total} = \Lambda_{T \setminus TF} [(dS)_T + (d_i S)_{TF}] =$ $= \Lambda_{T \setminus TF} \left[\frac{dU + pdV}{T} - \frac{1}{T} \sum_1^n \mu dN_k + \right.$ $\left. + \gamma_1^{(w)} \frac{L_{\omega_{\Sigma}}}{T_{\Sigma}} dV_{P\gamma} \right] \uparrow$

<p><i>Второй принцип</i> Потоки эффективной энергии (энтропии), обусловленные источниками разной природы, не аддитивны – они диалектически взаимодействуют во времени</p>	$U_{\Sigma}^{eff} = U_{\Sigma}^{eff}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m, U_1^{eff}, \dots, U_n^{eff}, \vec{t}),$ $S_i = S_i(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m, S_i^{(1)}, \dots, S_i^{(n)}, \vec{t}),$ $m < n$	<p>Эффективная энергия, поглощенная в системе в процессе достижения ею критического (предельного) состояния, тождественно равна высвободившейся (и рассеянной) энергии в процессе ее деградации вплоть до разложения. Закон сохранения эффективной энергии</p> $\int_0^{T_{\oplus}} u_{\Sigma}^{eff}(t) dt \equiv \int_{T_{\oplus}}^{T_*} u_{\Sigma}^{\Sigma}(t) dt$
<p><i>Третий принцип</i> Развитие процессов необратимой повреждаемости возможно и реализуется с некоторой вероятностью $P > 0$, когда в системе возникает конечная область с ненулевым уровнем эффективной энергии (внутренней энтропии) – опасный объем. Если $V_{P\gamma} = 0$, система стабильна, и ее эволюция по поврежденности невозможна</p>	$V_{P\gamma} \in V_{P\gamma}(U_{\Sigma}^{eff}(S_i), \vec{t}) > 0$	<p>Развитие и деградация системы есть процесс роста во времени пространства ее множественной и многокритериальной поврежденности</p> $0 < V_{P\gamma}^j(t) \uparrow < V_k, \quad j = 1, 2, 3, \dots$

7. Обсуждение результатов исследований. Проанализируем далее обобщенный характер представления о механотермодинамической энтропии применительно к двум практически важным (частным) повреждениям твердых тел: 1) при трении и изнашивании и 2) при циклическом деформировании в среде с температурой T . Комплексное повреждение ω_{Σ} , содержащееся в (26) и (27) представляется, согласно [44, 50], для простейших условий нагружения следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_{\Sigma} &= [(\omega_{\sigma} + \omega_{\tau})\Lambda_{\sigma\tau} + \omega_T]\Lambda_{T\setminus M} = \left[\left(\frac{U_{\sigma}}{U_0} + \frac{U_{\tau}}{U_0} \right) \Lambda_{\sigma\tau} + \frac{U_T}{U_0} \right] \Lambda_{T\setminus M} = \\ &= \left[\left(\frac{a_{\sigma}\sigma^2}{U_0} + \frac{a_{\tau}\tau_w^2}{U_0} \right) \Lambda_{\sigma\tau} + \frac{a_T T}{U_0} \right] \Lambda_{T\setminus M} \end{aligned} \quad (36)$$

где ω_{σ} , ω_{τ} , ω_T – соответственно повреждения при циклическом деформировании (под действием нормального напряжения σ), трении скольжения с износом (под действием фрикционного напряжения τ_w) и при тепловом воздействии (температура T).

Применительно к уравнению (36) можно записать правило Сосновского–Щербакова взаимодействия термодинамической и трибофатической энтропии

$$(S_T + S_{TF})\Lambda_{T\setminus TF} = S_{total}, \quad \Lambda_{T\setminus TF} \geq 1 \quad (37)$$

которое аналогично правилу (35).

В частном случае трения с изнашиванием из (36) имеем (принимая $\omega_\sigma = 0$ и, следовательно, $U_\sigma = 0$):

$$\omega_\Sigma = \omega_{\tau\setminus T} = \left(\frac{U_\tau}{U_0} + \frac{U_T}{U_0} \right) \Lambda_{T\setminus M} = \left(\frac{a_\tau \tau_w^2}{U_0} + \frac{a_T T}{U_0} \right) \Lambda_{T\setminus M} \quad (38)$$

Очевидно, что предельное состояние пары трения достигается при условии

$$\omega_{lim} = \omega_{\tau\setminus T} = 1 \quad (39)$$

т.е.

$$\left(\frac{a_\tau \tau_f^2}{U_0} + \frac{a_T T}{U_0} \right) \Lambda_{T\setminus M} = 1 \quad (40)$$

когда величина τ_w достигнет значения предела фрикционной усталости τ_f (при заданной температуре T).

Из (39) нетрудно получить уравнение

$$\lg \tau_f = \frac{1}{2} \lg C_T \quad (41)$$

$$C_T = \frac{U_0 / \Lambda_{T\setminus M} - a_T T}{a_\tau} \quad (42)$$

согласно которому зависимость $\tau_f(C_T)$ в двойных логарифмических координатах должна быть прямой с углом наклона равным (1/2).

Анализ повреждений при механической усталости аналогичен. Так, из (36) при $\tau_w = 0$ и, следовательно, $U_\tau = 0$ и (38) имеем

$$\omega_\Sigma = \omega_{\sigma\setminus T} = \left(\frac{U_\sigma}{U_0} + \frac{U_T}{U_0} \right) \Lambda_{T\setminus M} = \left(\frac{a_\sigma \sigma^2}{U_0} + \frac{a_T T}{U_0} \right) \Lambda_{T\setminus M} \quad (43)$$

что дает условие предельного состояния (усталостное разрушение)

$$\omega_{lim} = \omega_{\sigma\setminus T} = 1 \quad (44)$$

т.е.

$$\left(\frac{a_\sigma \sigma_{-1}^2}{U_0} + \frac{a_T T}{U_0} \right) \Lambda_{T\setminus M} = 1 \quad (45)$$

откуда

$$\lg \sigma_{-1} = \frac{1}{2} \lg C_T \quad (46)$$

$$C_T = \frac{U_0 / \Lambda_{T\setminus M} - a_T T}{a_\sigma} \quad (47)$$

что аналогично (41) и (42).

По (36) можно сделать анализ и более сложного случая комплексного износоусталостного повреждения, когда в трибофатической системе одновременно реализуется и трение скольжения ($\tau_w > 0$) и циклическое деформирование ($\sigma > 0$):

$$\omega_\Sigma = \omega_{\sigma\setminus\tau} = \left(\frac{a_\sigma \sigma^2(T)}{U_0} + \frac{a_\tau \tau_w^2(T)}{U_0} \right) \Lambda_{\sigma\setminus\tau} \quad (48)$$

откуда аналогично предыдущему получаем уравнение предельных состояний

$$\left(\frac{a_\sigma \sigma^2(T)}{U_0} + \frac{a_\tau \tau_w^2(T)}{U_0} \right) \Lambda_{\sigma\tau} = 1 \quad (49)$$

В случае (49) анализ предельных состояний ведется по обоим критериям – либо износу, либо усталостному разрушению с учетом взаимного влияния (взаимодействия) обоих повреждающих явлений [11]. Так, если изучают прямой эффект (влияние процессов трения и изнашивания как сопротивление механической усталости) [44], то из (48) имеем (при $\sigma = \sigma_{-\tau}$):

$$\lg \sigma_{-\tau} = \frac{1}{2} \lg C_T \quad (50)$$

$$C_T = \frac{U_0 / \Lambda_{\sigma\tau} - a_\tau \tau_w^2}{a_\sigma} \quad (51)$$

А если, напротив, изучают обратный эффект (влияние процессов усталостного повреждения на изменение износостойкости) [44], то из (48) аналогично имеем (при $\tau_w = \tau_{f\sigma}$):

$$\lg \tau_{f\sigma} = \frac{1}{2} \lg C_T \quad (52)$$

$$C_T = \frac{U_0 / \Lambda_{\sigma\tau} - a_\sigma \sigma^2}{a_\tau} \quad (53)$$

Обобщая, аналогичные зависимости можно получить и для анализа предельных состояний при статическом деформировании (растяжение, изгиб, кручение).

В табл. 7 и 8 дана сводка физических признаков различных (часто встречающихся на практике) признаков предельного состояния, которая может быть полезной специалистам в соответствующих областях исследований.

Таблица 7 – Сводка основных физических признаков предельного состояния

Обозначение	Физическое состояние и его характеристика	Условие достижения предельного (критического) состояния
М	Механическое состояние σ_{ij}	$u_n^{eff} \xrightarrow{\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_{lim}} u_0$
Т	Термодинамическое состояние T_Σ	$u_T^{eff} \xrightarrow{T_\Sigma \rightarrow T_S} u_0$
MTD	Механотермодинамическое состояние σ_{ijT}, T_Σ	$u_\Sigma^{eff} \xrightarrow[T_\Sigma \rightarrow T_S]{\sigma_{ijT} \rightarrow \sigma_{lim}(T)} u_0$
tMTD	Механотермодинамическое состояние во времени $\sigma_{ijT}, T_\Sigma, t$	$u_\Sigma^{eff} \xrightarrow[t \rightarrow t_{lim}]{T_\Sigma \rightarrow T_S, \sigma_{ijT} \rightarrow \sigma_{lim}(T)} u_0$
<p>Обозначения: σ_{lim} – предельное напряжение; T_S – температура плавления; t_{lim} – долговечность; σ_{ij} – тензоры напряжений (деформаций); T_Σ – температура, обусловленная всеми источниками тепла; σ_{ijT} – тензор напряжений при изотермическом ($T_\Sigma = const$) состоянии; σ_{ijT}, T_Σ – напряженно-деформированное и термодинамическое состояние; $\sigma_{ijT}, T_\Sigma, t$ – напряженно-деформированное и термодинамическое состояние во времени.</p>		

Приведем некоторые результаты экспериментальной проверки изложенных решений.

Рассмотрим случаи реализации процессов трения скольжения с износом – при фрикционной и фрикционно-механической усталости. Исходные данные для анализа приведены в табл.9. Выполним экспериментальную проверку уравнений (41) и (52) для трех серий испытаний с амплитудой циклической изгибающей нагрузки σ_a , равной 0, 160 и 256 МПа.

Согласно (52), зависимость предела фрикционной усталости $\tau_{f\sigma}$ от параметра C_T в двойных логарифмических координатах оказывается прямой линией с коэффициентом наклона, равным 0,5 (рис. 5). Эта закономерность хорошо согласуется с экспериментальными данными: коэффициенты корреляции здесь превышают $r > 0,95$.

Результаты поверки зависимости $\sigma_{-1T}(C_T)$ представлены на рисунке 6.

Экспериментально показано, что изложенный подход хорошо работает и при статическом растяжении различных материалов (рис. 7).

При этом оказывается, что зависимости $\sigma_{-1T}(C_T)$ и $\sigma_{uT}(C_T)$ ложатся на единую прямую (рис. 8).

Таблица 8 – Конкретизация характеристик и соответствующих им физических признаков предельного состояния

Условие достижения предельного состояния	Физический признак	Критические значения энтропии S_i
$\sigma_{lim} = \sigma_b$, σ_b – предел прочности при растяжении	Статическое разрушение	S_b
$\sigma_{lim} = \sigma_{-1}$, σ_{-1} – предел выносливости при механической усталости	Усталостное разрушение (на части)	S_{-1}
$\sigma_{lim} = p_f$, p_f – предельное контактное давление при качении	Ямки выкрашивания критической плотности (критической глубины), недопустимый износ	S_f
$\sigma_{lim} = \tau_f$, τ_f – предельное фрикционное напряжение при скольжении	Износ предельной величины	S_τ
$\sigma_{lim} = \begin{cases} \sigma_{-1p} \\ \sigma_{-1\tau} \end{cases}$, $\sigma_{-1p}, \sigma_{-1\tau}$ – предельные напряжения при реализации прямого эффекта	Усталостное разрушение (на части) в зависимости от контактного давления (индекс p) при качении или фрикционного напряжения (индекс τ) при скольжении (прямой эффект)	S_{-1p} $S_{-1\tau}$
$\sigma_{lim} = \begin{cases} p_{f\sigma} \\ \tau_{f\sigma} \end{cases}$, $p_{f\sigma}, \tau_{f\sigma}$ – предельные напряжения при реализации обратного эффекта	Ямки выкрашивания критической плотности (критической глубины) или недопустимый износ (при качении или скольжении) в зависимости от уровня циклических напряжений (индекс σ) (обратный эффект)	S_{pf} $S_{f\sigma}$

$\sigma_{\text{lim}} = \sigma_{-1q}$, σ_{-1q} – предел выносливости при фреттинг-усталости	Усталостное разрушение при фреттинг-коррозии и (или) фреттинг-износе	S_{-1q}
$\sigma_{\text{lim}T} = \sigma_{-1T}$, σ_{-1T} – предел выносливости при изотермической усталости	Предельное состояние в зависимости от температуры (изотермическая усталость)	S_{-1T}
$T_{\text{lim}} = T_S$, T_S – температура плавления	Тепловое (термодинамическое) разрушение	S_{TS}
$t_{\text{lim}} = t_c$, t_c – долговечность	Время (физическое) до наступления предельного состояния по любому признаку	S_t

Таблица 9 – Исходные данные

Параметр	Значение параметра	
	сталь 45	силумин
U_0 , кДж/моль	419	222
$T_{\text{пл}}$, К	1773	830
σ_{-1} , МПа	280	42
τ_{-1} , МПа	170	30
a_T	0,236	0,267
a_σ	0,005	0,126
a_τ	0,014	0,247

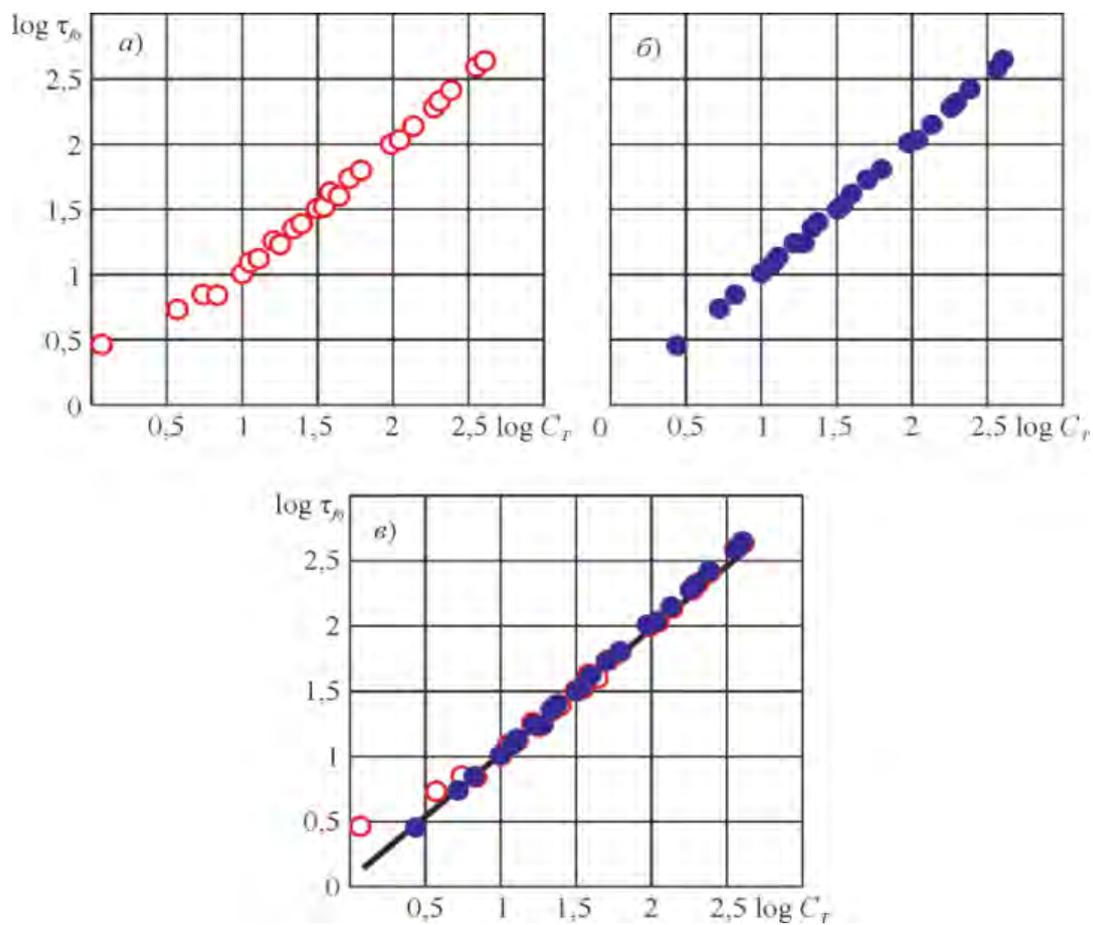


Рис. 5. Зависимости $\tau_{f\sigma}(C_T)$ для стали 45 (а), силумина (б) и их совмещенное представление (в)

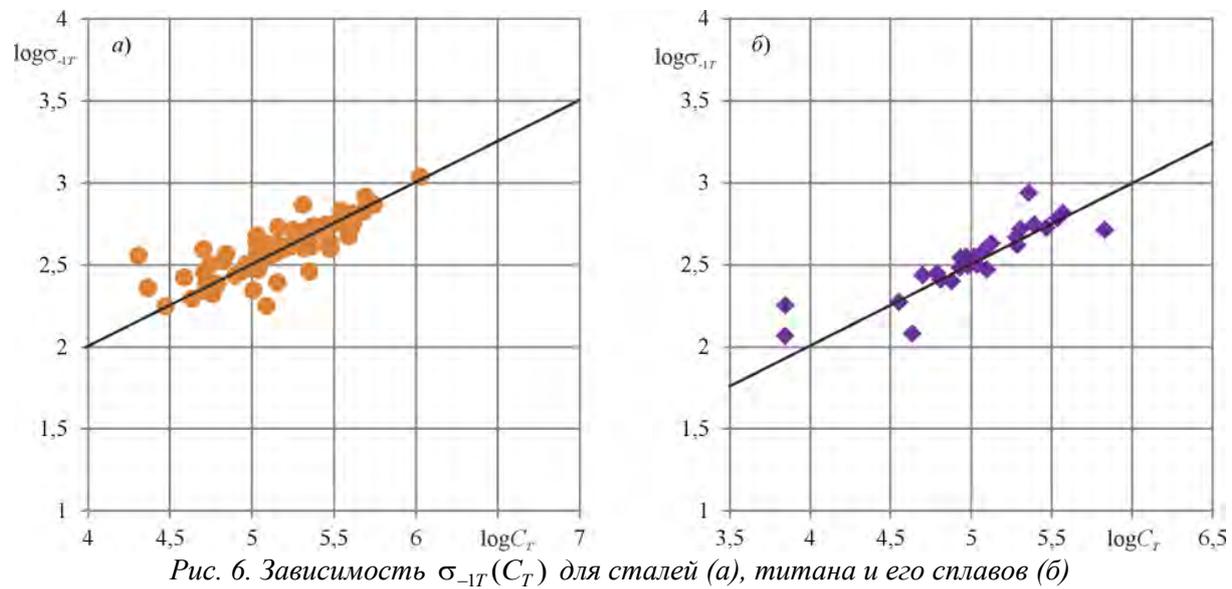


Рис. 6. Зависимость $\sigma_{-1T}(C_T)$ для сталей (а), титана и его сплавов (б)

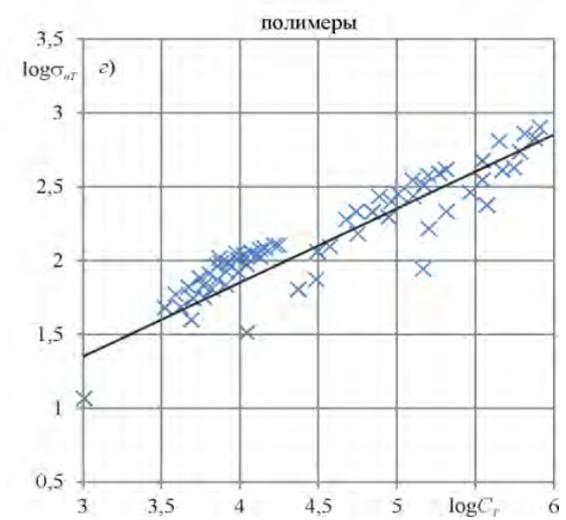
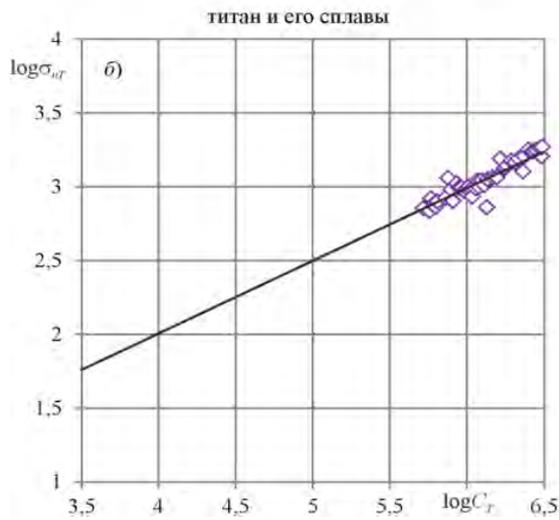
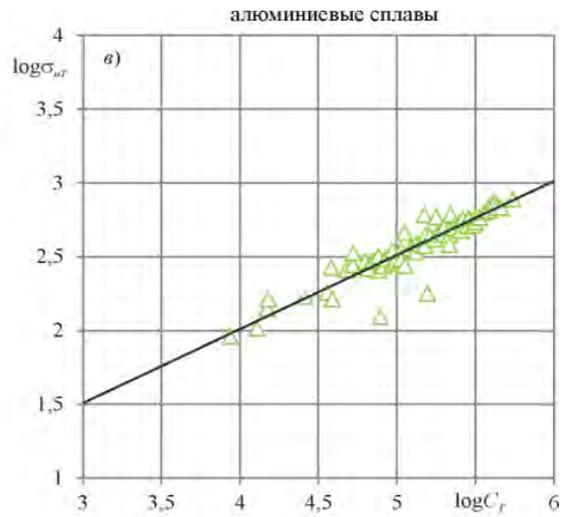
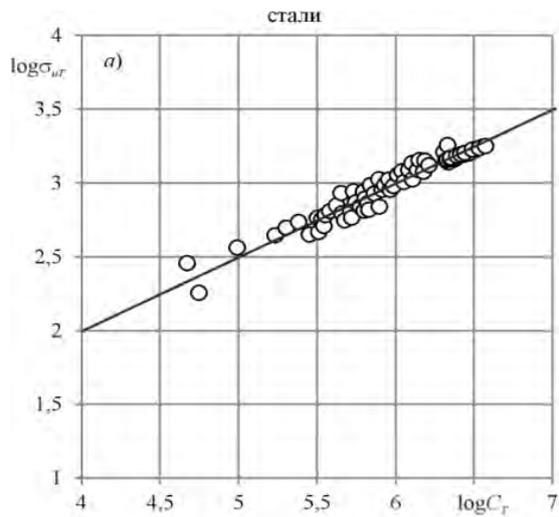


Рис.7. Зависимость $\sigma_{UT}(C_T)$ для металлов (а, б, в) и полимеров (г)

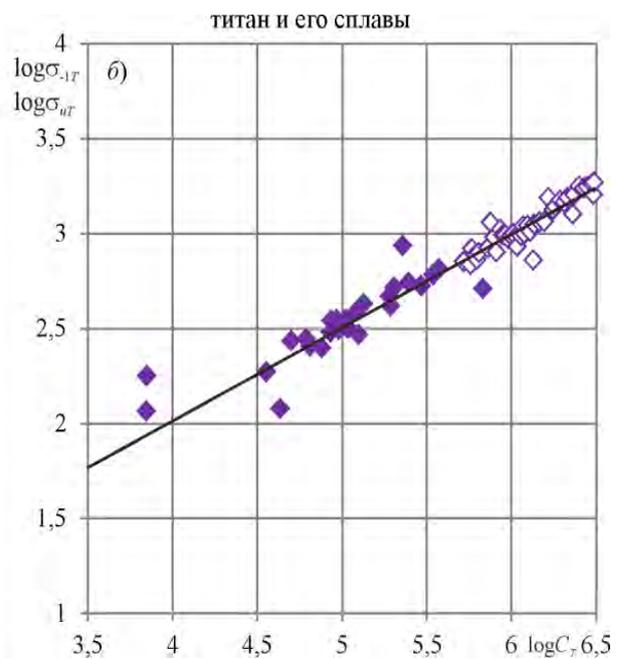
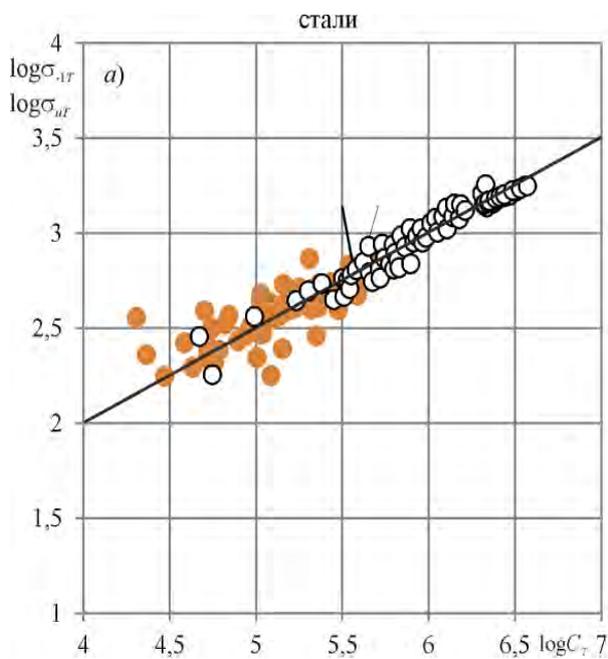


Рис. 8. Совмещенные зависимости $\sigma_{1T}(C_T)$ (затемненные точки) и $\sigma_{UT}(C_T)$ (светлые точки) для различных сплавов (б)

Таким образом, сравнительный анализ результатов механико-математического моделирования с экспериментальными результатами показал, что разработанная теория удовлетворительно работает и в условиях статического нагружения, и в условиях усталостного разрушения, и в условиях поверхностного контактного повреждения для материалов разной природы в широких интервалах возможного изменения температуры ($T_{\Sigma} \leq T_s$) и напряжений ($\sigma \leq \sigma_b$).

Выше кратко проанализированы результаты обширных испытаний металлов и их сплавов, выполненные многими авторами. И установлено, что термодинамическая зависимость предельных напряжений может быть представлена в координатах $\lg \sigma_{\text{lim}} - \lg C_T$ [см. формулы (42), (46), (50)], где функция

$$C_T = C_T(T, u_0, a_n, a_T, \Lambda_{MT}) \quad (54)$$

удовлетворительно работает и в условиях статического растяжения ($\sigma_{\text{lim}} = \sigma_b$), и в условиях усталостного разрушения ($\sigma_{\text{lim}} = \sigma_{-1}$) для многих и разных металлических материалов (стали; алюминиевые, титановые и др. сплавы и т.д.). При этом взаимосвязь $\log \sigma_{\text{lim}} - \log C_T$ оказывается справедливой практически в полных интервалах возможного изменения температуры ($T_{\Sigma} \leq T_s$) и напряжений ($\sigma \leq \sigma_b$) с коэффициентом корреляции $r = 0,7$ в отдельных случаях, обычно же $r > 0,9$. Таким образом, разработанная модель представляется фундаментальной (рис. 9).

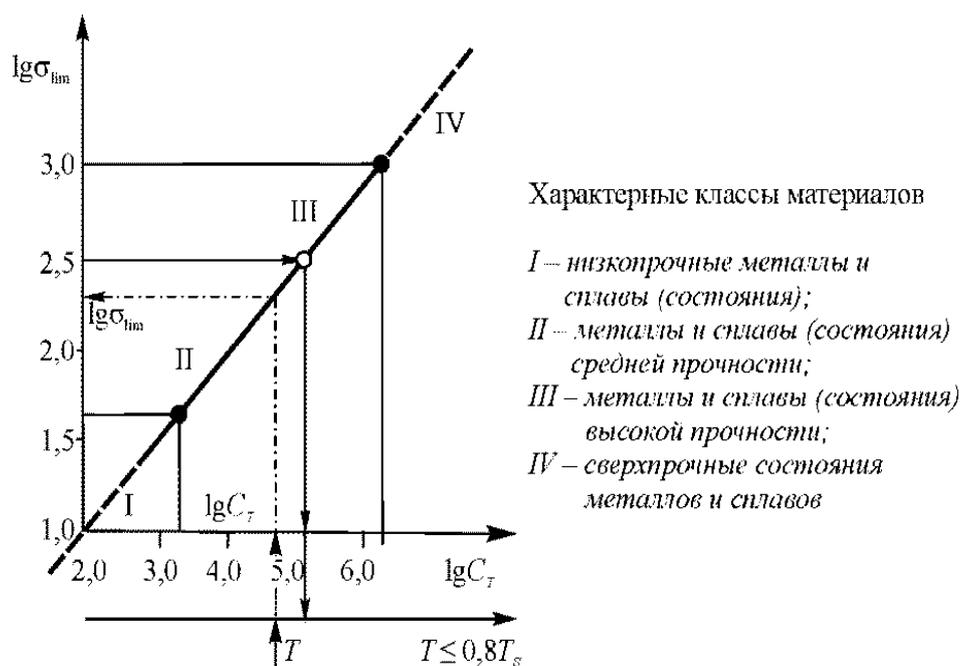


Рис. 9. Обобщенная МТД-функция предельных состояний металлов и сплавов ($\sigma_{\text{lim}} \leq \sigma_b$; $T_{\Sigma} \leq 0,8T_s$)

С теоретической точки зрения можно высказать следующие соображения в пользу разработанной модели. Она имеет четыре параметра, причем один из них (u_0) есть фундаментальная константа вещества, а два других (a_T , a_n) определяются из граничных условий как соотношения u_0 и физических констант σ_d и T_d данного материала:

$$a_n = u_0 / \sigma_d^2, \quad a_T = u_0 / T_d. \quad (55)$$

Методики определения σ_d и T_d описаны в литературе [44]. Здесь же напомним, что предел деструкции σ_d материала определяют при растяжении в условиях, когда $T_\Sigma \rightarrow 0$, а температуру деструкции T_d при нагреве тела – в условиях, когда $\sigma = 0$. Таким образом, в общем случае учитывается *двойственная природа процессов накопления повреждений и разрушения*, обусловленных 1) механической напряженностью и 2) тепловой активацией этой напряженности во времени [5]. Наконец, функция $\Lambda_{MVT} \approx 1$, как кратко описано выше и изложено в литературе [5, 8, 11, 44, 46], учитывает взаимодействие повреждений в связи с изменением соотношений $\sigma \geq \sigma_{lim}$; в известных исследованиях неоднократно и убедительно доказано, что именно это соотношение определяет характер и механизмы повреждений при упругом, неупругом, упруго-пластическом и пластическом деформировании. При этом роль тепловых флуктуаций ($T_\Sigma < T_d$) детально исследована, например, в работе [1].

В заключение проанализируем взаимосвязь между величинами повреждений (ω_Σ), напряжений $\sigma(\tau)$ и энтропией S_i , обусловленной внутренними процессами поврежденной системы. Из (42) и (43) имеем две фундаментальные зависимости.

$$U_\Sigma^{eff} \sim \omega_\Sigma, \quad (56)$$

$$S_i \sim \omega_\Sigma. \quad (57)$$

Последнюю взаимосвязь можно записать через соответствующие напряжения

$$S_i \sim \left| \begin{array}{c} \sigma^2 \\ \tau_w^2, p_0^2, p_a^2 \end{array} \right|. \quad (58)$$

И когда указанные напряжения достигают предельных значений ($\sigma_{lim} = \sigma_{-1}$, $\tau_w = \tau_f$, $p_0 = p_f$ и т.д.), имеем обобщенную взаимосвязь

$$S_k \sim \sigma_{lim}^2. \quad (59)$$

Укажем теперь на естественную взаимосвязь энтропии и напряжений на примере самого простого случая усталостных испытаний цилиндрических образцов диаметром $d = 10$ мм в условиях консольного изгиба с вращением (рис. 10, а – см. кривые усталости).

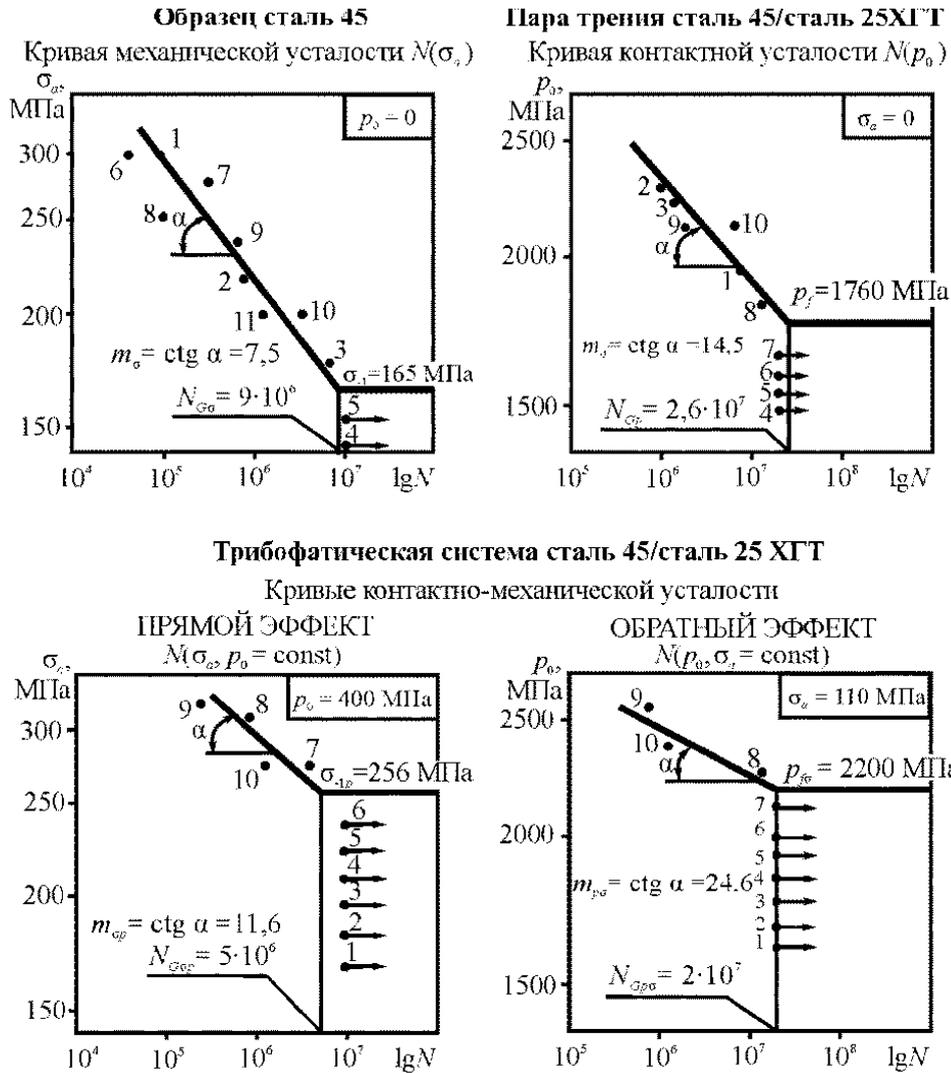


Рис. 10. Результаты испытаний валов (а), пар трения ролик/вал (б) и трибофатических систем (вал/ролик) (с, d) (цифрами 1, 2, ..., 10 указана последовательность испытаний объектов)

В этом случае имеем

$$\omega_{\sigma} = \frac{U_{\sigma}}{U_0} = \frac{a_{\sigma} \sigma^2}{U_0}. \quad (60)$$

Далее, согласно (60), получаем

$$S_{TF} = \frac{a_{\sigma} \sigma^2}{U_0} \cdot \frac{\gamma_1^{(w)}}{T_{\sigma}} \cdot V_{0,5\gamma}. \quad (61)$$

где $V_{0,5\gamma}$ – среднее значение (при вероятности $P = 0,5$) опасного объема при действии σ

$$V_{0,5\gamma} = \frac{1}{3} V_0 \left(1 - \frac{\sigma_{-1\min}}{\sigma} \right)^2 \left(2 + \frac{\sigma_{-1\min}}{\sigma} \right). \quad (62)$$

Из (62) нетрудно вычислить и критическое значение S_{-1} , если принять $\sigma = \sigma_{-1}$. Оно указано на рис. 10, а и в табл. 6. В этой же таблице и на том же рисунке проиллюстрированы и другие случаи связи советующих критических значений энтропии с критическими напряжениями в различных условиях испытаний.

Из изложенного следуют два основных заключения.

1. Любые процессы деформирования твердых тел, завершаемые предельным состоянием, обнаруживают критическую внутреннюю энтропию S_k , соответствующую, например, усталостной поломке, критической плотности ямок выкрашивания, предельному износу и т.д.

2. Взаимосвязь между величинами S_i и $\sigma(\tau)$ пропорциональная (рост одной ведет к повышению другой), но нелинейная, так что в двойных логарифмических координатах $\lg S_i - \lg \sigma(\tau)$ она представляется прямой линией с определенным угловым коэффициентом $\beta = \text{const}$.

Более подробный анализ установленных закономерностей, естественно, выходит за рамки данной работы и требует серьезных аналитических и экспериментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журков, С.Н. Кинетические концепции прочности твердых тел / С.Н. Журков // Изв. АН СССР. — Неорганические материалы. — 1967. Т.3. - №10. - С. 1767-1771.
2. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М., 1974.
3. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного (Введение). Москва, 2003.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М., 1973.
5. Сосновский Л. А. Механика износоусталостного повреждения. Гомель, 2007.
6. Сосновский, Л. А. L-Риск (механотермодинамика необратимых повреждений) / Л. А. Сосновский. — Гомель : БелГУТ, 2004. — 317 с.
7. Сосновский, Л. А. Механика износоусталостного повреждения / Л. А. Сосновский. — Гомель : БелГУТ, 2007. — 434 с.
8. Сосновский, Л. А. Принципы механотермодинамики : [моногр.] / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков. — Гомель : БелГУТ, 2013. — 150 с.
9. Сосновский, Л. А. Статистическая механика усталостного разрушения / Л. А. Сосновский. — Минск : Наука и техника, 1987. — 288 с.
10. Физический энциклопедический словарь. М., 1983.
11. Щербаков, С. С. Механика трибофатических систем / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский. — Минск : БГУ, 2011. — 407 с.
12. Amiri, M.; Khonsari, M.M. On the Thermodynamics of Friction and Wear—A Review. *Entropy* 2010, 12, 1021–1049.
13. Amiri, M.; Khonsari, M.M.; Brahmeshwarkar, S. On the Relationship Between Wear and Thermal Response in Sliding Systems. *Tribol. Lett.* 2010, 38, 147–154.
14. Amiri, M.; Khonsari, M.M.; Brahmeshwarkar, S. An Application of Dimensional Analysis to Entropy-Wear Relationship. *J. Tribol.* 2012, 134, 011604.
15. Basaran, C.; Gunel, E.M. Damage Mechanics Unified Constitutive Modeling for Polymers. In *Handbook of Damage Mechanics*; Springer: New York, NY, USA, 2014.
16. Basaran, C.; Nie, S. An Irreversible Thermodynamic Theory for Damage Mechanics of Solids. *Int. J. Damage Mech.* 2004, 13, 205–224.
17. Basaran, C.; Nie, S.; Gomez, J.; Gunel, E.; Li, S.; Lin, M.; Tang, H.; Yan, C.; Yao, W.; Ye, H. Thermodynamic Theory for Damage Evolution in Solids. In *Handbook of Damage Mechanics*; Springer: New York, NY, USA, 2014.
18. Basaran, C.; Tang, H.; Nie, S. Experimental Damage Mechanics of Microelectronics Solder Joints under Fatigue Loading. *Mech. Mater.* 2004, 36, 1111–1121.
19. Basaran, C.; Yan, C.Y. A Thermodynamic Framework for Damage Mechanics of Solder Joints. *J. Electron. Packag.* 1998, 120, 379–384.
20. Beheshti, A.; Khonsari, M.M. On the Prediction of Fatigue Crack Initiation in Rolling/Sliding Contacts with Provision for Loading Sequence Effect. *Tribol. Int.* 2011, 44, 1620–1628.

21. Bhattacharya, B.; Ellingwood, B. *Continuum Damage Mechanics Analysis of Fatigue Crack Initiation*. *Int. J. Fatigue* 1998, 20, 631–639.
22. Bryant M.D.; Khonsari, M.M. *Application of degradation-entropy generation theorem to dry sliding friction and wear*. In *Proceedings of the STLE/ASME International Joint Tribology Conference, 20-22.10.2008, Miami, FL, USA, 20–22 October 2008*.
23. Bryant M.D.; Khonsari, M.M.; Ling, F.F. *On the thermodynamics of degradation*. *Proc. R. Soc. Lond. A* 2008, 464, 2001–2014.
24. Bryant, M.D. *Entropy and Dissipative Processes of friction and Wear*. *FME Trans.* 2009, 37, 55–60.
25. Bryant, M.D. *Entropy and Dissipative Processes of friction and Wear*. *FME Trans.* 2009, 37, 55–60.
26. Bryant, M.D. *Unification of Friction and Wear*. In *Recent Developments in Wear Prevention, Friction and Lubrication*; Nikas, G., Ed.; Old City Publishing: Philadelphia, PA, USA, 2010; pp. 159–196.
27. Bryant, M.D. *Unification of Friction and Wear*. In *Recent Developments in Wear Prevention, Friction and Lubrication*; Nikas, G., Ed.; Old City Publishing: Philadelphia, PA, USA, 2010; pp. 159–196.
28. Chandaroy, R.; Basaran, C. *Damage Mechanics of Surface Mount Technology Solder Joints under Concurrent Thermal and Dynamic Loadings*. *J. Electron. Packag.* 1999, 121, 61–68.
29. Doelling, K.L.; Ling, F.F.; Bryant, M.D.; Heilman, B.P. *An experimental study of the correlation between wear and entropy flow in machinery components*. *J. Appl. Phys.* 2000, 88, 2999–3003.
30. Godet, M. *Third-bodies in tribology*. *Wear* 1990, 136, 29–45.
31. Gomez, J.; Basaran, C. *A Thermodynamics Based Damage Mechanics Constitutive Model for Low Cycle Fatigue Analysis of Microelectronics Solder Joints Incorporating Size Effect*. *Int. J. Solids Struct.* 2005, 42, 3744–3772.
32. Gomez, J.; Lin, M.; Basaran, C. *Damage Mechanics Modeling of Concurrent Thermal and Vibration Loading On Electronics Packaging*. *Multidiscip. Model. Mater. Struct.* 2006, 2, 309–326.
33. Kim, D.; Dargush, G.; Basaran, C. *A cyclic two-surface thermoplastic damage model with application to metallic plate dampers*. *Eng. Struct.* 2013, 52, 608–620.
34. Kondepudi, D.; Prigogine, I. *Modern Thermodynamics: From Heat Engines to Dissipative Structures*; John Wiley & Sons: Chichester, UK, 1998.
35. Kozyrev, Y.P.; Sedakova, E.B. *Application of a thermodynamic model for analysis of wear resistance of materials*. *J. Machinery Manuf. Reliab.* 2008, 37, 60–62.
36. Ling FF, Bryant MD, Doelling KL. *On Irreversible Thermodynamics for Wear Prediction*. *Wear* 2002, 253, 1165–1172.
37. Morrow, J. *Cyclic Plastic Strain Energy and Fatigue of Metals*. *ASTM Int.* 1965, doi:10.1520/STP43764S.
38. Naderi, M, Khonsari, M.M. *An Experimental Approach to Low-Cycle Fatigue Damage Based on Thermodynamic Entropy*. *Int. J. Solids Struct.* 2010; 4, 875–880.
39. Naderi, M.; Khonsari, M.M. *A Comprehensive Fatigue Failure Criterion Based on Thermodynamic Approach*. *J. Compos. Mater.* 2012, 46, 437–447.
40. Naderi, M.; Khonsari, M.M. *A Thermodynamic Approach to Fatigue Damage Accumulation under Variable Loading*. *J. Mater. Sci. Eng. A* 2010, 527, 6133–6139.
41. Richard, D.; Iordanoff, I.; Berthier, Y.; Renouf, M.; Fillot, N. *Friction coefficient as a macroscopic view of local dissipation*. *J. Tribol.* 2007, 129, 829–835.
42. Shcherbakov, S.S. *Modeling of the Damaged State by the Finite-Element Method on Simultaneous Action of Contact and Noncontact Loads*. *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2012, 85, 472–477.

43. Shcherbakov, S.S. *State of Volumetric Damage of Tribo-Fatigue System. Strength Mater.* 2013, 45, 171–178.
44. Sosnovskiy, L.A. *Tribo-Fatigue: Wear-Fatigue Damage and Its Prediction (Foundations of Engineering Mechanics)*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2005; p. 424.
45. Sosnovskiy, L.A.; Sherbakov, S.S. *Mechanothermodynamical System and Its Behavior. Contin. Mech. Thermodyn.* 2012, 24, 239–256.
46. Sosnovskiy, L.A.; Sherbakov, S.S. *Mechanothermodynamics*; Springer, Cham, Switzerland, 2016. p. 155.
47. Sosnovskiy, L.A.; Sherbakov, S.S. *Surprises of Tribo-Fatigue; Magic Book: Minsk, Belarus, 2009; p. 200.*
48. Sosnovskiy, L.A.; Sherbakov, S.S. *Vibro-Impact in Rolling Contact. J. Sound Vib.* 2007, 308, 489–503.
49. Tang, H.; Basaran, C. *A Damage Mechanics Based Fatigue Life Prediction Model. J. Electron. Packag.* 2003, 125, 120–125.
50. Zhuravkov, M.A.; Sherbakov, S.S.; Krupoderov, A.V. *Modeling of volumetric damage of multielement clamp-knife-base tribo-fatigue system. J. Appl. Math. Mech.* 2017, 97, 60–69.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЙ ФАЛАНГ КИСТИ ЧЕЛОВЕКА ПРИ ПОВРЕЖДЕНИИ СУХОЖИЛИЙ СГИБАТЕЛЕЙ ПАЛЬЦЕВ

¹ С.М. Босяков, ² А.С. Петуховский, ¹ А.О. Степанова, ¹ Е.Е. Крушевская

¹ Белорусский государственный университет, Минск

² Белорусский государственный медицинский университет

Введение. Одной из наиболее обсуждаемых проблем хирургии кисти является травматическое повреждение сухожилий сгибателей пальцев. Согласно [1], раны обоих сухожилий приводят наибольшему числу неблагоприятных отдаленных результатов лечения. Спаечный процесс в низковаскулярной зоне сухожилий вынуждает хирургов отказаться от восстановления поверхностного сгибателя при их одновременном повреждении [2]. Оценка отдаленных результатов лечения на основании субъективных ощущений или внешних показателей функции не позволяет определить вклад каждой мышцы в процесс сгибания пальца и компенсаторное перераспределение сил после резекции сухожилия поверхностного сгибателя пальцев кисти. Целью данной работы является сравнительный анализ максимальных углов сгибания фаланг пальцев кисти с неповрежденными сухожилиями сгибателей и без одного из них на основании конечно-элементного моделирования.

Сгибатели пальцев кисти человека. Основной вклад в сгибание фаланг кисти вносят глубокий и поверхностный сгибатели, которые переходят в сухожилия на уровне предплечья. Точками прикрепления сухожилий являются основание дистальной фаланги для глубокого и середина средней фаланги для поверхностного сгибателя (Рис. 1). Сухожилие поверхностного сгибателя раздваивается и перекрещивается с глубоким сгибателем на уровне проксимальной фаланги. Поверхностный сгибатель закреплен на средней фаланге [1, 2]. Схематичное изображение фаланг пальца кисти руки человека и сгибатели представлены на рисунке 1 (вид сбоку).

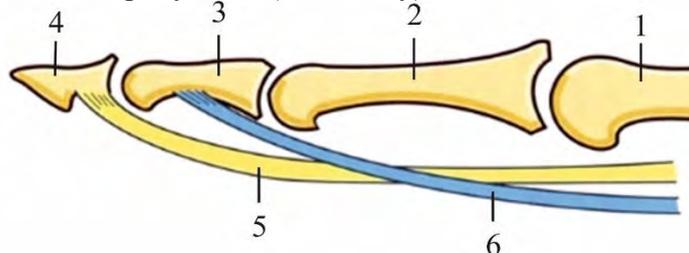


Рис. 1. Схема пальца руки человека: 1 – пястная кость, 2 – проксимальная фаланга, 3 – средняя фаланга, 4 – дистальная фаланга, 5 – сухожилие глубокого сгибателя, 6 – сухожилие поверхностного сгибателя

Для эффективной передачи нагрузок и предупреждения эффекта «тетивы лука» сухожилия плотно прилегают к костным структурам, удерживаясь кольцевидными и крестообразными связками [3].

Компьютерное моделирование. Компьютерное томографии нормальной кисти взрослого человека на аппарате LightSpeed Pro 32: толщина среза $6.25 \cdot 10^{-4}$ м, матрица 512x512 пикселей. Стереолитографическая модель кости правой руки разработана с использованием пакета обработки медицинских изображений MIMICS 14.12 на основании данных томографии кисти человека (толщина среза 625 мкм). Для формирования твердотельной модели пальца применен программный комплекс CATIA V5. Моделиро-

вание сухожилий сгибателей и связочного комплекса производилось в модуле SpaceClaim пакета Ansys Workbench 17.2.

Сухожилия сгибателей окружены серозным слоем и смочены серозной жидкостью для минимального трения в процессе движения пальца [1]. Поэтому коэффициент трения между сгибателями и сухожилиями задается равным нулю, то есть сгибатели могут свободно перемещаться внутри связочного аппарата. Также нулевой коэффициент трения задается между сгибателями и костной тканью пальца, которая так же разделена с ними стенкой влагалища. Твердотельная модель пальца с двумя сгибателями и тремя сухожилиями представлена на рисунке 2.

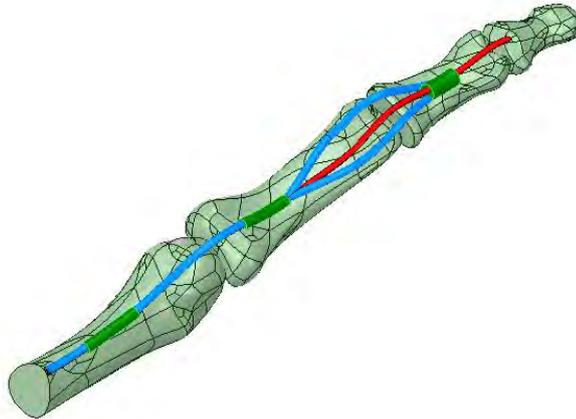


Рис. 2. Твердотельная модель 3 пальца с поверхностным и глубоким сгибателями, удержанные кольцевидными связками

Поперечное сечение пястной кости жестко заделано; все остальные фаланги могут свободно поворачиваться относительно друг друга. Физико-механические свойства костной ткани, сгибателей и сухожилий представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Физико-механические свойства модели среднего пальца человека со сгибателями

Материал	Модуль упругости, ГПа	Коэффициент Пуассона	Плотность, кг/м ³
Костная ткань [4, 5]	13,7	0,33	2000
Сгибатели [4, 5]	1,5	0,49	2000
Сухожилия [4, 5]	0,16	0,45	1700

Конечно-элементный расчет выполнен для значений нагрузки, соответствующих усредненным силам, прикладываемым к сгибателям ненагруженного пальца согласно эмпирическим данным из литературы [6]. Из нулевого положения к глубокому сгибателю для пальца в норме (при наличии двух сгибателей) прикладывалась растягивающая нагрузка 9 Н, к поверхностному сгибателю - нагрузка 4 Н (случай 1). Приложенная к сгибателям нагрузка для пальца в норме обозначена на рисунке 2.

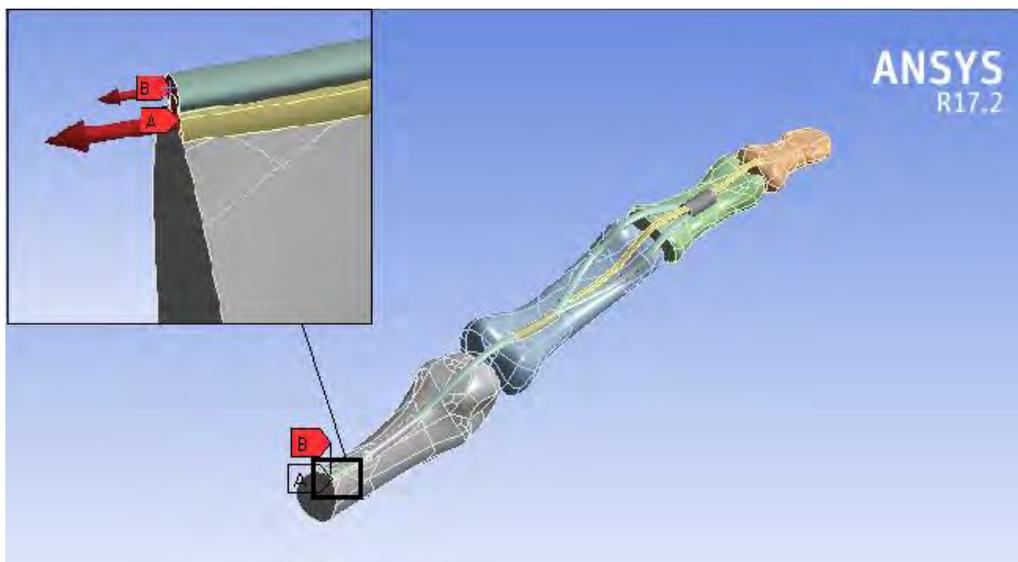


Рис. 2. Приложенная к сгибателям нагрузка: А – нагрузка величиной 9 Н, приложенная к глубокому сгибателю, В – нагрузка величиной 4 Н, приложенная к поверхностному сгибателю

Помимо конечно-элементного расчета для случая 1, соответствующего пальцу в норме, рассматривались еще два случая: случай 2, соответствующий сгибанию пальца при наличии только глубокого сгибателя (поверхностный сгибатель отсекается); случай 3, соответствующий сгибанию пальца при наличии только поверхностного сгибателя (глубокий сгибатель отсекается). В случае 2 к глубокому сгибателю прикладывается нагрузка, равная 9 Н, в случае 3 к поверхностному сгибателю прикладывается сила, равная 4 Н. Конечно-элементное разбиение модели выполнялось в автоматическом режиме.

Определение углов поворота фаланг. На рисунке 3 обозначены углы поворота фаланг относительно друг друга.

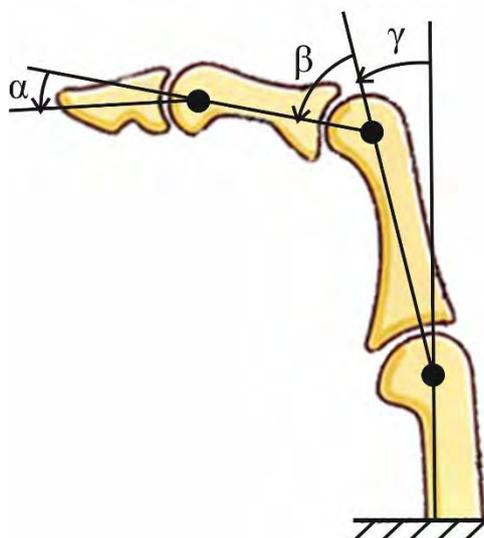


Рис. 3. Углы поворота фаланг относительно друг друга: α – угол поворота дистальной фаланги относительно средней фаланги; β – угол поворота средней фаланги относительно проксимальной фаланги; γ – угол поворота нижней фаланги относительно пястной кости

Значения углов поворота фаланг относительно друг друга для случаев 1-3 приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Углы поворота фаланг пальца относительно друг друга

Углы поворота	Случай 1	Случай 2	Случай 3
Угол α , °	59,8	30,8	0
Угол β , °	15,7	7,4	18,1
Угол γ , °	5,5	0	0
Сумма углов поворота, $\alpha+\beta+\gamma$, °	81	38,2	18,1

Из таблицы 2 видно, что отсечение какого-либо из сгибателей существенно влияет на повороты фаланг относительно друг друга. При отсечении глубокого сгибателя углы поворота дистальной и средней фаланг существенно уменьшаются, причем угол поворота проксимальной фаланги относительно пястной кости уменьшается более чем в два раза. Угол поворота проксимальной фаланги относительно пястной кости практически равен нулю. При отсечении глубокого сгибателя практически не поворачивается дистальная фаланга относительно средней и проксимальная фаланга относительно пястной кости. Но при этом увеличивается угол поворота средней фаланги в проксимальном межфаланговом суставе.

Суммарная амплитуда сгибания при изолированном действии обоих сгибателей после удаления поверхностного падает более чем в 2 раза по сравнению с первоначальным. Таким образом, описанные в литературе, возможные отличные и хорошие отдаленные результаты лечения с восстановлением амплитуд движения можно объяснить увеличением нагрузок на глубокий сгибатель и ладонные межкостные мышцы в процессе реабилитации [2]. Случай 3 наглядно демонстрирует принципиальную невозможность восстановления функции сгибания в дистальном межфаланговом суставе без дополнительных вмешательств.

Заключение. Разработанная модель среднего пальца с поверхностным и глубоким сгибателями позволяет осуществлять анализ поворотов фаланг пальца при действии растягивающей нагрузки на сгибатели. Конечно-элементное моделирование воздействия усредненной нагрузки выполнено для случая двух одновременно действующих сгибателей, а также для случаев отсечения одного из сгибателей при действующем другом сгибателе. Компьютерное моделирование позволяет объективно оценить амплитуды движений под воздействием сил со стороны мышц, без влияния посттравматического отека тканей и болевого синдрома на функцию пальца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bunnell, S. *Surgery of the hand* / S. Bunnell. – Philadelphia, JB Lippincott, 1948. – 627 pp.
2. Boyes, J.H. *Immediate vs delayed repair of the digital flexor tendons* / J. H. Boyes // *Annals of Western Medicine and Surgery* – 1947. – №1 – P.145-152.
3. Neumann, D. A. *Kinesiology of the musculoskeletal system: foundations for rehabilitation* / D.A. Neumann – Mosby, Elsevier Inc., 2010. – 292 pp.
4. Aaron, M. *Continuum description of the Poisson's ratio of ligament and tendon under finite deformation* / M. Aaron [et al.] // *Journal of Biomechanics*. – 2014. – Vol. 47. – P. 3201–3209.
5. Maganaris N. *In vivo human tendon mechanical properties* / N. Maganari, J.P. Paul // *Journal of Physiology*. – 1999. – Vol. 521. – P. 307 – 313.
6. Edsfeldt, S. *In vivo flexor tendon forces generated during different rehabilitation exercises* / S. Edsfeldt [et al.] // *The Journal of hand surgery. European Volume*. – 2015. – Vol. 40. DOI 10.1177/1753193415591491.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ В ПЛАНЕ ОБОЛОЧКИ В УСЛОВИЯХ ЛИНЕЙНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

¹ Агаев В.Н.о., ¹ Мартыненко Т.М., ² Пронкевич С.А., ²Скляр О.Н.,
Мартыненко И.М.

¹ *Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь, Минск*
² *УО «Белорусский национальный технический университет», Минск*

Для современных конструкций характерно увеличение интенсивности воздействий, усложнение условий их эксплуатации, что приводит к необходимости учета пластических деформаций и соответствующих внешних факторов при разработке практических методов расчета. Одними из распространенных конструктивных элементов являются коробчатые оболочки, для которых под воздействием температурных полей возможна потеря устойчивости. При эксплуатации таких конструкций неустойчивость, как правило, определяет исчерпание ресурса их функционирования и является недопустимой. Однако, в ряде случаев, это явление и последующее закритическое деформирование могут быть использованы в качестве технологического процесса с заданными требованиями, для обеспечения которых необходим как контроль текущих параметров, так и выбор соответствующих геометрических размеров, материала оболочки, условий нагружения и т.д. Реализация такого управляемого процесса деформирования связана с изучением закономерностей процесса упругопластического выпучивания; определением критических состояний оболочек, зависимости от истории нагружения, давления, температуры, внешних связей и других факторов. В теоретическом плане эти вопросы очень сложны и разработаны недостаточно; принципиальные трудности возникают уже на этапе постановки задачи при выборе варианта теории пластичности, учете эффектов сложного нагружения, ползучести материала и т.д. Имеющиеся опытные данные [1] весьма немногочисленны, относятся к ограниченным диапазонам исходных параметров и получены по различным методикам, так что их использование практически невозможно. В то же время экспериментальным путем возможно эффективное решение вопросов, связанных как с изучением общих закономерностей, так и с отработкой конкретных конструкций. Таким образом, исследования закономерностей потери устойчивости и неупругого деформирования коробчатой оболочки, разработка и реализация на этой основе процесса управляемой пластической деформации являются актуальными в механике деформируемого твердого тела и ее приложениях.

В данной работе проводится исследование по расчету на устойчивость при воздействии температурного поля на тренажерный комплекс для подготовки пожарных-спасателей в условиях моделирования опасных факторов пожара.

С учетом того, что блоки тренажерного модуля будут подвергаться многократному перепаду температур, воздействию воды и огнетушащих жидкостей при тушении учебного пожара, для их монтажа должны быть использованы материалы, стойкие к непрерывному и многократному быстрому увеличению температуры с последующим быстрым охлаждением, а также устойчивые к напряжениям, возникающим внутри несущих конструкций, газовой и жидкостной коррозии. Наиболее экономически и технически оправданным представляется использование для этих целей объединяющей несущей конструкции типа стандартного морского контейнера 40 футов (High Cube).

Контейнер представляет собой жесткую конструкцию, прямоугольную в плане, из стали со следующими размерными характеристиками: длина (мм) 12192; ширина (мм)

2438; высота (мм) 2896. Дверной проем: ширина (мм) 2340; высота (мм) 2597. Контейнер, имеющий грузоподъемность 26280 кг, представлен на рисунке 1.

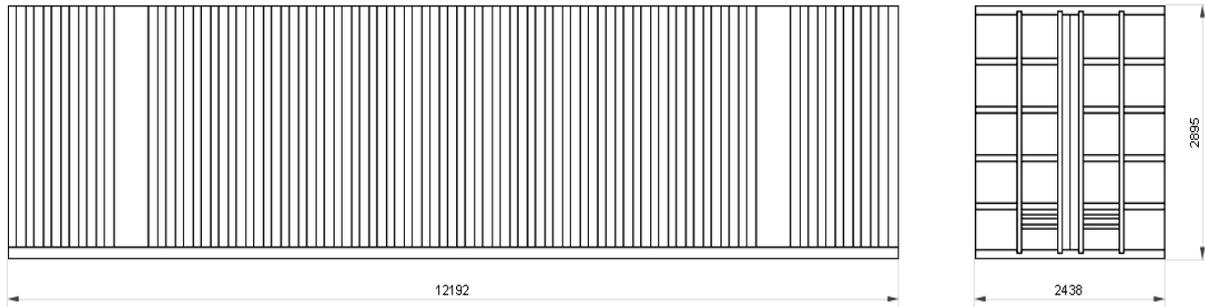


Рис. 1. Морской 40-футовый контейнер

Рассмотрим линейное распределение температуры

$$t = K + A_0 Z + A_1 X + A_2 Y. \quad (1)$$

где X , Y , Z – декартовы координаты произвольной точки оболочки. Они могут быть выражены через криволинейные координаты θ , φ , ζ следующим образом [1]:

$$X = (\nu + \zeta \sin \theta) \cos \varphi, Y = (\nu + \zeta \sin \theta) \sin \varphi, Z = -\int_{\theta_0}^{\theta} R_1 \sin \theta d\theta + \zeta \cos \theta, \quad (2)$$

где ν , R_1 представляют собой известные функции координаты θ . Учитывая (2), перепишем (1) в виде

$$t = K + A_0 \left(-\int_{\theta_0}^{\theta} R_1 \sin \theta d\theta + \zeta \cos \theta \right) + A_1 (\nu + \zeta \sin \theta) \cos \varphi + A_2 (\nu + \zeta \sin \theta) \sin \varphi. \quad (3)$$

Сравнивая (3) и (2), находим, что в рассматриваемом случае

$$t^m = K - A_0 \int_{\theta_0}^{\theta} R_1 \sin \theta d\theta + A_1 \nu \cos \varphi + A_2 \nu \sin \varphi, \quad (4)$$

$$\frac{t^m}{h} = A_0 \cos \theta + A_1 \sin \theta \cos \varphi + A_2 \sin \theta \sin \varphi.$$

где t^m – средняя температура стенки, Δt – перепад температуры по толщине.

Температурные напряжения не всегда являются опасными для прочности конструкции, так как рассасываются по мере развития деформации. Но те элементы конструкции, в которых развиваются сжимающие напряжения, могут потерять устойчивость, что в ряде случаев равносильно исчерпанию несущей способности и является недопустимым. Нетрудно видеть, что в соответствии с общей теоремой теории упругости напряжения в свободной оболочке при линейном распределении температуры (1) и (3), равны нулю.

По (4) и (3) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^t &= \varepsilon_2^t = \varepsilon_0^t + \varepsilon_1^t \cos \varphi + \varepsilon_2^t \sin \varphi, \\ \chi_1^t &= \chi_2^t = \chi_0^t + \chi_1^t \cos \varphi + \chi_2^t \sin \varphi, \\ \gamma^t &= \tau^t, \end{aligned} \quad (5)$$

где введены обозначения

$$\varepsilon_0^t = \beta K - \beta A_0 \int_{\theta_0}^{\theta} R_1 \varepsilon_1^t \sin \theta d\theta, \chi_0^t = \beta A_0 \cos \theta, \quad (6)$$

$$\varepsilon_1^t = \beta A_1 \nu, \chi_1^t = \beta A_1 \sin \theta, \quad (7)$$

$$\varepsilon_2^t = \beta A_2 v, \chi_2^t = \beta A_2 \sin \theta, \quad (8)$$

Рассмотрим деформацию при осесимметричном распределении температуры (первое слагаемое в формулах (5)). Для осуществления статически возможного нулевого напряженного состояния необходимо, чтобы компоненты деформации

$$\varepsilon_{1(0)} = \varepsilon_{2(0)} = \varepsilon_0^t, \gamma^0 = 0, \chi_{1(0)} = \chi_{2(0)} = \chi_0^t, \tau^0 = 0, \quad (9)$$

тождественно удовлетворяли уравнениям неразрывности. Уравнение (4), связывающее только γ^0, τ^0 , удовлетворяется. В (4) было показано, что уравнения неразрывности допускают один первый интеграл. Поэтому они, уравнения неразрывности, запишутся в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (v\chi_{2(0)}) - R_1 \chi_{1(0)} \cos \theta - \frac{1}{R_1} \frac{d(v\varepsilon_{2(0)})}{d\theta} + \varepsilon_{1(0)} \cos \theta = 0, \\ v\chi_{2(0)} \sin \theta + \frac{\cos \theta}{R_1} \left(\frac{d(v\varepsilon_{2(0)})}{d\theta} - \varepsilon_{1(0)} R_1 \cos \theta \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Подстановка выражений (9), (6) в (10) превращает (10) в тождества. Рассмотрим теперь распределение температуры, пропорциональное $\cos \varphi$. Соответствующие ему амплитуды деформаций равны

$$\varepsilon_{1(1)} = \varepsilon_{2(1)} = \varepsilon_1^t, \gamma_1 = 0, \chi_{1(1)} = \chi_{2(1)} = \chi_1^t, \tau_{(1)} = 0. \quad (11)$$

Они должны удовлетворять уравнениям совместности, которые, могут быть заменены уравнениями (5):

$$\begin{aligned} v\chi_{2(1)} + v\tau_1 \cos \theta - \varepsilon_{2(1)} \sin \theta - \gamma_1 \sin \theta \cos \theta = 0, \\ \frac{1}{R_1} \frac{d\varepsilon_{2(1)}}{d\theta} - \tau_1 \sin \theta - \frac{\varepsilon_{1(1)} \cos \theta}{v} - \frac{\gamma_1 \cos^2 \theta}{v} = 0, \\ -R_1 \chi_{1(1)} - v \frac{d\tau_1}{d\theta} - 2R_1 \cos \theta \tau_1 + \gamma_1 \cos \theta + \frac{d\gamma_1}{d\theta} \sin \theta + \gamma_1 \frac{R_1}{v} \sin \theta \cos \theta + \frac{R_1}{v} \sin \theta \varepsilon_{1(0)} = 0. \end{aligned}$$

Подставляя в эти уравнения компоненты деформации (11), имеем

$$-R_1 \chi_1^t + \frac{R_1 \sin \theta}{v} \varepsilon_1^t = 0, \frac{1}{R_1} \frac{d\varepsilon_1^t}{d\theta} - \varepsilon_1^t \frac{\cos \theta}{v} = 0, v\chi_1^t - \varepsilon_1^t \sin \theta = 0. \quad (12)$$

Три соотношения (12) связывают две величины: $\chi_1^t, \varepsilon_1^t$. В том случае, когда $\chi_1^t, \varepsilon_1^t$ имеют вид (7), соотношения (12) не противоречивы, так как каждое из них тождественно удовлетворяется. Случай распределения температуры, нечетного относительно плоскости $\varphi = 0$, проверяется аналогично. При линейном распределении температуры в пространстве, занимаемом оболочкой, компоненты температурной деформации, удовлетворяют уравнениям неразрывности и, следовательно, статически возможное нулевое напряженное состояние осуществляется.

Определим перемещения точек срединной поверхности оболочки при линейном распределении температуры. Сначала положим в (4) $A_1 = A_2 = 0$ и найдем перемещения u, v, w по заданным компонентам деформации (9), (6):

$$\varepsilon_{1(0)} = \varepsilon_{2(0)} = \beta A_0 Z + \beta K, \chi_{1(0)} = \chi_{2(0)} = \beta A_0 \cos \theta, \gamma_0 = \tau_0 = 0. \quad (13)$$

Из выражений, связывающих деформации и перемещения, ясно, что $\nu_0 = 0$, т. е. кручение отсутствует. Используя выражения, связывающие кривизну с углом поворота

(6), имеем $\frac{d\mathcal{G}_{1(0)}}{d\theta} = -\beta A_0 R_1 \cos \theta$, откуда, принимая во внимание (6) и производя интегрирование, получим $\mathcal{G}_{1(0)} = -\beta A_0 v + D$. Подставляя полученное выражение для $\mathcal{G}_{1(0)}$ и деформации (13) в уравнение (6), связывающие величины ε_1 , ε_2 , $\mathcal{G}_{1(0)}$ при осесимметричной деформации убеждаемся, что постоянная интегрирования $D = 0$. Итак,

$$\mathcal{G}_{1(0)} = -\beta A_0 v. \quad (14)$$

Определение осевого и радиального перемещений можно провести по схеме, изложенной в [5]. Получаем

$$\Delta_e = \beta v (K + A_0 Z), \frac{d\Delta_z}{d\theta} = \beta (K + A_0 Z) R_1 \sin \theta - \beta A_0 v \cos \theta R_1. \quad (15)$$

Интегрируя второе соотношение (15), находим

$$\Delta_z = D_1 - \beta \int_{\theta_0}^{\theta} (K + A_0 Z) R_1 \sin \theta d\theta - \beta A_0 \frac{v^2 - v_0^2}{2}. \quad (16)$$

При распределении температуры по закону $t = A_1 (v + \zeta \sin \theta) \cos \varphi$ амплитуды деформаций в свободной оболочке равны

$$\varepsilon_{1(1)} = \varepsilon_{2(1)} = \beta A_1 v, \gamma_1 = 0, \chi_{1(1)} = \chi_{2(1)} = \beta A_1 \sin \theta, \tau_1 = 0. \quad (17)$$

Определение перемещений начинаем с угла поворота $\mathcal{G}_{1(1)}$. Согласно [6] $k = 1$, имеем

$$\frac{d\mathcal{G}_{1(1)}}{d\theta} = -R_1 \chi_{1(1)} = -\beta A_1 R_1 \cos \theta. \quad (18)$$

Интегрируя (18) и учитывая (6), получим

$$\mathcal{G}_{1(1)} = \beta A_1 Z + C. \quad (19)$$

Здесь Z – аппликата точек срединной поверхности в сечении $\theta = const$. После этого, $\Delta_{z(1)}$ может быть найдено по формуле

$$\Delta_{z(1)} = C_1 + \int_{\theta_0}^{\theta} \left(-\varepsilon_{1(1)} \sin \theta + \mathcal{G}_{1(1)} \cos \theta \right) R_1 d\theta = C_1 + \int_{\theta_0}^{\theta} \left((\beta A_1 Z + C) \cos \theta - \beta A_1 v \sin \theta \right) R_1 d\theta, \quad (20)$$

а окружное и радиальное перемещения – с помощью (5):

$$v_1 = C_2 + \int_{\theta_0}^{\theta} \left(A_1 \beta v \cos \theta - \frac{\Delta_{z(1)} \sin \theta}{v} \right) R_1 d\theta, \Delta_{e(1)} = \varepsilon_{2(1)} v - v_1. \quad (21)$$

Полученные выражения содержат три постоянные: C , C_1 , C_2 . Одна из них, например, C_1 должна быть определена из уравнения связи деформаций и перемещениями совместности при $k = 1$. Для определения используем уравнение, являющееся следствием пятого и шестого уравнений

$$\chi_{2(1)} \cos \theta + \tau_1 = \frac{\sin \theta}{v R_1} \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{v} \mathcal{G}_{1(1)} \sin^2 \theta. \quad (22)$$

Подставляя в него найденные выражения для v_1 и $\mathcal{G}_{1(1)}$, а также $\chi_{2(1)}$ и $\tau_{(1)}$ согласно (17) и требуя, чтобы (22) удовлетворялось тождественно, после ряда преобразований получим $C_1 = C v_0$.

Принимая во внимание, что $\int_{\theta_0}^{\theta} v R_1 \cos \theta d\theta = \frac{v^2 - v_0^2}{2}$, $\int_{\theta_0}^{\theta} R_1 Z \sin \theta d\theta = \frac{Z^2}{2}$, получаем

окончательные выражения для перемещений

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{1(1)} &= A_1 \beta Z + C, \Delta_{z(1)} = Cv + A_1 \beta Z v, v_1 = C_2 + CZ + A_1 \beta \left(\frac{v^2 - v_0^2}{2} + \frac{Z^2}{2} \right), \\ \Delta_{e(1)} &= -C_2 - CZ + A_1 \beta \left(\frac{v^2 - v_0^2}{2} - \frac{Z^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Постановка задачи устойчивости прямоугольной в плане оболочки в условиях линейного распределения температуры представлена на рисунке 2. В работе предлагаются трехмерные конечно-элементные модели. На основе этих моделей проведены виртуальные испытания статического напряженно-деформированного состояния, возникающего в случае когда действует температура 500 градусов на поперечную несущую балку на примере составленных модулей 40 футовых морских контейнеров, поставленных один на один.

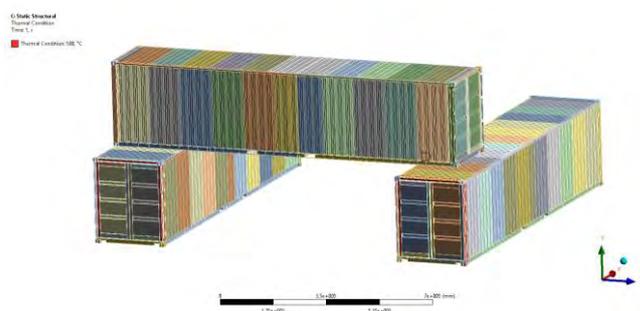


Рис. 2. Постановка задачи. Расчетная модель для нахождения распределения температурных полей

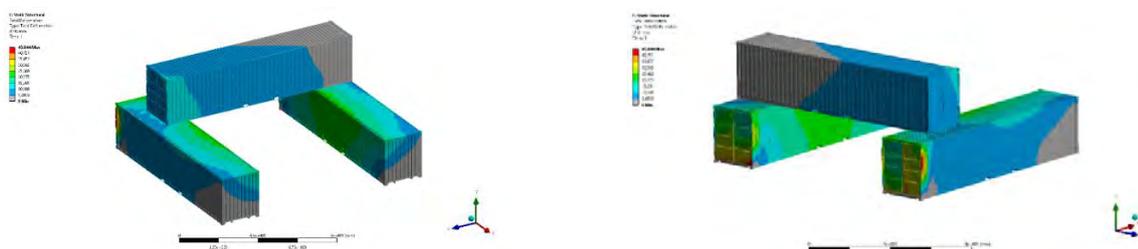


Рис. 3. Поля перемещений при температурном воздействии. Максимальное перемещение несущей конструкции составило 46 мм

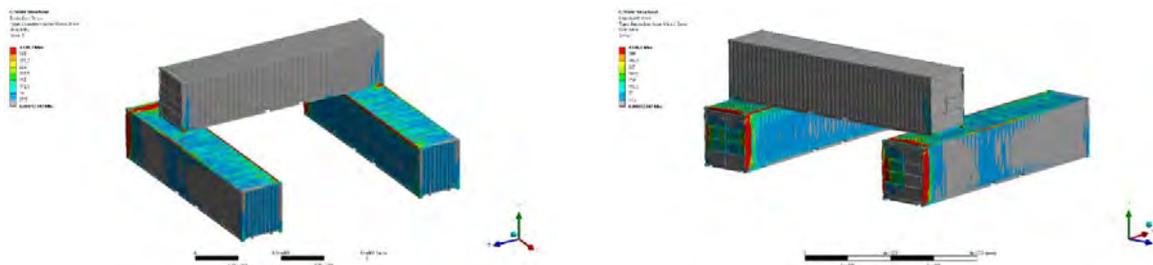


Рис. 4. Распределение эквивалентных напряжений при температурном воздействии. Максимальное напряжение составило 300 МПа

Предложено решение задачи по определению устойчивости оболочечной системы при накоплении повреждений вследствие действия циклических температурных полей и потере устойчивости ключевых элементов конструкций путем проведения виртуаль-

ных испытаний с использованием пакета компьютерных программы ANSYS. В результате исследований рассмотрены вопросы устойчивости вследствие линейного распределения отдельных элементов тренировочного модуля которые стремятся изменить свои геометрические свойства, а так как они образуют силовой каркас конструкции, то в оболочке возникает напряженное состояние. Получены следующие численные значения:

- максимальное перемещение несущей конструкции при температурном воздействии составило 46 мм;

- максимальное распределение эквивалентного напряжения при температурном воздействии составило 300 мПа.

Решена задача о распределении поля температуры в оболочке коробчатого типа. Результаты решения позволяют более детально назначать прочностные критерии для оболочек работающих под действием контактных термодинамических нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг Д.В. *Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин.* Киев, «Будівельник», 1973. – 488с.
2. Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем.* М.: Наука, 1967. - 984 с.
3. Власов В.З. *Общая теория оболочек.* – М.-Л.:Физматгиз, 1949. – 784 с.
4. Блейх Ф. *Устойчивость металлических конструкций.* – М.-Л.:Физматгиз, 1959. – 544 с.
5. Тимошенко С.П., Войковский-Кригер С. *Пластинки и оболочки.* -М.: Физматгиз, 1963.
6. Белов Н.Н. *Расчет железобетонных конструкций на взрывные и ударные нагрузки.* / Н.Н. Белов, Д.Г. Компаница, О.Г. Кумпяк, Н.Т. Югов// Томск: STT, 2004. – 465 с.
7. Bangash M.Y.H. *Explosion-Resistant Building Structures / Design, Analysis, and Case Studies.* // Bangash M.Y.H., Bangash T. Springer, Berlin, 2006. – 450.

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ К-ОГО ПОРЯДКА, ИСПОЛЬЗУЕМОМ В ОПЕРАТОРНОМ МЕТОДЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

к.ф.-м.н. Акимов В.А., Гончарова С.В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

В своих работах по решению граничных задач теории упругости авторы разрабатывали так называемый операторный метод разложения функций в ортогональные и не ортогональные ряды. Для этих целей использовался функциональный оператор от d_x вида:

$$D_n^l = T_l V_n^{-1} * f(x) = \frac{sh(ld_x)}{1 + d_x^2/\delta_n^2} * f(x) \quad (1)$$

где $T_l = sh(ld_x)$, $V_n = d_x^2 + \delta_n^2$, $\delta_n = \pi x n/l$; $d_x = d/dx$ - оператор производной по переменной x ; l - длина интервала разложения функции в ряд; n - натуральное число; звездочкой обозначено операторное воздействие на функцию $f(x)$. Свойства этих операторов и алгоритм разложения функций в ряды описаны в [1]. В результате опыта работы с кратными операторами такого вида авторы приходят к следующим утверждениям.

Теорема 1. Частное решение дифференциального уравнения произвольного порядка $(d_x^2/\delta_n^2 + 1)^k * f(x) = \sin \delta_n x$ имеет вид: $f^*(x) = A_k x^k \sin \delta_n x$ если k - четное и $f^*(x) = A_k x^k \cos \delta_n x$, если k - нечетное натуральное число.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. Если $1 \leq m \leq k-1$, то $(d_x^2/\delta_n^2 + 1)^k * [x^m \cos \delta_n x] = 0$.

Рассмотрим предельный случай $m = k-1$. Непосредственно устанавливаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2} + 1\right)^k * [x^{k-1} \cos \delta_n x] &= \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2} + 1\right)^{k-1} * \left[\frac{(k-1)(k-2)x^{k-3}}{\delta_n^2} \cos \delta_n x - \right. \\ &\left. - \frac{2(k-1)x^{k-2}}{\delta_n} \sin \delta_n x \right] = \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2} + 1\right)^{k-2} * \left[\dots - \frac{2^2(k-1)(k-2)x^{k-3}}{\delta_n^2} \cos \delta_n x \right] = \\ &= \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2} + 1\right)^{k-3} * \left[\dots + \frac{2^3(k-1)(k-2)(k-3)x^{k-4}}{\delta_n^3} \sin \delta_n x \right] = \\ &= \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2} + 1\right)^{k-4} * \left[\dots + \frac{2^4(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)x^{k-5}}{\delta_n^4} \cos \delta_n x \right] = \\ &= \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2} + 1\right) * \left[\pm \frac{2^{k-1}(k-1)!}{\delta_n^{k-1}} \begin{cases} \cos \delta_n x \\ \sin \delta_n x \end{cases} \right] = 0 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. Как легко заметить, смысл доказательства основан на том обстоятельстве, что после однократного применения оператора, стоящего в круглых скобках, степень полинома понижается на единицу.

Доказательство основной теоремы проведем по индукции, считая k нечетным. Если $k = 1$, то получим $(d_x^2/\delta_n^2 + 1) * f(x) = \sin \delta_n x$, так как

$$\begin{aligned} (d_x^2/\delta_n^2 + 1) * [A_1 x \cos \delta_n x] &= A_1 [-(2/\delta_n) \sin \delta_n x - x \cos \delta_n x + x \cos \delta_n x] = \\ &= -(2A_1/\delta_n) \sin \delta_n x \end{aligned}$$

то получим: $-(2A_1/\delta_n)\sin\delta_n x = \sin\delta_n x$. Откуда определяем $A_1 = -\delta_n/2$.

Предположим теперь, что данное высказывание верно для произвольного натурального нечетного числа k : $(d_x^2/\delta_n^2 + 1)^k * [A_k x^k \cos\delta_n x] = \sin\delta_n x$. Покажем, что тогда оно верно для $k+2$, т.е. $(d_x^2/\delta_n^2 + 1)^{k+2} * [A_k x^{k+2} \cos\delta_n x] = \sin\delta_n x$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2} + 1\right)^{k+2} * [A_k x^{k+2} \cos\delta_n x] &= A_k \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2} + 1\right)^{k+1} * \left[\frac{(k+2)(k+1)x^k}{\delta_n^2} \cos\delta_n x - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(k+2)x^{k+1}}{\delta_n} \sin\delta_n x\right] = -\frac{2(k+2)A_k}{\delta_n} \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2} + 1\right)^{k+1} * [x^{k+1} \sin\delta_n x] = \\ &= -\frac{2(k+2)A_k}{\delta_n} \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2} + 1\right)^k \left[\frac{(k+1)kx^{k-1}}{\delta_n^2} + \frac{2(k+1)x^k}{\delta_n} \cos\delta_n x\right] = \\ &= -\frac{4(k+2)(k+1)A_k}{\delta_n^2} \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2} + 1\right)^k * [x^k \cos\delta_n x] = \sin\delta_n x \end{aligned}$$

Причем $A_k = -\frac{\delta_n^k}{2^k k!}$, что и требовалось доказать. Здесь было учтено, что на осно-

вании леммы первое слагаемое в квадратных скобках обращалось в ноль после воздействия на него оператора, степень которого больше чем степень x .

На основании теоремы 1 можно сформулировать и теорему 2.

Теорема 2. Общее решение дифференциального уравнения

$(d_x^2/\delta_n^2 + 1)^k * f(x) = \sin\delta_n x$ имеет вид:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{m=k-1} x^m (C_m \sin\delta_n x + D_m \cos\delta_n x) + A_k x^k \sin\delta_n x, \text{ если } k - \text{четное и}$$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{m=k-1} x^m (C_m \sin\delta_n x + D_m \cos\delta_n x) + A_k x^k \cos\delta_n x \text{ если } k - \text{нечетное натуральное}$$

число.

Причем $A_k = -\frac{\delta_n^k}{2^k k!}$, если k - нечетное и $A_k = \frac{\delta_n^k}{2^k k!}$, если k - четное.

Доказательство этой теоремы основано на решении однородного уравнения

$\left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2} + 1\right)^k * f(x) = 0$. Так как характеристическое уравнение имеет чисто комплексные

корни $\pm i\delta_n$ кратности k , то в соответствии с [2], его решение имеет вид

$$\bar{f}(x) = \sum_{m=0}^{m=k-1} x^m (C_m \sin\delta_n x + D_m \cos\delta_n x), \text{ что и доказывает первую часть нашего утвер-$$

ждения. Доказательство второй части теоремы, т.е. нахождение частного решения полностью основано на теореме 1. Попутно заметим, что именно в этом и заключается роль первой теоремы, так как нахождение частного решения, например методом вариации произвольной постоянной [2], носит весьма проблематичный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. Мн.: УП «Технопринт», 2003.-101 с.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 2. 21 издание, 1974 г.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ И ТРЕХМЕРНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗУБОЧЕЛЮСТНОМУ АППАРАТУ ЧЕЛОВЕКА

асп. Коваль И.В., д.ф.-м.н. Щербаков С.С.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. В работе рассматривается взаимодействие элементов многоэлементной системы челюсти–периодонт–зубы–дентин зубочелюстного аппарата человека. Это является продолжением исследования системы челюсти–зубы–дентин, начатого в работе [1].

Известен ряд исследований, посвященных аналитическому и компьютерному моделированию напряженно-деформированного состояния отдельных элементов системы зубочелюстного аппарата человека [2–4]. Однако задача оценки их одновременных контактных взаимодействий и пространственного напряженно-деформированного состояния остается малоизученной. Целью настоящей работы было определение с помощью компьютерного конечно-элементного моделирования указанного состояния системы челюсти–периодонт–зубы–дентин.

Построение конечно-элементной модели. Для конечно-элементного расчета системы в программном комплексе ANSYS Workbench была взята модель, полученная из томографических снимков черепа человека. Модель включает в себя элементы, не участвовавшие ранее в исследовании, а именно периодонт и дентин. Это не только существенно приближает компьютерную модель к реальности, но и значительно затрудняет процесс вычислений. Отдельно следует отметить трудность подготовки трехмерной модели для расчета, связанную с зашумленностью снимков томографа, особенностей формата исходных данных, а также со сложной геометрической формой рассматриваемой модели.

Поскольку в работе рассматривается напряженно-деформированное состояние в зоне контакта жевательных поверхностей зубов человека, то соответственно, в этой области было задано более плотное конечно-элементное разбиение, по сравнению с остальной моделью (см. рис. 1).

Отдельный этап работы был посвящен расположению элементов модели друг относительно друга для получения оптимальных, наиболее приближенных к реальным, пятен контакта.

Построенная модель состоит из различных элементов с соответствующими механическими характеристиками [9]. В настоящей работе рассматриваются усредненные упругие характеристики элементов человеческого зубочелюстного аппарата (см. табл. 1).

Таблица 1 – Механические характеристики элементов модели

	Модуль упругости, E , Па	Коэффициент Пуассона, ν	Плотность ρ , кг м ⁻³
Эмаль	$8,41 \cdot 10^{10}$	0,3	3000
Дентин	$1,86 \cdot 10^{10}$	0,31	2200
Кости челюсти	$1,2 \cdot 10^{10}$	0,25	2060
Ткани периодонта	$3,2 \cdot 10^{10}$	0,15	2360

Для системы челюсти–периодонт–зубы–дентин рассматривались следующие граничные условия (рис. 1):

1. нагрузка $Q=600\text{Н}$, автоматически распределенная расчетным пакетом по нижней поверхности системы;

2. нулевые перемещения кости нижней челюсти по осям x и z ,

3. кость верхней челюсти зафиксирована во всех направлениях по основанию.

Нагрузки для рассматриваемой модели были взяты из известных работ [5].

Коэффициент трения между зубами был взят из справочников [6,7] равными 0,2.

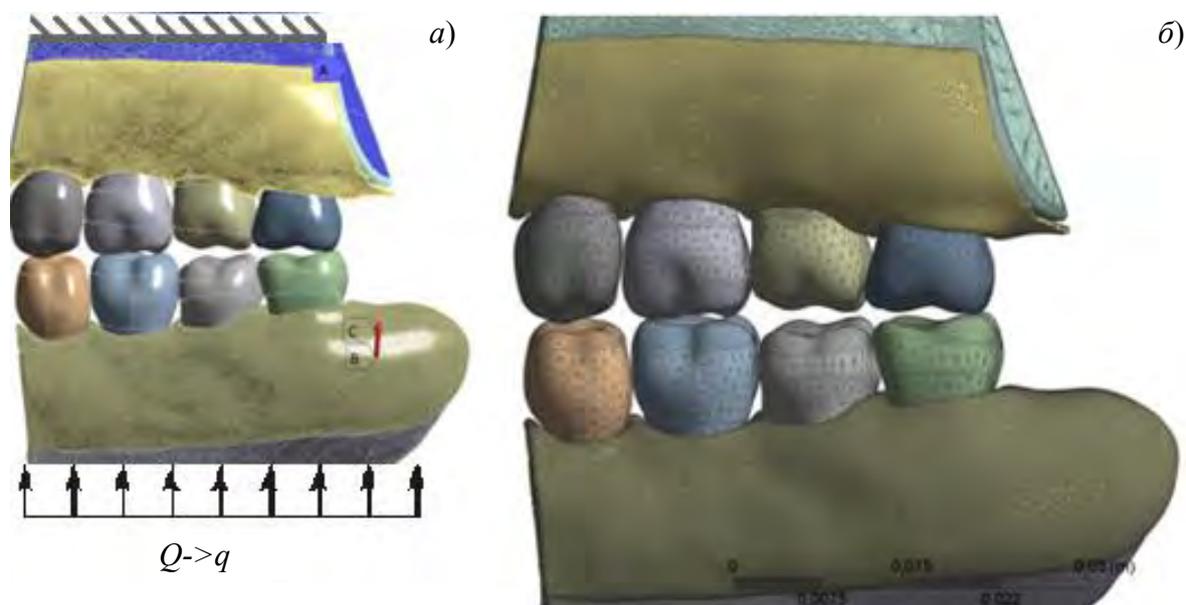


Рис. 1. Схема нагружения (а) и конечно-элементное разбиение модели (б)

Контактные взаимодействия. Контактные взаимодействия элементов модели происходили по тридцати четырем контактными областями, соответствующим реальному положению элементов зубочелюстного аппарата. Следует отметить, что в прямом контакте жевательных поверхностей одна пара зубов (31 нижний и 2 верхний) не участвовала, что обусловлено анатомическими особенностями исследуемого аппарата (рис. 2,3). Также следует отметить, что при сжатии зубов во взаимодействие по боковым поверхностям приходят соседние зубы челюсти.

Напряженно-деформированное состояние. Как видно из рис. 3, максимальная интенсивность напряжений возникала в местах контакта жевательных поверхностей, боковых контактных областей, а также в корнях зубов рассматриваемой модели. Схожий характер имели и распределения третьих главных напряжений (см. рис. 3).

Из рис. 3 видно, что распределения напряжений существенно неравномерны, что обуславливается физиологическими особенностями человеческой челюсти. Наибольшие напряжения возникали в местах непосредственного контакта зубов верхней и нижней челюсти. В рассматриваемой модели данные напряжения наблюдались на жевательных поверхностях 30 нижнего и 3 верхнего моляров (316 МПа – согласно анализу третьих главных напряжений). Сопоставимые по величине напряжения (210 МПа) достигались в контактных парах 32 нижнего и 1 верхнего, а также 29 нижнего и 4 верхнего зубов.

Значительно меньшие (около 15 МПа) напряжения достигались на боковых областях зубов, между которыми до начала нагружения был зазор.

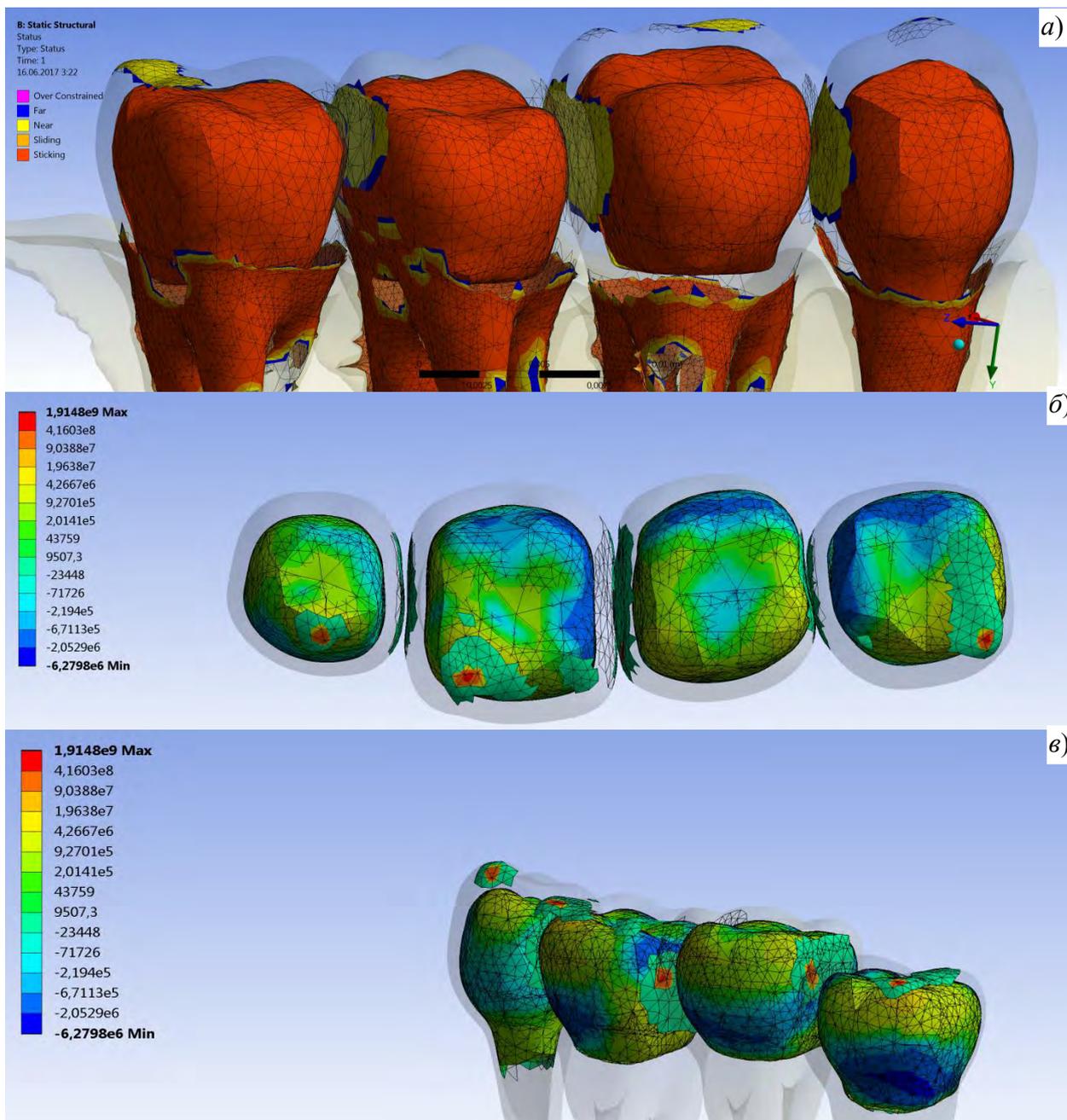


Рис. 2. К анализу контактного взаимодействия: а) схематическое изображение контактных областей нижней челюсти, б) распределение контактного давления на зубах верхней челюсти, в) распределение контактного давления в области боковых поверхностей зубов верхней челюсти

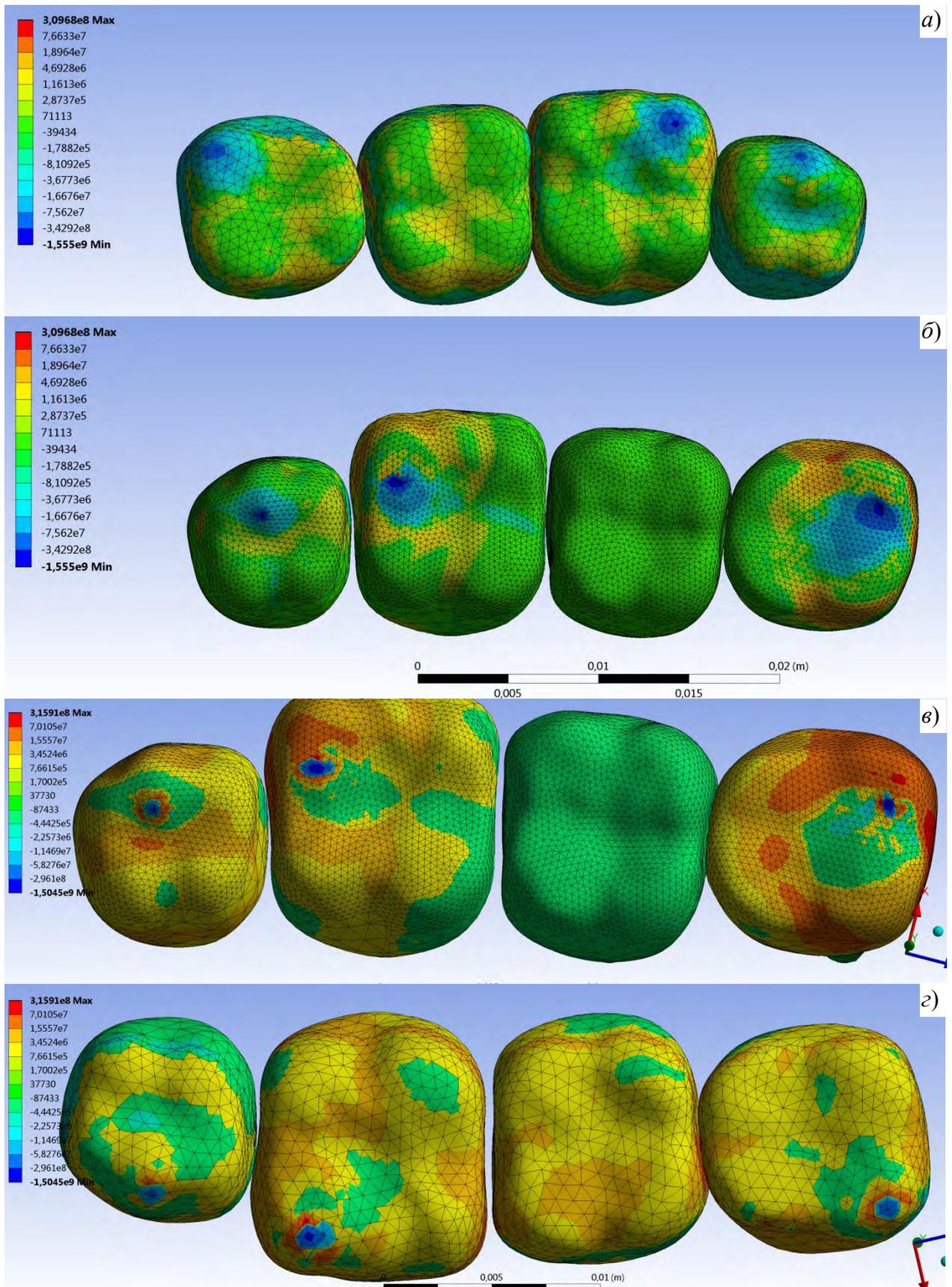


Рис. 3. Распределения напряжений: а) интенсивность напряжений в нижней челюсти, б) интенсивность напряжений в верхней челюсти, в) третьи главные напряжения в верхней челюсти, г) третьи главные напряжения в нижней челюсти

Заключение. Была построена компьютерная конечно-элементная модель участка зубочелюстного аппарата человека с четырьмя зубами в каждой челюсти.

Для данной модели был рассмотрен случай множественных контактных взаимодействий элементов. Были рассчитаны контактные взаимодействия всех двадцати элементов по тридцати четырем контактными областями: получены распределения контактного давления, напряжений и деформаций, обусловленных сжатием челюстей.

Важным отличием от предыдущих исследований стало дополнение модели новыми элементами (дентин и периодонт), а также реалистичными участками верхней и нижней челюсти.

Наибольшие напряжения в системе возникают в местах непосредственного контакта жевательных поверхностей. Значительно меньшие (более чем на два порядка) напряжения возникают в области контакта боковых поверхностей и корней зубов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков, С.С., Компьютерное моделирование трехмерного напряженно-деформированного состояния и объемной повреждаемости зубочелюстного аппарата человека / С.С. Щербаков, И.В.Коваль// Теоретическая и прикладная механика: Межведомственный сборник научно-методических статей. –2017. – Вып.32. –Минск: БНТУ,–С.185-190.
2. Benazzi, S. Using occlusal wear information and finite element analysis to investigate stress distributions in human molars / S. Benazzi, O. Kullmer, I.R. Grosse, G.W. Weber. //Journal of Anatomy. – 2012. – V. 123. P. 259–272.
3. Benazzi, S. Brief Communication: Comparing Loading Scenarios in Lower First Molar Supporting Bone Structure Using 3D Finite Element Analysis/ S. Benazzi, O. Kullmer, I.R. Grosse, G.W. Weber. //American Journal of Physical Anthropology. – 2012. V. 147. P. 128–134.
4. Amini, S. Wear and Abrasion Resistance Selection Maps of Biological Materials / S. Amini, A. Miserez // Acta Biomater. – 2013. V. 9. P. 7895–7907.
5. Lebedenko, A.I. Stresses in a Tooth Restored by a Veneer / A.I. Lebedenko, N.G. Vartanova, S.V. Anisimova // Russian Journal of Biomechanics, – 2000 Vol. 4, P. 1–8.
6. Деньгуб, Е.М., Единицы величин. Словарь-справочник / Е.М. Деньгуб, В.Г. Смирнов. – М.: Издательство стандартов, 1990. –146 с.
7. Березовский, В.А. Биофизические характеристики тканей человека. Справочник. / В.А. Березовский, Н.Н. Колотилов. – Киев: Наук, думка, 1990. – 224 с.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ, ЧАСТИЧНО ОПЕРТОГО НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Поддубный А. А.

УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

Рассматривается изгиб трехслойного стержня ступенчато-переменного сечения, частично опертого на два участка упругого основания различной жесткости (рис. 1). На стержень действуют поперечные распределенные нагрузки. Принято, что наружные несущие слои являются упругопластическими, наполнитель – нелинейно упругий.

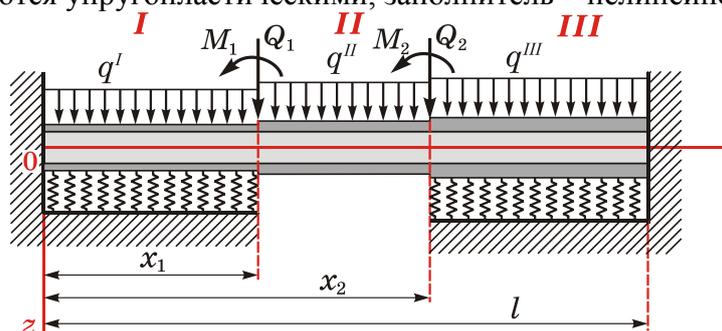


Рис. 1 – Расчетная схема трехслойного стержня ступенчато-переменного сечения, опертого на два участка основания

Для связи напряжений и деформаций в слоях используются уравнения теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [1] ($i, j = x, y, z$):

$$s_{ij}^{(k)n} = 2G_k f^{(k)n} \varepsilon_{ij}^{(k)n}; \quad \sigma^{(k)n} = 3K_k 3\varepsilon^{(k)n}, \quad (1)$$

где $s_{ij}^{(k)n}, \varepsilon_{ij}^{(k)n}$ – девиаторы тензоров напряжений и деформаций на n -м участке,

$\sigma^{(k)n}, \varepsilon^{(k)n}$ – их шаровые части;

G_k, K_k – модуль сдвига и объемный модуль материала k -го слоя;

$f^{(1)n}, f^{(2)n}$ – функции пластичности в несущих слоях;

$f^{(3)n}$ – функция нелинейности в наполнителе.

Функции пластичности и нелинейности в соотношениях (1) удобно представить в виде:

$$f^{(k)n} = 1 - \omega^{(k)n}; \quad \omega^{(k)n} < 1. \quad (2)$$

Аналитический вид функций $\omega^{(k)n}$ взят из [2]:

$$\omega^{(k)n}(\varepsilon_u^{(k)}) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_s, \\ A_1(1 - \varepsilon_s / \varepsilon_u^{(k)})^{\alpha_1}, & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_s; \end{cases}$$

где ε_s – деформационный предел текучести (для несущих слоев) или физической нелинейности (для наполнителя); A_1, α_1 – константы материалов, $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k -м слое

$$\varepsilon_u^{(k)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x^{(k)} - \varepsilon_y^{(k)})^2 + (\varepsilon_y^{(k)} - \varepsilon_z^{(k)})^2 + (\varepsilon_z^{(k)} + \varepsilon_x^{(k)})^2 + 6[(\varepsilon_{xy}^{(k)})^2 + (\varepsilon_{yz}^{(k)})^2 + (\varepsilon_{zx}^{(k)})^2]}$$

Если интенсивность деформаций не превышает в несущих слоях деформационного предела текучести, в заполнителе деформационного предела физической нелинейности, то $\omega^{(k)n} = 0$, а $f^{(k)n} = 1$.

Для рассматриваемого стержня интенсивность деформаций в k -м слое на n -м участке

$$\begin{aligned}\varepsilon_u^{(1)n} &= \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_x^{(1)n})^2}; & \varepsilon_u^{(2)n} &= \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_x^{(2)n})^2}; \\ \varepsilon_u^{(3)n} &= \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_x^{(3)n})^2 + 3(\varepsilon_{zx}^{(3)n})^2} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_x^{(3)n})^2 + \frac{3}{4}(\Psi^n)^2}.\end{aligned}$$

Уравнения равновесия и их решения в рекуррентном виде. Получены системы уравнений равновесия в перемещениях для участков, опирающихся и не опирающихся на упругое основание, и их аналитические решения в итерациях [3].

Прогиб, сдвиг в заполнителе и продольное перемещение n -го участка стержня на упругом основании малой или большой жесткости определяются в рекуррентном виде выражениями:

$$\begin{aligned}w^{n(m)}(x) &= C_1^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_5^{n(m)} \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_6^{n(m)} \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + w_p^{n(m)}(x); \\ \psi^{n(m)}(x) &= C_1^{n(m)} b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^{(m)} x) + C_2^{n(m)} b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) - C_3^{n(m)} b_2^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_3^{n(m)} b_3^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_2^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_5^{n(m)} b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) - C_5^{n(m)} b_2^n \operatorname{ch}(\beta_1^{(m)} x) \cos(\beta_2^n x) + C_6^{n(m)} b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_6^{n(m)} b_2^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_7^{n(m)} + f_1^n(x) - f_1^{\omega n(m-1)}(x); \quad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u^{n(m)}(x) &= C_1^{n(m)} b_4^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} b_4^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) - C_3^{n(m)} b_5^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_3^{n(m)} b_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + \\ &+ C_3^{n(m)} b_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_5^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_5^{n(m)} b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) - C_5^{n(m)} b_5^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_6^{n(m)} b_6^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_6^{n(m)} b_5^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_7^{n(m)} \alpha_{12}^n + C_8^{n(m)} x + C_9^{n(m)} + f_2^n(x) - f_2^{\omega n(m-1)}(x).\end{aligned}$$

Прогиб, сдвиг в заполнителе и продольное перемещение n -го участка стержня на упругом основании средней жесткости определяются в рекуррентном виде следующими выражениями.

$$\begin{aligned}w^{n(m)}(x) &= C_1^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + C_4^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + \\ &+ C_5^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_6^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + w_p^{n(m)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi^{n(m)}(x) &= C_1^{n(m)} b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} b_7^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_4^{n(m)} b_7^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + \\ &+ C_5^{n(m)} b_8^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^{n(m)} b_8^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^{n(m)} + f_1^n(x) - f_1^{\omega n(m-1)}(x); \quad (4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u^{n(m)}(x) &= C_1^{n(m)} b_4^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} b_4^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} b_9^n \operatorname{ch}(\lambda_2^n x) + C_4^{n(m)} b_9^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + \\ &+ C_5^{n(m)} b_{10}^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^{n(m)} b_{10}^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^{n(m)} \alpha_{12}^n + C_8^{n(m)} x + C_9^{n(m)} + f_1^n(x) - f_1^{\omega n(m-1)}(x).\end{aligned}$$

Входящие в (3), (4) функции определяются выражениями:

$$f_1^{\omega n(m-1)}(x) = \alpha_{10}^n \int q_{\omega}^{n(m-1)} dx + \alpha_{11}^n p_{\omega}^{n(m-1)} + \frac{h_{\omega}^{n(m-1)}}{a_5^n};$$

$$f_2^{\omega n(m-1)}(x) = \alpha_{10}^n \alpha_{12}^n \int q_{\omega}^{n(m-1)} dx + \alpha_{11}^n \alpha_{12}^n p_{\omega}^{n(m-1)} + \alpha_{14}^n \iint p_{\omega}^{n(m-1)} dx dx + \frac{\alpha_{12}^n}{a_5^n} h_{\omega}^{n(m-1)}.$$

Для определения констант интегрирования необходимо учесть граничные условия и условия сопряжения решений на границах участков.

Прогиб, сдвиг в заполнителе и продольное перемещение n -го участка стержня, не связанного с упругим основанием, определяются в рекуррентном виде следующими выражениями

$$\begin{aligned}
\psi^{n(m)}(x) &= C_1^{n(m)} b_{11}^n + C_2^{n(m)} \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_3^{n(m)} \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + g_1^n(x) - g_1^{\operatorname{on}(m-1)}(x); \\
w^{n(m)}(x) &= C_1^{n(m)} (\alpha_{17}^n b_{11}^n x + \alpha_{18}^n x^3 / 6) + C_2^{n(m)} b_{14}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + C_3^{n(m)} b_{14}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + \\
&\quad + C_4^{n(m)} x^2 / 2 + C_5^{n(m)} x + C_6^{n(m)} + g_2^n(x) - g_2^{\operatorname{on}(m-1)}(x); \\
u^{n(m)}(x) &= C_1^{n(m)} (b_{15}^n + b_{16}^n x^2) + C_2^{n(m)} b_{17}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_3^{n(m)} b_{17}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + C_4^{n(m)} \alpha_{13}^n x + \\
&\quad + C_5^{n(m)} \alpha_{13}^n + C_7^{n(m)} x + C_8^{n(m)} x + g_3^n(x) - g_3^{\operatorname{on}(m-1)}(x).
\end{aligned} \tag{5}$$

Входящие в (5) функции определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
g_1^{\operatorname{on}(m-1)}(x) &= \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \left[\int \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \left(b_{12}^n \int q_{\omega}^{n(m-1)} dx + b_{13}^n p_{\omega}^{n(m-1)} - \frac{\beta_3^n}{a_5^n} h_{\omega}^{n(m-1)} \right) dx \right] - \\
&\quad - \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \left[\int \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \left(b_{12}^n \int q_{\omega}^{n(m-1)} dx + b_{13}^n p_{\omega}^{n(m-1)} - \frac{\beta_3^n}{a_5^n} h_{\omega}^{n(m-1)} \right) dx \right]; \\
g_2^{\operatorname{on}(m-1)}(x) &= \alpha_{17}^n \int g_1^{\operatorname{on}(m-1)} dx + \alpha_{18}^n \iiint q_{\omega}^{n(m-1)} dx dx dx + \alpha_{19}^n \iiint p_{\omega}^{n(m-1)} dx dx dx; \\
g_3^{\operatorname{on}(m-1)}(x) &= b_{18}^n g_1^{\operatorname{on}(m-1)} + b_{19}^n g_2^{\operatorname{on}(m-1)} + \alpha_{13}^n \alpha_{18}^n \iiint q_{\omega}^{n(m-1)} dx dx dx + b_{20}^n \iiint p_{\omega}^{n(m-1)} dx dx dx.
\end{aligned}$$

Для определения констант интегрирования C_1^n, \dots, C_8^n учтены граничные условия и условия сопряжения участков друг с другом.

Теоретическое определение перемещений стержня. Несущие слои с толщинами $h_1 = h_2 = 0,02$ м выполнены из алюминиевого сплава Д16Т ($E = 7,208 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu = 0,35$; $K = 8 \cdot 10^{10}$ Па; $G = 2,67 \cdot 10^{10}$ Па), заполнитель толщиной $h_3 = 2c = 0,2$ м – из фторопласта (политетрафторэтилена) ($E = 2,68 \cdot 10^8$ Па; $\nu = 0,49$; $K = 4,7 \cdot 10^9$ Па; $G = 9,0 \cdot 10^7$ Па). Константы для принятых материалов взяты из работы [2]: для Д16Т $A_1 = 0,96$; $\alpha_1 = 2,34$; $\varepsilon_s = 0,735$ %, для фторопласта $A_1 = 0,905$; $\alpha_1 = 1,48$; $\varepsilon_s = 3,3$ %.

Длина стержня $l = 2$ м, ширина $b_0 = 0,2$ м. Стержень опирается на упругое основание двумя крайними участками ($x_1 = 0,3 l$; $x_2 = 0,7 l$; $\kappa^I = 300$, $\kappa^{III} = 600$ МПа/м) и испытывает действие равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивностью $q = 500$ кПа.

Была составлена компьютерная программа в среде MathCad [4], учитывающая возможность применения различных материалов слоев, упругих оснований различной жесткости, распределенных и сосредоточенных нагрузок, нерегулярности границы.

Рис. 2 иллюстрирует изменение прогиба w (а), сдвига в заполнителе ψ (б) и нормальных напряжений на наружной поверхности 1-го слоя (в) по длине стержня при различной жесткости основания на участке l .

За искоемое решение принято 9-е приближение, которое отличается от предыдущих двух менее чем на 1 % – как для прогибов w , так и для сдвигов ψ . Посередине ($x = 0,5 l$) наблюдаются максимумы прогибов. Напряжения на торцах положительны, а посередине пролета ($x = 0,5 l$) – отрицательны, сдвиг в заполнителе переходит из положительной области в отрицательную. С уменьшением κ^I участка l графики меняются по форме, максимальные прогибы увеличиваются и смещаются к левой заделке. Напряжения у левой заделки имеют небольшие значения, с увеличением прогиба напряжения растут. Сдвиг в заполнителе увеличивается как в положительной области, так и в отрицательной.

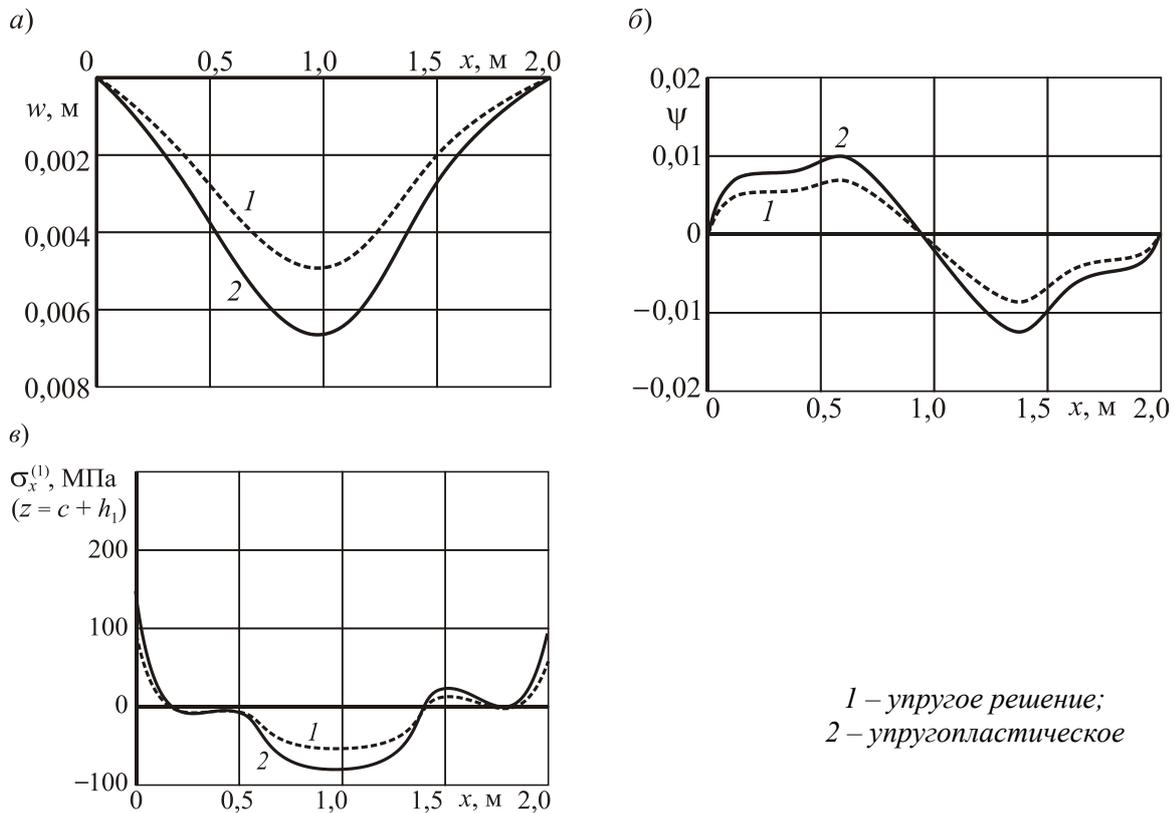


Рис. 2. Изменение прогиба w (а), сдвига в заполнителе ψ (б) и нормальных напряжений на наружной поверхности 1-го слоя (в) по длине стержня

Упругопластический прогиб и сдвиг в заполнителе стержня превосходят упругие перемещения на 46 % и 49 % соответственно.

Таким образом, исследованы прогиб, сдвиг в заполнителе, нормальные напряжения трехслойного стержня, частично опертого на упругое основание, под действием равномерно распределенной нагрузки с учетом пластичности несущих слоев и физической нелинейности заполнителя.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проект T16P-010).

ЛИТЕРАТУРА

1. Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск : Бел. Наука, 2004. – 342 с
2. Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – М : Физматлит, 2006. – 379 с.
3. Яровая, А. В. Механико-математическая модель деформирования неупругой трехслойной балки, частично опертой на упругой основание / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – № 30. – С. 256–262.
4. Напряженно-деформированное состояние трехслойной балки, частично опертой на упругое основание: регистрационное свидетельство № 5301403768 от 03 марта 2014 г. / А. В. Яровая, А. А. Поддубный; / Государственный регистр информационных ресурсов НИРУП ИППС. – 2014.

МЕТОДИКА ВИРТУАЛЬНОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ ЗУБЧАТЫХ РЕДУКТОРОВ И КОРОБОК ПЕРЕДАЧ В КУРСОВОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Капуста П.П.

*Белорусский национальный технический университет
г. Минск, Беларусь*

Постановка задачи. В конкурентных условиях, особую актуальность имеют вопросы повышения качества выпускаемых машин и деталей, их технического уровня, технологичности, технико-экономических характеристик и безопасности в эксплуатации. В связи с этим, возникает необходимость приобретения навыков виртуального проектирования деталей машин, формирования у студентов системного инженерного мышления и мировоззрения в области создания конкурентоспособных технических систем на основе знаний современной методологии проектирования в процессе курсового проектирования деталей машин. Учебно-методическое обеспечение дисциплины должно быть ориентировано на освоение студентами основ инновационных технологий, развитие навыков анализа и самостоятельности в принятии инженерных решений в будущей инженерной деятельности, умение работать с научной и справочной технической литературой. В результате изучения учебной дисциплины, студент должен знать основы систем автоматизированного проектирования (САПР) и теории итерационных методов решения сложных задач механики сплошной среды (методы конечных элементов (МКЭ), конечных разностей, ортогонализации, минимума полной энергии и наиболее часто используемые в инженерной практике программные пакеты, владеть методами виртуального конструирования с помощью трехмерной (3D) машинной графики с последующим автоматическим созданием 2D-чертежей в соответствии с требованиями ЕСКД и ЕСТД.

Автоматизированное проектирование узлов и деталей машин включает следующие программные требования курса “Детали машин”. Применение персональных ЭВМ в расчетах деталей машин в рамках систем автоматизированного проектирования (САПР). Формирование исходных данных к расчетам, использование справочных данных в программах. Структура и материально-техническая основа САПР. Виды обеспечения САПР: техническое (ЭВМ), методическое, математическое, лингвистическое и программное (алгоритмические языки, операционные системы, пакеты прикладных программ). Проведение расчетов деталей и сборочных единиц. Многовариантность расчетов. Системы автоматизированной обработки графической части конструкторской документации. Пакеты программ машинной графики. Способы формирования изображений. Справочно-информационные базы данных. Средства оформления технических чертежей: нанесение линий, штриховок, размеров, текстов, шероховатостей, специальных символов и т.д. Параметризация чертежей. Автоматическое нанесение размеров на чертежах. Автоматическое формирование рабочих чертежей деталей в процессе проектирования сборочного чертежа, занесение и обработка информации для выпуска спецификаций, генерация позиций элементов на сборочном чертеже в соответствии со спецификацией. Нанесение обозначений сварных и неразъемных соединений, видов, разрезов, сечений. Автоматическая генерация и размещение технических требований.

Итерационные (численные) методы анализа прочности и жесткости узлов и деталей машин включают следующие программные требования курса “Детали ма-

шин” требуют знания положений и математического обеспечения численных методов решения сложных задач механики сплошной среды, наиболее распространенный из которых – МКЭ. Энергетический подход. Критерии сходимости. Линейные конечные элементы (КЭ) стержневых систем и балок. Двумерные КЭ пластин при плоском напряженном состоянии. Основные уравнения. Треугольные и прямоугольные КЭ. Построение систем элементов. Применение МКЭ к расчету деталей типа пластин. Трехмерное напряженное состояние. Характеристики тетраэдрального КЭ. Сравнение численных результатов. Применение МКЭ к расчету деталей сложной конфигурации. Основные принципы и особенности расчета узлов и деталей машин на прочность МКЭ. Внешние нагрузки, внутренние силовые факторы, напряженно-деформированное состояние (НДС). Особенности расчета МКЭ рам, корпусов, станин, валов, зубчатых колес, элементов соединений, др. деталей машин и конструкций.

Общие принципы виртуального конструирования узлов и деталей машин, обеспечивающие реализацию приведенных выше программных требований обучения, предложены автором и включают следующие основные стадии.

Твердотельное (3D-) моделирование деталей и узлов. Виртуальная компоновка сборочных единиц и узлов машин. Использование программных инженерных пакетов (AUTOKAD, КОМПАС, SolidWorks, YUNIGRAPHIKS, ProINGENEUR и др.).

Анализ статического напряженно-деформированного состояния (НДС) деталей машин и конструкций и методика совершенствования конструкций изделий. Использование программных пакетов инженерного анализа (SolidWorks, KOSMOS, NASTRAN, ProINGENEUR, ANSYS, LMS и др.).

Динамическое моделирование и анализ НДС в реальном режиме переменного нагружения деталей машин и конструкций и методика совершенствования конструкций изделий. Использование программных пакетов инженерного анализа (ADAMS, SolidWorks, KOSMOS, NASTRAN, PATRAN, ProINGENEUR, ANSYS, LMS и др.).

Виртуальная отработка технологии изготовления и конструкторско-технологическое обоснование рациональности изделий.

Виртуальная отработка рациональности изделий по критериям эргономики.

Виртуальная отработка и обоснование рациональности изделий по критериям технологичности изготовления, удобства и безопасности эксплуатации, обслуживания и утилизации.

Виртуальная отработка дизайна и конструкторско-технологическое и технико-экономическое обоснование рациональности изделий.

Виртуальные испытания и прогнозирование функциональной работоспособности, нагруженности, ресурса и других показателей надежности.

Автоматизированная разработка 2D-чертежей на основе созданных оптимальных 3D-моделей узлов, конструкций и деталей машин.

Основные принципы автоматизированного изготовления, на основе созданных оптимальных 3D-моделей (2D-чертежей) узлов, конструкций и деталей машин. Изготовление с использованием цифровых технологий и технологического оборудования с числовым программным управлением (ЧПУ). 3D-печать деталей, узлов и конструкций и их элементов.

Примеры применения разработанной методики. Исходной информацией является: кинематическая схема, результаты аналитического расчета мощности, частот и вращающих моментов на валах; марки и характеристики свойств материалов; результаты проектных и проверочных расчетов основных геометрических характеристик деталей и элементов, компоновочных соотношений и др.

Пример 1. Виртуальное конструирование цилиндрического шевронно-прямоугольного редуктора с использованием пакета КОМПАС.

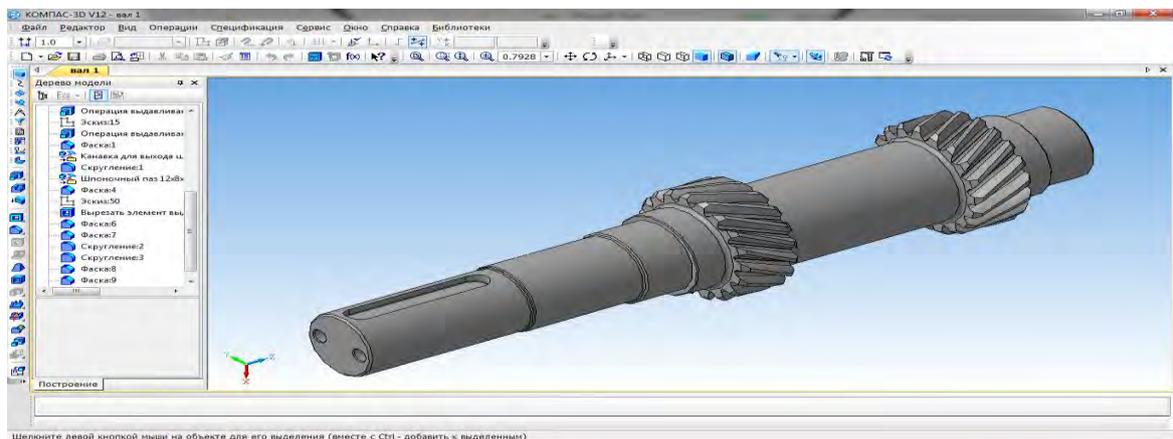


Рис. 1.1. Создание 3D-модели ведомого вала

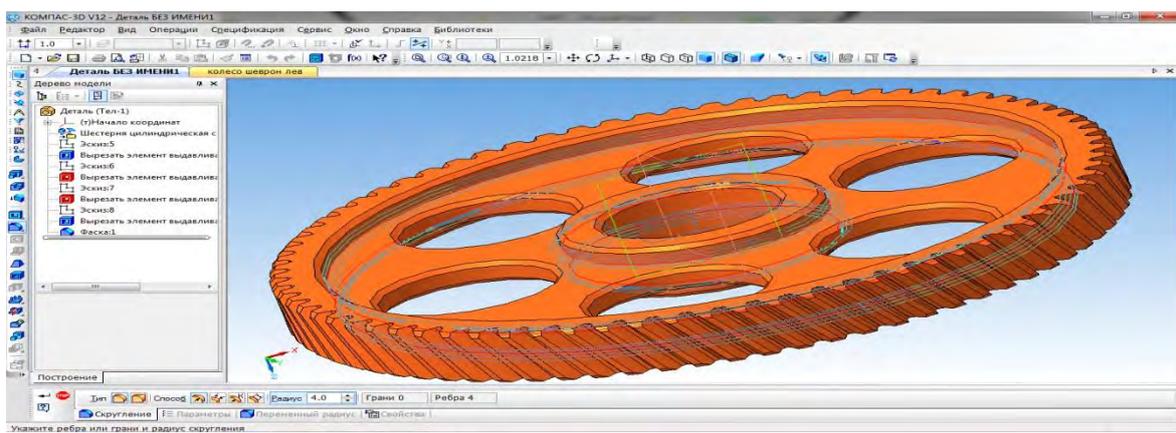


Рис. 1.2. Создание 3D-модели ведомого косозубого колеса (полушестерни)

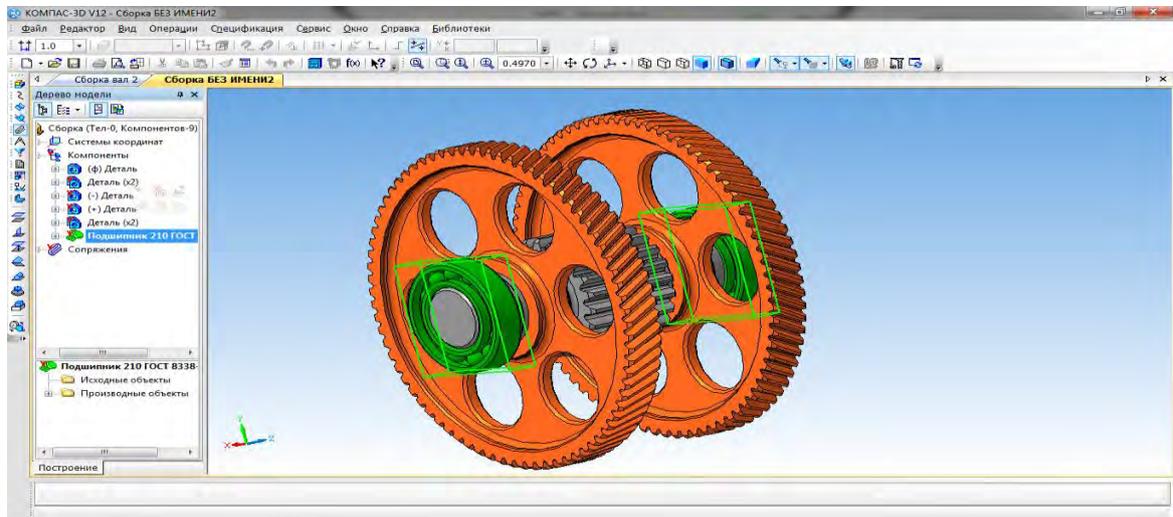


Рис. 1.3. Создание 3D-модели промежуточного вала в сборе

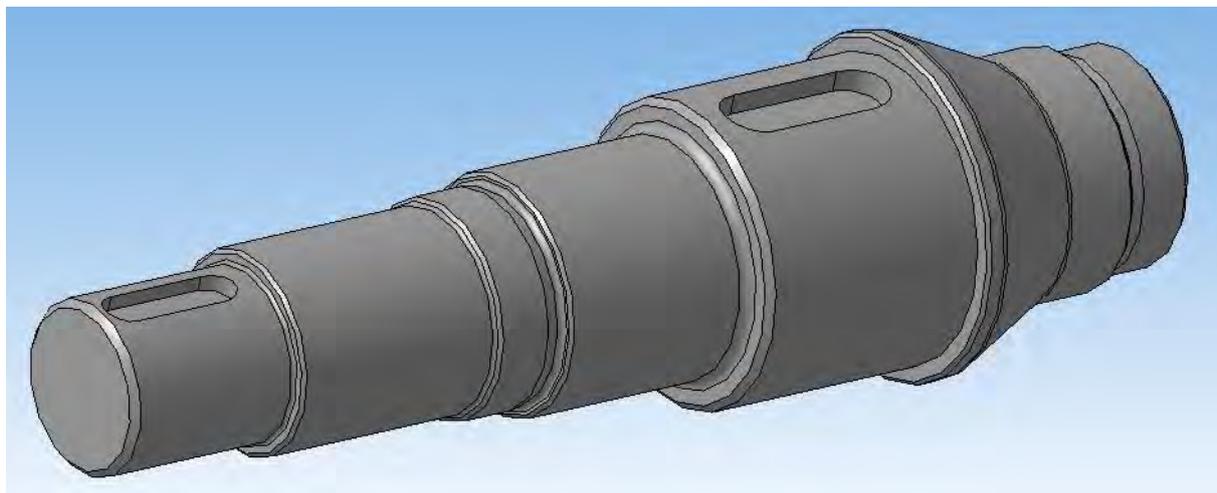


Рис. 1.4. Создание 3D-модели ведомого вала

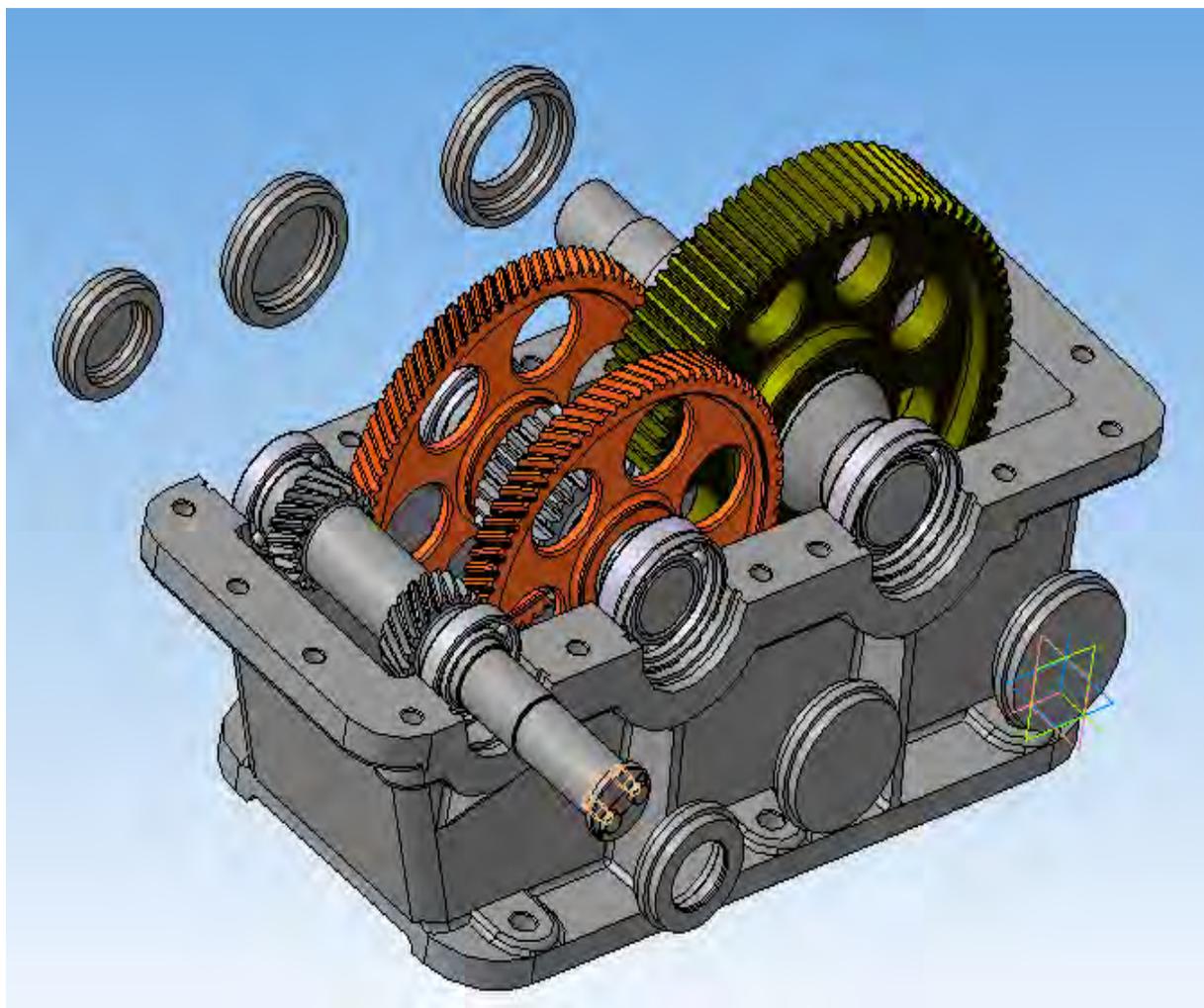


Рис. 1.5. Создание сборки 3D-модели редуктора

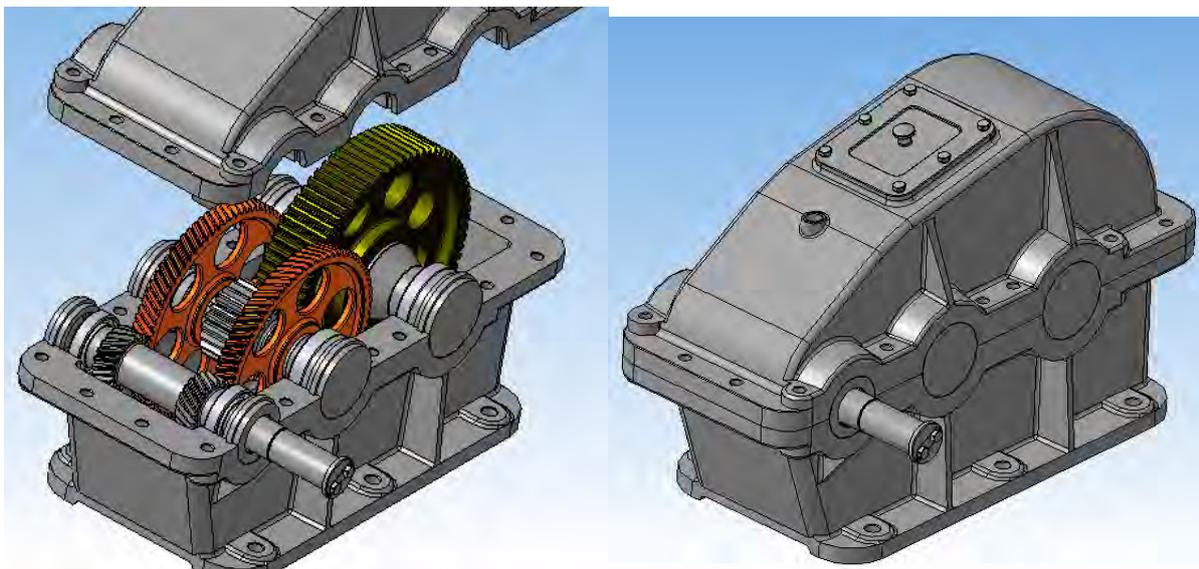


Рис. 1.6. Создание сборки 3D-модели редуктора

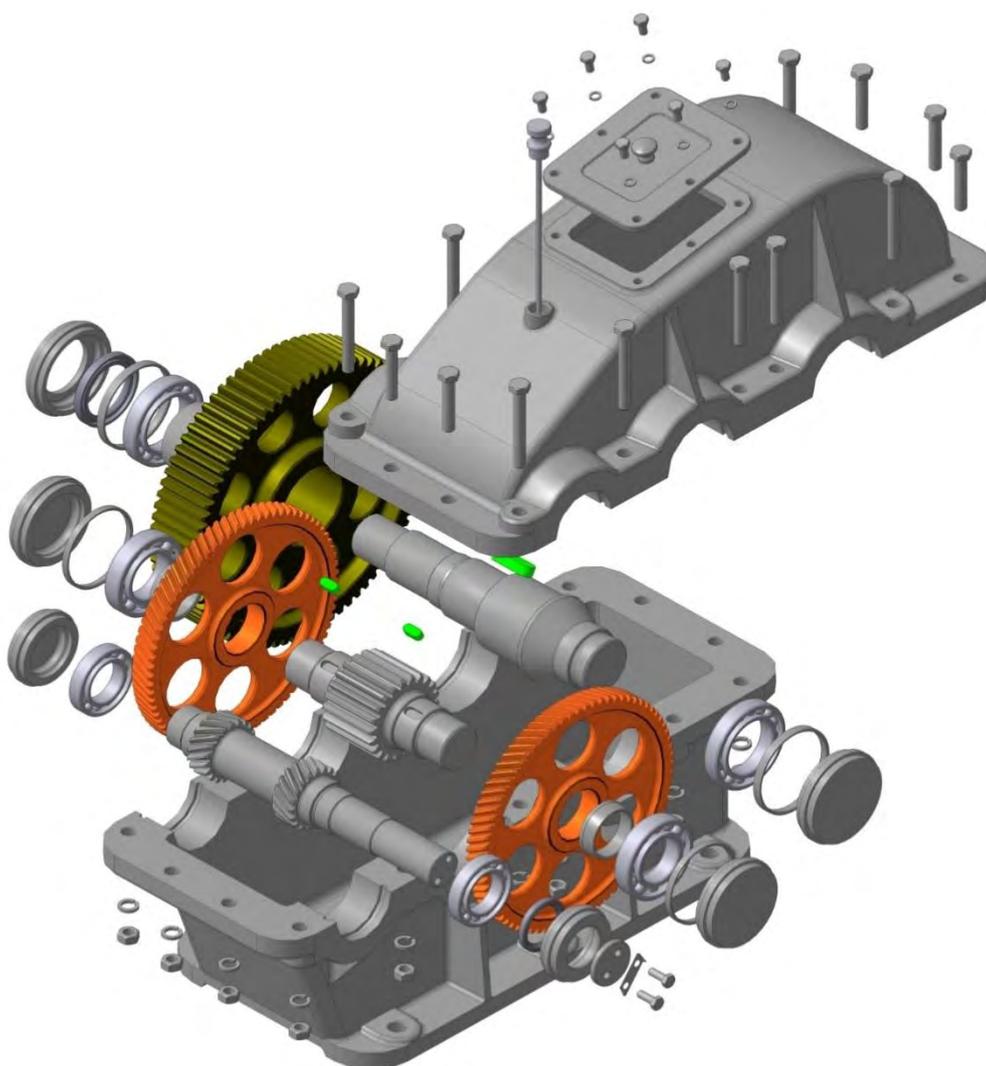


Рис. 1.7. Создание разнесенной сборки 3D-модели редуктора

Пример 2. Виртуальное конструирование двухступенчатой коробки передач с использованием пакета SolidWorks.



Рис. 2.1. Панели задач SolidWorks и создания 3D-моделей зубчатых колес

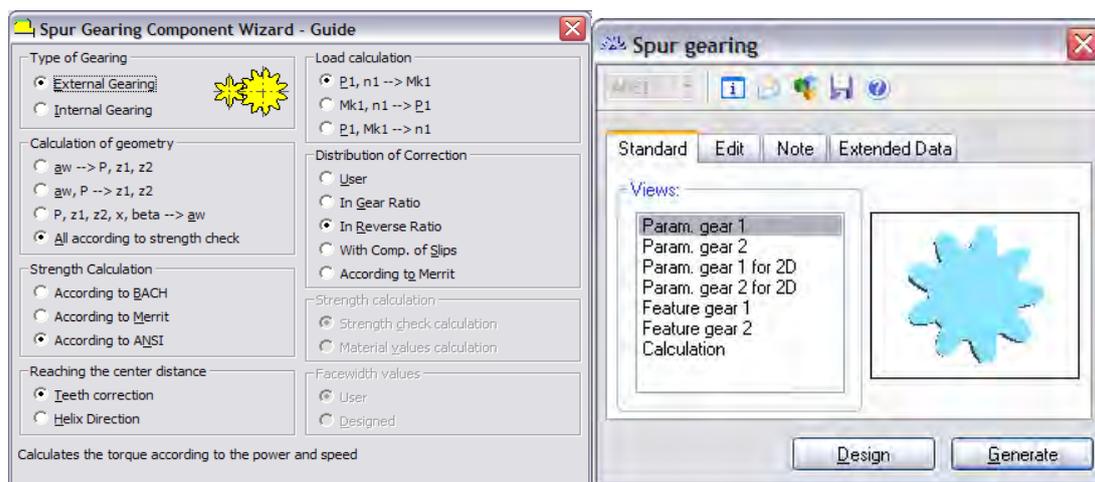


Рис. 2.2. Панели задач ввода параметров и создания 3D-моделей зубчатых колес

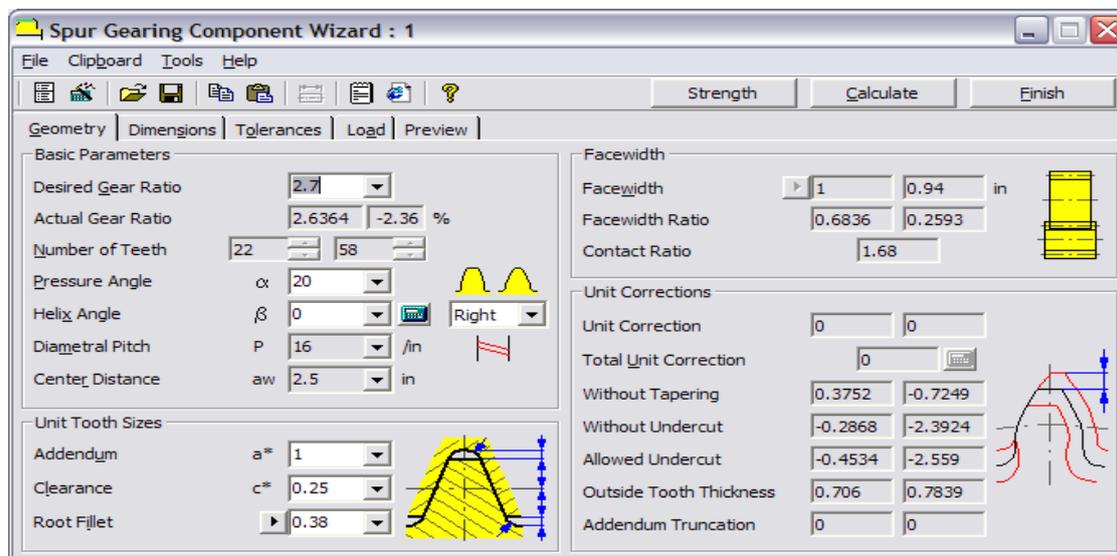


Рис. 2.3. Панели результатов расчета параметров 3D-моделей зубчатых колес

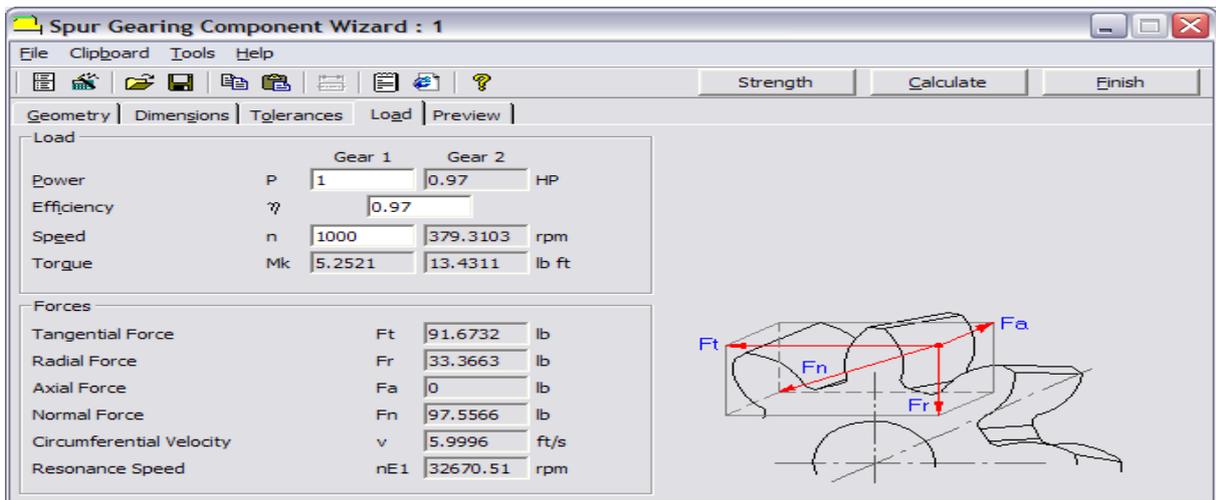


Рис. 2.4. Панель результатов расчета сил, приложенных к зубчатым колесам

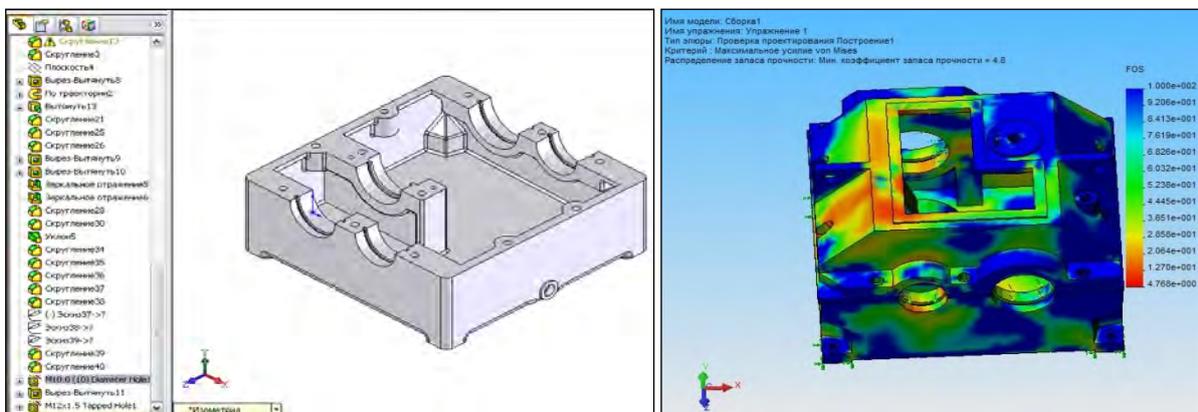


Рис. 2.5. Панели 3D- моделирования и анализа НДС корпуса коробки передач

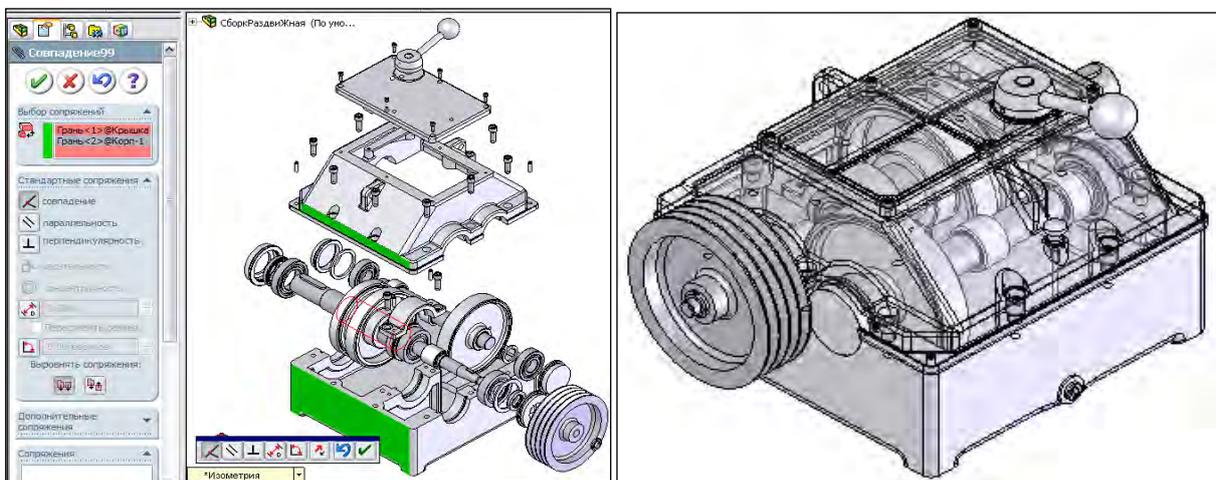


Рис. 2.6 Создание разнесенной и компактной сборок 3D-модели коробки передач

Заключение. Приведены, предложенные автором, общие принципы, методика и основные стадии виртуального конструирования узлов и деталей машин, обеспечивающие реализацию программных требований обучения по курсу “Детали машин”. Разработанная методика эффективно используется в процессе курсового проектирования деталей машин для машиностроительных и механико-технологических специальностей учреждений высшего образования.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ПОДВЕРЖЕННОЙ НЕОДНОРОДНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ В СРЕДЕ SIMULINK\SIMMECHANICS

¹Антунович А.Л., ¹Ильёв И.Г., ¹Гончаренко В.П., ²Миронов Д.Н.

¹Военная академия Республики Беларусь, Минск

²Белорусский национальный технический университет, Минск

Для исследования характеристик переходных процессов, протекающих в сложных механических системах целесообразно проведение натурных либо полунатурных испытаний, которые могут дать наиболее исчерпывающие ответы на ряд вопросов динамики конкретной системы.

Существующие материальные и временные условия, как правило, накладывают существенные ограничения на объем проводимых испытаний. Альтернативой решения поставленной научной задачи является разработка математической модели исследуемой механической системы, которая позволит исследовать многие принципиальные вопросы динамики системы и сократить объем натурных испытаний. Кроме того, модель может дать ответы на ряд вопросов динамики исследуемой системы в условиях, которые трудно, а порой даже и невозможно симитировать при проведении эксперимента. Особенно полезной модель будет на этапе модернизации существующих и при разработке перспективных систем.

К числу таких систем относится и многоствольная пусковая установка (ПУ) [1], которая представляет собой манипулятор, выполненный на базе автомобильного шасси (рисунок 1). В ней в качестве поворотной платформы выступает вращающаяся часть (ВЧ), а в качестве наклонного (исполнительного) механизма – качающаяся часть (КЧ). Реактивные снаряды (РС) выполняют роль груза. Основное воздействие, которое испытывает многоствольная ПУ, вызвано давлением газодинамической струи от реактивных двигателей сходящихся снарядов. Данное воздействие носит неоднородный переменный характер [2].

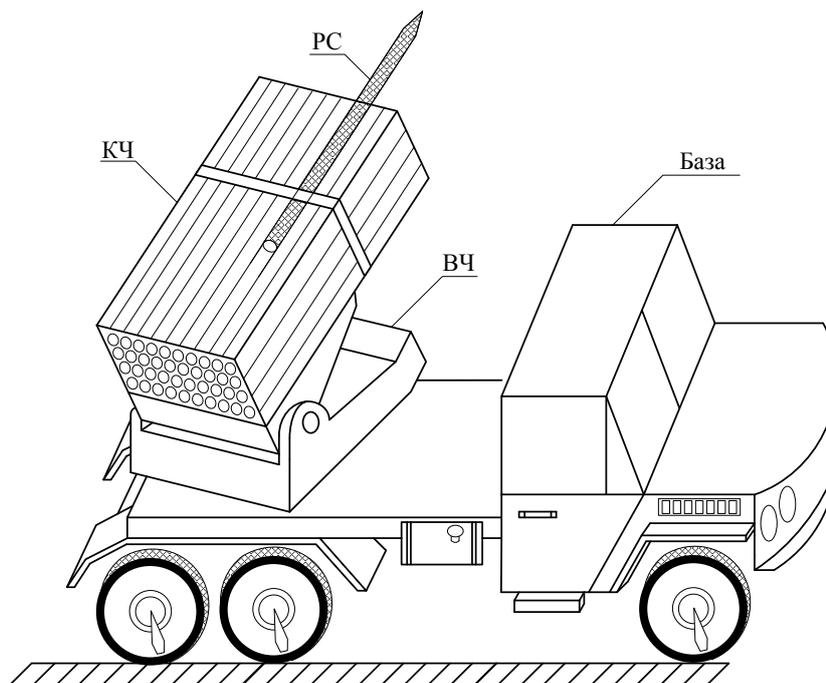


Рис. 1. Расчетная схема многоствольной ПУ

Математическая модель динамики многоствольной ПУ, подверженной неоднородным переменным воздействиям, была построена ранее и описана в [2], [3]. Полученные в процессе моделирования результаты (рисунок 2) для оценки адекватности были сверены с данными, полученными при проведении эксперимента в полигонных условиях. Динамические характеристики многоствольной ПУ, по результатам моделирования, с точностью до 15% соответствуют результатам эксперимента. Расхождение объясняется использованием ряда допущений при моделировании и шумами измерений датчиков, использованных при оценке координат движения реального образца.

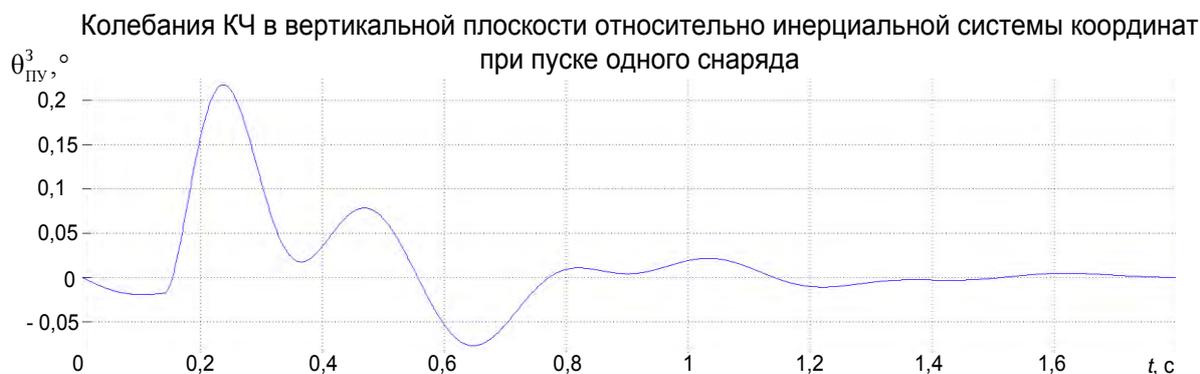


Рис. 2. Результаты моделирования колебаний пакета ПН

Современный уровень развития вычислительной техники позволяет значительно упростить и ускорить процесс разработки математической модели механической системы путем использования прикладного программного обеспечения визуального моделирования. Пакеты визуального моделирования дают возможность пользователю вводить описание моделируемой системы в преимущественно графической форме, а также представлять результаты в наглядной форме в виде диаграмм, графиков или анимационных картин, что может активно использоваться в учебном процессе.

Примером может служить SimMechanics – отдельная библиотека пакета Simulink среды MATLAB. Основное назначение данной библиотеки – моделирование пространственных движений твердотельных машин и механизмов на стадии инженерного проектирования, используя законы теоретической механики. Основные достоинства, отличающие использование библиотеки SimMechanics при реализации моделирования механических систем – простота создания моделей, не требующая высокого уровня подготовки пользователя и высокая скорость вычислений при моделировании движений сложных механических систем с большим числом степеней свободы [4].

Кроме того, библиотека SimMechanics поддерживает средства анимации для демонстрации динамики механических систем.

В процессе создания модели исследуемая механическая система представляется в виде связанной блочной диаграммы, которая преобразуется в ходе моделирования в эквивалентную внутреннюю математическую модель.

Основными типами блоков, используемых при моделировании являются [4]:

- Bodies (тела, отображают составные части моделируемой механической системы (рисунок 3, поз. 4);
- Joints (шарниры, изображают степени свободы одной части механизма относительно другой (рисунок 3, поз. 7, 11);
- Constraints & Drivers (стационарные и нестационарные связи, ограничивают или запускают движения частей механизма относительно друг друга (рисунок 3, поз. 5);
- Actuators (возбудители механизмов, задают приложенные усилия, движения, меняющиеся массу и инерцию);

- Force Elements (силовые устройства и амортизаторы, моделируют усилия между частями механизма);
- Sensors (виртуальные датчики, измеряют усилия или движения частей механизма, узлов шарниров и связей).

Диаграмма любой модели должна включать блоки Solver Configuration (настройка параметров вычислителя (рисунок 3, поз. 1), World Frame (инерциальная система координат (рисунок 3, поз. 2), Mechanism Configuration (задание параметров моделирования: величины и направления действия ускорения свободного падения, шага линеаризации (рисунок 3, поз. 3).

Каждая деталь механизма описывается моделью, содержащей один или несколько блоков, которые для удобства могут объединяться в подсистемы.

На рисунке 3 показана блочная диаграмма модели многоствольной ПУ.

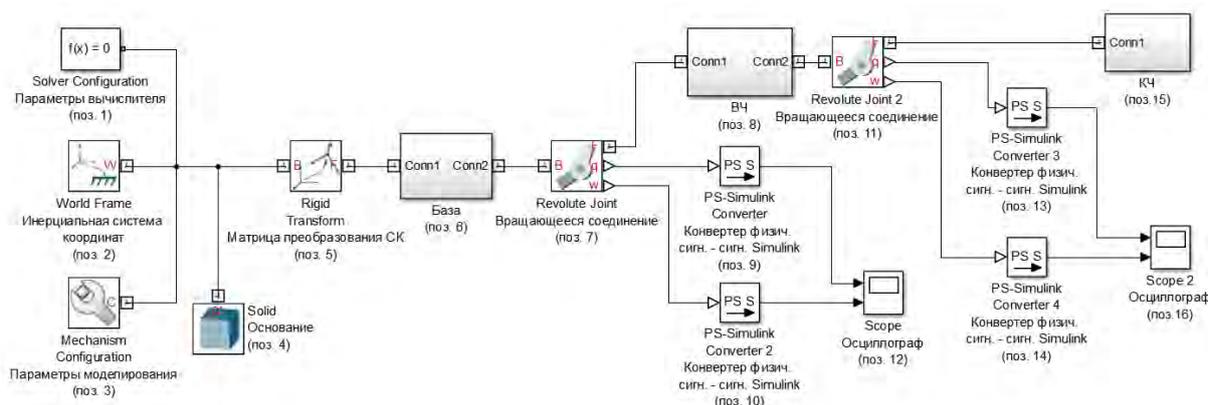
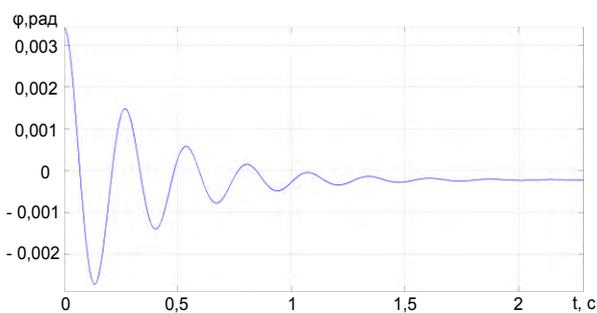


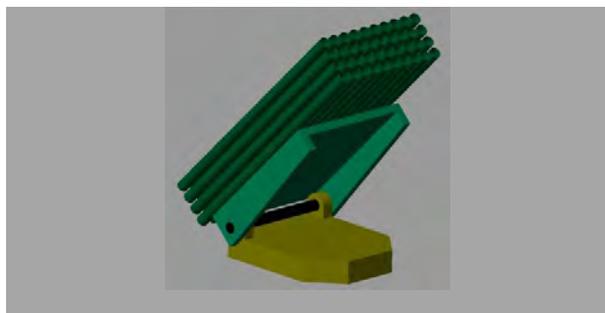
Рис. 3. Блочная диаграмма модели многоствольной ПУ в библиотеке SimMechanics

Все составные части модели многоствольной ПУ (база, ВЧ, КЧ) представлены в структуре диаграммы SimMechanics соответствующими подсистемами (рисунок 3, поз. 6, 8, 15), каждая из которых является группой взаимосвязанных блоков. ВЧ с базой, КЧ с ВЧ соединены вращающимися соединениями с заданными коэффициентами жесткости и демпфирования.

Блоки раздела Joints библиотеки SimMechanics (рисунок 3, поз. 7, 11) имеют возможность вывода данных с встроенных виртуальных датчиков, которые включаются в настройках блока. Так, к примеру, на рисунке 4 (а) показаны данные углового положения КЧ в вертикальной плоскости в результате пробного однократного возмущающего воздействия, снятые с виртуального датчика размещенного на оси вращения КЧ. На рисунке 4 (б) представлена визуализация КЧ при помощи встроенных средств анимации среды Matlab Simulink.



а – Данные углового положения КЧ



б – Визуализация КЧ

Рис. 4. Моделирование динамики КЧ в SimMechanics

Частота затухающих колебаний КЧ определенная по результатам моделирования (рисунок 4) соответствует собственной частоте колебаний КЧ, снятой при проведении эксперимента и результатам математического моделирования [3].

Сила давления газовой струи была рассчитана по методике, изложенной в [3]. Для моделирования ее возмущающего воздействия были использованы блоки External Force and Torque.

На рисунке 5 представлена визуализация модели многоствольной ПУ в SimMechanics, на рисунке 6 – данные с виртуальных датчиков углового положения и угловой скорости КЧ при моделировании залпового огня.

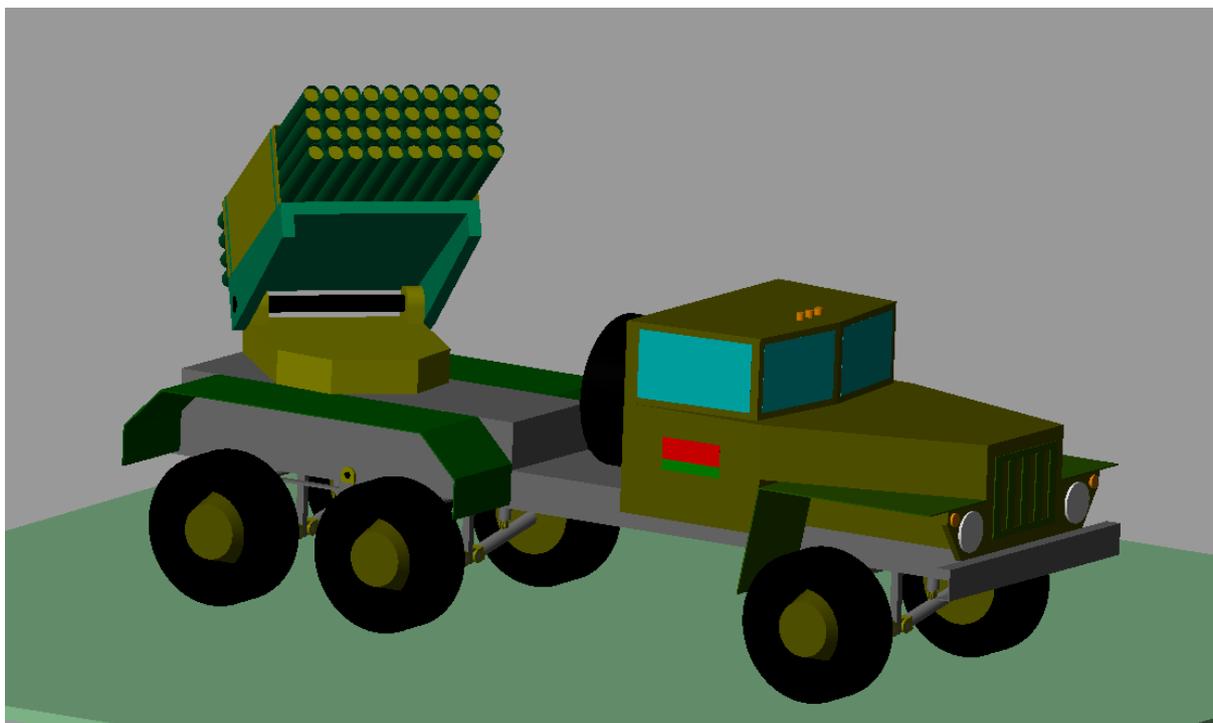


Рис. 5. Визуализация модели многоствольной ПУ в SimMechanic

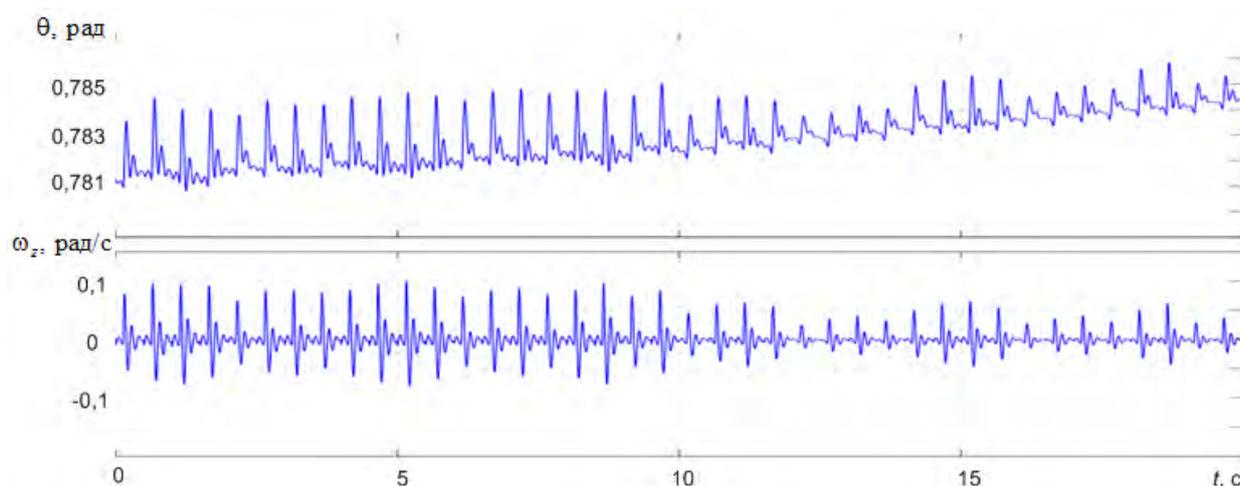


Рис. 6. Данные углового положения и угловой скорости КЧ по результатам моделирования

Результаты моделирования, представленные на рисунке 6 соответствуют имеющимся в литературе [2] данным, а также результатам математического моделирования [3] и эксперимента [5]. Смещение положения равновесия КЧ в процессе залпа объясняется постепенным уменьшением массы, вследствие схода РС.

Таким образом, использование SimMechanics существенно ускоряет и упрощает процесс создания модели исследуемой механической системы. Существует возможность оперативного изменения параметров модели, в том числе в процессе моделирования. Встроенные средства визуализации позволяют дополнительно расширить возможности исследования динамических характеристик. Особенно полезным будет использование SimMechanics в учебном процессе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богомолов, А. И. *Основания устройства и расчет реактивных систем* / А. И. Богомолов. – Пенза: ПАИИ, 2003. – 320 с.
2. Антуневич, А. Л., [и др.] *Применение математической модели для анализа сложной механической системы, подверженной неоднородным переменным воздействиям* // А.Л. Антуневич, И. Г. Ильёв, В. П. Гончаренко, Д. Н. Миронов. – Теоретическая и прикладная механика, №32, с 207-213.
3. *Оценка возможности построения и разработка облика системы управления пуском реактивной системы залпового огня. Шифр «Супра»: отчет о НИР / Науч. рук. И. Г. Ильёв; отв. исп. А. Л. Антуневич. Минск, УО «ВА РБ», 2016. – 133 с.*
4. Щербаков, В. С., [и др.] *Моделирование и визуализация движений механических систем в MATLAB: учеб. пособие* / В. С. Щербаков, М. С. Корытов, А. А. Руппель, В. А. Глушец, С. А. Милюшенко. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2007. – 84с.
5. Сахарук, Д. А., [и др.] *Повышение эффективности стрельбы реактивной системы залпового огня вследствие учета начальных возмущений* / Д. А. Сахарук, В.В. Шаболтиев, И.Г. Ильёв, А.Л. Антуневич // Сб. науч. ст. Воен. акад. Респ. Беларусь. – 2016. – № 30. – С. 124–130.

ИССЛЕДОВАНИЕ НА ПРОЧНОСТЬ МАГИСТРАЛЬНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ УЧАСТКАХ

Кончина Л.В., Поваренкова А.А.

Филиал ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске, Россия

Проблема разрывов трубопроводов ведет к экологическим потерям. Зачатки проблемы зарождаются на этапе строительства трубопровода, а именно при непосредственном выборе профиля дна траншеи.

Решением проблемы может стать исследование на прочность магистральных трубопроводов на криволинейных участках и математическое моделирование прочности трубопровода, необходимое для прогнозирования возможных утечек.

Под влиянием почвы происходит естественный изгиб трубопровода, то есть поворот оси трубопровода в вертикальной или (и) горизонтальной плоскости.

Для прилегания трубопровода к дну траншеи профиль дна траншеи примем в соответствии с упругой линией трубопровода, которая определяется граничными условиями, поперечной нагрузкой и ее распределением [1].

Рассмотрим следующую задачу: получить дифференциальные уравнения изгиба трубопровода без учета его горизонтальных составляющих перемещений, а также определить граничные условия для их решения.

В работе представлена модель поворота оси трубопровода в вертикальной плоскости выпуклостью вниз при повороте на угол φ , если по трубопроводу движется продукт со скоростью \vec{V} , при этом изгиб осуществляется за счет поперечной нагрузки, которая складывается из симметрично расположенной равнодействующей внешней нагрузки интенсивностью q и центробежной силы \vec{F} (см. рис. 1). Трубопровод можно рассматривать как стержень трубчатого сечения из упругого материала. Податливостью основания пренебрегаем и считаем его абсолютно жестким.

Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки [2, 3]:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} \quad (1)$$

где EJ – жесткость трубопровода; M – изгибающий момент.

Разобьем задачу на два участка: участок, на котором действует только центробежная сила (перемещение - y_1) и участок, на котором действует центробежная сила F и равномерно распределенная нагрузка q , интенсивность которой зависит от плотности грунта, высоты засыпки и других параметров, влияющих на изгиб нефтепровода. (перемещение - y_2) [1]:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{F}{2EJ} x^2 \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = -\frac{qx^2}{2EJ} - \frac{F}{2EJ} x^2 \quad (3)$$

Согласно работе [4]:

$$F = \frac{\pi \rho V^2 r^2}{R} (1 - \cos \beta),$$

ρ – плотность нефтепродукта, r – радиус трубопровода, R – радиус закругления трубопровода, поворотом на угол β .

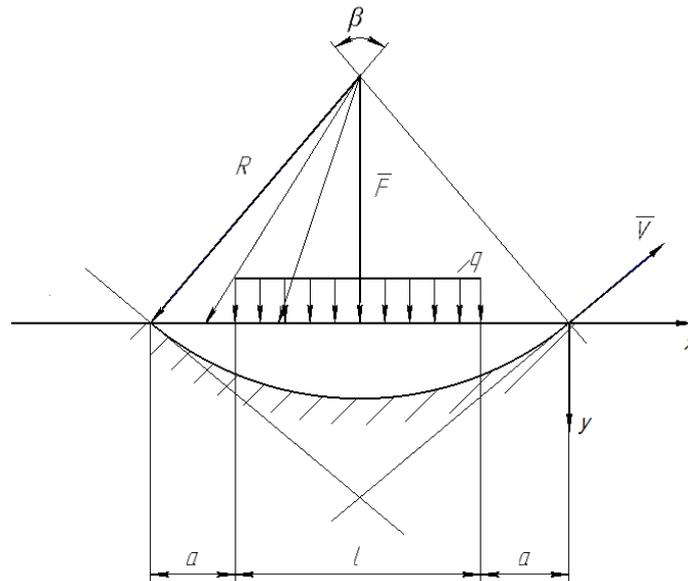


Рис. 1. Схема оси трубопровода в вертикальной плоскости выуклостью вниз

В соответствии с принятой системой координат (см. рис. 1) граничные условия и условия сопряжения двух участков с учетом симметричности трубопровода имеют вид [4]:

$$\begin{aligned}
 &\text{при } x = 0 : y_1 = 0, y_1' = \frac{\varphi}{2}, y_1'' = 0; \\
 &\text{при } x = a : y_1 = y_2, y_1' = y_2', y_1'' = y_2''; \\
 &\text{при } x = \frac{l}{2} : y_2' = 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Граничных условий (4) достаточно для того, чтобы для данной модели трубопровода определить перемещения на участках y_1, y_2 , а также длину волны изгиба трубопровода и наибольшую интенсивность поперечной распределенной нагрузки.

Решая (2), можно получить уравнение, определяющее формулу упругой линии на участке.

Графики уравнений упругой линии для трубы из стали 09Г2С наружным диаметром 325 мм (0,325 м) SDR 21, имеющей нормативную кольцевую жесткость $S_R = 0,008$ МПа, представлены на рисунке 2. Труба укладывается на качественно подготовленное основание, пазухи и бока трубы засыпаются песком и уплотняются тяжелым инструментом.

Нагрузку грунта на метр длины трубопровода q можно определить двумя способами:

$$1) \text{ метод «в насыпи»: } q = \gamma HD,$$

где γ – плотность грунта (20 кН/м^3). Когда уровень грунтовых вод превышает уровень укладки трубопровода, плотность грунта уменьшают до кажущейся плотности грунта в воде, обычно 11 кН/м^3

$$2) \text{ метод «в траншее»: } q = 0,8\gamma HD$$

Примем метод «в насыпи», так как он дает более тяжелые условия нагружения.

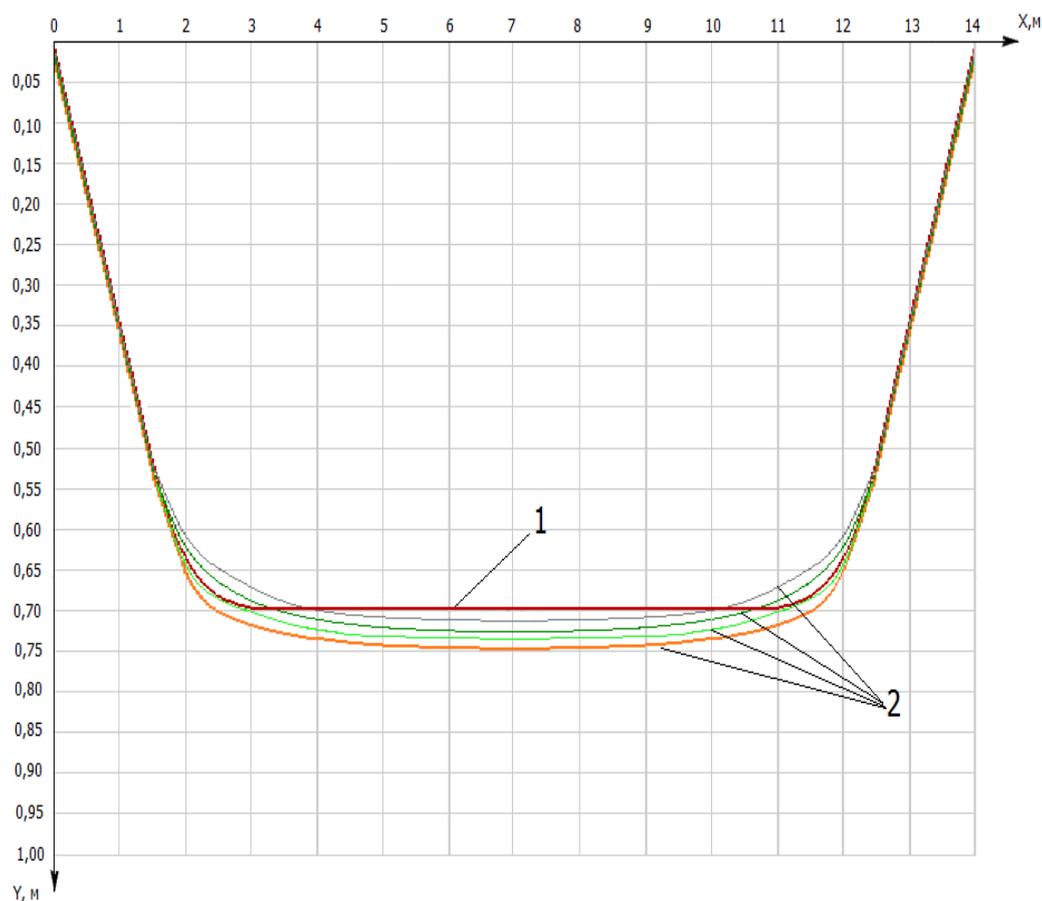


Рис. 2. График упругой линии участка трубопровода: 1 – без учета центробежной силы; 2 – с учетом

Анализ графиков показал, что существующие расчетные обоснования напряженно-деформированного состояния трубопроводов не охватывают в полной мере все параметры, влияющие на изгиб трубопровода, что в ряде случаев не обеспечивает требуемый уровень надежности.

Влияние центробежной силы оказывает значительное изменение вида упругой линии, что свидетельствует о возможности разрыва трубопроводов в месте наибольшего перегиба. Следует отметить, что уравнение упругой линии без учета центробежной силы не имеет ярко выраженного перегиба.

Следовательно, метод расчета без учета центробежной силы не может служить достоверной оценкой надежности, прочности, устойчивости и требуемого уровня безопасности при эксплуатации трубопровода.

Таким образом, центробежная сила при моделировании изгиба трубопровода должна являться обязательной составляющей наравне с внешними нагрузками, действующими на участок трубопровода.

Моделирование опасных участков трубопровода необходимо проводить в технических системах с учетом всех факторов, влияющих на состояние трубопровода, в реальной местности и с учетом отличительных особенностей климата. Регулировка напряженного состояния осуществляется за счет изменения входных параметров таких как, диаметр трубопровода, материала, плотности грунта, высоты засыпки и других параметров, влияющих на изгиб нефтепровода.

Преднамеренное моделирование опасных участков магистрального нефтепровода оказывает положительный эффект на конечный результат использования систем транспортировки нефти. На данном этапе прогнозирования возможно предотвратить послед-

ствия разлива продукта, механических повреждений поверхности труб, выбрать наиболее оптимальные проектные решения при прокладке и формирования линии трубопровода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айнбиндер А. Б. Расчет магистральных трубопроводов: Справочное пособие / А. Б. Айнбиндер. – М.: Недра, 1991. – 287 с.
2. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений / К.К. Пономарев. - Минск: «Высшая школа», 1973. – 560 с.
3. Саргсян А.Е. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов / Саргсян А.Е., Демченко А.Т., Дворянчиков Н.В., Джинчвелашвили Г.А. – М.: Высшая школа, 2000. – 416 с.
4. Иванов И.С. Нагрузки от центробежных сил в трубопроводах с поворотами / Экспозиция нефть и газ. – 2010. – №12. – С. 30-31.
5. Кончина Л.В., Поваренкова А.А. Анализ упругой линии трубопровода, находящегося под действием поперечной нагрузки с учетом центробежной силы// Журнал «Естественные и технические науки» № 10 (100) 2016 г. – С. 97-99. (ВАК).

РОЕВЫЕ МЕХАТРОННЫЕ СИСТЕМЫ

¹Миронов Д.Н., ²Гончаренко В.П.

¹ Белорусский национальный технический университет, Минск

² Военная академия Республики Беларусь, Минск

Любая механическая система состоит из конечного количества простых элементов (деталей), от исправности и надежности работы которых зависит работоспособность всей системы. Чем сложнее механическая система, тем больше количество простых элементов из которых она состоит. С ростом количества конструктивных элементов растет вероятность выхода из строя всей механической системы. И как следствие, уменьшается вероятность выполнения системой задачи по ее функциональному назначению.

Поэтому создание механической (мехатронной) системы состоящей из простых элементов, которые в случае повреждения (уничтожения) будут, без прекращения функционирования всей системы, с помощью искусственного интеллекта автоматически заменены исправными, является актуальной задачей стоящей практически перед всеми областями науки и отраслями производства.

Особенно эта задача актуальна для Вооруженных сил. Создание универсальной боевой системы способной самостоятельно, благодаря искусственному интеллекту, самовосстанавливаться и которую из-за большого количества образующих ее мехатронных устройств малого размера невозможно уничтожить, позволит выполнять боевые задачи без человеческих жертв, с минимальными материальными затратами и с 100% вероятностью выполнения.

Создание сложной мехатронной системы, состоящей из множества простых, автономных мехатронных устройств и механизмов всегда являлось актуальной задачей. Много внимания данной проблеме уделяли философы, писатели-фантасты, режиссеры и ученые всех рангов и областей. Яркими примерами могут послужить фильмы, которые с восхищением смотрели не одно поколение: «Терминатор», «Терминатор 2», «Человек муравей», «Матрица» и т.д.

В фильме «Терминатор» перед нами предстает универсальная, боевая мехатронная машина, способная к анализу и в зависимости от сложившейся обстановки принимать решение. Зрителям кажется, что данная машина непобедима. Но во второй части появляется, как его окрестили зрители, робот из жидкого металла. Который условно состоял из капель, каждая из которых, в случае отделения друг от друга, стремится воссоединиться с другой ближайшей каплей тем самым восстанавливая поврежденные элементы и возрождая робота в целом.

В фильме «Человек муравей» зритель может увидеть на что способна универсальная биологическая система состоящая из различных видов муравьев, которыми управляет человек. Эта биологическая система способна самоорганизованно и самоуправляемо перемещаться и выполнять практически любые задачи. В случае гибели одного из существ на его место становится другое и выполнение задачи не прекращается. Дополнительным преимуществом данной системы является ее миниатюрность и возможность мгновенной перегруппировки и перестроения.

Поэтому идея создание сложной механической системы состоящей из автономных простых взаимозаменяемых устройств остается актуальным.

Сложная система, состоящая из простых составляющих автономных элементов имеет ряд преимуществ:

- гибкость системы в целом (способность к перестроениям перегруппировке, разбеганию и сборке);
- повышенную надежность (при поломке, уничтожении, застревания, элемента системы оставшаяся часть системы продолжает функционировать без него или заменяет его другим);
- возможность наращивания количества составных элементов, а значит потенциала возможности системы.

Идея создания сложных механических систем реализующих коллективное поведение не нова. Примеров таких систем не мало [1]. Но создатели и разработчики не стремятся рассказывать конструктивные решения принятые им при разработке робота, но о них можно догадаться самому, имея определенный опыт и знания конструирования робототехнических систем, изучая конструкцию робота. Чего нельзя сказать о алгоритмах функционирования, принципах связи, обработки информации и управления. Они составляют наибольшую ценность и без комментариев и демонстрации автора здесь не обойтись. Но при демонстрации порой складывается впечатление, что те, кто могут показать что-то действительно впечатляющее воображение зрителя, избегают рассказать о том, что лежит в основе демонстрируемой системы, а те, кто могут рассказать что-то интересное и действительно важное, показать толком ничего не могут.

Поэтому достижения в данной области развиваются очень медленно и до сих пор не нашли широкого применения и огласки. Нельзя не отметить большую стоимость этих разработок.

Наиболее яркие и интересные разработки [2, 3, 4].

Проект I-SWARM. В университет Карлсруэ (Германии) разрабатываются роботы с «коллективным искусственным мышлением». Роботы умеют узнавать друг друга и придерживаться друг друга.

Multi Robot Systems. Университет Алберты в Эдмонтоне (США). Исследования коллективного поведения роботов. Проект посвящен задачам коллективного принятия решений.

Проект SwarmBot. Американская компания iRobot занята разработкой небольших роботов, способных сообща выполнять определенные действия. Ожидается, что роботы SwarmBot смогут объединяться в группы численностью до десяти тысяч и выполнять такие задачи, как, например, поиск мин, исследование неизвестных территорий (в том числе на других планетах), обнаружение вредных веществ и пр.

Проект DARPA-2003. В рамках проекта был создан отряд из 120 роботов. Основная задача проекта – реализация коллективного решения тактических и разведывательных задач.

Проект Centibots. Роботы способные работать и как единый организм, и в одиночку. Их цель – изучить закрытое помещение, составить его план и выполнить какую-нибудь задачу.

Артиллерийская система NLOS-LS (2010 г). Корпорации Lockheed Martin и Raytheon создают артиллерийскую систему нового поколения NLOS-LS. Заряды смогут объединяться в воздухе в интеллектуальную сеть и с максимальной эффективностью поражать объекты противника, расположенные вне зоны прямой видимости.

Проект SwarmRobot. Проект посвящен созданию минироботов (с линейными размерами до 3 см), которые могут организовывать масштабируемые коллективы из десятков и сотен роботов (рис.1). Предполагается, что создаваемая элементная база позволит реализовать различного рода эффекты самоорганизации в больших коллективах.

Проект Swarmanoid. Основная задача проекта – исследование поведения неоднородных коллективов роботов. Реализована задача, в которой коллектив из колесных роботов, летающего робота-разведчика и манипуляционного робота (рис.2) совместными усилиями находили объект (книгу) и манипулировали с ним.

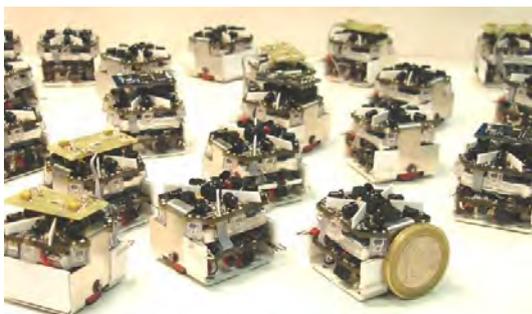


Рис. 1. Мини-роботы проекта Swarm-Robot



Рис. 2. Роботы проекта Swarmanoid



Рис. 3. Миниробот S-бот

Эволюционирующие роботы. В 2009 г. в швейцарской лаборатории Laboratory of Intelligent Systems (политехническая школа, Лозанна) были проведены исследования в области «эволюции» роботов. Эволюционировал геном робота, определяющий поведение. В экспериментах группа из 10 роботов состязалась за пищу. Роботы – это колесные платформы (s-боты) диаметром 12 и высотой 15см. (рис.3).

Задача роботов заключалась в поиске «источника пищи», которым являлось светящееся кольцо на одном из концов арены. На другом конце арены было более темное кольцо, которое считается «отравленным». Роботы получали очки в зависимости от того сколько времени проведут около источников пищи и/или «яда». Кроме того, роботы могли «общаться» друг с другом, посредством световых сигналов.

Роботы могли «эволюционировать» из-за того, что каждый робот был оснащен искусственной нейронной сетью контролируемой бинарным «геномом». В ходе экспериментов эволюция роботов приводила иногда к тому, что роботы обучались даже обманывать соперников, испуская «неправильный» свет, находясь возле кормушки (чтоб не привлекать к кормушке конкурентов).

Для управления и взаимодействия группы роботов разработана схема управления представленная на рисунке 4.

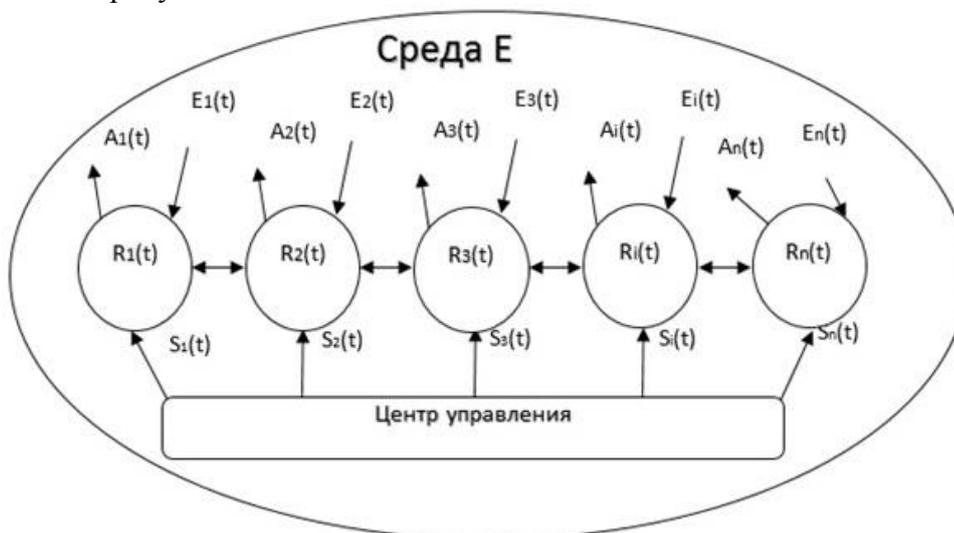


Рис. 4. Схема управления минироботами

На рисунке 4 кругами обозначены мехатронные устройства действующие сообща, под центром управления понимается персональная электронная вычислительная машина, $S(t)$ - это вектор-функция времени t , которая описывает состояние группы роботов R и некоторого участка среды $E(t)$ в ее окрестности, $A(t)$ - вектор действий роботов.

Робот и среда, взаимодействуя друг с другом, образуют некоторую систему «робот–среда». Состояние системы «робот–среда» в момент времени t описывается, как отмечалось выше, вектор-функцией $S(t)$, которая определяется как

$$S(t) = (R(t), E(t)).$$

Задача управления роботом состоит в том, чтобы определить такую последовательность действий $A(t)$ на интервале времени $[t_0, t_k]$, выполнение которых при связях, начальных условиях и ограничениях обеспечивало бы экстремум функционала

$$Y = \Phi(R_k, E_k, t_k) + \int_{t_0}^{t_k} F(A(t), R(t), E(t), t) dt.$$

Каждый робот самостоятельно принимает решение в выборе оптимальной траектории движения, поддерживая связь с соседними роботами находящимися в рое.

По достижению конечного пункта между роботами происходит распределение и перераспределение задач, а в случае необходимости дублирование. Критерий выбора и распределения задач имеет вид. В момент времени $t \in [t_0, t_k]$ каждый робот роя $R_j \in R$ ($j \in [1, N]$), состоящей из N роботов, может решать m_j целевых задач, на которые может быть разбита общая для роя роботов целевая задача T_c , или, другими словами, перед роботом R_j поставлена одна из m_j целей. Выполнение каждой из задач $T_i \in T_c$ ($i \in [1, m_j]$) R_j роботом роя дает приращение целевого функционала $\Delta Y_{i,j}$ ($i \in [1, m_j]$). Относительная оценка эффективности выполнения j -м роботом i -й цели определяется по формуле

$$d_{j,i} = \frac{\Delta Y_{i,j}}{Y_j^{\max}},$$

где ΔY_{\max} максимально возможное приращение целевого функционала, которое может обеспечить один робот при выполнении какой-либо задачи. Распределения задач состоит в том, чтобы в момент времени $t \in [t_0, t_k]$ распределить задачи между роботами роя таким образом, чтобы

$$Y_c = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{m_j} d_{j,i} \rightarrow \max.$$

Данная задача решается с помощью итерационной процедуры оптимизации коллективных действий.

В условиях динамической недетерминированной среды нет смысла реализовывать действия роботов, обеспечивающие экстремум функционала на всем интервале времени $[t_0, t_k]$, так как ситуация может измениться таким образом, что полученное в некоторый момент времени решение в дальнейшем может стать далеко не оптимальным. Для решения такой задачи необходимо использовать алгоритмы коллективного улучшения плана [5, 6].

Для управление группой роботов необходимо использовать современные алгоритмы выбора лидера группы, который в случае уничтожения или поломки, выбирался группой оставшихся роботов автоматически. Осуществляется это следующим способом. Робот сети (агент), имеющий максимальное количество связей, становится претендентом на роль лидера A (рис. 5). Его ближайшее окружение – анализаторы информации B , используемой для принятия решения. Роботы, расположенные на периферии сети S , отвечают за сбор информации.

Робот A становится лидером, путем голосования осуществляемого роботами стаи, которое осуществляется следующим способом.

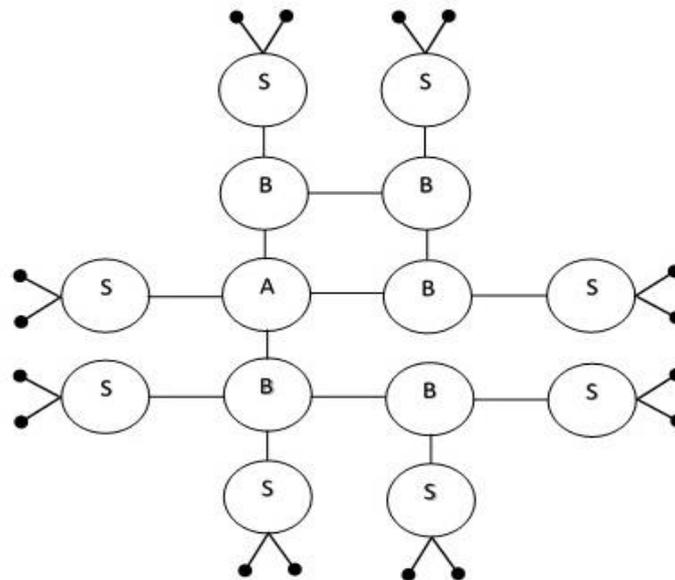


Рис. 5. Организация связи между роботами стаи

Каждый робот в процессе голосования представлен четырьмя значениями:

$$A = (N, L, C, W),$$

где N – идентификатор или имя робота, L – список роботов-соседей, от которых робот может получать информацию, C – идентификатор «кандидата в лидеры», за которого голосует робот, W – вес кандидата C или число голосов, которое, по мнению агента, следует отдать за «кандидата в лидеры».

Каждый робот определяет, за кого голосуют его соседи. При этом, в зависимости от веса кандидата, за которого голосует сосед, робот может поменять свое мнение и проголосовать за того же кандидата, что и его сосед.

В работе предложено объединить миниатюрные мехатронные устройства в единый универсальный механизм функционирующий как рой. Созданная универсальная боевая система, способна самостоятельно, благодаря искусственному интеллекту, самовосстанавливаться и выполнять боевые задачи со 100% вероятностью, без человеческих жертв и с минимальными материальными затратами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г. Модели и алгоритмы коллективного поведения в группах роботов. –М.: Физматлит, 2009. -280 с.
2. Rybski, P.E.; Burt, I.; Dahlin, T.; Gini, M.; Hougen, D.F.; Krantz, D.G.; Nageotte, F.; Papanikolopoulos, N.; Stoeter, S.A.; "System architecture for versatile autonomous and teleoperated control of multiple miniature robots" Dept. of Comput. Sci. & Eng., Minnesota Univ., Minneapolis, MN, USA , 2001, 2917 - 2922 vol.3 ISSN: 1050-4729 Print ISBN: 0-7803-6576-3.
3. Карпов В.Э. Коллективное поведение роботов. Желанное и действительное //Современная мехатроника. Сб. научн. трудов Всероссийской научной школы (г.Орехово-Зуево, 22-23 сентября 2011) - Орехово-Зуево, 2011. – 132 с. сс.35-51.
4. Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г. Модели и алгоритмы коллективного поведения в группах роботов. –М.: Физматлит, 2009. -280 с.
5. Каляев И. А. Метод коллективного управления группой объектов // Нелинейный динамический анализ (NDA'2): Материалы Второго междунар. конгресса. — М.: МАИ, 2002
6. МакКоннелл Дж. Основы современных алгоритмов. - М.: Техносфера, 2004. - 368 с.

НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ ДИСК–ШИНА–АСФАЛЬТОБЕТОН ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СООТНОШЕНИЯХ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ НА ДИСК И ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ В ШИНЕ

д.ф.-м.н. **Щербаков С.С.**, асп. **Грибовский Г.В.**

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. При проектировании элементов системы «автомобильная шина–асфальтобетон» и оптимизации параметров их взаимодействия, важную роль играют компьютерные модели трёхмерного напряженно-деформированного состояния (НДС). Для производителей автомобильных шин и автодорожных служб важной задачей также является оценка объёмной повреждаемости и износа протектора шины и асфальтобетонного покрытия, работающих в условиях контактной, механической и фрикционной усталости. Большое количество работ посвящено аналитическому и компьютерному моделированию НДС отдельных компонент вышеназванной системы [1,2,3]. Однако, задача оценки одновременных контактных взаимодействий элементов системы, их пространственного НДС и состояния объёмной повреждаемости остаётся не полностью исследованной.

Целью данной работы является определение с помощью компьютерного конечно-элементного моделирования НДС многокомпонентной системы «диск–шина–асфальтобетон» при различных значениях радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине. Результаты, полученные в данной работе, в дальнейшем будут использованы для определения объёмной повреждаемости рассматриваемой системы.

Геометрическая модель системы и ее механические характеристики. В расчётах была использована готовая геометрическая модель стального диска и грузовой шины радиуса 22,5 дюйма, имеющей ромбовидный протектор (рис. 1а). Также в шине были учтены дополнительные конструктивные элементы [4], приведённые на рисунке 1б и перечисленные в табл. 1 [5].

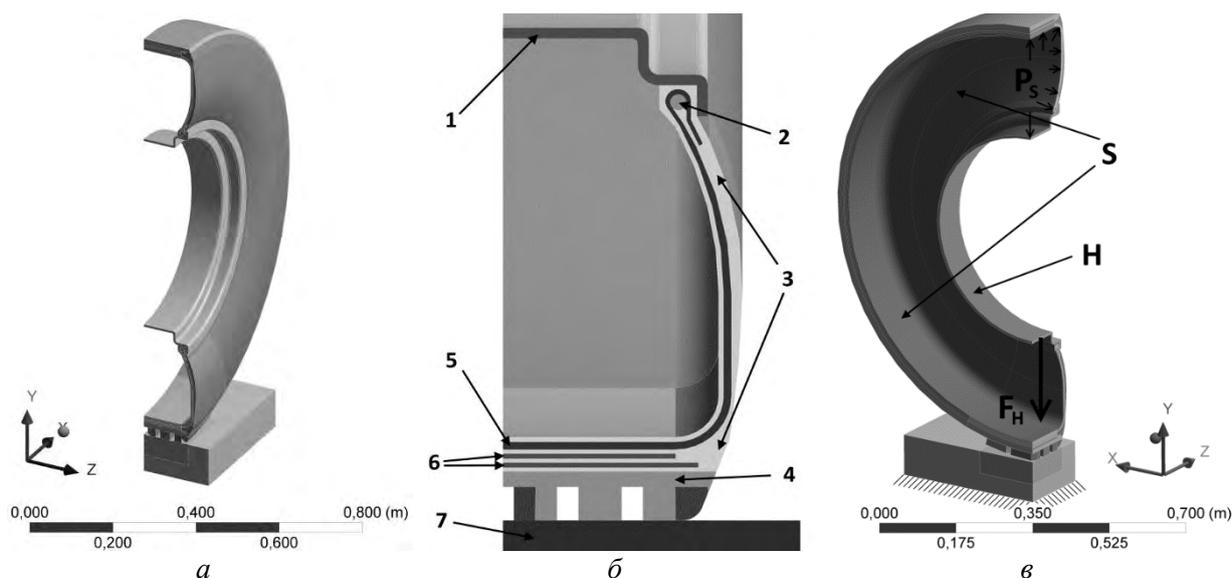


Рис. 1. Общий вид модели (а), схематичное обозначение материалов (б) и схема нагружения (в)

Таблица 1 – Механические характеристики элементов системы

Элементы системы	Модуль упругости E , Па	Коэффициент Пуассона ν	Плотность ρ кг м ⁻³
1. Стальной диск	$2 \cdot 10^{11}$	0,3	7850
2. Бортовое кольцо	$2 \cdot 10^{11}$	0,3	7850
3. Резина	$8 \cdot 10^6$	0,49	1100
4. Резиновый протектор	$4 \cdot 10^6$	0,49	1100
5. Нейлоновый каркас	$9 \cdot 10^{10}$	0,3	1500
6. Стальной брекер	$1,7 \cdot 10^{11}$	0,3	1100
7. Асфальтобетон	$14,77 \cdot 10^8$	0,1	2510

Конечно-элементное разбиение и граничные условия. В работе особое внимание уделялось трехмерному напряженно-деформированному состоянию в зоне контакта протектора шины и асфальтобетона. В указанной области в направлении действия радиальной нагрузки была задана более плотная расчетная сетка (см. рисунок 2а, 2б).

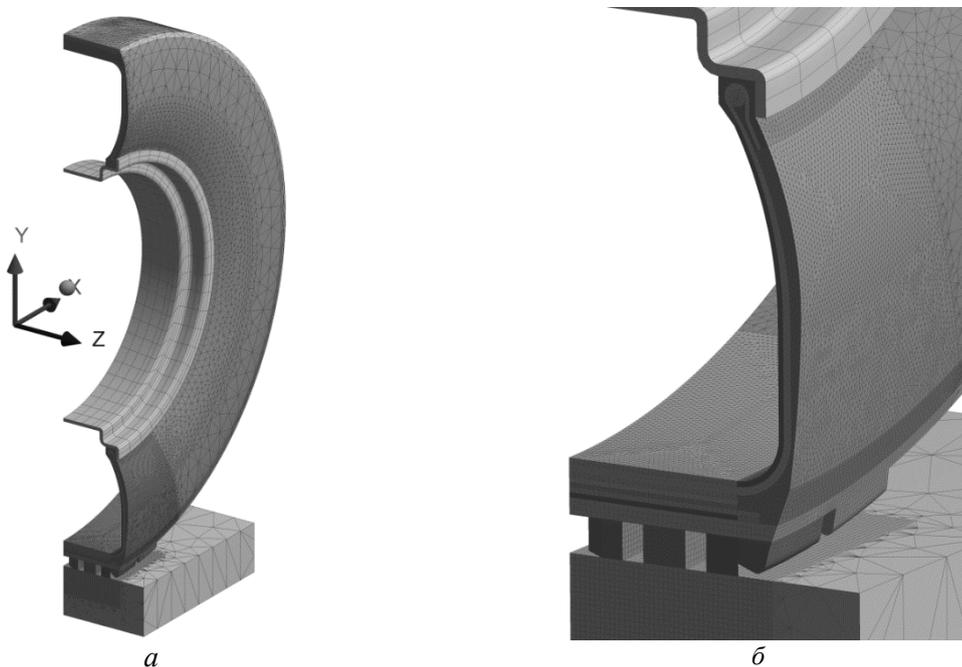


Рис. 2. Конечно-элементное разбиение модели: полная модель (а), окрестность контактного взаимодействия (б)

Граничные условия для системы были заданы следующие [5]:

- внутреннее давление p_S (см. рис. 1в и табл. 2) в шине на поверхности S ;
- радиальная нагрузка F_H (см. рис. 1в и табл. 2) направленная вдоль Oy , приложенная к поверхности H ;
- основание асфальтобетонного покрытия было жестко зафиксировано во всех направлениях;
- на поверхностях взаимодействия элементов шины были заданы условия сцепления;
- на поверхностях контакта протектора шины и асфальтобетона были заданы условия контактного взаимодействия с трением по областям проскальзывания и сцепления (коэффициент трения шина–асфальтобетон был равен 0,6 [6]);
- на поверхностях сечений модели в плоскостях xOy и yOz были заданы условия симметрии по оси z и x соответственно.

Таблица 2 – Комбинации внутреннего давления в шине и радиальной нагрузки на диск, при которых проводились расчёты

p_s , МПа \ F_H , кН	6	7	8	9	10
0,75	+	-	+	-	+
0,80	+	-	+	-	+
0,85	+	+	+	+	+

Анализ напряжённо-деформированного состояния. Расчёт НДС проводился в программном комплексе ANSYS Workbench. Вне зависимости от рассматриваемых нагрузок, в системе диск–шина–асфальтобетон максимальная интенсивность напряжений (рис. 3а, 3б) возникает в диске в направлении радиальной нагрузки, а также в окрестности концентраторов напряжений. Также большие напряжения возникают в бортовом кольце шины, нейлоновом каркасе и в стальных слоях брекера. В асфальтобетоне, как и в резине, напряжения на порядок меньше, по сравнению с остальными элементами системы. Соответственно, в резине деформации на порядок больше. Более детальный анализом НДС каждого элемента системы при заданных нагрузках, приведен в работе [5].

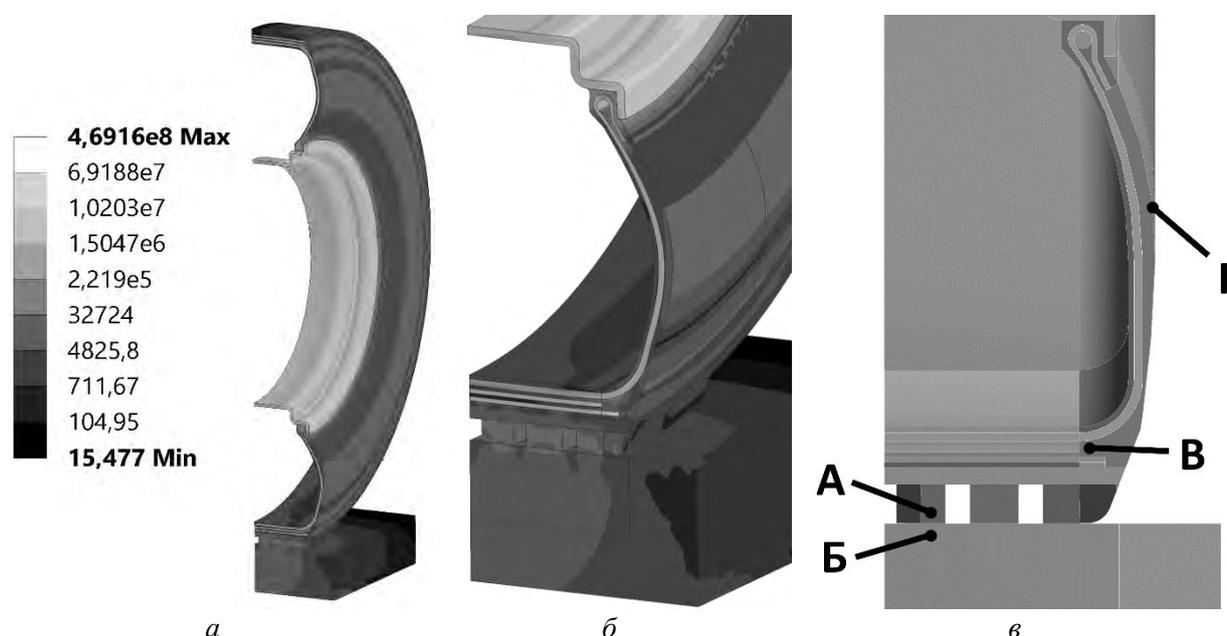


Рис. 3. Интенсивность напряжений во всей системе (а, б), рассматриваемые точки для анализа НДС системы (в): А – резиновый протектор, Б – асфальтобетон, В – резина под нейлоновым каркасом, Г – резиновая бортовая часть шины

Поскольку рассматриваемая система содержит много элементов, то её комплексный анализ затруднителен. Дальнейший анализ будет осуществляться по четырем характерным точкам, где образуются наибольшие напряжения (рис. 3в): А) в протекторе шины в области контакта; Б) в асфальтобетонном покрытии в зоне контакта; В) в резине под нейлоновым каркасом в области контакта; Г) в бортовой внешней части шины.

Протектор шины. Интенсивность напряжений и деформаций в выбранной точке А резинового протектора в области контакта шины и асфальтобетона имеет зависимость от F_H близкую к линейной (рис. 4). С увеличением радиальной нагрузки F_H с 6 до 10 кН, напряжения и деформации увеличиваются примерно на 34%. Напряжения увеличиваются с 0,65 до 0,90 МПа, а деформации с 170 до 230 мм/мм.

При изменении внутреннего давления в шине p_S с 0,75 до 0,85 МПа интенсивность напряжений в рассматриваемой точке А, увеличивается незначительно.

Асфальтобетон. Интенсивность напряжений и деформаций в выбранной точке Б асфальтобетона в области контакта с резиновым протектором шины имеет, как и в шине, близкую к линейной зависимость от F_H (рис. 4). С увеличением нагрузки с 6 до 10 кН, напряжения увеличиваются примерно на 37% с 0,57 до 0,78 МПа, а деформации на 25% с 0,40 до 0,55 мм/мм. Деформации в резиновом протекторе шины на порядки выше, чем в асфальтобетоне, который является гораздо более жёстким материалом.

Интенсивности напряжений увеличивается незначительно при изменении внутреннего давления p_S с 0,75 до 0,85 МПа в зафиксированной точке в асфальтобетонном покрытии. Гораздо большее влияние на напряжения в области контакта оказывает радиальная нагрузка на диск.

Резина под нейлоновым каркасом в области контакта. Интенсивность напряжений в резине в выбранной точке В под нейлоновым каркасом в области контакта шины и асфальтобетона имеет зависимость от F_H близкую к линейной (рис 4). Несмотря на увеличение радиальной нагрузки на диск с 6 до 10 кН, напряжения уменьшаются на 3% с 1,76 до 1,71 МПа, а деформации на 6 % с 220 до 214 мм/мм. Это может быть связано со сложным характером перераспределения напряжений в данной области шины при взаимодействии с другими её элементами, такими как нейлоновый каркас и стальной бреккер.

Более значительное влияние на данную область имеет изменение внутреннего давления в шине p_S с 0,75 до 0,85 МПа, при котором напряжения линейно возрастают примерно на 13%.

Резина в бортовой части. Интенсивность напряжений и деформаций в выбранной точке Г бортовой части шины с увеличением нагрузки с 6 до 10 кН возрастает незначительно (рис. 4), и её изменение носит линейный характер.

Внутреннее давление в рассматриваемой точке оказывает большее влияние на изменение напряжений, увеличивая их примерно на 12%.

Заключение. Проведено компьютерное моделирование трехмерного напряжённо-деформированного состояния многокомпонентной системы диск–шина–асфальтобетон, нагруженной различными комбинациями внутреннего давления в шине и радиальной нагрузки на диск (табл. 2).

Получены распределения напряжений в системе с учетом контактного взаимодействия между шиной и асфальтобетоном. Показано, что напряжения в резине на 1-1,5 порядка ниже, а деформации выше, чем в стальном диске и нейлоновом каркасе, за счет большей жесткости последних.

Были проанализированы изменения интенсивности напряжений и деформаций в 4-х характерных точках системы (рис. 3в) в зависимости от нагрузок на диск и внутреннего давления в шине (табл. 2).

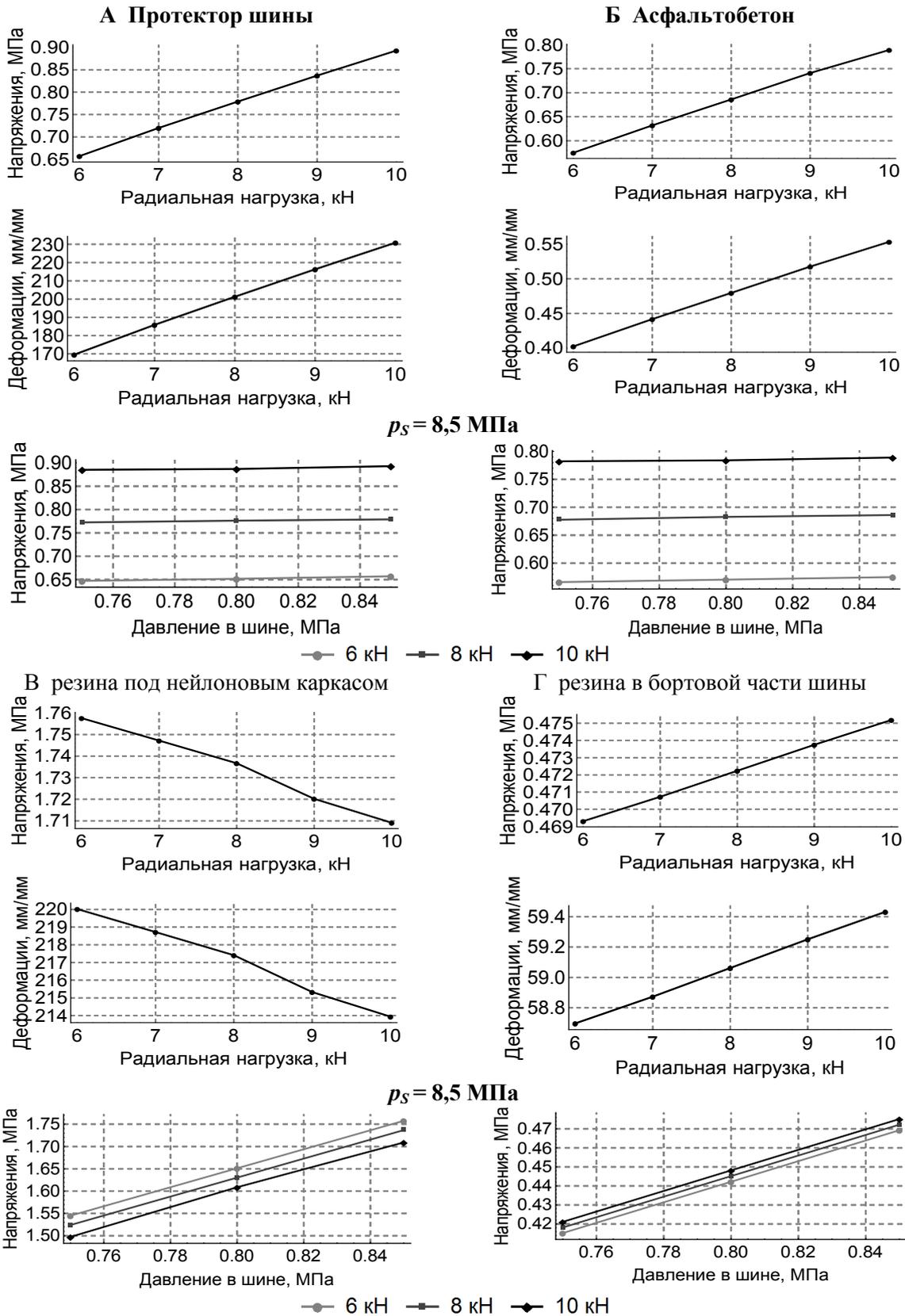


Рис. 4. Графики изменения интенсивности напряжений и деформаций в зависимости от радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине в рассматриваемых точках А, Б, В и Г (рис. 3в)

При увеличении радиальной нагрузки на диск с 6 до 10 кН напряжения и деформации в резиновом протекторе, асфальтобетоне и бортовой части шины возрастают в разной степени. Наибольший прирост напряжений и деформаций наблюдается в резиновом протекторе на 34%, а наименьший на 1% – в бортовой части шины. В резине под нейлоновым каркасом напряжения и деформации уменьшаются на 3% и 6% соответственно. Все зависимости напряжений и деформаций от радиальной нагрузки на диск имеют форму близкую к линейной.

При увеличении внутреннего давления в шине с 0,75 до 0,85 МПа напряжения в резиновом протекторе и асфальтобетоне увеличиваются незначительно. Изменение внутреннего давления в шине имеет большее влияние на резину под нейлоновым каркасом и в бортовой части шины, увеличивая там напряжения на 12-13%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Al-Qadi, Imad L. Prediction of Tire-Pavement Contact Stresses and Analysis of Asphalt Pavement Responses: A Decoupled Approach / Imad L. Al-Qadi, Hao Wang // *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists*. – 2011. – №80. – С. 289–316.
2. Шейкина, В.А. Математическое моделирование контактного взаимодействия авиационной шины с жёстким покрытием / В.А. Шейкина – Иваново: ИГЭУ, 2012.
3. Вайништейн, Е.В. Исследование изменения касательных напряжений и вертикальных перемещений от лесовозного автопоезда в конструкции дорожной одежды и земляного полотна / Е.В. Вайништейн, В.М. Вайништейн, П.А. Нехорошков // *Инженерный вестник Дона*. – 2012. – №4–2. – Т. 23. – С. 39.
4. Lopez, I. Tire/road friction modeling / I. Lopez, B. de Bruijn, A.J.C. Schmeitz – Eindhoven: TU/e, 2007. – С. 9.
5. Грибовский, Г. В. Объёмная повреждаемость трибофатической системы диск–многокомпонентная шина–асфальтобетон / Г. В. Грибовский, С. С. Щербаков // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. Вып. 32*. Минск: БНТУ, 2017. –С. 277 – 282.
6. Коэффициенты трения скольжения // *DPVA.info справочные таблицы для инженеров [Электронный ресурс]*. – Режим доступа: <http://www.dpva.info/Guide/GuidePhysics/Frication/FrictionOfSlicing/>. – Дата доступа: 07.02.2015.

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО МАНИПУЛЯТОРА НА ТРЁХ ПЛАНАРНЫХ ПОЗИЦИОНЕРАХ*

студ. Кузнецов В.В.

*УО «Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники», Минск*

Введение. Построение параллельных манипуляторов, предназначенных для реализации сложных пространственных перемещений инструмента и заготовки с повышенными точностными и динамическими характеристиками обязательно требует проведения исследования динамики его исполнительного пространственного механизма. В процессе динамического анализа исполнительного механизма параллельного манипулятора решаются задачи алгоритмизация математических моделей, описывающих динамическое состояние и поведение механизма в движении и равновесии при наличии внешних силовых воздействий. На базе построенной динамической модели исполнительного механизма решаются прямая и обратная задачи динамики. В среде моделирования проводится симуляция работы исполнительного механизма по его динамической модели для конкретных случаев отработки заданных перемещений. Построенная динамическая модель выступает оптимальным средством настройки и верификации регулятора системы управления, так как учитывает одновременно и динамические и кинематические особенности исполнительного механизма.

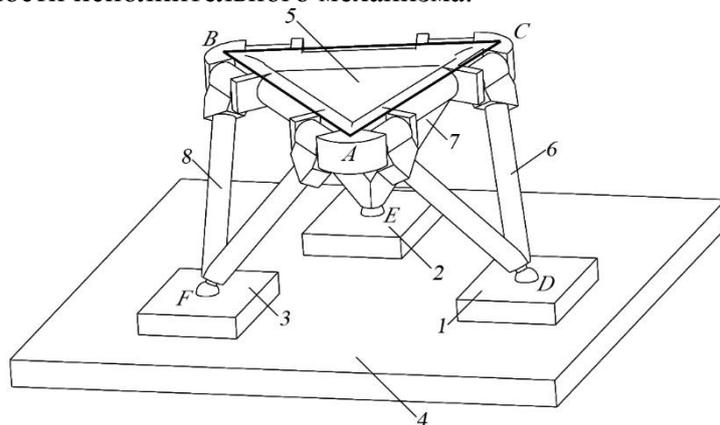


Рис. 1. Параллельный манипулятор на трёх планарных позиционерах

В статье рассмотрено имитационное моделирование динамики параллельного манипулятора на трёх планарных позиционерах. Исполнительный механизм параллельного манипулятора (рис. 1) представляет собой пространственный механизм, кинематическая цепь которого состоит из семи подвижных звеньев, из которых три 1, 2, 3 ведущие в виде индукторов планарных позиционеров, а остальные звенья 4, 5, 6, 7 образуют группу Ассур третьего класса в виде раскрывающегося тетраэдра. Выходным звеном исполнительного механизма рассматриваемого манипулятора является треугольное звено ABC , связанное вращательными парами AB , BC , CD с соответствующими треугольными шатунами.

Блочнo-модульная структура динамической модели. Имитационное моделирование динамического анализа рассматриваемой системы перемещений с шестью степенями свободы может быть выполнено в среде MATLAB/Simulink в соответствии с концепцией моделирования пакета Simscape. Этот пакет позволяет осуществлять моделирование поступательного и вращательного движения различной сложности в трех

плоскостях, содержит набор инструментов для задания параметров звеньев (масса, координаты центра масс, моменты инерции, геометрические параметры), кинематических ограничений, локальных систем координат, способов задания и измерения движений. Динамическая модель системы реализуется в виде блочно-схемного описания механической структуры с помощью соответствующих функциональных элементов.

Поддержка интеграции с CAD (Computer-Aided Design) платформами, такими как Autodesk Inventor и SolidWorks, позволяет автоматически импортировать структурно-параметрическое описание модели системы в среду MATLAB/Simulink (рис. 2).

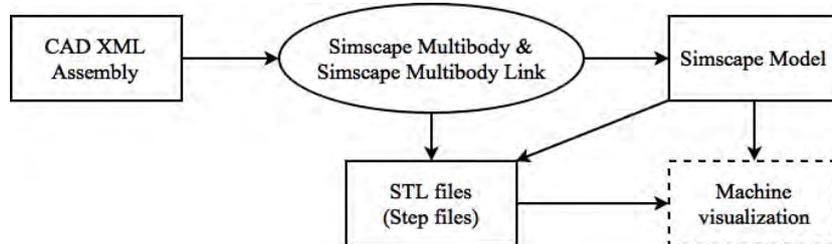


Рис. 2. Интеграция Simscape с CAD-системами

Построение имитационной динамической модели нами выполнялось при помощи встроенной среды Simulink в программный продукт MATLAB с использованием пакетов Simscape Multibody и Simscape Multibody Link. Обобщенная блочно-модульная схема представлена на рис. 3.

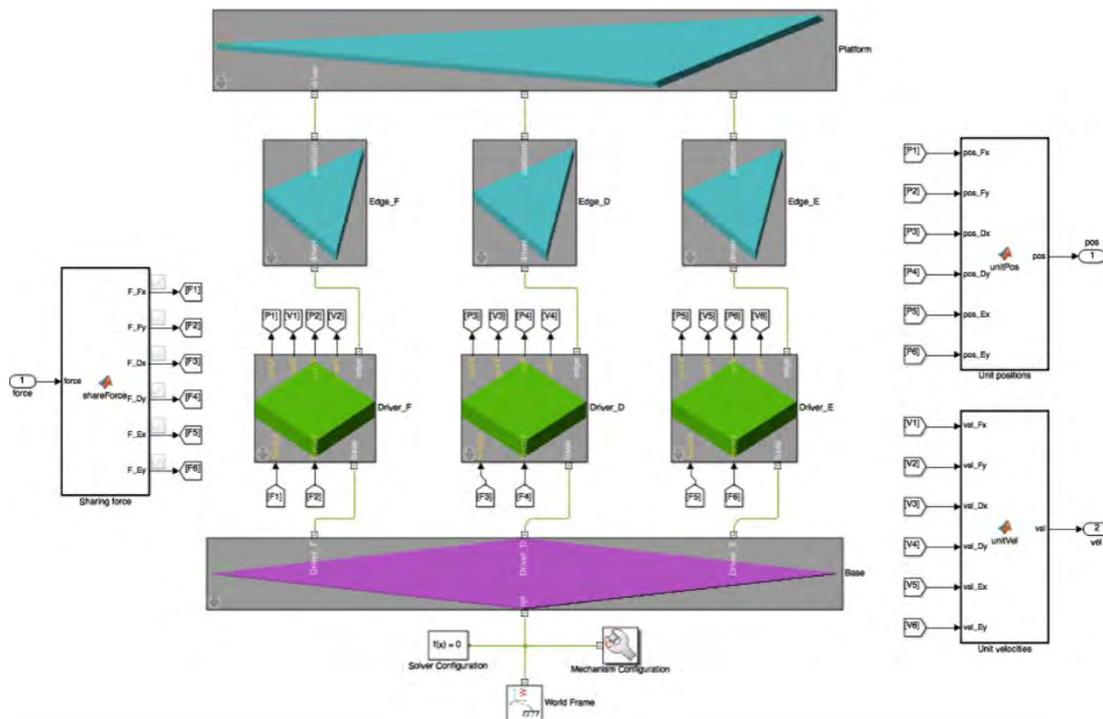


Рис. 3. Обобщенная блочно-модульная схема

Схема включает блок *Sharing force* для подачи массива сил на планарные позиционеры, статор *Base*, планарные позиционеры *Driver_F*, *Driver_D*, *Driver_E*, связывающие элементы *Edge_F*, *Egde_D*, *Edge_E*, представляющие боковые звенья механизма и статор; боковые звенья в свою очередь находятся в непосредственном контакте с рабочей платформой *Platform*.

Внутренняя структура функциональных блоков. Глобальная система отсчета *World Frame*, представляющая выбранную систему координат S_0 при решении матема-

тической модели, связана со статором, внутренняя структура которого представлена на рис. 4. Она включает блоки, связывающие системы координат, а также блок *Base*, отвечающий за массогабаритные и инерционные характеристики.

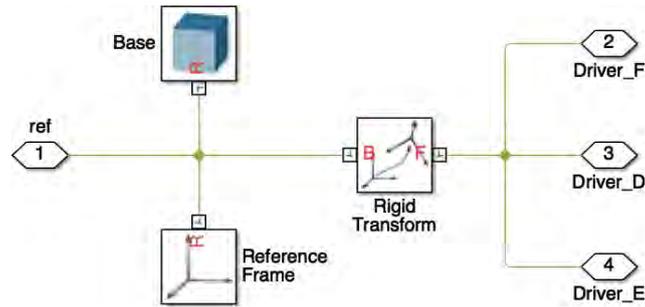


Рис. 4. Внутренняя структура статора

Статор обеспечивает связь с тремя планарными позиционерами, внутренняя структура которых (рис. 5) включает блок *Driver_F*, отвечающий за динамические характеристики.

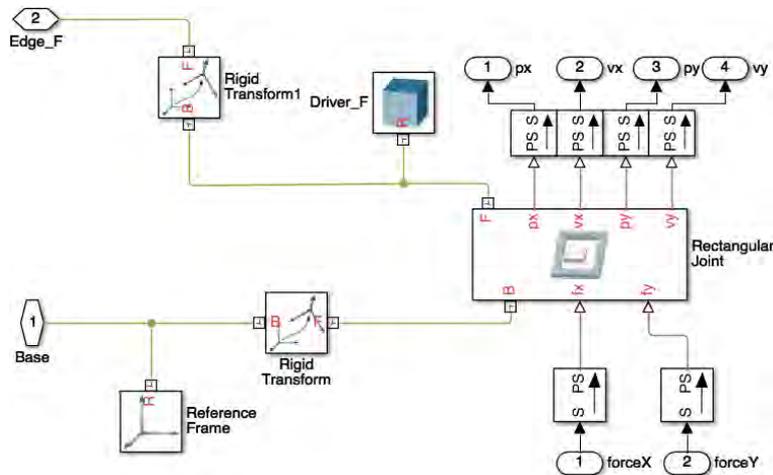


Рис. 5. Внутренняя структура планарного позиционера

Каждый из планарных позиционеров, в свою очередь, связан с соответствующим ему боковым звеном *Edge_F*, *Edge_D*, *Edge_E*, внутренняя структура (рис. 6) которого включает сферический шарнир *Spherical Joint* для взаимодействия с планарным позиционером.

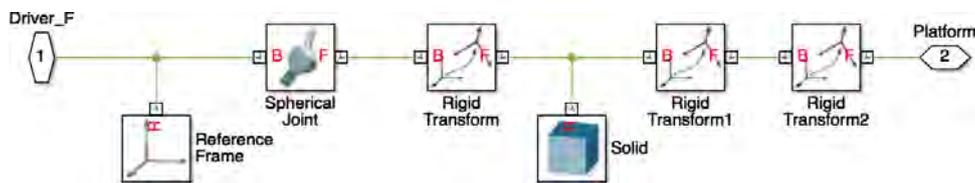


Рис. 6. Внутренняя структура бокового звена

Боковые звенья манипулятора связаны с рабочим звеном при помощи блоков *Revolute_F*, *Revolute_D*, *Revolute_E* внутренней структуры рабочей платформы (рис. 7).

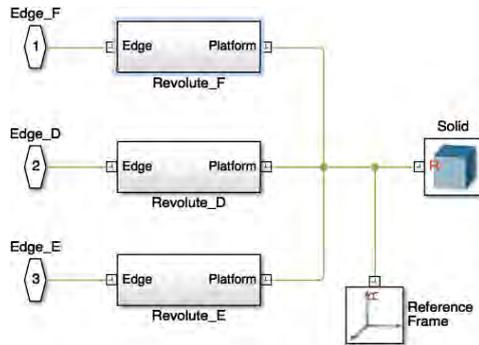


Рис. 7. Внутренняя структура рабочей платформы

Для подачи силовой управляющей функции, обеспечивающей движение планарных позиционеров по необходимой траектории к полученной блочно-модульной схеме был добавлен ПИД-контроллер (рис. 8), который позволяет преобразовывать разницы между текущей скоростью act_vel позиционера и следующей des_vel при определённом шаге, а также между текущей позицией act_pos и следующей des_vel в массив необходимых сил $force$. В контроллере может программироваться как однопараметрические регуляторы, так и для сложных систем регуляторы, обеспечивающие управление в пространстве состояния, включающего векторы положения, скорости и ускорения.

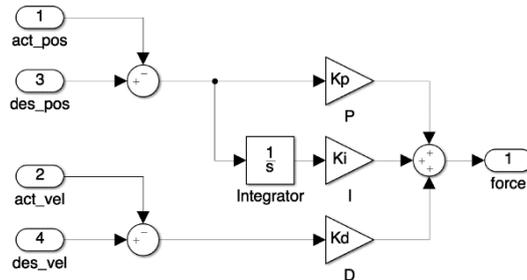


Рис. 8. Блочная структура ПИД-контроллера

Для генерации необходимой скорости и позиции на определенном шаге был добавлен блок, включающий решение обратной задачи кинематики по входным значениям положения рабочего звена в пространстве. В результате созданных блочных модулей, структура взаимодействия модулей будет иметь вид, представленный на рис. 9.

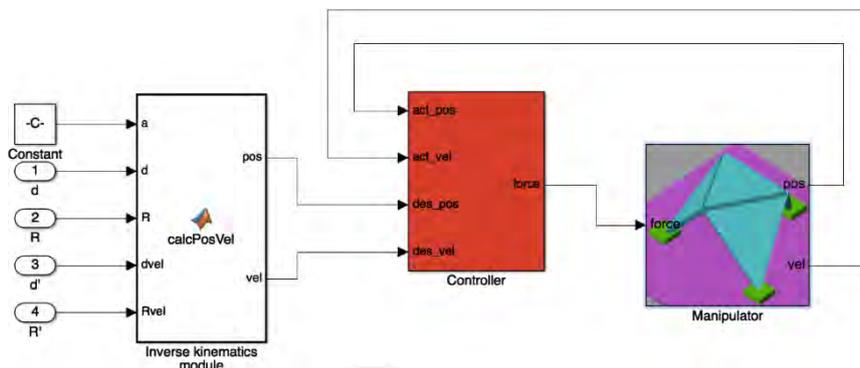


Рис. 9. Структура взаимодействия контроллера и механизма

Для тестового исследования динамики исполнительного механизма параллельной кинематики с шестью степенями свободы и системы перемещений на его основе нами был добавлен блок, генерирующий параметрические изменения во времени углов Эйлера и линейных координат, отвечающих за положение рабочего звена (платформы) в трехмерном пространстве с реализацией синусоидального закона перемещения по уг-

лам Эйлера. Внутренняя структура блока генерации состояния рабочего звена в трёхмерном пространстве представлена на рис. 10.

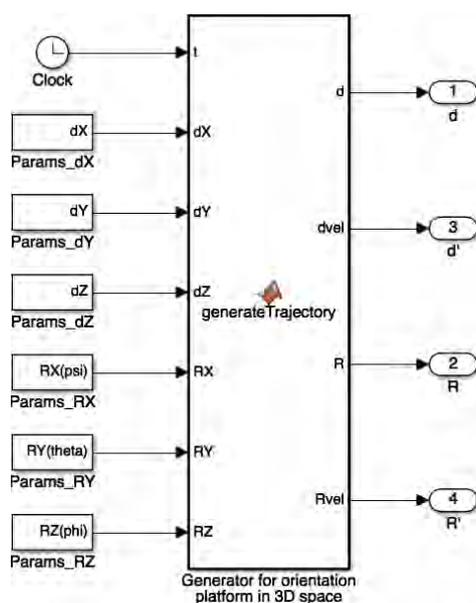


Рис. 10. Блок генерации состояния рабочего звена в трёхмерном пространстве

В результате разработанная общая блочно-модульная структура динамической модели системы перемещения на трёх планарных позиционерах с шестью степенями свободы в среде MATLAB/Simulink будет иметь вид, представленный на рис. 11.

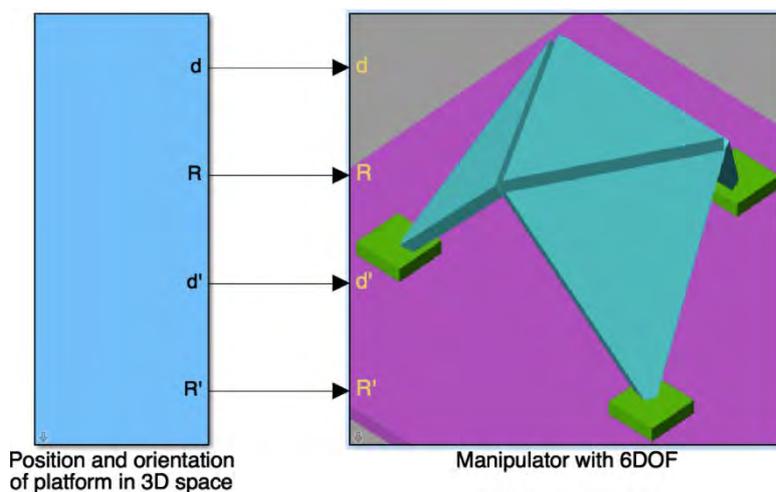


Рис. 11. Результирующая блочно-модульная структура динамической модели

Результаты моделирования. В качестве тестового задания на имитационное моделирование нами был выбран наиболее сложный для реализации закон перемещений платформы с синусоидальным законом изменения углов Эйлера. В результате проведенного компьютерного моделирования динамики инструментами MATLAB/Simulink были получены графики изменения силовых функций, развиваемых по координатам тремя планарными приводами в зависимости от времени, учитывающие нагрузочные и массо-габаритные характеристики рассматриваемой системы многокоординатных перемещений.

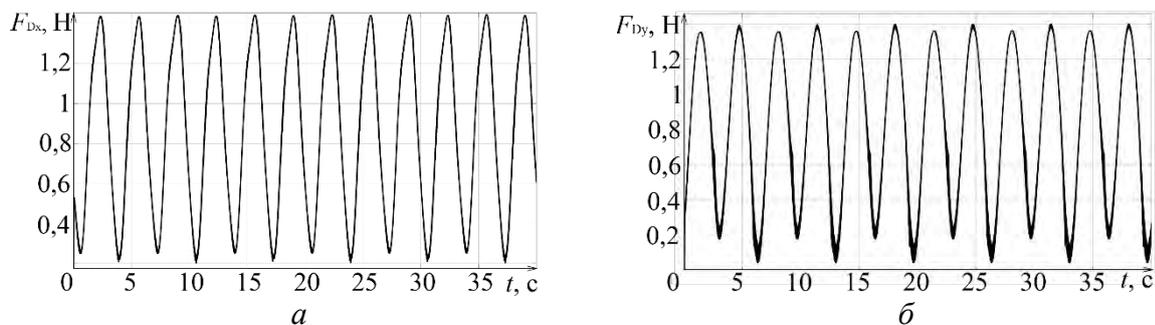


Рис. 12. Графики силовых функций

На рис. 12, а, б представлены графики силовых функций первого координатного планарного привода, развиваемых по двум ортогональным координатам x и y соответственно. Частотные характеристики периодичности силовых функций соответствуют частоте выбранного закона перемещений, а амплитуда полностью определяется массогабаритными характеристиками исполнительного механизма рассматриваемой системы перемещений. Результатами имитационного моделирования по разработанной в MATLAB динамической модели также являются законы перемещения, реализуемые силовыми функциями электромагнитного взаимодействия в подвижных планарных модулях.

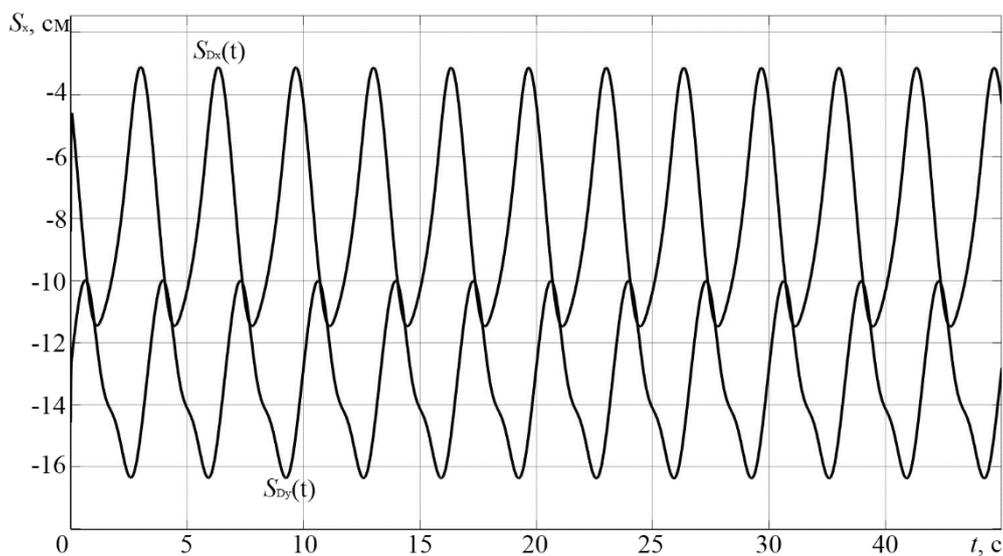


Рис. 13. Графики перемещений планарного позиционера D по координатам x , y

На рис. 13 в качестве примера приведены графики по координатных функций перемещений планарного позиционера D полученные из динамической модели.

В результате имитационного моделирования по динамической модели, разработанной инструментами MATLAB/Simulink также были получены графики по координатных скоростей трёх планарных позиционеров D , E , F , которые представлены для координаты x на рис. 14, а для координаты y на рис. 15.

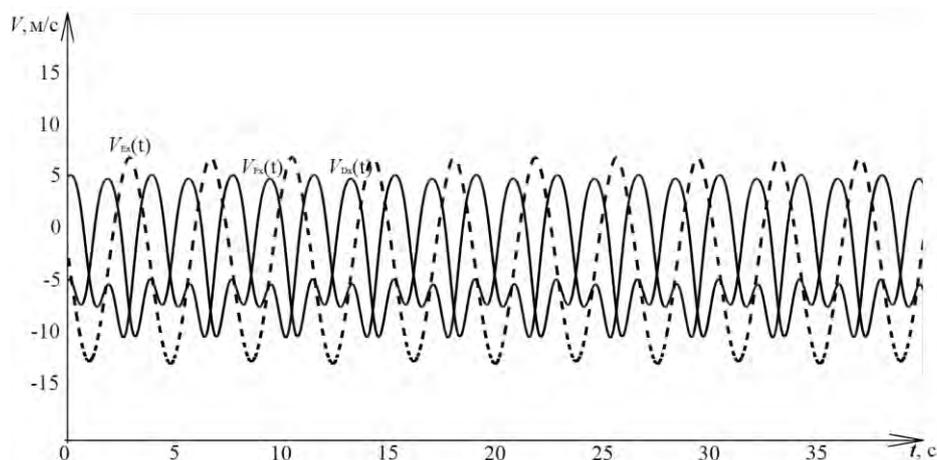


Рис. 14. Графики скоростей планарных позиционеров по координате x

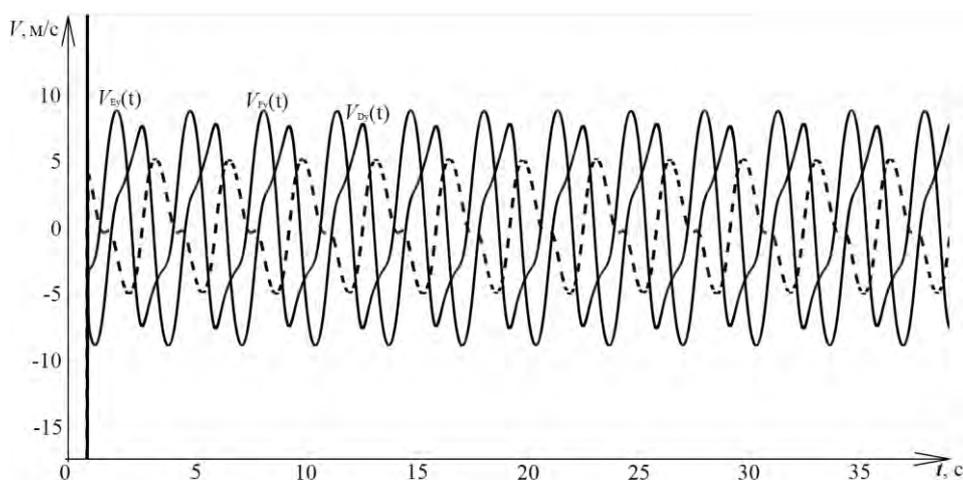


Рис. 15. Графики скоростей планарных позиционеров по координате y

Полученные из динамической модели функции перемещения ведущих звеньев позволяют уточнить все необходимые при проектировании системы перемещений кинематические характеристики, включая функции перемещения всех других подвижных звеньев, линейные угловые скорости и ускорения точек и звеньев, геометрию и расположение рабочей области.

Разработанная имитационная динамическая модель исполнительного механизма параллельной кинематики на трёх планарных позиционерах позволяет не только анализировать динамические условия перемещения подвижных модулей, но и позволяет в блоке «Контроллер» подбирать параметры регулятора при реализации контурного управления.

Работа выполнялась в рамках гранта БРФФИ № Т16-М108 «Мехатронные системы параллельной кинематики на кольцевом приводе прямого действия».

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов, В.В. Алгоритмизация и моделирование пространственной системы параллельной кинематики на трех планарных позиционерах / В.В. Кузнецов // Известия национальной академии наук Беларуси. – 2016. – Вып. 3. – С. 310–319.
2. Kuzniatsou V.U. Computer modeling of kinematics and dynamics of parallel manipulator with six degrees of freedom / V.U. Kuzniatsou // Present Day Trends of Innovations 7. – Zilina, Slovakia : Printing House of Zilina University, 2017. – P. 65–73.

3. Карпович, С.Е. Имитационное моделирование кинематики системы перемещений с интерактивной визуализацией результатов / С.Е. Карпович, В.В. Кузнецов, М.М. Форулан // Докл. БГУИР – Минск, 2016. – №. 3. – С 22–28.
4. Алгоритмизация обратной задачи кинематики параллельного манипулятора на шестикоординатном линейном шаговом двигателе / С.Е. Карпович [и др.] // Актуальные вопросы машиноведения : научн.-техн. журнал. / Объед. инст. машиностр. Нац. академии наук Беларуси – Минск, 2016. – Вып. 5. – С. 64 – 68.
5. Attaway, S. MATLAB. A practical introduction to programming and problem solving / S. Attaway. – Elsevier Inc., 2017 – 567 p.
6. Moosavian, A. Statically redundant parallel robots / A.Moosavian, F.Xi // Meccanica. – 2016. – Vol. 51, Iss. 7. – P. 1623-1637.
7. Chen, Ch.-T. Trajectory planning of parallel kinematic manipulators for the maximum dynamic load-carrying capacity / Ch.-T.Chen, T.-T.Liao // Meccanica. – 2016. – Vol. 51, Iss. 8. – P. 1653-1674.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ КОЛЕБАНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ ПОСЛЕ ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА НЕЁ

Мачихо Д.В., Сакевич В.Н.

УО «Витебский государственный технологический университет»

При разработке ультразвуковых технологий для достижения положительного эффекта часто возникает необходимость создания определенного спектра колебаний в объектах различного технологического назначения [1]. В данной работе экспериментально изучены спектры колебаний стержневой конструкции после импульсного воздействия на неё как периодическими, так и одиночными импульсами.

На рисунке 1 представлена схема стержневой конструкции, разработанной для проведения исследований. В металлический корпус в виде трубчатого цилиндра вкле-

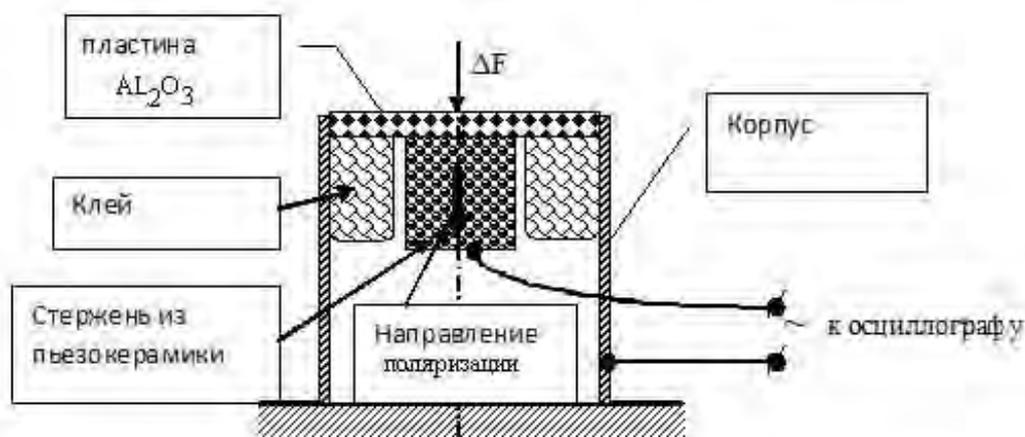


Рис. 1. Схема стержневой конструкции

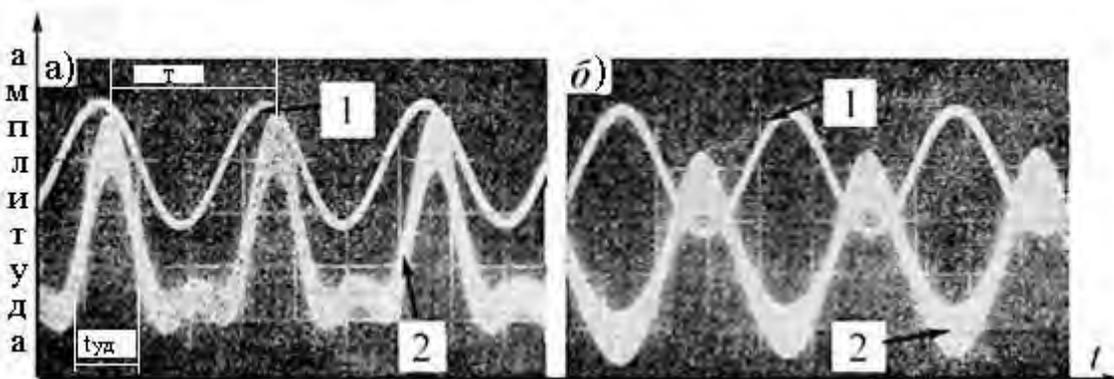


Рис. 2. Осциллограммы колебательных режимов стержневой системы при периодическом внешнем воздействии: а — ударный режим воздействия, б — безударный, 1 — сигнал с генератора возбуждения колебаний ультразвукового преобразователя, 2 — колебания стержневой системы

ена эпоксидным клеем металлизированная с одной стороны круглая пластинка из Al_2O_3 толщиной 2 мм. Металлизированная сторона пластины с помощью пайки соединялась с корпусом, а затем пластину жестко фиксировали с корпусом эпоксидным клеем. К металлизированной стороне пластины приклеивали токопроводящим клеем стер-

жень длиной 6,5мм круглого поперечного сечения из пьезокерамического материала цирконата титаната свинца (ЦТС 850), поляризованного, как показано на рисунке 1. Периодическое воздействие на пластину из Al_2O_3 осуществляли торцом волновода ультразвукового преобразователя с частотой $f=18$ кГц или периодом - $T = 56 \cdot \mu\text{с}$ [1]. На рисунке 2 приведены осциллограммы колебательных режимов стержневой системы. Анализ осциллограмм показывает, что периодическое воздействие на пластину можно осуществить в двух режимах.

Первый режим – виброударный (рис.2,а), когда воздействие торца волновода ультразвукового преобразователя на стержневую систему осуществлялось с разрывом контакта взаимодействующих элементов. Кривая 2 на такой осциллограмме представляла собой сигнал, возникающий при ударе торцом волновода ультразвукового преобразователя по пластине и последующих затухающих собственных колебаниях стержневой системы. При таких режимах время удара торцом волновода ультразвукового преобразователя по пластине стержневой системы составляло $t_{\text{уд}} = 0,46 T = 26$ мкс.

Второй режим – безударный (рис.2,б), когда воздействие торца волновода ультразвукового преобразователя на стержневую систему осуществлялось в безотрывном режиме в зоне контакта взаимодействующих элементов. В режимах виброударного типа (рис. 2, а) сила взаимодействия носит импульсный характер с частотой равной частоте колебаний ультразвукового преобразователя и шириной импульса равной времени удара $t_{\text{уд}}=26$ мкс. Спектр колебаний стержневой конструкции согласно теореме сложения [2] будет представлен двумя частотами - частотой $f=18$ кГц виброударных колебаний равной частоте колебаний торца волновода ультразвукового преобразователя и частотой $f_0 = 156$ кГц собственных продольных колебаний стержня. При безотрывном режиме движения взаимодействующих элементов в зоне контакта (рис.2,б) колебания в стержневой системе осуществлялись с частотой равной частоте колебаний ультразвукового преобразователя. В обоих случаях основной спектр колебаний являлся дискретным. Отметим, что между периодическими сигналами и их частотными спектрами существует взаимно-однозначное соответствие: периодический сигнал полностью определяет её частотные спектры и, наоборот, имея частотные спектры, можно определить, какому периодическому сигналу они принадлежат [2].

Воздействие на стержневую конструкцию одиночным импульсом создавалось следующим образом. На поверхности параллелепипеда из оргстекла с размерами 400x400x120 мм фокусировался короткий лазерный импульс с длиной волны излучения $\lambda= 0,53$ мкм и длительностью импульса $\tau=6$ нс. Генерируемый при этом в оргстекле акустический импульс имел N-образную форму, его длительность была менее 1 мкс, и фронт распространения представлял собой полусферу. С противоположной стороны параллелепипеда в центре к нему приклеивалась стержневая конструкция. Сигнал от параллелепипеда из оргстекла на стержень передавался через пластину из Al_2O_3 . Сигналы со стержневой конструкции поступали на аналого-цифровой преобразователь, имеющий частоту дискретизации 100 МГц и управляемый персональным компьютером. Для получения спектральных характеристик использовалась программа анализатора спектров в пакете программ MATLAB. На рисунке 3 представлена осциллограмма регистрируемого сигнала, а на рисунке 4 его спектральная характеристика (амплитудно-частотная).

Как видно из рисунка 4 спектр от одиночного импульса является сплошным и занимает достаточно широкую частотную область в пределах от 60 кГц до 600 кГц при собственной частоте продольных колебаний стержня $f_0 = 156$ кГц. Вторая особенность колебаний стержневой конструкции от воздействия одиночного импульса это ярко выраженные резонансы порядка 8 видов различных форм колебаний, которые возникают в стержневой конструкции. На спектральной характеристике (рис. 4) резонансы раз-

личных форм колебаний отображаются в виде локальных максимумов сигнала и пронумерованы цифрами в порядке возрастания частоты.

Непериодические (стохастические) сигналы также характеризуются непрерывным, сплошным спектром частот, в то время как периодические — дискретным или линейчатым спектром. Если последовательность повторяющихся импульсов непериодична, то связи между спектрами установить нельзя, но если импульсы одинаковы и повторяются беспорядочно, то такая связь существует [2].

Вопрос о соотношении между длительностью импульса Δt и шириной его спектра Δf имеет громадное практическое значение. Известно, что чем короче импульс, тем

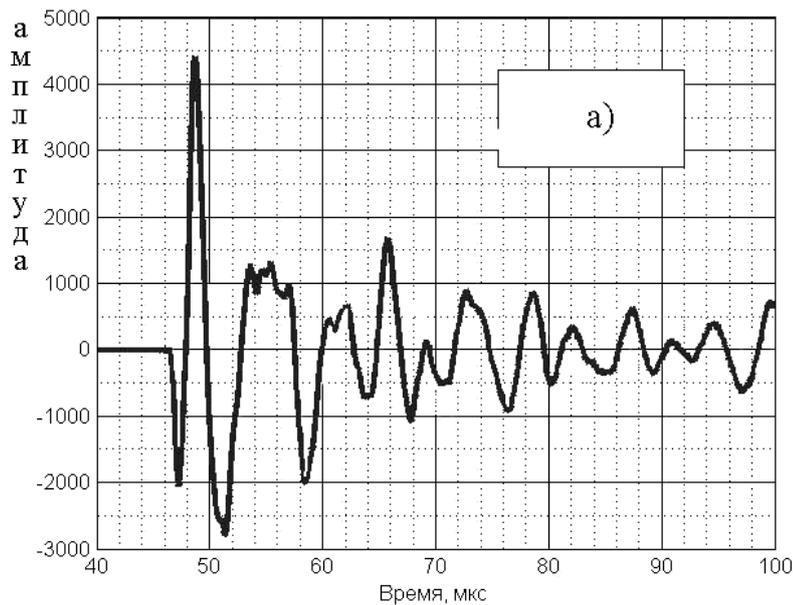


Рис. 3. Осциллограмма колебательных режимов стержневой системы при воздействии одиночным импульсом

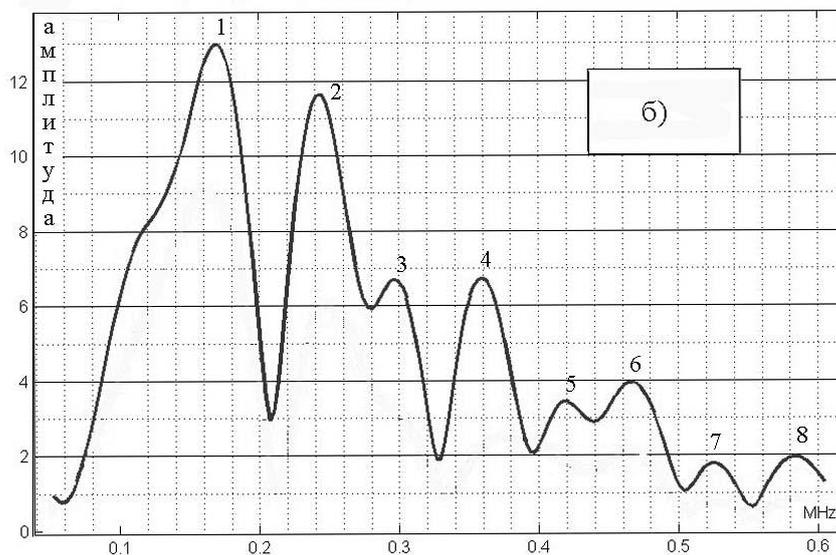


Рис. 4. Спектральная характеристика стержневой системы при воздействии одиночным импульсом

шире его спектр, в частности, бесконечно короткий импульс имеет бесконечно протяженный спектр с равной плотностью [2]. В инженерной практике принимают в первом приближении независимо от формы сигнала: $\Delta t \cdot \Delta f \approx 1$ [2].

Оценим максимальную ширину спектра при длительности импульса $\Delta t = t_{уд} = 26$ мкс при воздействии одиночным импульсом с длительностью равной времени удара при виброударном взаимодействии: $\Delta f \approx 10^6/26 \approx 38,5$ кГц. Как видим, что при воздействии одиночным импульсом с длительностью импульса $\Delta t = t_{уд} = 26$ мкс мы не сможем получить весь спектр колебаний, который представлен на рис. 4. Чтобы в стержневой системе проявились все резонансы, отмеченные на рис. 4, время удара должно быть порядка 2 мкс или $T/28$ и ударное воздействие не должно быть периодическим. В этом случае в сплошном спектре частот с разной плотностью найдутся резонансные частоты, на которые отреагирует стержневая система всеми 8 резонансами.

Встает вопрос, какой сигнал ударного воздействия считать периодическим, а какой нет. На практике должно быть так, чтобы период ударного воздействия $T_{уд}$ был больше времени необходимого для полного затухания возникших колебаний $\tau_{зат}$ от предыдущего воздействия. Время полного затухания $\tau_{зат}$ определяется следующим соотношением [3]: $\tau_{зат} = 1/(f_0 d)$, где $d = \pi/Q$ - логарифмический декремент затухания колебаний в стержневой системе, Q - её добротность. Для пьезоматериала из цирконата титаната свинца (ЦТС 850) $Q = 80$ [4]. После вычислений получим оценку для времени полного затухания возникших колебаний в стержневой системе: $\tau_{зат} = 163,2$ мкс. Условие на период ударного воздействия, при котором стержневой системой периодическое ударное воздействие будет восприниматься, как одиночные импульсы будет следующее: $T_{уд} > 163,2$ мкс. Соответственно получается максимальная частота ударного периодического воздействия, при которой стержневая система периодическое воздействие будет воспринимать как одиночные импульсы и спектр частот будет сплошным определится как $f_{уд} \leq 6,1$ кГц.

Таким образом, для получения в изделии сплошного спектра колебаний необходимо на него воздействовать одиночными ударными импульсами с частотой $f_{уд} \leq 6,1$ кГц либо непериодическими, а стохастическими ударными импульсами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артемьев, В.В. *Ультразвуковые виброударные процессы* / В.В. Артемьев, В.В. Клубович, В.Н. Сакевич. - Мн.: БНТУ, 2004. - 258 с.
2. Харкевич, А.А. *Спектры и анализ* – Серия: "Классика инженерной мысли: радиотехника". Изд-во: ЛИБРОКОМ, 2009. – 240 с.
3. https://ru.wikipedia.org/wiki/Логарифмический_декремент_колебаний
4. <http://www.symmetron.ru/suppliers/apc/>

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФОРМОВАНИЯ КОМПОЗИТА НА ЭТАПЕ ПОЛИМЕРИЗАЦИИ СВЯЗУЮЩЕГО

¹Василевич Ю.В., ²Федотов Д.А., ¹Сахоненко С.В., ²Сахоненко В.М.

¹УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

²ОАО «Авангард» Сафоново

На протяжении всех технологических процессов формования композиционного материала происходит существенное изменение его физико-механических свойств. И если свойства в направлении армирования волокон остаются линейными и практически неизменными, то податливость в поперечном направлении существенно нелинейна на стадиях намотки, разогрева, отверждения, готового изделия и может меняться на три порядка. Применение к такому материалу единой реологической модели практически исключено. Инженерный метод решения заключался в том, что для каждого этапа механическое поведение описывается своим законом. При этом на стыках стадий имеет место скачкообразное изменение характеристик. В отношении этих стыков могут быть приняты различные упрощающие гипотезы, например, гипотеза о наследовании напряженного состояния. Точность гипотез должна подвергаться экспериментальной проверке.

Пусть армирующий материал направлен в одном направлении. Тогда любое круглое сечение, перпендикулярное к нему, представляет совокупность множества сечений нитей и твердого связующего между ними. Такой композит можно определить как детерминированную структуру двух материалов: связующего и круглых сечений нитей.

На рисунке 1 показана схема расположения составляющих композита.

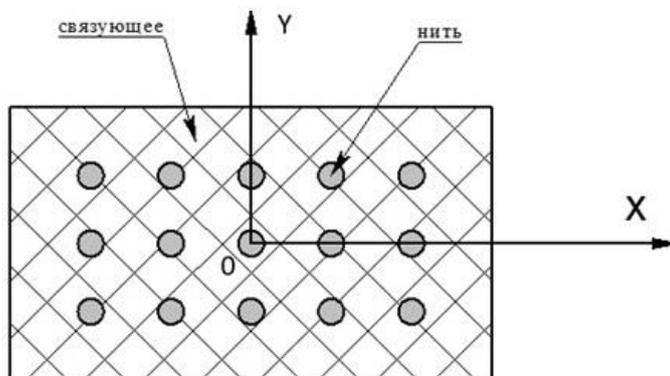


Рис. 1. Структурная схема композита

Для этого материала условия равновесия и совместности деформаций наполнителя и связующего приводят к следующим зависимостям [1-3]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{rH} = \sigma_{rc}, \quad \sigma_\theta = \sigma_{\theta H} = \sigma_{\theta c}, \\ \varepsilon_r &= m\varepsilon_{rc} + (1-m)\varepsilon_{rH}, \\ \varepsilon_\theta &= m\varepsilon_{\theta c} + (1-m)\varepsilon_{\theta H}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь m – относительное содержание связующего в единице объема полимерной композиции; θ – индекс, означающий кольцевое направление; r – радиальное направление; σ_θ , σ_r , ε_θ , ε_r – «осредненные» напряжения и деформации; σ_{rH} , σ_{rc} , $\sigma_{\theta H}$, $\sigma_{\theta c}$, $\varepsilon_{\theta H}$, $\varepsilon_{\theta c}$, ε_{rH} , ε_{rc} – напряжения и деформации в связующем и наполнителе.

Предполагаем, что наполнитель и связующее являются изотропными и подчиняются закону Гука

$$\varepsilon_{rH} = \frac{1}{E_H}(\sigma_{rH} - \nu_H \sigma_{\theta H}), \quad \varepsilon_{\theta H} = \frac{1}{E_H}(\sigma_{\theta H} - \nu_H \sigma_{rH}), \quad (2)$$

$$\varepsilon_{rc} = \frac{1}{E_c}(\sigma_{rc} - \nu_c \sigma_{\theta c}) + \varepsilon_c, \quad \varepsilon_{\theta c} = \frac{1}{E_c}(\sigma_{\theta c} - \nu_c \sigma_{rc}) + \varepsilon_c, \quad (3)$$

где E_H , E_c , ν_H и ν_c – модули упругости и коэффициенты Пуассона связующего и наполнителя; индекс «H» относится к наполнителю, а индекс «c» к связующему; ε_c – линейная величина усадки связующего в результате полимеризации. Для осреднённых напряжений и деформаций имеет место связь

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu \sigma_r). \quad (4)$$

где E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона композита.

Подставив выражения (2) и (3) в два последних уравнения из (1), получим

$$\begin{aligned} d_{11}\sigma_r + d_{12}\sigma_\theta &= d_1, \\ d_{12}\sigma_r + d_{11}\sigma_\theta &= d_1, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{1}{E} - \frac{m}{E_c} - \frac{1-m}{E_H}, \\ d_{12} &= \frac{m\nu_c}{E_c} + \frac{(1-m)\nu_H}{E_H} - \frac{\nu}{E}, \\ d_1 &= m\varepsilon_c. \end{aligned}$$

Из (5) путем вычитания правых и левых частей равенств найдем

$$(d_{11} - d_{12})(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0.$$

Пусть вначале $\sigma_r = \sigma_\theta$. В таком случае из первого уравнения системы (5) найдём

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{d_1}{d_{11} + d_{12}}. \quad (6)$$

Зависимости (6) определяют напряжения в композите, возникшие по причине усадки связующего при его полимеризации в отсутствие нагрузки на внешней границе круглого сечения композиционного материала.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $d_{11} = d_{12}$. На этом основании из (5) получим

$$\sigma_\theta = -\sigma_r + \frac{d_1}{d_{11}}.$$

Подставим найденное значение для σ_θ в уравнение равновесия [3]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0. \quad (7)$$

В результате, для нахождения напряжения σ_r , имеем зависимость

$$\sigma_r' + \frac{2\sigma_r}{r} = \frac{d_1}{d_{11}r}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\sigma_r = \frac{c}{r^2} + \frac{d_1}{2d_{11}}, \quad \sigma_\theta = -\frac{c}{r^2} + \frac{d_1}{2d_{11}}. \quad (8)$$

Здесь c – произвольная постоянная.

В (8) следует положить $c = 0$, так как в обратном случае напряжения σ_r и σ_θ обращаются в бесконечность при $r = 0$, что противоречит здравому смыслу.

В условиях симметричной деформации зависимости между радиальными перемещениями u и компонентами деформации ε_θ и ε_r имеют вид [3, с. 215-225]

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (9)$$

Полученные решения (6) и (8) должны быть согласованы с зависимостями (9). В этом случае, на основании этих равенств, вытекает условие

$$\varepsilon_r = (\varepsilon_\theta r)'$$

Для осредненных напряжений и деформаций связь между ними запишем в виде [3, стр. 216]

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \nu_{\theta r} \frac{\sigma_r}{E_r}, \quad \varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} - \nu_{r\theta} \frac{\sigma_\theta}{E_\theta}. \quad (10)$$

Подставим сюда значения (10) для ε_r и ε_θ . При этом воспользуемся зависимостями (8). После проведения указанных операций убеждаемся, что равенство удовлетворяется для любых значений переменной r .

Процесс полимеризации связующего, находящегося в твердом состоянии, происходит при постоянной температуре, которая равна $\approx 160^\circ\text{C}$. На этом основании в рассматриваемых формулах отсутствует зависимость от температурного градиента.

Выражения (8) при $c = 0$ и выражения (6) представляют решение одной и той же задачи. На этом основании, чтобы избежать противоречия как в том, так и в другом случаях, должно быть $d_{11} = d_{12}$. Это выражается зависимостью

$$\frac{1+\nu}{E} = \frac{m(1+\nu_c)}{E_c} + (1-m) \frac{1+\nu_H}{E_H}. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь сечение этого однонаправленного композита параллельно волокнам. Из условий совместности деформаций и равновесия нитей для связующего в твердом состоянии можно получить следующие зависимости [1-3]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_{1H} = \varepsilon_{1c}, \quad \varepsilon_2 = m(\varepsilon_{2c} + \varepsilon_c) + (1-m)\varepsilon_{2H} \\ \sigma_1 = m\sigma_{1c} + (1-m)\sigma_{1H}, \quad \sigma_2 = \sigma_{2H} = \sigma_{2c}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь индекс «1» означает направление армирования, а индекс «2» обозначает направление, перпендикулярное направлению армирования. Принятые обозначения такие же, как и в зависимостях (1). Только вместо индекса « θ » следует принять индекс «1», а вместо индекса « r » принять индекс «2».

Изотропные материалы нитей и связующего подчиняются законам Гука (2) и (3). Связь между осредненными напряжениями и деформациями выражается равенствами [4, 5]

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_1 \frac{\sigma_2}{E_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_2 \frac{\sigma_1}{E_1}.$$

Из (2) и (3) с учётом (12) получим зависимости

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1H} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E_H}(\sigma_{1H} - \nu_H \sigma_2), \\ \varepsilon_{1c} = \varepsilon_1 - \varepsilon_c = \frac{1}{E_c}(\sigma_{1c} - \nu_c \sigma_2), \\ \sigma_{1H} = \varepsilon_1 E_H + \nu_H \sigma_2, \\ \sigma_{1c} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_c) E_c + \nu_c \sigma_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Произведём теперь подстановку во второе и четвёртое уравнения (12), соответствующих величин из (13). В результате получим

$$\begin{aligned} b_{11}\sigma_1 + b_{12}\sigma_2 &= b_1, \\ b_{21}\sigma_1 + b_{22}\sigma_2 &= b_2, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{E_1^0}{E_1} - 1, \quad b_{12} = v_2^0 - \frac{E_1^0}{E_2} v_1, \quad b_{21} = \frac{v_2^0 - v_2}{E_1}, \\ b_{22} &= \frac{1 - v_2^0 v_1}{E_2} - \frac{m(1 - v_c^2)}{E_c} - \frac{(1 - m)(1 - v_H^2)}{E_H}, \\ b_1 &= mE_c \varepsilon_c, \quad b_2 = m(1 + v_c) \varepsilon_c, \\ E_1^0 &= (1 - m)E_H + mE_c, \\ v_2^0 &= (1 - m)v_H + mv_c. \end{aligned}$$

К представленным уравнениям следует добавить ещё и уравнения равновесия [3]

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} = 0. \quad (15)$$

Здесь координатные оси Ox и Oy совпадают с направлениями «1» и «2» соответственно; касательные напряжения $\tau_{12} = G\gamma_{12}$, G – модуль сдвига; γ_{12} – относительный сдвиг угла между направлениями «1» и «2».

Предполагаем деформации малыми, поэтому имеют место формулы Коши [3]

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (16)$$

Система (14) имеет единственное решение при отличном от 0 определителе системы. Тогда, учитывая, что коэффициенты системы и свободные члены – постоянные числа, решение системы тоже будет постоянным. В результате из (10) получим, что ε_1 и ε_2 – тоже постоянные числа. На этом основании из (16) определим

$$u = \varepsilon_1 x + f_1(y), \quad v = \varepsilon_2 y + f_2(x). \quad (17)$$

Уравнения равновесия (15) с учётом того, что σ_1 и σ_2 – постоянные, превращаются в

$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = const.$$

Подставим (17) в это уравнение. В результате получим, что

$$f_1(y) = const, \quad f_2(x) = const.$$

Постоянные в предыдущем равенстве можно взять равными нулю, так как они не влияют на напряженное состояние композита, определяют только одинаковое перемещение его точек.

В равенствах (17) следует принять

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - v_1 \frac{\sigma_2}{E_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - v_2 \frac{\sigma_1}{E_1}, \quad (18)$$

$$\sigma_1 = \frac{b_1 b_{22} - b_{12} b_2}{\Delta}, \quad \sigma_2 = \frac{b_{11} b_2 - b_{21} b_1}{\Delta}, \quad (19)$$

где

$$\Delta = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}.$$

Решение (19) удовлетворяет системе (14), уравнениям равновесия (15) и формулам Каши (16). Таким образом, (19) является решением задачи при отсутствии внешней нагрузки на границе. Для других граничных условий оно не подходит. Например, если граница $x = \pm 0,5a$ свободна от внешней нагрузки, а на границе $y = \pm 0,5b$ отсутствуют перемещения вдоль оси Oy , то такую задачу следует решать другим способом. Для такой постановки задачи решение может быть получено при условии существования линейной зависимости коэффициентов системы (14), т.е.

$$\frac{b_{11}}{b_{21}} = \frac{b_{12}}{b_{22}} = \frac{b_1}{b_2}. \quad (20)$$

В результате, если $b_{12} \neq 0$ из (14) найдём

$$\sigma_2 = \frac{b_1}{b_{12}} - \frac{b_{11}}{b_{12}} \sigma_1.$$

При таком условии уравнения равновесия (15) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} - \frac{b_{11}}{b_{12}} \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial y^2} = 0. \quad (21)$$

В рассматриваемой постановке решение задачи не должно зависеть от переменной x . В таком случае уравнение (20) превращается в зависимость

$$\frac{d^2 \sigma_1}{dy^2} = 0.$$

Следовательно

$$\sigma_1 = c_1 y + c_2, \quad \sigma_2 = \frac{b_1}{b_{12}} - \frac{b_{11}}{b_{12}} (c_1 y + c_2). \quad (22)$$

Воспользуемся полученным решением для нахождения перемещений u и v . Для этого используем формулы Каши (16) и зависимости (18). В результате найдём

$$u = \left[(c_1 y + c_2) \left(\frac{1}{E_1} + \frac{\nu_1}{E_2} \frac{b_{11}}{b_{12}} \right) - \frac{\nu_1}{E_1} \frac{b_1}{b_{12}} \right] x + f(y),$$

$$g = \frac{1}{E_2} \frac{b_1}{b_{12}} y - \left(c_1 \frac{y^2}{2} + c_2 y \right) \left(\frac{\nu_2}{E_1} + \frac{b_{11}}{b_{12}} \frac{1}{E_2} \right) + g(x),$$

$$\gamma_{12} = \left(\frac{1}{E_1} + \frac{\nu_1}{E_2} \frac{b_{11}}{b_{12}} \right) c_1 x + f'(y) + g'(x).$$

В этих зависимостях функции $f(y)$ и $g(x)$ появились в результате интегрирования. Однако, так как существует предположение, что решение не должно зависеть от переменной x , следует принять функцию $g(x)$ равную постоянной. Найденные зависимости должны удовлетворять уравнениям равновесия (15). После подстановки убеждаемся, что такое условие будет выполнено, если

$$\frac{b_{11}}{b_{12}} = G \left(\frac{1}{E_1} + \frac{\nu_1}{E_2} \frac{b_{11}}{b_{12}} \right), \quad f''(y) = 0. \quad (23)$$

Пусть теперь рассматривается задача, постановка которой приводит к независимости решения от переменной y . Алгоритм решения такой задачи аналогичен рассмотренному выше. В таком случае можно получить

$$\sigma_1 = c_3 x + c_4, \quad \sigma_2 = \frac{b_1}{b_{12}} - \frac{b_{11}}{b_{12}} (c_3 x + c_4),$$

$$u = \left(\frac{c_3}{2} x^2 + c_4 x \right) \left(\frac{1}{E_1} + \frac{\nu_1}{E_2} \frac{b_{11}}{b_{12}} \right) - \frac{\nu_1}{E_2} \frac{b_{11}}{b_{12}} x + f_1(y),$$

$$g = \left[\frac{b_{11}}{b_{12} E_2} - (c_3 x + c_4) \left(\frac{b_{11}}{b_{12} E_2} + \frac{\nu_2}{E_1} \right) \right] y + g_1(x),$$

$$\gamma_{12} = -c_3 y \left(\frac{b_{11}}{b_{12}} \frac{1}{E_2} + \frac{\nu_2}{E_1} \right) + f_1'(y) + g_1'(x).$$

Здесь условия независимости решения от переменной y позволяет считать функцию $f_1(y)$ равной постоянной. Удовлетворение найденного решения уравнениям равновесия (15) приводит к необходимости выполнения следующих зависимостей

$$\frac{b_{11}}{b_{12}} \frac{1}{E_2} + \frac{\nu_2}{E_1} = \frac{1}{G}, \quad g_1''(x) = 0. \quad (24)$$

Если предположить, что формулы (11), (20), (23) и (24) получены для одного и того же материала, то они в совокупности позволяют определить постоянные E_1, E_2, ν_1, ν_2 и G , которые позволяют описать напряжённое состояние в композиционном материале в момент полимеризации связующего.

В таком случае в зависимости (11) необходимо положить $E = E_2, \nu = \nu_2$. В результате система уравнений для нахождения параметров E_1, E_2, ν_1, ν_2 и G предстанет в виде

$$\frac{1 + \nu_2}{E_2} = \frac{m(1 + \nu_c)}{E_c} + \frac{(1 - m)(1 + \nu_H)}{E_H},$$

$$\frac{b_{11}}{b_{21}} = \frac{E_c}{1 + \nu_c} = E_c^0 = \frac{E_1^0 - E_1}{\nu_2^0 - \nu_2}, \quad (25)$$

$$\frac{b_{12}}{b_{22}} = E_c^0 = E_c \frac{E_2 \nu_2^0 - E_1^0 \nu_1}{E_c (1 - \nu_2^0 \nu_1) - m(1 - \nu_c^2) E_2},$$

$$\frac{b_{11}}{b_{12}} = G \cdot \left(\frac{1}{E_1} + \frac{\nu_1}{E_2} \frac{b_{11}}{b_{12}} \right), \quad \frac{b_{11}}{b_{12}} \frac{1}{E_2} + \frac{\nu_2}{E_1} = \frac{1}{G}.$$

Здесь все приведенные параметры в уравнениях (25) имеют тот же смысл, что и в зависимостях (14). Кроме того, для упрощения исследований в выражении для b_{22} взяты только два первых слагаемых, так как

$$E_H \gg E_c \quad (26)$$

и поэтому третьим слагаемым можно пренебречь. Также примем гипотезу, что $E_2 \gg E_c$

Решение системы (25) проведём следующим образом.

С учетом (26) и принятой гипотезы из первых трёх уравнений находим

$$\nu_1 = \frac{\nu_2^0 + m(1 - \nu_c)}{E_1^0} E_2 - \frac{E_c}{(1 + \nu_c) E_1^0} \approx \left[\nu_2^0 + m(1 - \nu_c) \right] \frac{E_2}{E_1^0},$$

$$\nu_2 = \frac{m(1 + \nu_c)}{E_c} E_2 - 1 \approx \frac{m}{E_c} E_2, \quad (27)$$

$$E_1 = E_2 m(1 + \nu_c) + E_1^0 \approx E_1^0.$$

Третье и четвёртое уравнения легко превращаются в зависимости

$$G^2 (1 - \nu_1 \nu_2) + (\nu_1 E_1 + \nu_2 E_2) G = E_1 E_2, \quad (28)$$

$$\left(\frac{b_{11}}{b_{12}}\right)^2 + \left(v_2 \frac{E_2}{E_1} - v_1\right) \left(\frac{b_{11}}{b_{12}}\right) = \frac{E_2}{E_1}.$$

Рассмотрим теперь отношение b_{11}/b_{12} . Подставим в него значения параметров из (14). В результате найдём

$$\frac{b_{11}}{b_{12}} = \frac{E_1^0 - E_1}{v_2^0 E_2 - E_1^0 v_1} \frac{E_2}{E_1} \approx \frac{(1+v_c) E_2}{(1-v_c) E_1}.$$

Подставим теперь значения параметров (27) и предыдущее равенство во второе уравнение из (28). В результате получим следующее уравнение для E_2

$$E_2^2 + \left[\frac{1}{m(1-v_c)} - \frac{v_2^0 + m(1-v_c)}{1+v_c} \right] E_c E_2 = E_1^0 E_c \frac{(1-v_c)}{m(1+v_c)^2}. \quad (29)$$

С учётом замечания (26) вторым слагаемым в левой части предыдущего уравнения можно пренебречь. В таком случае имеем

$$E_2^2 = E_1^0 E_c \frac{1-v_c}{m(1+v_c)^2}.$$

Следовательно,

$$E_2 = \sqrt{E_1^0 E_c \frac{1-v_c}{m(1+v_c)^2}}. \quad (30)$$

Остальные искомые величины найдём из (27) и (28) путём подстановки в них величины E_2 , определяемой соотношением (30).

Система (14) решена при $\varepsilon_c \neq 0$. Предположим теперь, что полимеризация связующего осуществлена. После чего к композиционному материалу приложена внешняя нагрузка. В этом случае необходимо считать, что $\varepsilon_c = 0$. И тогда напряжения σ_1 и σ_2 будут удовлетворять системе (14), если все коэффициенты b_{ij} равны нулю. Это позволяет определить величины жесткостных характеристик композиционного материала в момент после отверждения связующего. Приравнявая коэффициенты b_{ij} нулю, найдём

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1^0, \quad v_2 = v_2^0. \\ v_1 &= \frac{v_2^0 E_c}{m(1-v_c^2) E_1^0 + (v_2^0)^2 E_c}, \\ E_2 &= \frac{E_c E_1^0}{m(1-v_c^2) E_1^0 + (v_2^0)^2 E_c}, \end{aligned} \quad (31)$$

Процесс усадки связующего влияет на величину жесткостных характеристик композита. Они подчиняются законам, установленным зависимостями (27) и (30). Жесткостные характеристики готового материала отличаются от промежуточных и находятся по формулам (31). Такое поведение обусловлено некоторыми свойствами нелинейности, происходящими в процессе формования материала конструкции.

Выводы:

На этапе полимеризации связующего механическое поведение композиционного материала описывается своим законом. Такой закон устанавливается посредством системы (5). В случае, когда правая часть упомянутой системы отлична от нуля на композиционный материал накладываются свойства, связанные с усадкой связующего. Равенство нулю правой части системы (5) означает переход на следующий этап формования композиционного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Плоская задача теории упругости для деталей из армированных материалов. Сб. «Расчеты на прочность», Вып. 12. М., 1966. 428 с.
2. Лапин А.А. Плоская деформация резинокордовой ткани. Сб. «Расчеты на прочность в машиностроении». МВТУ 46. М., Машигиз, 1955. С. 87-99.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 2. Под ред. И.А. Биргера. М., «Машиностроение», 1968. 464 с.
4. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М., 1950. С. 483.
5. Лехницкий С.Г. Обобщение задачи о плоской деформации на случай упругого тела с произвольной анизотропией // Уч. зап. Саратовск. гос. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. Том I. Вып. 2. 1938. С.154-157.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = A_{10} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix},$$

Откуда

$$x_1 = x_0 \cos \varphi_i + y_0 \sin \varphi_i \quad (1)$$

$$y_1 = -x_0 \sin \varphi_i + y_0 \cos \varphi_i \quad (2)$$

Координаты центра ролика (точки M) в неподвижной системе координат выражаются следующим образом:

$$x_M^{(0)} = a - l_K \cos(\psi_0 + \psi_i) \quad (3)$$

$$y_M^{(0)} = l_K \sin(\psi_0 + \psi_i) \quad (4)$$

где $l_K = l_{OB}$ – длина коромысла, ψ_i – текущий угол поворота коромысла, ψ_0 – начальный угол отклонения коромысла от межосевой линии OB .

Подставляя зависимости (3) и (4) в формулы связи координат (1) и (2), получим координаты точки M в системе координат кулачка, т.е. уравнения центрального профиля кулачка:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cos \varphi_i - l_K \cos(\psi_0 + \psi_i + \varphi_i), \\ y_1 &= -a \sin \varphi_i + l_K \sin(\psi_0 + \psi_i + \varphi_i). \end{aligned}$$

Выражения для определения координат действительного профиля кулачка можно получить из условия, что положение общей нормали $n-n$ в точке K касания кулачка с роликом известно, так как известен угол давления θ_i . С учетом этого координаты точки K в неподвижной системе координат получаются в следующем виде:

$$x_K^{(0)} = a - l_K \cos(\psi_0 + \psi_i) - r_p \sin(\psi_0 + \psi_i - \theta_i) \quad (5)$$

$$y_K^{(0)} = a \sin(\psi_0 + \psi_i) - r_p \cos(\psi_0 + \psi_i - \theta_i) \quad (6)$$

После подстановки выражений (5) и (6) в формулы связи координат (1) и (2) получим уравнения действительного профиля кулачка:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cos \varphi_i - l_K \cos(\psi_0 + \psi_i + \varphi_i) - r_p \sin(\psi_0 + \psi_i + \varphi_i - \theta_i), \\ y_1 &= -a \sin \varphi_i + l_K \sin(\psi_0 + \psi_i + \varphi_i) - r_p \cos(\psi_0 + \psi_i + \varphi_i - \theta_i). \end{aligned}$$

Угол давления θ_i определяется по формуле [2]

$$\theta_i = \operatorname{arctg} \left(\frac{S_i' + l_K - a \cos(\psi_0 + \psi_i)}{a \sin(\psi_0 + \psi_i)} \right),$$

где S_i' – аналог скорости точки M , который определяется на основании принятого закона движения толкателя.

Полученные выражения могут быть использованы, в частности, при определении радиуса кривизны центрального профиля кулачка, для чего требуется иметь выражения декартовых координат плоской кривой (центрального профиля), задаваемой уравнениями в параметрической форме $x = x(\varphi)$ и $y = y(\varphi)$.

Рассмотренная методика используется в программном обеспечении курсового проектирования на кафедре теории механизмов и машин БНТУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филонов, И.П. Теория механизмов, машин и манипуляторов / И.П. Филонов, П.П. Анципович, В.К. Акулич. – Минск: Дизайн ПРО, 1998. – 656 с.

2. Анципорович, П.П. Синтез кулачковых механизмов / П.П. Анципорович, В.К. Акулич, Е.М. Дубовская. – 5-е изд. – Минск: БНТУ. – 80 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДАЛАМБЕРА ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

к.т.н. Горбач Н.И., к.ф.-м.н. Ширвель П.И., Шпургалова М.Ю., Кадышина А.В.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

В работе [1] приведено обоснование характера движения эллиптического маятника с использованием законов сохранения движения центра масс и количества движения механической системы при двух разных начальных условиях движения.

Установлено, что в зависимости от начальных условий центр масс системы либо не перемещается вдоль оси x (покоится) при $t = 0; \varphi = \varphi_0 \neq 0; \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$, либо движется с некоторой постоянной скоростью при $t = 0; \varphi = \varphi_0 = 0; \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \neq 0$. При этом в первом случае при отклонении маятника (стержня с шариком) вправо, ползун перемещается влево и наоборот. Во втором случае вся система перемещается в ту сторону, в которую сообщена начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$ из состояния равновесия, а ползун и шарик при этом совершают по соответствующим законам колебательные движения.

В работе [1] для составления дифференциальных уравнений движения ползуна и шарика использованы уравнения Лагранжа 2-го рода. Этот способ требует применения несколько громоздких математических преобразований.

Однако более проще можно составить эти уравнения, применив, например, принцип Даламбера или общее уравнение динамики. Такая попытка сделана в работе [2], в которой для составления дифуравнений движения эллиптического маятника применен кинетостатический метод. Не останавливаясь на анализе допущенных в [2] неточностей, приведем решение этой задачи, применив также кинетостатический метод.

Здесь важным является правильно учесть силы инерции как ползуна, так и шарика, имея ввиду, что шарик участвует в сложном движении – переносном вместе с подвижной системой координат, связанной с ползуном, и относительном движении по отношению к этой системе. Поэтому кроме сил инерции нормальной Φ_n и касательной Φ_τ в относительном движении к шариком должна быть приложена еще и переносная сила инерции Φ_B , что не учтено в работе [2]. Направление этих сил следует увязывать с описанным выше обоснованием характера движения эллиптического маятника.

Рассмотрим сначала решение задачи с учетом начальных условий движения при $t = 0; \varphi = \varphi_0 \neq 0; \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$. Независимо от того в какую сторону отклонился маятник из положения равновесия (рис. 1) запишем в соответствии с принципом Даламбера два уравнения статики, которые являются одинаковыми для случаев а) и б).

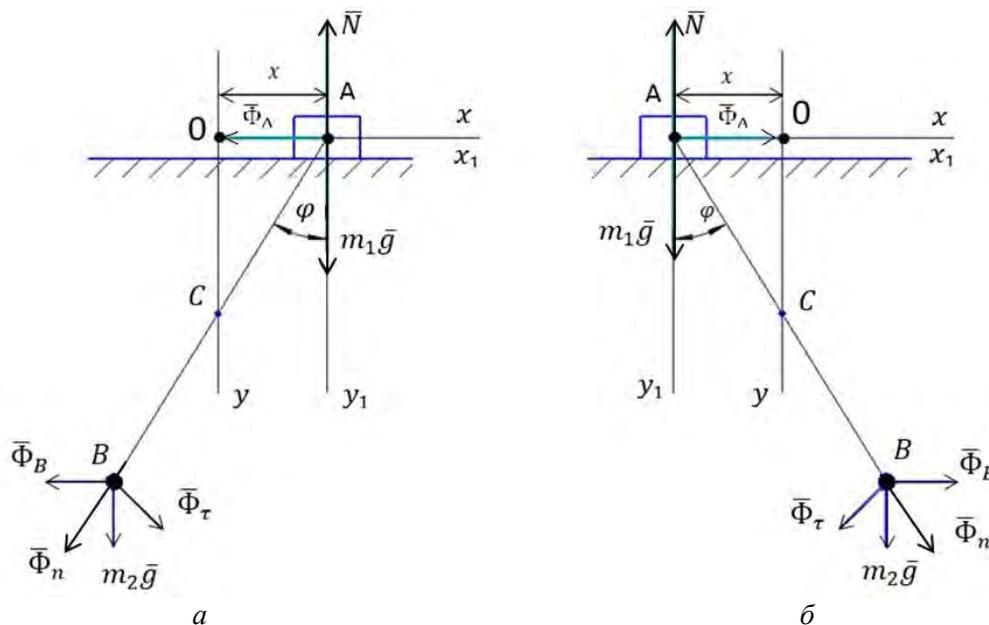


Рис. 1. Схема действия сил при отклонении маятника от положения равновесия на $\varphi = \varphi_0 \neq 0$

$$\sum X_i = 0; \Phi_A + \Phi_B + \Phi_n \sin \varphi - \Phi_\tau \cos \varphi = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_{iA} = 0; \Phi_B l \cos \varphi - \Phi_\tau l - m_2 g l \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

где силы инерции $\Phi_A = m_1 \ddot{x}$, $\Phi_B = m_2 \ddot{x}$, $\Phi_n = m_2 \dot{\varphi}^2 l$ и $\Phi_\tau = m_2 \ddot{\varphi} l$.

С учетом этого уравнения [1] и [2] представим в виде

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 \dot{\varphi}^2 l \sin \varphi - m_2 \ddot{\varphi} l \cos \varphi = 0 \quad (4)$$

$$m_2 x l \cos \varphi - m_2 \dot{\varphi} l^2 - m_2 g l \sin \varphi = 0 \quad (3)$$

Уравнения (3) и (4) являются дифференциальными уравнениями движения соответственно ползуна и шарика (стержня).

Для удобства сравнения полученных дифференциальных уравнений с уравнениями, приведенными в работе [1], применяем одинаковые обозначения величин как на рисунках, так и в математических выражениях.

В случае малых колебаний $\sin \varphi \approx \varphi$; $\cos \varphi \approx 1$; $\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0$ после некоторых преобразований уравнения (3) и (4) имеют вид

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} - m_2 l \ddot{\varphi} = 0 \quad (5)$$

$$l \ddot{\varphi} - \dot{x} + g \varphi = 0 \quad (6)$$

Уравнения (3) и (4) в точности совпадают с уравнениями (19) и (19''), а уравнения (5) и (6) с уравнениями (21) и (22), полученными при использовании уравнений Лагранжа [1].

Решение дифференциальных уравнений (5) и (6) и анализ полученных результатов приведено в работе [1]. Поэтому в данной работе нет смысла их повторять.

Теперь рассмотрим составление дифференциальных уравнений движения ползуна и шарика с учетом начальных условий движения $\varphi = \varphi_0 = 0$; $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \neq 0$ при $t = 0$ (рис. 2).

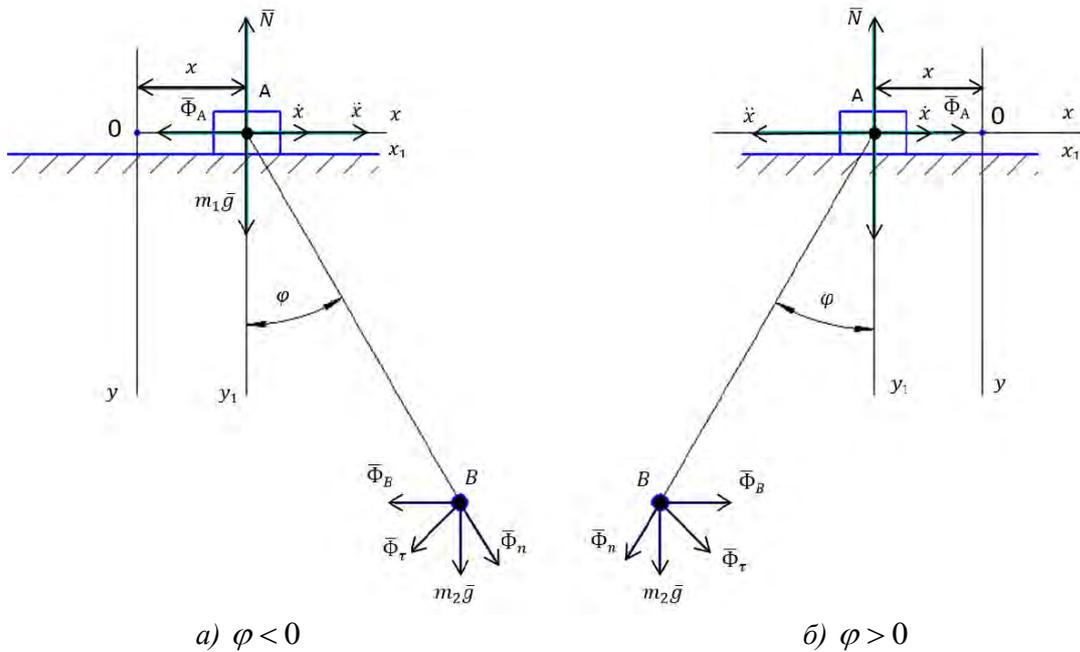


Рис. 2. Схема действия сил при сообщении шару (стержню) начальной угловой скорости из состояния равновесия

Запишем уравнения статики в соответствии с принципом Даламбера, которое для случая а) имеет вид:

$$\sum X_i = 0; \quad -\Phi_A - \Phi_B - \Phi_\tau \cos\varphi + \Phi_n \sin\varphi = 0, \quad (7)$$

$$\sum M_i = 0; \quad -\Phi_\tau l - \Phi_B l \cos\varphi - m_2 g l \sin\varphi = 0. \quad (8)$$

а для случая б):

$$\sum X_i = 0; \quad \Phi_A + \Phi_B + \Phi_\tau \cos\varphi - \Phi_n \sin\varphi = 0, \quad (9)$$

$$\sum M_{iA} = 0; \quad \Phi_\tau l + \Phi_B l \cos\varphi + m_2 g l \sin\varphi = 0. \quad (10)$$

С учетом указанных в предыдущем случае выражений для сил инерции и замены знаков на противоположные уравнения (7), (8), (9) и (10) после некоторых преобразований примут вид

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos\varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin\varphi = 0, \quad (11)$$

$$l \ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos\varphi + g \sin\varphi = 0. \quad (12)$$

а в случае малых колебаний

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} = 0, \quad (13)$$

$$l \ddot{\varphi} + \ddot{x} = 0. \quad (14)$$

что в точности совпадает с уравнениями (34), (35), (36) и (37), приведенными в работе [1]. Там же даны решения уравнений (36) и (37) и определены законы движения ползуна и шарика, которые, соответственно, имеют вид

$$x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \left(\dot{\varphi}_0 t - \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt \right), \quad (15)$$

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt. \quad (16)$$

Продифференцировав дважды по времени уравнения (15) и (16), получим законы изменения скорости и ускорения ползуна и шарика, что даст возможность установить соотношения между углом отклонения маятника от положения равновесия и направле-

ниями скорости \dot{x} и ускорения x ползуна а также угловой скорости $\dot{\varphi}$ и углового ускорения φ стержня (шарика). В свою очередь это позволит подтвердить или опровергнуть правильность выбора направления переносного и относительного ускорений шарика и ползуна.

$$\dot{x} = \frac{m_2 l \dot{\varphi}_0}{m_1 + m_2} (1 - \cos kt) \quad (17)$$

$$x = \frac{m_2 l k \dot{\varphi}_0}{m_1 + m_2} \sin kt. \quad (18)$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \cos kt \quad (19)$$

$$\varphi = -\dot{\varphi}_0 k \sin kt \quad (20)$$

где $k = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}}$.

С учетом числовых данных, приведенных в работе [1], $m_1 = 80 \text{ г}, m_2 = 20 \text{ г}; l = 20 \text{ см}; \dot{\varphi}_0 = 4,09 \text{ с}^{-1}, k = 7,826 \text{ с}^{-1}$, а формулы (17)-(20) принимают вид:

$$\dot{x} = 16,36 (1 - \cos kt), \quad (21)$$

$$x = 128,03 \sin kt, \quad (22)$$

$$\dot{\varphi} = 4,09 \cos kt, \quad (23)$$

$$\varphi = -32,0 \sin kt \quad (24)$$

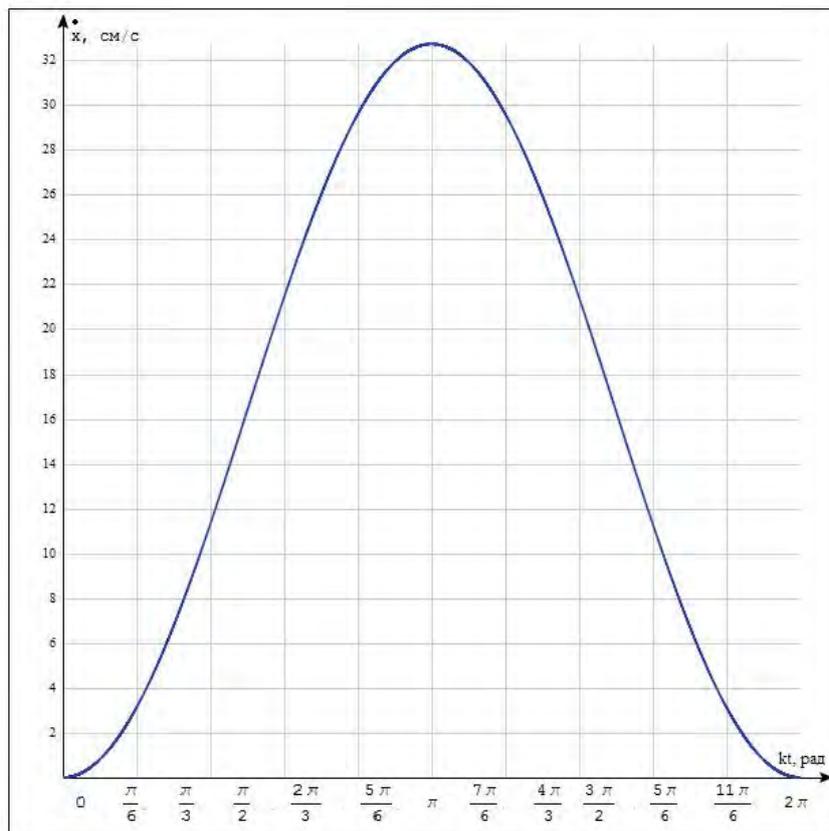
По формулам (21)–(24) за время, соответствующее одному периоду колебаний, определены значения скорости и ускорения ползуна и шарика, которые приведены в таблице 1 и графически представлены на рис.3 и 4.

Таблица 1

$kt, \text{ рад}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin kt$	0	0,5	0,866	1,0	0,866	0,5	0	-0,5	-0,866	-1,0	-0,866	-0,5	0
$\cos kt$	1	0,866	0,5	0	-0,5	-0,866	-1,0	-0,866	-0,5	0	0,5	0,866	1,0
$\dot{x} = 16,36(1 - \cos kt), \text{ см/с}$	0	2,192	8,18	16,36	24,54	30,53	32,72	30,53	24,54	16,36	8,18	2,192	0
$x = 128,03 \sin kt, \text{ см/с}^2$	0	64,015	11,07	128,03	11,07	64,015	0	-64,015	-110,07	-128,03	-110,07	-64,015	0

$\varphi = 0,5226 \sin kt$	<i>рад.</i>	0	0,261	0,452	0,523	0,452	0,261	0	-0,261	-0,452	-0,523	-0,452	-0,261	0
	<i>град.</i>	0	14,05	25,89	29,46	25,89	14,95	0	-14,95	-25,89	-29,96	-25,89	-14,05	0
$\dot{\varphi} = 4,09 \cos kt, c^{-1}$		4,09	3,54	2,015	0	-2,045	-3,54	-4,09	-3,54	-2,045	0	2,016	3,54	4,09
$\ddot{\varphi} = -32,05 \sin kt, c^{-1}$		0	-16,3	-27,71	-32,0	-27,71	-16,0	0	16,0	27,71	32,0	27,71	16,0	0

a



б

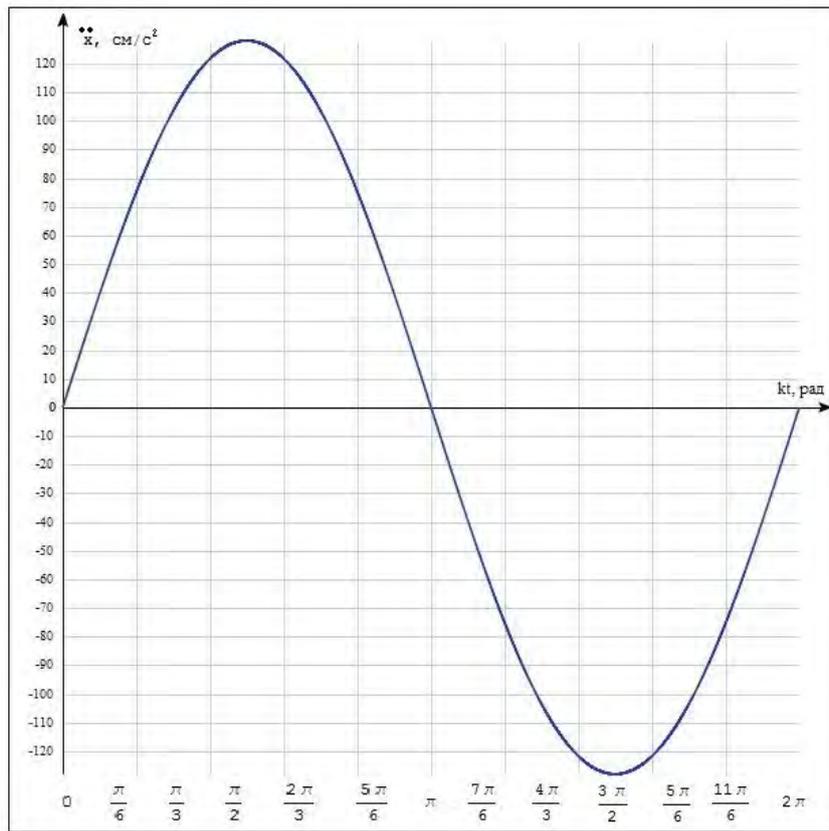
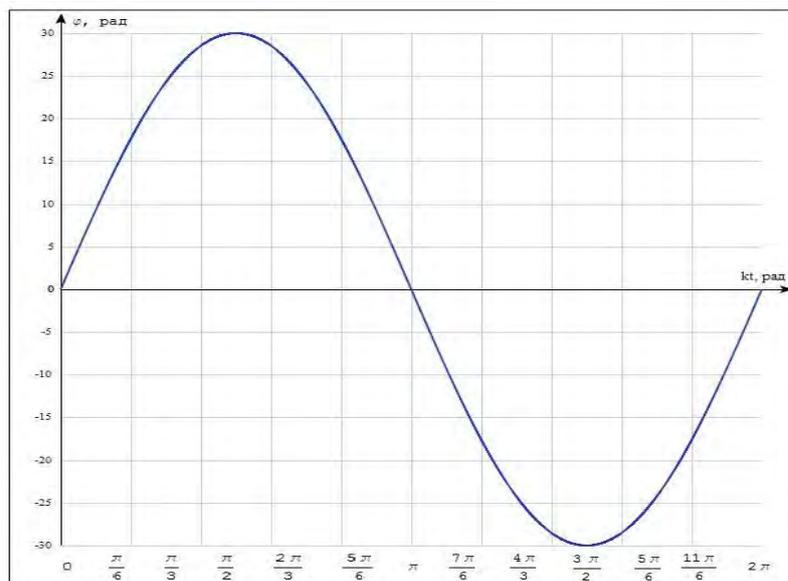


Рис. 3. Изменение скорости \dot{x} и ускорения x ползуна за один период колебаний маятника

а



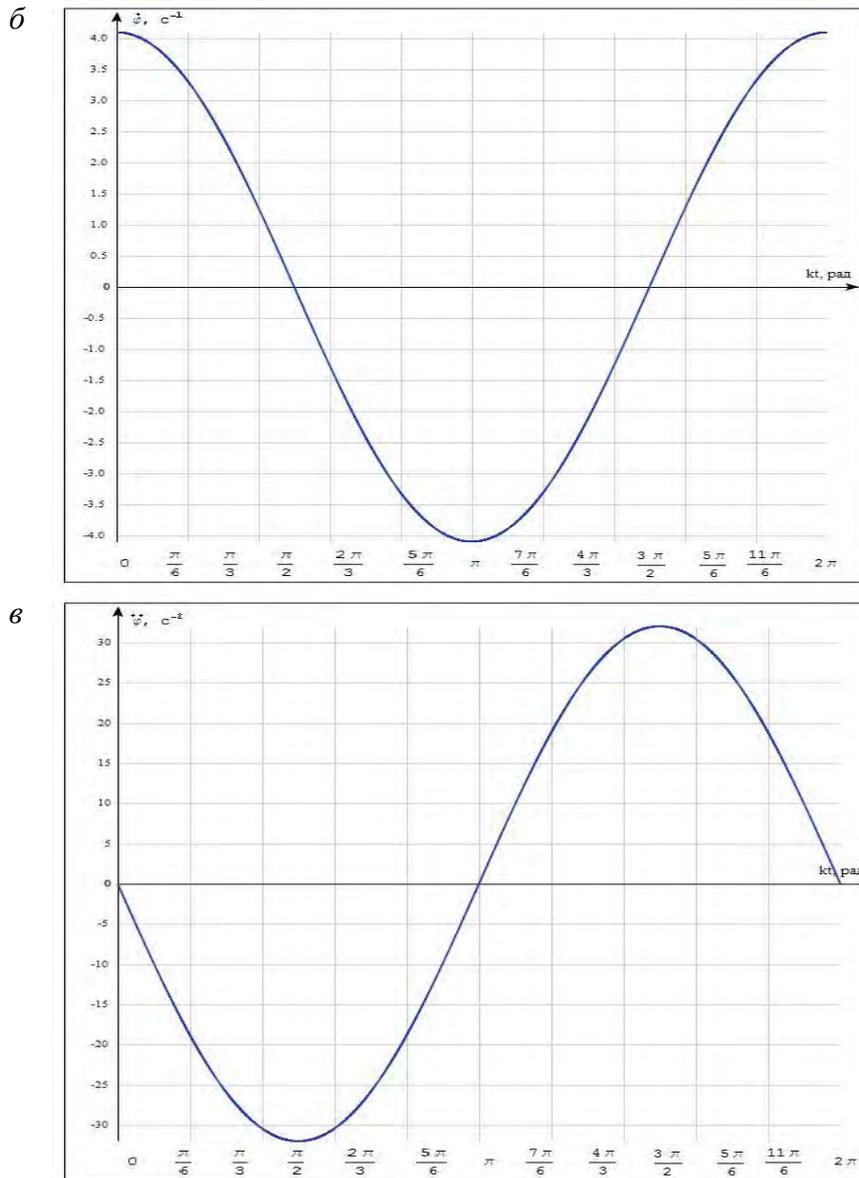


Рис. 4. Изменение угла отклонения φ шарика (стержня) от положения равновесия, его угловой скорости $\dot{\varphi}$ и углового отклонения φ за один период колебания маятника

Анализируя числовые данные таблицы 1, графики (рис.3, 4) и уравнение (рис.17), заметим, что при любых значениях $t|\cos kt| \leq 1$ (либо равен нулю), то скорость \dot{x} ползуна, всегда имеет положительное значение или равна нулю, т.е. ползун движется в ту сторону, в которую сообщена стержню (шарику) начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$. При этом скорость \dot{x} ползуна равна нулю при $\cos kt = 1$ (или $kt = 2\pi(m-1)$), а при $\cos kt = -1$ (или $kt = 2\pi(2m-1)$) имеет максимальное значение, где $m = 1, 2, 3$ и т.д., число периодов колебаний маятника.

Ускорения же x ползуна и φ стержня (шарика) при $kt = \pi(m-1)$ равны нулю. В эти моменты времени угол $\varphi = 0$, т.е. шарик находится в положении равновесия. При

отклонении шарика из этого положения вправо $x > 0$, а при отклонении влево $x < 0$, достигая при этом максимального значения при $kt = \frac{\pi}{2}(2m-1)$.

Таким образом, при отклонении шарика из положения равновесия вправо ускорение x ползуна направлено вправо, а сила инерции влево, и наоборот, при отклонении шарика влево, ускорение x так же направлено влево, а сила инерции ползуна Φ_A и переносная сила Φ_B шарика направлены вправо, что соответствует указанным направлениям этих сил на рис 2а) и 2б) и подтверждает правильность выбора направления этих сил при составлении уравнение (7)-(10) и ошибочность решения этой задачи, приведенного в публикации [2].

Выводы. В настоящей работе применен кинестатический метод составления дифференциальных уравнений колебаний эллиптического маятника. Полученные уравнения в точности совпадают с уравнениями, вывод которых осуществляется с использованием уравнений Лагранжа второго рода. Это еще раз подтверждает известную истину, что если какая-либо задача может быть решена разными способами, то результат должен быть один и тот же независимо от способа решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбач Н.И., Кадышина А.В., Исследование колебаний эллиптического маятника. // Теоретическая прикладная механика: международный научно-технический журнал. – Минск: БНТУ, 2016. - №31. – с. 298-330.
2. Локтионов А.В. Кинестатический метод расчета уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника / А.В. Локтионов // Теоретическая прикладная механика: международный научно-технический журнал. – Минск: БНТУ, 2015. - №30. – с. 226-229.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ, ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО КОНТУРУ, НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

Козел А.Г.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. С каждым годом в строительстве, авиационной и космической технике, судостроении и машиностроении требования к характеристикам конструкций возрастают, что приводит к появлению новых материалов, обладающих высокими прочностными и жесткостными характеристиками. В связи с этим получили широкое распространение слоистые конструкции, в том числе трёхслойные. Эти конструкции при относительно небольшой массе способны обеспечить не только заданные показатели прочности и повышение изгибной жёсткости, но и противостоять тепловым, химическим, радиационным и некоторым другим негативным воздействиям.

Большую роль в развитии теории и методов расчета трёхслойных элементов конструкций сыграли ключевые работы В.В. Болотина [1], А.Г. Горшкова [2], Д.В. Леоненко [3], Ю.М. Плескачевского [4], Э.И. Старовойтова [5 – 8] и многих других зарубежных и отечественных авторов.

К настоящему времени достаточно полно исследован осесимметричный изгиб несимметричных по толщине упругих трёхслойных круговых пластин с лёгким заполнителем, связанных с упругим основанием Винклера [4, 5]. Математической моделью этого основания учитывается сжимаемость основания, но его связностью (распределительной способностью) пренебрегается. Поэтому возникает необходимость исследования деформирования трёхслойных элементов конструкций, связанных с упругим основанием структуры более сложной, чем основание Винклера. Требуемая модель основания была предложена П.Л. Пастернаком [9].

В работах [10–12] получены уравнения равновесия упругой трёхслойной круговой пластины, связанной с основанием Пастернака. Здесь приведено общее аналитическое решение, и рассмотрен случай изгиба пластины под действием равномерно распределенной нагрузки при жёсткой заделке контура пластины.

Постановка задачи. Рассматривается задача об осесимметричном изгибе несимметричной по толщине упругой трёхслойной пластины с лёгким заполнителем на основании Пастернака. В тонких несущих слоях принимаются гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. На контуре пластины предполагается жесткая диафрагма, которая препятствует относительному сдвигу слоев. Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1).

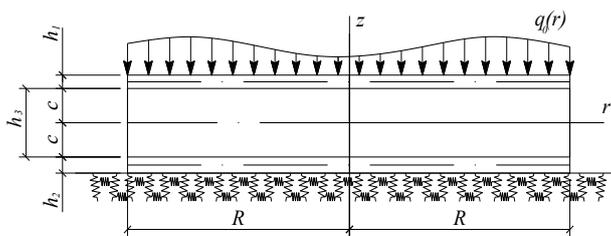


Рис. 1. Схема деформирования круговой пластины

Перпендикулярно верхнему слою пластины действует распределенная нагрузка $q_0(r)$. Реакция основания описывается моделью Пастернака:

$$q_r(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w \quad (1)$$

где κ_0, t_f – коэффициенты сжатия и сдвига, Δ – оператор Лапласа.

Уравнения равновесия в усилиях получены из вариационного принципа Лагранжа:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) &= -(q_0 + q_R), \end{aligned} \quad (2)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; q_0 – интенсивность внешней распределенной нагрузки; $w(r)$ – прогиб; $u(r)$ – радиальное перемещение координатной плоскости; a_n – коэффициенты, определяемые через модули упругости материалов и геометрические параметры слоев,

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad a_3 = h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1\right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2\right) K_2^+, \\ a_4 &= c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+\right), \quad a_5 = c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1\right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2\right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+\right], \\ a_6 &= h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2\right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2\right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \end{aligned}$$

где h_k – толщина k -го слоя ($k=1,2,3$), $K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k$, $K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k$, G_k, K_k – модули сдвига и объёмного деформирования; L_k – линейные дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r}\right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Краевая задача по определению прогиба рассматриваемой пластины замыкается присоединением к системе дифференциальных уравнений (2) граничных условий на контуре $r=R$:

- при жёсткой заделке контура пластины

$$u = \psi = w = w_{,r};$$

- при шарнирном опирании контура пластины

$$u = \psi = w = M_r;$$

- в случае свободного контура пластины

$$\psi = 0, \quad T_r = M_r = M_{r,r} = 0. \quad (3)$$

Здесь внутренние усилия T_r, M_r выражаются через искомые перемещения следующими формулами:

$$\begin{aligned} T_r &= \sum_{k=1}^3 h_k \left(K_k^+ u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^-\right) + c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \psi_{,r} + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{\psi}{r} - \\ &\quad - \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2}\right) \right] w_{,rr} - \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2}\right) \right] \frac{w_{,r}}{r}, \\ M_r &= \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2}\right) \right] u_{,r} + \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2}\right) \right] \frac{u}{r} + \\ &\quad + \left[c K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2}\right) + c K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2}\right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \left[c K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2}\right) + c K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2}\right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \end{aligned}$$

$$-\left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} -$$

$$-\left[K_1^- h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}.$$

Граничные условия (3) служат для определения констант интегрирования после решения системы (2).

Решение краевой задачи. Рассмотрим процедуру решения системы (2) уравнений. С помощью первых двух уравнений системы (2) в третьем уравнении обнуляем коэффициенты перед функциями u и ψ . В результате приходим к следующим выражениям для радиального перемещения и сдвига через прогиб $w(x)$, который удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r},$$

$$\psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \quad (4)$$

$$w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} - t_f D \left(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) + \kappa_0 D w = q_0 D,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – константы интегрирования, коэффициенты

$$b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad D = \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

В связи с ограниченностью предполагаемого решения в начале координат для сплошных пластин необходимо положить $C_2 = C_4 = 0$.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее третьему уравнению в системе (4), и введем в нем замену переменной $x = \kappa r$:

$$w_{,xxxx} + \frac{2}{x} w_{,xxx} - \frac{1}{x^2} w_{,xx} + \frac{1}{x^3} w_{,x} - 2t_0^2 \left(w_{,xx} + \frac{1}{r} w_{,x} \right) + w = 0$$

или

$$\Delta^2 w - 2t_0^2 \Delta w + w = 0,$$

где $\kappa^4 = \kappa_0 D$, $q = q_0 D$, $2t_0^2 = t_{f1} / \kappa^2$, $t_{f1} = t_f D$.

Общий интеграл третьего дифференциального уравнения в (4) может быть теперь представлен в виде

$$w = w_1 + w_2 + w_p, \quad (5)$$

где w_p – частное решение рассматриваемого уравнения, w_1 и w_2 – фундаментальная система частных интегралов, удовлетворяющая однородным уравнениям

$$w_{1,xx} + \frac{1}{x} w_{1,x} + a w_1 = 0,$$

$$w_{2,xx} + \frac{1}{x} w_{2,x} + \bar{a} w_2 = 0.$$

После ряда преобразований решение уравнения (5) получаем в виде:

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a}x) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a}x) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}}x) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x) + w_p,$$

где $J_0(\sqrt{a}x)$ и $J_0(\sqrt{\bar{a}}x)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, комплексных аргументов $\sqrt{a}x$ и $\sqrt{\bar{a}}x$; $H_0^{(1)}(\sqrt{a}x)$ и $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x)$ – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов.

Изгиб пластины под действием равномерно распределенной нагрузки. Пусть на рассматриваемую пластину действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q_0 = const$ (рис. 2).

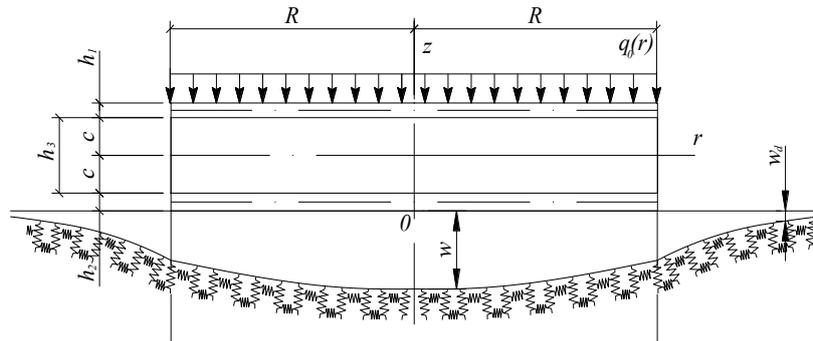


Рис. 2. Трехслойная пластина под действием равномерно распределенной нагрузки

Дифференциальное уравнение изгиба такой пластины принимает вид:

$$\Delta^2 w - 2t_0^2 \Delta w + w = \frac{q_0 D}{\kappa^4} = \frac{q_0}{\kappa_0}, \quad (6)$$

В области внешней по отношению к пластине реакция основания отсутствует. В ней, справедливо однородное дифференциальное уравнение, которое в безразмерных координатах имеет вид [8]:

$$\Delta w_d - \alpha_0^2 w_d = 0, \quad (7)$$

где $\alpha_0^2 = \frac{\kappa_0}{t_f \kappa^2} = \frac{\sqrt{\kappa_0}}{t_f \sqrt{D}} = \frac{\kappa^2}{t_f D}$.

Общее решение дифференциальных уравнений (6) и (7) может быть представлено в виде:

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a}x) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a}x) + C_7 J_0(\sqrt{a}x) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a}x) + \frac{q_0}{\kappa_0}, \quad (8)$$

$$w_d = C_9 I_0(\alpha_0 x) + C_{10} K_0(\alpha_0 x),$$

где $I_0(\alpha_0 x)$, $K_0(\alpha_0 x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода (функция Макдональда) нулевого порядка аргумента $\alpha_0 x$.

Таким образом, прогиб в задаче об изгибе равномерно распределенной нагрузкой трехслойной пластины, лежащей на упругом основании Пастернака, определено с точностью до шести постоянных интегрирования.

Т.к. прогиб в центре пластины должен быть конечным, а функции Ханкеля $H_0^{(1)}(\sqrt{a}x)$ и $H_0^{(2)}(\sqrt{a}x)$ в начале координат уходят в бесконечность, то в решении (8) для сплошных пластин необходимо положить $C_6 = C_8 = 0$.

Поскольку функция $I_0(\alpha_0 x)$ при $r \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает, что противоречит условию затухания осадок упругого основания вдали от места приложения нагрузки ($w_d \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$), то отсюда следует, что $C_9 = 0$.

В итоге получаем прогиб пластины w и осадку поверхности свободного основания w_d в виде

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a}x) + C_7 J_0(\sqrt{a}x) + \frac{q_0}{\kappa_0},$$

$$w_d = C_{10} K_0(\alpha_0 x)$$

Полное решение поставленной задачи выпишем в общем виде:

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\psi &= b_2 w_{,r} + C_3 r, \\ w &= C_5 J_0(\sqrt{a}x) + C_7 J_0(\sqrt{a}x) + \frac{q_0}{\kappa_0}, \\ w_d &= C_{10} K_0(\alpha_0 x).\end{aligned}$$

Общее решение (9) можно использовать для исследования любого симметричного изгиба трёхслойной круговой пластины, при опирании её на упругом основании. При этом конкретная задача сводится к определению постоянных интегрирования $C_1, C_3, C_5, C_7, C_{10}$ из соответствующих граничных условий и условий равновесия пластины.

Рассмотрим случай жесткой заделки контура пластины. Тогда должны выполняться первые из граничных условий в (3). В результате получаем линейную систему уравнений

$$\begin{aligned}b_1 w_{,r}(R) + C_1 R &= 0, \\ b_2 w_{,r}(R) + C_3 R &= 0, \\ C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa R) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa R) + \frac{q_0}{\kappa_0} &= 0, \\ \sqrt{a} C_5 J_1(\sqrt{a} \kappa R) + \sqrt{a} C_7 J_1(\sqrt{a} \kappa R) &= 0.\end{aligned}\tag{10}$$

Решив систему уравнений (10) получим следующие константы интегрирования:

$$\begin{aligned}C_1 = C_3 &= 0, \\ C_5 &= \frac{q_0 J_1(\sqrt{a} \kappa R)}{\kappa_0 (J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) - J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a} \kappa R))}, \\ C_7 &= \frac{q_0 J_1(\sqrt{a} \kappa R)}{\kappa_0 (\sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) - \sqrt{a} J_0(\sqrt{a} \kappa R) J_1(\sqrt{a} \kappa R))}.\end{aligned}\tag{11}$$

Также при $r=R$ осадка и прогиб должны совпадать $w(R) = w_d(R)$, поэтому $C_{10} = 0$, т.к. $w(R) = 0$.

Таким образом, решение (9) с константами интегрирования (11) описывает перемещения в трёхслойной пластине на упругом основании Пастернака в случае заделки её контура при равномерно распределенной нагрузке.

Выводы. Предложенная механико-математическая модель и решение краевой задачи об изгибе несимметричной по толщине упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака позволяют исследовать НДС при любых осесимметричных нагрузках и граничных условиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект T16P-010).

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В.В. *Механика многослойных конструкций* / В.В.Болотин, Ю.Н.Новичков – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Горшков, А. Г. *Теория упругости и пластичности* / А.Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.
3. Плескачевский, Ю. М. *Деформирование трехслойного упругого стержня нагрузками различных форм в температурном поле* / Ю.М. Плескачевский, Э.И.Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник.* – Мн.: 2017. – Вып. 32. – С. 5–12
4. Плескачевский, Ю. М. *Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием* / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.

5. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 380 с.
6. Старовойтов, Э.И. Термосиловое деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки / Э.И. Старовойтов, Ф.Б. Нагиев // Теоретическая и прикладная механика. Вып. 31.– Мн.: БНТУ. –2016. – С. 176–184.
7. Старовойтов, Э.И. Повторное знакопеременное нагружение упругопластических тел в нейтронном потоке / Э.И. Старовойтов, Д.М. Савицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – Минск: БНТУ. Вып. 30. – С. 20–29.
8. Старовойтов, Э.И. Термосиловое деформирование трехслойных упругопластических стержней / Э.И. Старовойтов, Д.М. Савицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 29. – С. 51–57.
9. Власов, В.З. Балки, плиты, оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – С. 226-235.
10. Козел, А.Г. Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины. – 2017. – № 1(30). – С. 42-46.
11. Козел, А.Г. Деформирование круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ. – 2017. – Вып. 32. – С. 235-240.
12. Козел, А.Г. Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании / А.Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 90-95.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ОБЪЕМНОЙ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ СИСТЕМЫ ВКЛАДЫШ/ВАЛ

д.ф.-м.н. **Щербаков С.С.**, асп. **Мозолевский О.А.**

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. В работе рассматриваются механико-математические модели, описывающие напряженно-деформированное состояние и состояние объемной повреждаемости системы вкладыш/вал, работающей при комплексном нагружении контактными и изгибающими силами. Данная трибофатическая система используется при испытаниях на фрикционно-механическую усталость на машинах серии СИ.

Приложение к системе вкладыш/вал неконтактных нагрузок принципиально изменяет картину распределения напряжений и деформаций в области контактного взаимодействия. Целью настоящей работы было исследование изменения качественных и количественных характеристик напряженного состояния и опасных объемов в трехмерной окрестности площадки контакта.

Постановка задачи. На рис. 1,а изображена схема нагружения системы контактной и изгибающей нагрузками. Главная особенность рассматриваемой системы в сравнении с контактной парой состоит в том, что в зоне взаимодействия вала со вкладышем напряженное состояние обусловлено как полем контактных напряжений, так и полем напряжений вследствие изгиба.

Таким образом, при построении механико-математической модели для исследования напряженно-деформированного состояния трибофатической системы вкладыш/вал будем учитывать действие как распределенного контактного давления $p(S)$, где S – площадка контакта, так и воздействие неконтактных нагрузок (M, Q, N) [1].

В рассматриваемой модели к вкладышу прикладывалась контактная нагрузка F_N , а к валу – изгибающая нагрузка Q , и следовательно, полное напряженное состояние в области контакта было обусловлено суперпозицией полей напряжений, возникающих под действием нагрузки F_N , и силы Q , т.е

$$\sigma_{ij}(F_N, Q) = \sigma_{ij}^N + \sigma_{ij}^Q, \quad (1)$$

где σ_{ij}^N – поле напряжений, возникающее за счет действия нагрузки F_N , σ_{ij}^Q – поле напряжений, возникающее за счет действия нагрузки Q .

Граничное условие в области контакта имеет вид:

$$\sigma_{mn}|_S = p(F_N, Q), \quad \text{где } n \perp S.$$

Конечно-элементное моделирование. Конечно-элементное моделирование системы вкладыш/вал в трехмерной постановке осуществлялось в соответствии с методикой, изложенной в работе [2], в пакете компьютерной механики ANSYS Workbench. При построении геометрической модели использовались размеры стандартных образцов, используемых при испытаниях на фрикционно-механическую усталость. На рис. 1,а показаны геометрические характеристики модели и приложенные нагрузки F_N и Q .

В силу симметрии задачи относительно плоскости xOy расчеты проводились для половины модели.

С целью повышения точности расчета в месте контактного взаимодействия вкладыша с валом производилась дополнительная детализация сетки более мелкими элементами, как показано на рис. 1,б. Количество узлов расчетной сетки составило 208234, количество конечных элементов – 113248.

Значения коэффициентов Пуассона и модулей упругости для материалов вкладыша и вала были приняты одинаковыми и равными соответственно 0,3 и $2 \cdot 10^{11}$ Па.

На этапе верификации модели к исследуемой силовой системе прикладывалась только контактная нагрузка $F_N = 600$ Н. Проверка корректности построенной конечно-элементной модели проводилась путём сравнения полученного численного решения и аналитического (рис. 1).

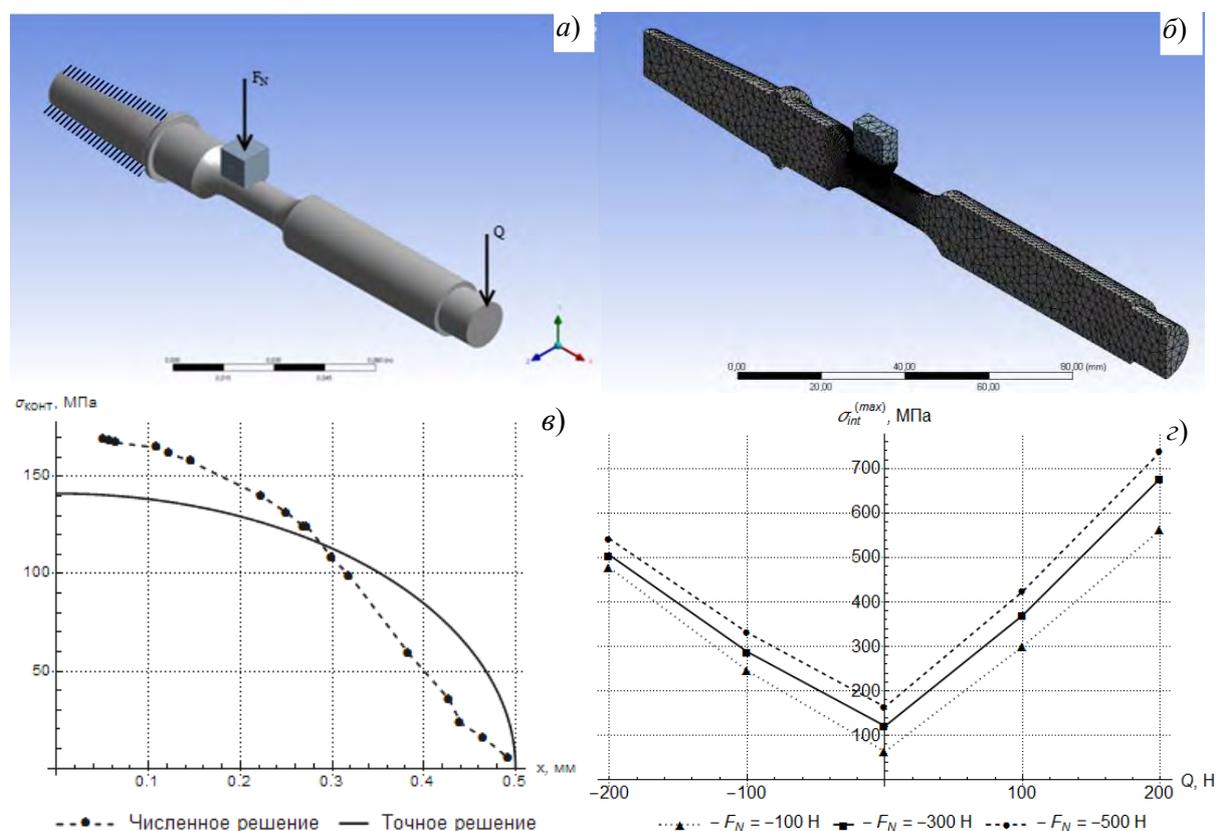


Рис. 1 – Компьютерная модель и схема нагружения системы вкладыш/вал в ANSYS Workbench (а), общий вид конечно-элементной сетки (б), распределение напряжений σ_{yy} вдоль оси Ox (в) и значения максимальной интенсивности напряжений системы для различных соотношений контактной и неконтактной нагрузок (г)

Наибольшее контактное давление в точке первоначального контакта определяется по известной формуле следующим образом [1]:

$$p_0 = -|\sigma_{\max}| = 1,27 \frac{q}{b} = 0,418 \sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}, \quad (2)$$

Сравнительный анализ аналитического и численного решения проводился для напряжений σ_{yy} , распределенных на поверхности площадки контакта вдоль оси Ox :

$$\sigma_{yy} = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad (3)$$

Из рис. 1, в видно, что в сравнении с аналитическим решением (2), (3) погрешность конечно-элементного расчета максимального контактного давления в центре площадки контакта невелика и составляет примерно 15 %.

Из рис. 1, г и рис. 2, а-и видны значительные отличия интенсивности напряжений для различных соотношений контактной и неконтактной нагрузок.

Максимальная интенсивность напряжений при отсутствии изгибающей нагрузки и $F_N = -500$ Н возрастает на 35 % относительно $F_N = -300$ Н и при $F_N = -100$ Н уменьшает-

ся на 15 % соответственно. Для $Q = -200$ Н при $F_N = -500$ Н напряжения возрастают на 7,8 % относительно $F_N = -300$ Н и при $F_N = -100$ Н уменьшается на 5,5 % соответственно. Для $Q = 200$ Н при $F_N = -500$ Н напряжения возрастают на 8,7 % относительно $F_N = -300$ Н и при $F_N = -100$ Н уменьшается на 17,2 % соответственно.

При $F_N = -100$ Н интенсивность напряжений возрастает на 17,9 % при увеличении контактной нагрузки с $Q = -200$ Н до $Q = 200$ Н. При $F_N = -300$ Н интенсивность напряжений возрастает на 34,2 % при увеличении контактной нагрузки с $Q = -200$ Н до $Q = 200$ Н. При $F_N = -500$ Н интенсивность напряжений возрастает на 36,1 % при увеличении контактной нагрузки с $Q = -200$ Н до $Q = 200$ Н. При этом интенсивность напряжений в отсутствии изгибающей нагрузки наименьшая.

Опасные объемы. В общем случае при действии на однородную изотропную трибофатическую систему предельной нагрузки F_{*lim} для деформируемого элемента системы предельные значения для интенсивности напряжений $\sigma_{int}^{(*lim)}$ определяются следующим образом [3]:

$$\sigma_{int}^{(*lim)} = \max_{dV} [\sigma_{int}(F_{*lim}, dV)],$$

где dV – элементарный объем нагруженного тела.

Тогда условие для ограничения октаэдрического опасного объема по предельной интенсивности напряжений будет иметь вид [3]

$$dV_{int} = \{dV / \sigma_{int} \geq \sigma_{int}^{(*lim)}, dV \subset V_k\}, \quad (4)$$

В соответствии с (4) опасный объем характеризует трехмерную область тела, в которой действующие напряжения превышают предельные.

Функция повреждаемости опасного объема определяется как интеграл по опасному объему, в котором подынтегральной функцией выступает отношение действующей интенсивности напряжений к предельной, т.е. локальная повреждаемость элементарного объема dV :

$$\Psi_{int} = \int_{\sigma_{int} \geq \sigma_{int}^{(*lim)}} \frac{\sigma_{int}}{\sigma_{int}^{(*lim)}} dV, \quad (5)$$

Рассмотрим изменения октаэдрических опасных объемов в системе для предельной интенсивности напряжений $\sigma_{int}^{(*lim)} = 68$ МПа.

При проведении серии испытаний на контактно-механическую усталость, к системе вкладыш/вал прикладывают различные комбинации изгибающих и контактных нагрузок, в соответствии с этим возникает необходимость моделирования объемной повреждаемости системы при различных значениях силовых факторов.

На рис. 2,к-т показаны опасные объемы для разных направлений приложения изгибающей силы: вверх при $Q = 200$ Н, создающей дополнительное сжатие в окрестности контакта, и вниз при $Q = -200$ Н, создающей дополнительное растяжение в окрестности контакта.

Значения опасных объемов при изгибе вверх и вниз составляют 3 % и 5,8 % соответственно от общего объема системы или 1124 мм³ и 2161 мм³ соответственно. Изменение величины опасного объема обусловлено возникновением дополнительного поля напряжений, вызванного приложением изгибающей нагрузки Q .

На рис. 3 и 4 показаны графики изменения величины опасного объема в системе и повреждаемости при изменении значения контактной нагрузки от -100 Н до -500 Н, изгибающей нагрузки от -200 Н до 200 Н и величины предельного значения интенсивности напряжений от 8 МПа до 165 МПа.

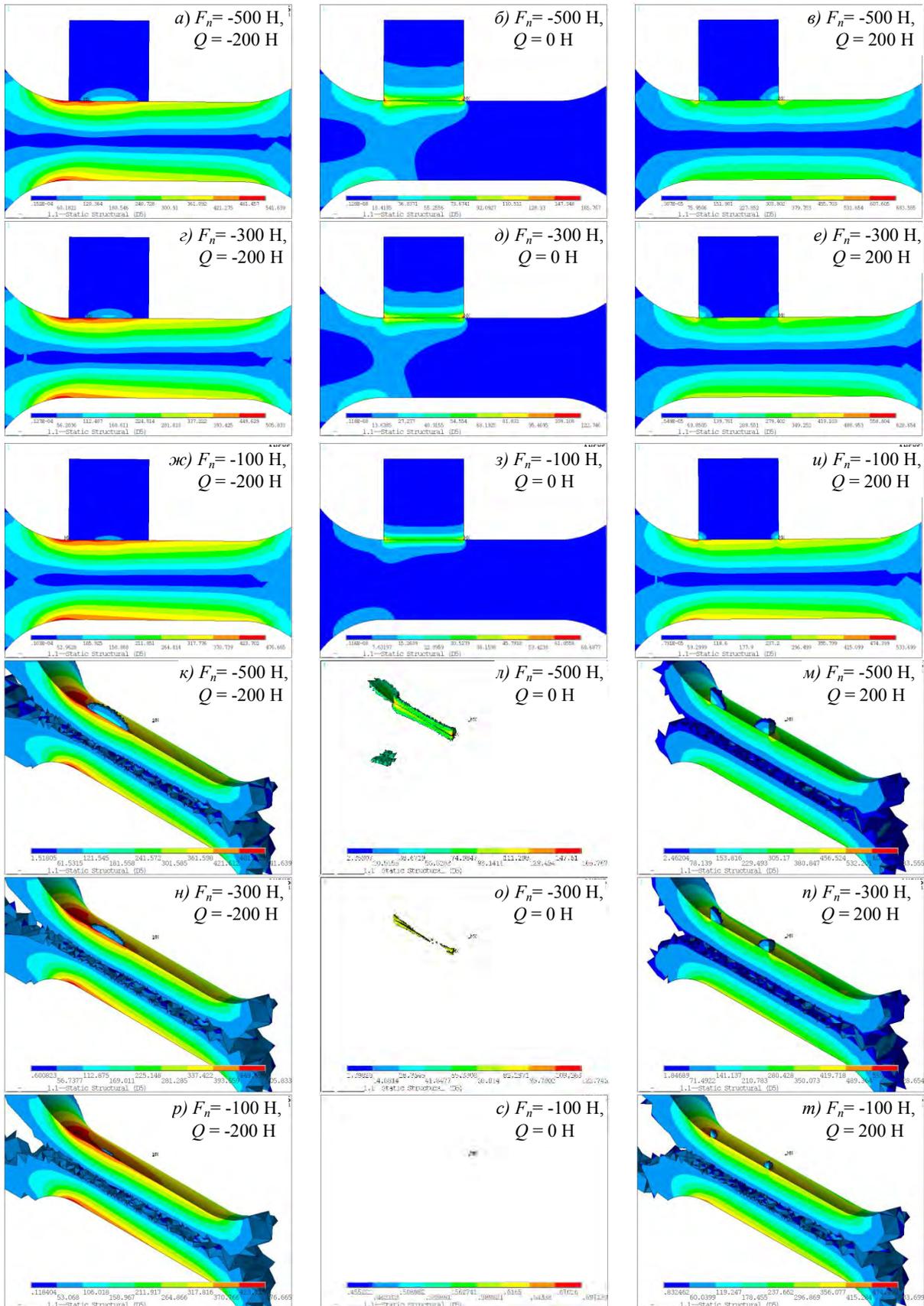


Рис. 2. Распределение интенсивности напряжений (а) – (и) и опасные объёмы (к) – (т) для различных соотношений контактных и неконтактных сил

Из рис. 3 видны весьма значительные отличия опасных объемов и повреждаемости для вала при различных соотношениях контактной, неконтактной нагрузок и величин предельного значения. Так из рис. 3,г видно, что для $\sigma_{int}^{(*lim)} = 68$ МПа при $Q = -200$ Н и при $F_N = -500$ Н опасный объем возрастает на 12,2% относительно $F_N = -300$ и при $F_N = -100$ Н уменьшается на 14,15% соответственно. Для $Q = 200$ Н при $F_N = -500$ Н опасный объем уменьшается на 3,4% относительно $F_N = -300$ Н и при $F_N = -100$ Н увеличиваются на 11,8% соответственно. Для $F_N = -100$ Н опасный объем уменьшается на 17,9% при увеличении контактной нагрузки с $Q = -200$ Н до $Q = 200$ Н. Для $F_N = -300$ Н опасный объем уменьшается на 52,8% при увеличении контактной нагрузки с $Q = -200$ Н до $Q = 200$ Н. Для $F_N = -500$ Н опасный объем уменьшается на 77,7% при увеличении контактной нагрузки с $Q = -200$ Н до $Q = 200$ Н. При этом опасные объемы при отсутствующей изгибающей нагрузке являются наименьшими.

Следует отметить, что опасный объем больше, если контактная и изгибающая нагрузка сонаправлены, в сравнении со случаем, когда они направлены в разные стороны. Анализ повреждаемости вала (рис. 3,к-т) проводится аналогично.

Из рис. 4 видны значительные отличия опасных объемов и повреждаемости для вкладыша при различных соотношениях контактной и неконтактной нагрузок, а также величин предельного значения интенсивности напряжений.

Так из рис. 4,г видно, что для $\sigma_{int}^{(*lim)} = 68$ МПа при $Q = -200$ Н и при $F_N = -500$ Н опасный объем возрастает на 154% относительно $F_N = -300$ Н и при $F_N = -100$ Н уменьшается практически до нуля. Для $Q = 200$ Н при $F_N = -500$ Н опасный объем увеличивается на 101% относительно $F_N = -300$ Н и при $F_N = -100$ Н уменьшается примерно в 4 раза соответственно. Для $F_N = -100$ Н опасный объем увеличивается на 908% при увеличении контактной нагрузки с $Q = -200$ Н до $Q = 200$ Н. Для $F_N = -300$ Н опасный объем увеличивается на 49% при увеличении контактной нагрузки с $Q = -200$ Н до $Q = 200$ Н. Для $F_N = -500$ Н опасный объем увеличивается на 18,4% при увеличении контактной нагрузки с $Q = -200$ Н до $Q = 200$ Н. При этом опасные объемы при отсутствующей изгибающей нагрузке наименьшие.

Опасный объем меньше, если контактная и изгибающая нагрузка сонаправлены, в сравнении со случаем, когда они направлены в разные стороны. Анализ повреждаемости вкладыша проводится аналогично.

Заключение. Представлены постановка и решение задачи контактного взаимодействия в системе вкладыш/вал, используемой для исследования фрикционно-механической усталости, с учетом объемного деформирования при неконтактном изгибе вала.

Проведен конечно-элементный анализ трехмерного напряженно-деформированного состояния и состояния объемной повреждаемости системы в зависимости от величин контактных и неконтактных нагрузок в сравнении со случаем только контактного взаимодействия.

Анализ максимальной интенсивности напряжений в системе показал, что ее наименьшее значение наблюдается при чисто контактном взаимодействии. При изгибе вала максимальная интенсивность напряжений при сжатии окрестности контактного взаимодействия оказалась больше чем при растяжении.

Анализ октаэдрических опасных объемов показал, что наименьшая объемная повреждаемость наблюдается при чисто контактном взаимодействии. При изгибе вала его объемная повреждаемость при растяжении окрестности контактного взаимодействия больше чем при сжатии. Для вкладыша имеет место обратная зависимость, которая представляет особый интерес, поскольку изменение повреждаемости во вкладыше происходит за счет неконтактной нагрузки, приложенной к валу, а не ко вкладышу. Она свидетельствует о сильном проявлении трибофатического обратного эффекта [1-4].

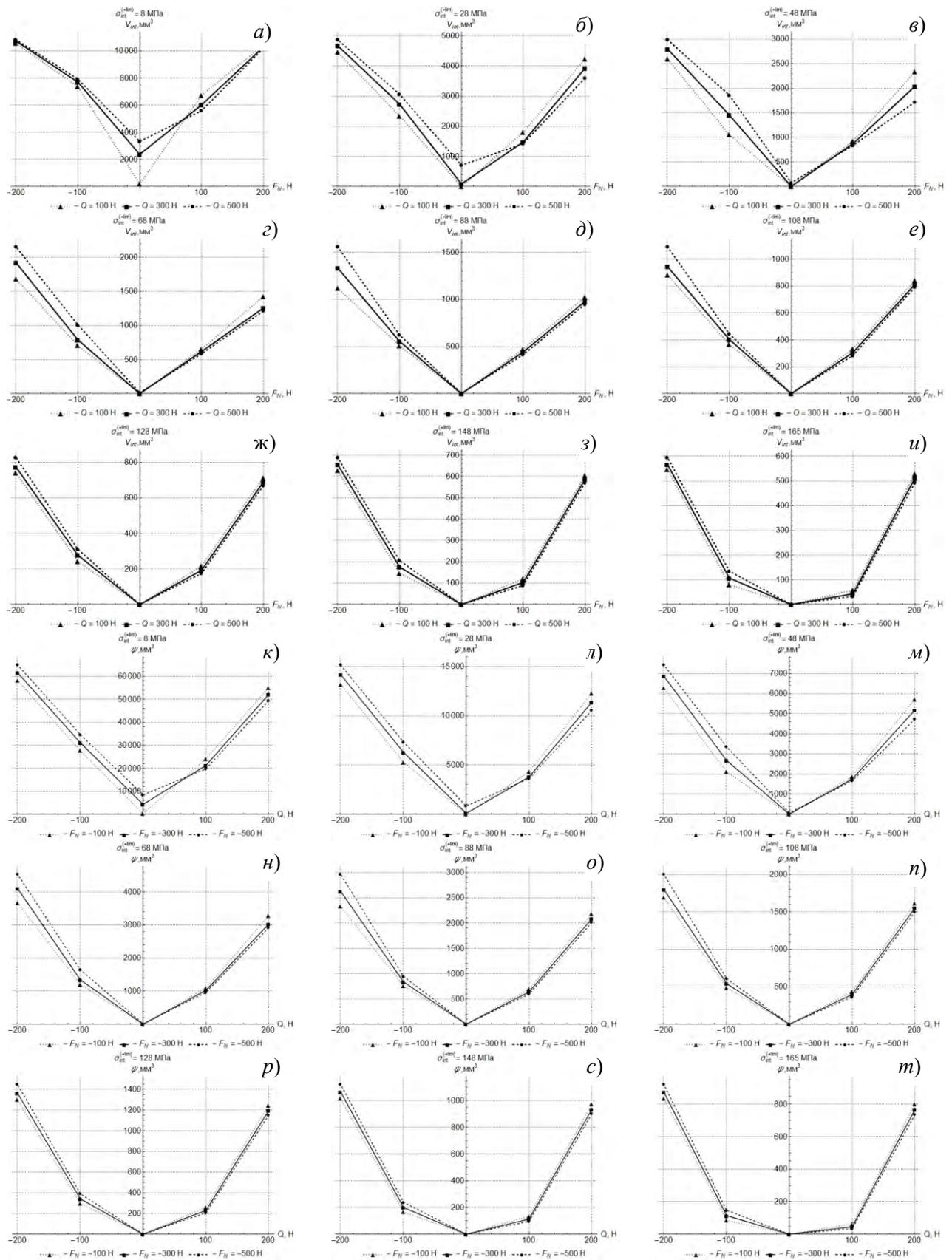


Рис. 3. Опасные объемы (а) – (и) и повреждаемость (к) – (т), возникающие в вале для различных предельных значений интенсивности напряжений

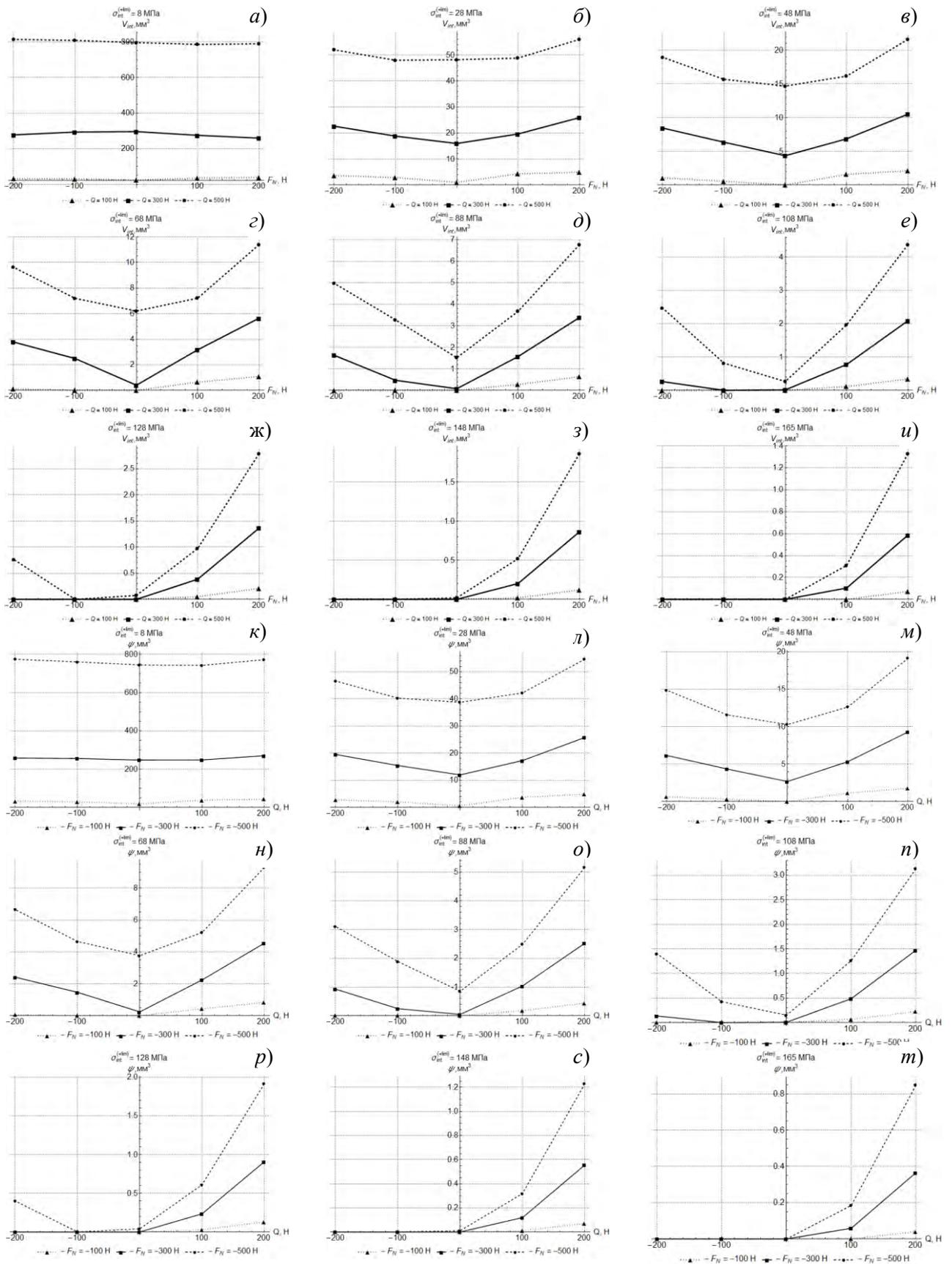


Рис. 4. Опасные объемы (а) – (и) и повреждаемость (к) – (т), возникающие во вкладыше для различных предельных значений интенсивности напряжений

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков, С. С. *Механика трибофатических систем* / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – С. 126-133.
2. Мармыш, Д. Е. *Моделирование двумерного напряженно-деформированного состояния и состояния повреждаемости трибофатической системы вкладыш/вал* // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. Вып. 29. Мн.: БНТУ, 2014. С. 273 – 277.
3. Сосновский, Л.А. *Механика износоусталостного повреждения* / Л.А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2007. – С. 112-113.
4. Сосновский Л. А. *Основы трибофатики* / Сосновский Л. А. – Гомель : БелГУТ, 2003. – Т. 1. – 246 с. – Т. 2. – С. 234.

**ПРОГРАММА КУРСА «ДЕТАЛИ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МАШИН»
ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ИНЖЕНЕРОВ ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ
«КОМПЬЮТЕРНАЯ МЕХАТРОНИКА»**

Капуста П.П.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

**1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МАШИНОВЕДЕНИЯ И ПРИНЦИПЫ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДЕТАЛЕЙ И МАШИН**

1.1. Введение. Основные понятия.

Цели и задачи учебного курса “Детали и проектирование машин” в системе технической и конструкторской подготовки специалистов (инженеров) технического профиля. Краткие исторические сведения о развитии машиноведения и деталей машин. Современное состояние и основные тенденции в развитии машиностроения.

Машина и механизм. Классификация машин в зависимости от их назначения. Машины-двигатели, машины-преобразователи, рабочие машины. Классификация (основные типы) механизмов. Детали и сборочные единицы машин, их классификация. Требования, предъявляемые к машинам, сборочным единицам и деталям. Техно-экономическая и технологическая роль стандартизации в развитии машиностроения. Типы стандартов. Конструкция, материалы конструкции. Понятия о технологичности конструкций машин и деталей.

Место проектирования и конструирования среди других видов инженерной деятельности. “Детали и проектирование машин” как наука. Предмет и метод дисциплины. Основополагающая роль дисциплины в конструкторской подготовке инженеров. Связь с общенаучными, общепрофессиональными и специальными дисциплинами. Задачи и структура дисциплины. Обзор учебной и справочной литературы по дисциплине.

1.2. Условия работы и нагруженность машин и их деталей.

Нагрузки в машинах и конструкциях. Источники нагрузок в машинах, механическое взаимодействие деталей машин. Классификация машин и деталей в зависимости от условий работы. Нагруженность. Виды нагруженности деталей машин и их классификация: статическое и переменное (регулярное и нерегулярное) нагружение. Нагрузки и напряжения в деталях. Возникновение переменных напряжений. Циклы напряжений и их характеристики.

Учет эксплуатационной нагруженности при проектировании машин и деталей. Нагрузочные блоки и режимы. Трансформация нагрузок в системе двигатель – трансмиссия – рабочий орган машины.

1.3. Сопротивление усталости.

Усталостные разрушения деталей и его причины. Предел выносливости. Факторы, влияющие на предел выносливости. Природа усталостного разрушения. Испытания на усталость. Кривая усталости (кривая Велера). Предел выносливости, предел ограниченной выносливости. Степенное уравнение кривой усталости и его характеристики. Коэффициент долговечности. Эмпирические зависимости между пределом выносливости и пределом прочности для металлических материалов, пределами выносливости при симметричном изгибе и симметричном растяжении (сжатии) и кручении. Факторы, влияющие на предел выносливости: концентрация напряжений, абсолютные размеры поперечного сечения, запрессовка деталей (фреттинг-коррозия), шероховатость поверхности, поверхностное упрочнение. Коэффициент снижения предела выносливости

детали. Испытания деталей машин на сопротивление усталости. Понятие о ресурсе деталей по критерию сопротивления усталости.

Конструктивные и технологические способы повышения сопротивления усталости.

Диаграмма предельных амплитуд; формулы для определения коэффициентов запаса усталостной прочности при одноосном (изгиб и кручение) и сложном (изгиб с кручением) напряженных состояниях.

Расчет на сопротивление усталости при одноосном и двухосном напряженном состоянии.

1.4. Контактные напряжения и контактная прочность.

Основные понятия и определения. Контакт сферических и цилиндрических тел под нагрузкой. Контактные напряжения и деформации, форма площадок контакта. Определение величины контактных напряжений (формула Герца). Виды и механизмы разрушения рабочих поверхностей тел при действии контактных напряжений (из металлических материалов со смазкой и без смазки, из неметаллических материалов без смазки). Понятие о контактной усталости. Контактная прочность и пути ее повышения.

1.5. Основные понятия надежности машин и деталей.

Надежность детали и машины. Долговечность. Ресурс. Отказ. Ремонтопригодность. Сохраняемость. Показатель надежности (вероятность безотказной работы или вероятность неразрушения при выработке требуемого ресурса). Интенсивность отказов. График зависимости интенсивных отказов от наработки за весь период эксплуатации машины (детали).

Средняя наработка до отказа. Основное уравнение теории надежности.

Определение основных характеристик надежности машины, состоящей из сборочных единиц и деталей.

Понятие о расчетах деталей машин на надежность. Повышение надежности изделий.

1.6. Критерии работоспособности и расчета деталей машин.

1.6.1. Прочность деталей машин и методы ее оценки. Классификация и сравнительный анализ методов оценки прочности деталей машин: по допускаемым напряжениям, по запасам прочности (коэффициентам запаса прочности), по вероятности разрушения. Рекомендации по применению рассмотренных методов при расчетах и проектировании деталей машин. Общие требования к прочности деталей машин и способы ее повышения (увеличение прочности материала, применение упрочняющих технологий, конструкционная прочность). Особенности расчетов деталей на прочность.

1.6.2. Жесткость деталей машин и методы ее оценки. Основные понятия. Методы оценки жесткости деталей машин.

Удлинение (укорочение), прогибы, углы поворота, углы закручивания деталей и действующие нормы на них.

Общие требования к жесткости деталей машин и способы ее повышения (конструктивная жесткость, жесткость материала, повышение жесткости технологическими и комбинированными методами). Особенности расчетов деталей на жесткость.

1.6.3. Трение, износ и износоустойчивость. Основные понятия. Физические основы взаимодействия сопряженных поверхностей. Виды сопряженных поверхностей, их взаимодействие и процессы изнашивания. Влияние параметров поверхностей на объемную и контактную прочность сопряженных деталей.

Природа трения скольжения и качения и природа изнашивания. Режимы трения и изнашивания, роль смазочного материала. Основные характеристики жидкостного трения. Понятие об интенсивности изнашивания и оценке износоустойчивости деталей машин. Виды трения и изнашивания деталей. Сухое, граничное, жидкостное и газовое трение.

Понятие об износоусталостном повреждении; трибофатика. Методы оценки износа деталей и современные способы борьбы с изнашиванием.

Трение, износ и износоустойчивость. Физические модели трения скольжения и качения. Принципы расчета деталей на износоустойчивость.

1.6.4. Колебания в машинах и виброустойчивость. Основные понятия. Причины колебаний машин и их деталей: динамические нагрузки. Собственные и вынужденные колебания. Понятия о резонансе и о расчете упругих систем на колебания. Виброустойчивость. Способы предотвращения резонанса (понятие о критической угловой скорости вала), демпфирующие устройства для гашения колебаний. Понятия о виброактивности и виброзащите машин. Уравнения колебаний и основные характеристики. Коэффициент динамичности, резонанс. Расчет упругих систем на крутильные и изгибные колебания.

1.6.5. Влияние температуры на работоспособность деталей машин. Основные понятия. Классификация деталей машин в зависимости от температурных условий работы. Изменение физико-механических свойств конструкционных материалов при низких (отрицательных) и повышенных температурах. Морозо- и теплоустойчивость материалов и конструкций, технологические и конструктивные способы ее повышения.

Особенности расчетов деталей, работающих при пониженных и повышенных температурах.

1.6.6. Коррозия и старение деталей машин. Общие сведения и основные понятия. Природа коррозии и старения. Влияние коррозии и старения на эксплуатационные свойства материалов и деталей машин. Защита от коррозии и последствий старения.

1.7. Общие предпосылки проектирования машин

1.7.1. Точность изготовления деталей. Общие сведения о шероховатости, допусках и посадках деталей машин. Основные понятия о взаимозаменяемости и стандартизации деталей машин: шероховатость поверхности, качества точности, допуски и посадки, назначение посадок. Точность геометрической формы деталей.

1.7.2. Технологичность и экономичность деталей машин. Технологичность и экономичность деталей в зависимости от условий и способов их изготовления. Влияние масштаба производства на методы формообразования детали.

1.7.3. Выбор материалов деталей машин. Классификация машиностроительных материалов; черные и цветные металлы и их сплавы; пластмассы; композиционные и другие новые материалы. Упрочняющая обработка деталей (термическая, химико-термическая, поверхностное пластическое деформирование, комбинированные методы). Общие критерии выбора материалов и назначение упрочняющей обработки при проектировании деталей машин. Основные пути экономии материалов.

1.7.4. Общие принципы проектирования и конструирования деталей и машин. Общие принципы конструирования деталей машин. Стадии и формы организации проектирования. Экономические основы конструирования машин.

Общие сведения о метрологии, стандартизации и информационно-измерительной технике. Управление качеством продукции в соответствии со стандартами ISO.

2. МЕХАНИЧЕСКИЕ ПЕРЕДАЧИ

2.1. Общие сведения о механических передачах и их классификация.

Классификация и сравнительная характеристика механических передач. Назначение передач по принципу действия и по принципу передачи движения от ведущего звена к ведомому. Основные кинематические и силовые соотношения в передачах.

Механический привод машины, кинематические схемы механических приводов. Составление (синтез) кинематических схем механических приводов. Выбор электродвигателя, кинематический и силовой расчет привода.

2.2. Фрикционные передачи.

Общие сведения о фрикционных передачах: принцип работы и устройство, классификация фрикционных передач, достоинства и недостатки, область применения.

Фрикционные передачи с нерегулируемым (постоянным) передаточным отношением. Цилиндрическая передача гладкими катками и условие работоспособности (определение требуемой силы прижатия катков), способы прижатия катков. Материалы катков.

Вариаторы (передачи с плавным бесступенчатым регулированием передаточного отношения), их кинематические схемы и область применения. Диапазон регулирования вариаторов. Вариаторы: лобовые, конусные, многодисковые, шаровые, торовые.

Виды разрушений рабочих поверхностей катков. Критерии работоспособности и расчет передач на прочность.

Принципы проектирования и конструирования фрикционных передач. Физические основы передачи тяговой (окружной) силы упругими элементами через контакты трения. Упругое и геометрическое скольжение, его влияние на передаточное отношение. Силы в передаче. Нагрузки на валы.

Виды отказов и критерии расчета. Расчет на контактную прочность фрикционных тел. Потери на трение. Коэффициент полезного действия.

Особенности расчета и конструирования фрикционных вариаторов.

2.3. Зубчатые передачи.

Общие сведения о зубчатых передачах: принцип работы, достоинства и недостатки, область применения. Классификация зубчатых передач. Основы теории зубчатого эвольвентного зацепления, теорема зацепления. Зацепление двух эвольвентных колес: основные геометрические характеристики эвольвентного зацепления.

Зацепление эвольвентного зубчатого колеса с рейкой. Принцип нарезания зубьев методом обкатки. Делительная окружность. Исходный контур зубчатой рейки. Методы изготовления зубчатых колес. Точность зубчатых передач. Подрезание зубьев. Основные понятия о зубчатых колесах со смещением (корригирование зубьев колес).

2.3.1. Цилиндрические и конические зубчатые передачи. Основные геометрические и кинематические соотношения цилиндрических (прямозубых, косозубых, шевронных) и конических (прямозубых и непрямозубых) передач.

Виды разрушения зубьев. Критерии работоспособности и расчета зубчатых передач. Материалы зубчатых колес и допускаемые напряжения (учет нагрузочного режима, требуемого ресурса). Упрочнение зубьев колес. Смазка зубчатых передач. Коэффициент полезного действия.

Расчет зубчатых передач на прочность. Выбор точности зубчатых передач.

Расчет зубчатых передач на контактную выносливость (усталостную прочность) активных поверхностей зубьев колес. Формулы проверочного и проектного расчетов. Особенности расчета конических передач. Выбор основных параметров и расчетных коэффициентов.

Расчет зубчатых передач на изгибную выносливость (сопротивление усталости зубьев колес при изгибе). Формулы проверочного и проектного расчетов. Особенности расчета конических передач. Выбор основных параметров и расчетных коэффициентов. Конструкции зубчатых колес. Снижение виброактивности зубчатых передач, самоустанавливающиеся зубчатые колеса.

2.3.2. Планетарные зубчатые передачи. Принцип работы и устройство планетарного и дифференциального механизмов. Достоинства и недостатки, область применения. Классификация планетарных зубчатых передач и схемы наиболее распространенных механизмов. Определение передаточных отношений и частот вращения звеньев. Геометрия и силы в планетарной передаче. Силы и моменты на отдельных звеньях. Реакции в опорах. Выравнивание нагрузки между сателлитами. Коэффициент полезного действия.

Условия соосности, соседства и сборки (симметричности расположения сателлитов). Определение чисел зубьев колес.

Расчет и конструирование планетарных зубчатых передач. Особенности расчета зубьев центральных колес на контактную выносливость и на выносливость при изгибе. Особенности конструирования зубчатых колес. Понятия об оптимизации параметров планетарных передач.

Прецессионные передачи. Устройство, особенности геометрия и кинематика. Области применения.

2.3.3. Волновые зубчатые передачи. Принцип работы и устройство. Достоинства и недостатки, область применения. Классификация волновых зубчатых передач и схемы наиболее распространенных механизмов. Конструкции. Геометрические и кинематические соотношения. Передаточное отношение. Нагрузки и напряжения в элементах передачи. Предельный вращающий момент по критерию упругой податливости зубьев. Крутильная жесткость. Моменты пуска и холостого хода. Коэффициент полезного действия передачи. Кинематическая погрешность. Виды повреждений и критерии расчета. Расчет и конструирование волновых зубчатых передач. Виды отказов и критерии расчета. Расчет гибкого колеса на сопротивление усталости. Расчет генераторов волн. Особенности расчета гибких подшипников. Расчет на износостойкость зубьев колес.

2.3.4. Передачи с зацеплением Новикова. Конструкция, применение. Геометрические и силовые соотношения. Основы расчета и конструирования передач с зацеплением Новикова.

2.3.5. Винтовые и гипоидные зубчатые передачи. Конструкция, особенности расчета, конструирования и область применения винтовых и гипоидных зубчатых передач. Винтовые зубчатые передачи: конструкция и область применения. Особенности геометрии и понятия о расчетах зубьев на прочность и износостойкость. Гипоидные передачи. Особенности конструкции и геометрии, понятия о расчете на прочность.

2.4. Передачи винт-гайка.

Общие сведения о передачах винт-гайка: принцип работы, устройство, достоинства и недостатки, область применения. Классификация. Сравнительная характеристика передач с парами скольжения и качения.

Геометрия и силы в передачах. Точность передач. Зависимость между моментом, приложенным к гайке, и осевой силой винта. Самоторможение и КПД винтовой пары. Распределение осевой нагрузки винта по виткам резьбы.

Материалы и виды разрушения элементов передач.

Основы расчета и конструирования передач винт-гайка.

Передачи с парами скольжения. Области применения. Конструкции и материалы винтов и гаек. Основные параметры. Типы резьб. Кинематика. Точность передач. Силы и моменты в винтовой паре. Коэффициент полезного действия. Самоторможение. Виды отказов и критерии расчета. Расчеты на износостойкость, прочность и устойчивость.

Передачи винт-гайка шариковые. Конструкции. Области применения. Материалы деталей. Основные геометрические параметры. Распределение нагрузки по виткам. Потери на трение, коэффициент полезного действия. Точность деталей передачи. Расчет предварительного натяга. Расчеты на прочность, жесткость и долговечность. Рекомендации по изготовлению и эксплуатации.

Передачи винт-гайка роликовые. Принцип действия. Области применения. Основные геометрические параметры. Расчет элементов передачи на статическую прочность и долговечность.

Шариковые винтореечные передачи. Конструкции. Области применения. Основные геометрические параметры.

2.5. Червячные передачи.

Общие сведения о червячных передачах: принцип работы, устройство, достоинства и недостатки, область применения. Классификация. Червячная передача с архиме-

довым червяком. Основные геометрические соотношения, передаточное число. Скорость скольжения в червячных передачах. Изготовление червяков и червячных колес и их конструкции.

Силовые соотношения и КПД червячной передачи. Смазка и смазочные системы червячных передач.

Критерии работоспособности и расчета элементов передачи: требования к износостойкости и жесткости червяка, виды разрушения зубьев червячных колес. Материалы червяков и червячных колес. Допускаемые напряжения для материалов червячных колес. Расчет зубьев колес на циклическую контактную прочность и на сопротивление усталости при изгибе. Формулы проверочного и проектного расчетов. Выбор основных параметров и расчетных коэффициентов.

Тепловой расчет и способы охлаждения червячных передач.

Расчет валов-червяков на жесткость.

Глобоидные червячные передачи, особенности геометрии и расчета.

2.6. Цепные передачи.

Общие сведения о цепных передачах: принцип работы, устройство, достоинства и недостатки, область применения. Классификация. Конструкции деталей цепных передач: приводные цепи, звездочки, натяжные устройства. Применяемые материалы. Сравнительная характеристика передач втулочными, роликковыми и зубчатыми цепями. Основные геометрические соотношения в передачах. Передаточное число.

Силовые соотношения в цепных передачах. Критерии работоспособности. Расчеты цепных передач (проверочный и проектный). Методика подбора стандартных цепей. Смазка цепных передач.

Основы конструирования цепных передач.

2.7. Ременные передачи

Общие сведения о ременных передачах: принцип работы, устройство, достоинства и недостатки, область применения. Классификация. Конструкции деталей ременных передач: приводные ремни, шкивы, натяжные устройства. Применяемые материалы для деталей ременных передач.

Сравнительная характеристика передач плоскими, клиновыми, поликлиновыми и зубчатыми ремнями. Основные геометрические соотношения в передачах.

Силовые соотношения в ременных передачах. Напряжения в ветвях ремня. Кинематика передач, скольжение ремня на шкивах. Передаточное отношение.

Расчет ременных передач по тяговой способности.

Расчет *плоскоремennых* передач. Выбор основных параметров и расчетных коэффициентов. Расчет *плоскоремennых* передач.

Особенности работы и расчет *клиноремennых* передач и *поликлиноремennых* передач.

Зубчато-ременные передачи. Критерии работоспособности и основы расчета.

Принципы конструирования ременных передач.

3. НЕСУЩИЕ, ПОДДЕРЖИВАЮЩИЕ, КОРПУСНЫЕ И УПРУГИЕ ДЕТАЛИ

3.1. Оси и валы.

Оси и валы, их назначение и классификация. Конструктивные элементы. Материалы осей и валов. Критерии работоспособности и расчет валов и осей на статическую и усталостную прочность. Проектный и проверочный расчеты валов. Проектный и проверочный расчеты осей. Конструирование осей и валов, рациональные конструкции. Способы повышения сопротивления усталости на стадии проектирования валов и осей. Расчет валов и осей на жесткость и колебания. Основы вероятностных расчетов валов на статическую прочность и усталостную долговечность.

3.2. Опоры осей и валов (подшипники).

Общие сведения. Назначение, принцип и условия работы, классификация опор осей и валов. Подшипники скольжения и качения.

3.2.1. Подшипники скольжения. Подшипники скольжения: устройство, достоинства и недостатки; классификация, основные типы и область применения. Виды трения и режимы работы подшипников скольжения. Материалы и смазка.

Виды разрушения и основные критерии работоспособности. Нагрузочная способность, расчет на износостойкость и теплостойкость. Подшипники скольжения, работающие без смазки и в режиме смешанного трения.

3.2.2. Подшипники качения. Подшипники качения: устройство, достоинства и недостатки, сравнительная характеристика подшипников скольжения и качения. Классификация и маркировка подшипников качения. Основные типы подшипников качения и области их применения. Особенности работы радиально-упорных шарико- и роликоподшипников. Статическая и динамическая грузоподъемность и подбор подшипников качения. Расчет подшипников качения на долговечность. Ограничения по предельной частоте вращения. Особенности работы и конструкции высокоскоростных подшипников качения. Посадки подшипников качения. Рекомендации по конструированию сборочных единиц, содержащих подшипники качения. Смазочные материалы и конструкции уплотнений. Монтаж, демонтаж и регулировка подшипников качения.

3.3. Корпусные детали, рамы, направляющие, устройства для смазывания и уплотнения.

3.3.1. Корпусные детали, направляющие, устройства для смазывания и уплотнения.

Корпусные детали: назначение, классификация, области применения. Конструкции корпусов и требования к ним. Способы изготовления и материалы. Основные геометрические параметры для литых и сварных (штампосварных) корпусов и их выбор при конструировании.

Рамы: назначение, классификация, области применения. Конструкции рам и требования к ним. Способы изготовления и материалы. Основные геометрические параметры рам и их выбор при конструировании.

Направляющие скольжения и качения: назначение, типы, конструкции, классификация, области применения. Понятие о расчетах несущей способности.

Общие сведения о гидро- и газостатических направляющих.

Уплотнения: назначение, классификация (типы, конструкции), области применения.

Устройства для смазывания: назначение, классификация (типы, конструкции), области применения.

Смазочные материалы, их классификация и выбор. Конструкции смазочных и уплотнительных узлов. Типовые конструкции узлов для подачи, контроля, очистки и охлаждения масла.

3.3.2. Упругие детали и сборочные единицы машин.

Назначение (аккумулирование энергии и демпфирование колебаний в машинах), классификация и области применения упругих деталей и сборочных единиц машин. Геометрические параметры и рабочие характеристики цилиндрических витых пружин растяжения и сжатия, их расчет и конструирование. Средства виброзащиты и борьбы с колебаниями в машинах. Амортизаторы, рессоры и упругие подвески (общие сведения). Схемы и области применения. Несущая и демпфирующая способность. Понятие о расчетах на долговечность (сопротивление усталости). Резиновые упругие элементы: демпферы и амортизаторы. Устройство. Особенности подбора, конструирования и расчета.

4. СОЕДИНЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН.

Назначение и общая классификация соединений деталей и сборочных единиц машин. Неразъемные и разъемные соединения. Сравнительная характеристика, достоинства, недостатки и области применения различных классов соединений.

4.1. Неразъемные соединения.

4.1.1. Сварные соединения.

Классификация, конструкции и материалы сварных соединений. Расчет сварных соединений на срез при постоянной нагрузке. Допускаемые напряжения для сварных соединений. Понятия о расчете сварных соединений при переменном нагружении.

4.1.2. Заклепочные соединения: классификация, конструкции и материалы заклепок. Расчет на прочность заклепок и соединяемых деталей. Материалы и допускаемые напряжения.

4.1.3. Паяные соединения: конструкции, материалы деталей и припои. Особенности расчета, допускаемые напряжения.

4.1.4. Клеевые соединения. Виды соединений: клеесварные, клеезаклепочные, клеерезьбовые и клеевые соединения с натягом. Процесс склеивания. Клеевые материалы. Особенности расчета.

4.2. Разъемные соединения.

4.2.1. Штифтовые соединения: конструкции соединений и штифтов. Применяемые материалы. Особенности расчета штифтов. Материалы и допускаемые напряжения.

4.2.2. Шпоночные соединения. Основные типы стандартных шпонок, их классификация и сравнительная характеристика соответствующих соединений. Расчет соединений призматическими и сегментными шпонками. Материалы и допускаемые напряжения.

4.2.3. Шлицевые соединения. Классификация по характеру соединения, по форме зубьев, по способу центрирования ступицы относительно вала. Соединения с прямобочными и эвольвентными зубьями и их сравнительная характеристика. Расчет шлицевых прямобочных соединений. Материалы и допускаемые напряжения.

4.2.4. Профильные соединения. Конструкции. Несущая способность. Особенности расчета профильных соединений. Материалы и допускаемые напряжения.

4.2.5. Резьбовые соединения.

Общие сведения о резьбовых соединениях. Основные типы резьб, их классификация; обоснование выбора профиля резьбы. Геометрические параметры, характеризующие резьбу. Основные типы крепежных деталей и способы стопорения резьбовых соединений. Силовые соотношения в резьбе; условие самоторможения. Зависимость между усилием затяжки и силой на ключе. Контроль усилия затяжки, динамометрические ключи.

Материалы резьбовых деталей, классы прочности резьб. Способы изготовления резьбы. Допускаемые напряжения при контролируемой и неконтролируемой затяжках. Расчет на прочность стержня винта (болта, шпильки) при постоянной осевой нагрузке. Основные расчетные случаи: затянутый болт без внешней осевой нагрузки; затянутый болт с дополнительной осевой силой; болт нагружен поперечной силой (2 случая – болт поставлен с зазором и без зазора).

Распределение нагрузки по виткам резьбы. Понятие о расчетах витков резьбы на прочность. Способы повышения прочности и надежности резьбовых соединений (конструктивные и технологические).

Применение, расчет и конструирование групповых болтовых соединений.

4.2.6. Соединения с натягом. Общие сведения. Цилиндрические и конические соединения с натягом, конструкции соединений. Способы сборки. Достоинства и недо-

статки, область применения. Расчет соединений с натягом в зависимости от передаваемых нагрузок. Выбор стандартной посадки. Проверка прочности деталей соединения.

Проблема повышения сопротивления усталости соединений с натягом. Конструирование соединений с натягом.

4.3. Муфты.

Муфты: назначение и классификация. Виды погрешностей взаимного расположения валов. Дополнительные нагрузки на валы, создаваемые муфтами. Устройство и принцип действия основных типов муфт, их сравнительная характеристика. Методика подбора стандартных муфт по типу и по расчетному моменту. Расчетные нагрузки и моменты. Выбор стандартных муфт.

Глухие муфты, их конструкции и расчет. Жесткие компенсирующие муфты, их конструкции и расчет.

Упругие (эластичные) муфты и их свойства. Компенсирующая и демпфирующая способность муфт. Характеристика упругой муфты линейная и нелинейная. Конструкции и расчет.

Управляемые и самоуправляемые муфты, конструкции и особенности подбора и расчета.

5. РЕДУКТОРЫ, МОТОР-РЕДУКТОРЫ, КОРОБКИ ПЕРЕДАЧИ МЕХАНИЗМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЩНОСТИ.

Общие сведения о редукторах, мотор-редукторах и коробках перемены передач и подач. Назначение, устройство, классификация, конструкции. Основные параметры редукторов и коробок передач, подач и раздаточных. Мотор-редукторы.

Конструкции зубчатых, червячных и других типов редукторов и коробок передач, подач и раздаточных. Определение параметров зацепления.

Методика выбора стандартных редукторов и мотор-редукторов в зависимости от нагрузки и скорости рабочего органа механического привода. Основные принципы проектирования редукторов, мотор-редукторов, коробок передач, подач и раздачи мощности.

6. ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МАШИН.

6.1. Общие принципы проектирования машин.

Понятия проектирования и конструирования. Основные этапы создания технических систем. Техническое задание. Стадии и формы организации проектирования машин и их деталей. Основы конструирования: принципы и методика конструирования. Влияние масштаба производства на методы формообразования деталей. Системное проектирование: показатели качества, необходимость ограничений, комплекс критериев. определение экономически благоприятных переменных, установление потребностей. Методы поиска идей; реализация их в конкретных технических системах. Основы методологии проектирования. Обзор исследований в этой области. Проектирование и искусственный интеллект. Понятия и принципы методологии проектирования. Принципы конструирования. Свойства и особенности конструкции. Определение задачи. Построение модели. Изучение сферы приложения. Экономические основы конструктивных характеристик. Прогнозирование конструкции. Конструктивная преемственность. Проблемы снижения массы и металлоемкости, повышения надежности. Конкурентоспособность. Комплекс принципов конструкции: равнопрочность, оптимальное нагружение (увеличение постоянства и равномерности распределения нагружения и напряжений), использование начальных нагрузок, уменьшение возможности появления ударных нагрузок, уменьшение энергетических потерь, выбор оптимального материала (критические напряжения как проявление закона относительного постоянства, формоустойчивость), оптимальная стабильность, ограниченность многообразия, оптимальное соотношение взаимосвязанных величин.

Перспективы развития конструкций и расчетов деталей машин. Использование новых конструкционных материалов и эффективных конструктивных решений в машиностроении.

6.2. Понятия о численных методах расчета деталей машин.

Численные методы анализа прочности и жесткости сложных сборочных единиц и деталей машин при простом и сложном напряженном состоянии. Понятия о методах конечных разностей, ортогонализации, минимума полной энергии, конечных элементов, их краткая сравнительная характеристика и рекомендации по использованию.

Основные положения метода конечных элементов (МКЭ) и уравнения. Критерии сходимости. Типы конечных элементов. Конечно-элементные модели. Принципы и особенности расчета деталей и сборочных единиц машин на прочность методом конечных элементов. Внешние нагрузки, внутренние силы, напряженно-деформированное состояние. Примеры расчета деталей машин МКЭ.

6.3. Понятия о вероятностных методах расчета и прогнозирование надежности деталей машин.

Размеры деталей, свойства материалов, точность изготовления, нагруженность машин и деталей как случайные варьирующие величины. Связь между вероятностью неразрушения детали и запасом ее прочности. Вероятностные диаграммы усталости. Понятие о расчете ресурса (расчете на долговечность) деталей в вероятностном аспекте.

Основные положения теории вероятностей. Важнейшие законы распределения случайных величин, их характеристики и примеры применения. Квантильный метод вероятностного расчета прочности деталей машин. Связь между вероятностью неразрушения детали и запасом ее прочности. Вероятностные диаграммы усталости. Расчет ресурса деталей в вероятностном аспекте. Опытно-статистический метод оценки надежности деталей. Расчет на долговечность на основе регрессионного анализа опытных данных. Примеры прогнозирования надежности деталей машин.

6.4. Понятия об оптимальном проектировании деталей машин.

Основные задачи и проблемы оптимального проектирования деталей машин (ОПДМ), его содержание.

Понятия о математических моделях оптимального проектирования, одно- и многокритериальной задачах оптимизации конструкций.

Математические модели оптимального проектирования. Однокритериальная и многокритериальная задачи оптимизации конструкций. Методы решения задач ОПДМ, их программное обеспечение. Пример оптимального проектирования зубчатого редуктора минимальных размеров.

6.5. Виртуальное конструирование узлов и деталей машин

Общие принципы виртуального конструирования узлов и деталей машин.

Твердотельное (3D-) моделирование деталей и узлов. Виртуальная компоновка сборочных единиц и узлов машин. Использование программных инженерных пакетов (AUTOKAD, КОМПАС, SolidWorks, YUNIGRAPHIKS, ProINGENEUR и др.).

Анализ статического напряженно-деформированного состояния (НДС) деталей машин и конструкций и методика совершенствования конструкций изделий. Использование программных пакетов инженерного анализа (SolidWorks, KOSMOS, NASTRAN, ProINGENEUR, ANSYS, LMS и др.).

Динамическое моделирование и анализ НДС в реальном режиме переменного нагружения деталей машин и конструкций и методика совершенствования конструкций изделий. Использование программных пакетов инженерного анализа (ADAMS, SolidWorks, KOSMOS, NASTRAN, PATRAN, ProINGENEUR, ANSYS, LMS и др.).

Виртуальная отработка технологии изготовления и конструкторско-технологическое обоснование рациональности изделий.

Виртуальная обработка рациональности изделий по критериям эргономики.

Виртуальная обработка и обоснование рациональности изделий по критериям технологичности изготовления, удобства и безопасности эксплуатации, обслуживания и утилизации.

Виртуальная обработка дизайна и конструкторско-технологическое и технико-экономическое обоснование рациональности изделий.

Виртуальные испытания и прогнозирование функциональной работоспособности, нагруженности, ресурса и других показателей надежности.

Автоматизированная разработка 2D-чертежей на основе созданных оптимальных 3D-моделей узлов, конструкций и деталей машин.

Основные принципы автоматизированного изготовления на основе созданных оптимальных 3D-моделей (2D-чертежей) узлов, конструкций и деталей машин. Изготовление с использованием цифровых технологий и технологического оборудования с числовым программным управлением (ЧПУ). 3D-печать деталей, узлов и конструкций и их элементов.

6.6. Понятия об автоматизированном проектировании машин и деталей.

Общие сведения об автоматизированном проектировании. Многовариантность расчетов. Принципы построения системы автоматизированного проектирования (САПР).

Структура и материально-техническая основа САПР. Виды обеспечения САПР: техническое, методическое, математическое, лингвистическое и программное.

Понятия о системах автоматизированной обработки графической части конструкторской документации.

Общие представления о связи САПР и автоматизированной системы технологической подготовки производства с автоматизированным производственным процессом.

Составление программ расчета деталей машин и их применение. Расчеты деталей машин (численными и вероятностными методами) на прочность и долговечность с использованием стандартных и известных программных пакетов.

Выполнение расчетов и чертежей деталей и сборочных единиц машин с применением известных прикладных пакетов для ЭВМ (AUTOCAD, КОМПАС, SolidWorks, ANSYS, NASTRAN, ADAMS и др.).

Использование САПР при проектировании деталей и сборочных единиц машин. Формирование исходных данных к расчетам. Проведение расчетов деталей, сборочных единиц и узлов (многовариантность расчетов). Системы автоматизированной обработки графической части конструкторской документации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скойбеда А.Т., Капуста П.П. *О программе учебного инженерного спецкурса "Проектирование трибоузлов машин" / Трибофатика: Труды 4-го Международного симпозиума по Трибофатике (ISTF 4), 23 – 27 сентября 2002 г., Тернополь (Украина) // Отв. ред. В.Т. Троценко. – Тернополь: Тернопольский государственный технический университет имени И. Пулюя, 2002 г., в 2 – х томах, Т. 2. – С. 802 – 809.*
2. Капуста П.П. *Разработка структуры и содержания учебного пособия по курсу "Проектирование трибоузлов машин" для механических специальностей ВТУ-Зов / Современные методы проектирования машин // Под общ. ред. П.А. Витязя. - Вып. 2. В 7 томах. - Т. 7. Экономические аспекты проектирования машин. Теория и практика технического образования. - Мн., 2004. - С. 95-104.*

3. Капустя П.П. *Техническая механика / Типовая учебная программа (Утверждена Министерством образования РБ) // Минск: Республиканский институт профессионального образования, 2002. – 43 с.*
4. Капустя П.П. *Методические рекомендации преподавания раздела “Детали машин” в курсе “Техническая механика” / Машиностроение: Сб. научн. трудов // Под ред. И.П. Филонова. – Мн., 2002. – Вып. 18.*
5. Капустя П.П., Бондаренко А.Г. *Методическое обоснование структуры курса “Основы проектирования машин” для инженерно-экономических специальностей / Машиностроение: Республиканский межведомственный сборник научных трудов. Вып. 20, в двух томах. Т. 1 // Под ред. И.П. Филонова. – Минск: УП “Технопринт”, 2004 г., С. 305-313.*
6. Выгонный А.Г., Капустя П.П. *Интегрированная автоматизация проектирования в учебном процессе / Материалы краткосрочных курсов повышения квалификации преподавателей ВУЗов и ССУЗов “Проблемы преподавания дисциплин “Детали машин”, “Прикладная механика” и “Техническая механика” в ВУЗах и ССУЗах Республики Беларусь” (16-20 марта 1998 г., г. Минск) // Под ред. д.т.н., профессора А.Т. Скойбеды. – Минск: Изд-во “Редакция журнала “Тыдзень”. – 1998. - С. 10...18.*
7. Капустя П.П. *Разработка типовой программы по курсу “Детали и проектирование машин” для механических специальностей ВТУЗов / Современные методы проектирования машин // Под общ. ред. П.А. Витязя. - Вып. 3. В 7 томах. - Т. 7. Экономические аспекты проектирования машин. Теория и практика технического образования. - Мн., 2009. - С. 95-104.*

СОСТАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СЛОЖНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ВЫДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ

Авсиевич А.М., Кудин В.В., Качанов И.В., Кругликов А.А., Самойлов И.Р.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Любые звенья структурных схем сложносоставных систем описываются дифференциальными уравнениями, учитывающими инерционные, упругие и диссипативные характеристики, а также внешние воздействия. Уравнения системы включают в себя всю совокупность динамических звеньев, входящих в систему. Таким образом, динамическим звеном системы является ее часть, обладающая определенными свойствами в динамическом отношении. Звенья системы могут иметь самую разную физическую основу и конструктивное исполнение, но относиться к одной функциональной группе [1]. Взаимосвязь входного и выходного сигналов в динамическом звене одной группы будет описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями, что свидетельствует об одинаковых динамических свойствах.

Реальные звенья сложносоставных систем обладают большим структурным разнообразием. Если выделить типовые звенья, то сложные системы компонуются путем их последовательного и параллельного соединения. В основу формирования типовых динамических звеньев положен принцип, описывающийся дифференциальным уравнением не выше второго порядка, т.е. в основу классификации звеньев положены их динамические свойства. Это позволяет получить единые методы исследования и расчета, не зависящие от различия физических процессов и конструктивных решений. Простейшими типовыми динамическими звеньями являются: усилительное, интегрирующее, апериодическое, колебательное, дифференцирующее и запаздывающее, связь входных и выходных сигналов для которых указана в [2].

В усилительном звене (рис.1) выходная функция $f_{\text{вых}}$ в каждый момент времени пропорциональна входной величине $f_{\text{вх}}$, тогда

$$f_{\text{вых}} = k \cdot f_{\text{вх}}, \quad (1)$$

где k – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом усиления звена.

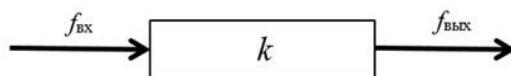


Рис. 1. Структурная схема усилительного звена

Уравнение (1) является алгебраическим, следовательно, усилительное звено передает сигнал мгновенно, без переходных динамических процессов.

В интегрирующем звене выходная величина $f_{\text{вых}}$ пропорциональна интегралу входной величины, а дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{df_{\text{вых}}}{dt} = k \cdot f_{\text{вх}}, \quad (2)$$

где k – коэффициент усиления по скорости.

Тогда

$$f_{\text{вых}} = \int_0^t k f_{\text{вх}} dt. \quad (3)$$

Переходные процессы, происходящие в интегрирующем звене, показаны на рис. 2. Аperiodическому звену удовлетворяет дифференциальное уравнение вида

$$T \frac{df_{\text{вых}}}{dt} + f_{\text{вых}} = kf_{\text{вх}}, \quad (4)$$

где T и k – некоторые параметры.

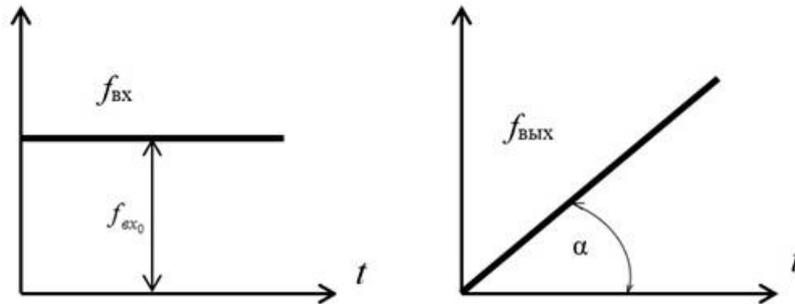


Рис. 2. Переходные процессы интегрирующего звена

Это уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка. При $t \rightarrow \infty$ выходная величина $f_{\text{вых}}$ либо монотонно убывает, либо монотонно возрастает и асимптотически стремится к некоторой величине k (рис. 3).

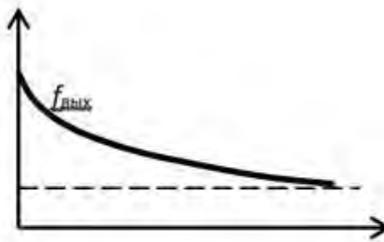


Рис. 3. Выходная функция аperiodического звена

Колебательное звено удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$T_2^2 \frac{d^2 f_{\text{вых}}}{dt^2} + T_1 \frac{df_{\text{вых}}}{dt} + f_{\text{вых}} = kf_{\text{вх}}, \quad (5)$$

где $T_2^2 = \frac{a}{c}$, $T_1 = \frac{b}{c}$ – некоторые постоянные времена; k – коэффициент усиления.

В уравнении (5) первое слагаемое характеризует инерционную составляющую, второе – диссипативную составляющую, третье – упругую составляющую, а правая часть уравнения – внешнее воздействие на звено.

Для дифференцирующего звена выходная величина $f_{\text{вых}}$ пропорциональна производной по времени от входной величины $f_{\text{вх}}$

$$f_{\text{вых}} = k \frac{df_{\text{вх}}}{dt}, \quad (6)$$

Отсюда следует, что выходная величина $f_{\text{вых}}$ пропорциональна скорости изменения входной $f_{\text{вх}}$. Если входная и выходная величина имеют одинаковую размерность, то коэффициент k измеряется в секундах.

В запаздывающем звене выходная величина $f_{\text{вых}}$ точно совпадает с входной величиной $f_{\text{вх}}$, но с некоторым запаздыванием по времени (рис. 4)

$$f_{\text{вых}} = f_{\text{вх}}(t - \tau). \quad (6')$$

Математическое описание звеньев и систем. Любые динамические звенья и их системы описываются дифференциальными уравнениями или функциональными зависимостями [3].

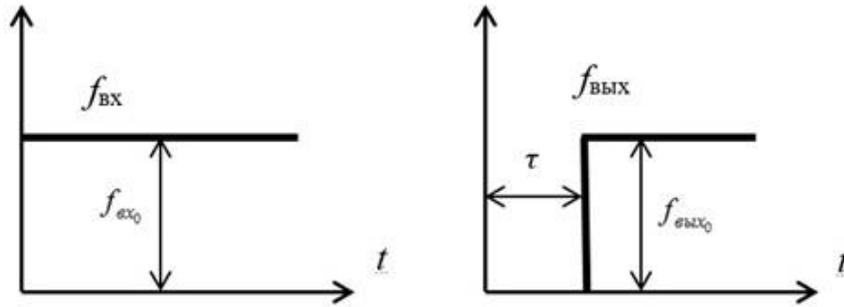


Рис. 4. Переходный процесс запаздывающего звена

Уравнения системы включают всю совокупность дифференциальных уравнений их звеньев. Математически можно представить, что выходной параметр, определяемый вектором $f_{\text{вых}}$, связан с входным параметром, определяемым вектором $X_{\text{вх}}$, следующим соотношением

$$f_{\text{вых}} = f(X_{\text{вх}}). \quad (7)$$

Для каждого звена системы имеем математическую модель. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка имеет вид

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = \\ = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t) \end{aligned} \quad (8)$$

где $m \neq n \neq 1$, a_i , b_i – некоторые постоянные коэффициенты.

Любое изменение линейного звена системы вызывает движение этого звена и представляется суммой свободного и вынужденного движений

$$x(t) = x_{\text{св}}(t) + x_{\text{вын}}(t), \quad (9)$$

где $x_{\text{св}}(t)$ – решение однородного дифференциального уравнения при отсутствии внешних воздействий ($f(t) = 0$), зависящее от начальных условий;

$x_{\text{вын}}(t)$ – решение неоднородного дифференциального уравнения под влиянием внешних воздействий при нулевых внешних воздействиях (исходном состоянии покоя).

Для определения $x(t)$ линейного звена используем преобразование Лапласа, формула которого имеет вид [4]

$$L[kf(t)] = kF_s, \quad (10)$$

где L – символ перехода от оригинала к изображению;

$F_s = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ – изображение оригинала $f(t)$;

S – некоторая комплексная переменная.

В свойствах преобразования Лапласа следует выделить следующее правило: если справедливо преобразование (10), то справедливо и следующее преобразование

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = S^n F(S) - \sum_{k=1}^n S^{n-k} f^{(k-1)}(0). \quad (11)$$

Эту формулу запишем для случаев $n=1$ и $n=2$

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = SF(S) - f(0);$$

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = S^2 F(S) - Sf(0) - f(0),$$

т.е. при ненулевых начальных условиях необходимо учитывать начальные условия оригинала и $(n-1)$ его производных.

При нулевых начальных условиях (вынужденное движение)

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = S^n F(S) = F(S)S^n. \quad (12)$$

Эти формулы показывают, что применение преобразования Лапласа к обеим частям дифференциального уравнения позволяет заменить их алгебраическими, что значительно упрощает исследование линейных звеньев системы.

Применим преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях к обеим частям дифференциального уравнения (8) и получим уравнение в изображениях

$$\begin{aligned} a_n S^n X(S) + a_{n-1} S^{n-1} X(S) + \dots + a_1 S X(S) + a_0 X(S) = \\ b_m S^m F(S) + b_{m-1} S^{m-1} F(S) + \dots + b_1 S F(S) + b_0 F(S) \end{aligned} \quad (13)$$

которое перепишем в виде

$$D(S)X(S) = M(S)F(S),$$

где $D(S) = a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0$ – собственный оператор линейного звена системы;

$M(S) = b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0$ – взаимный оператор линейного звена системы.

Собственный оператор является характеристическим уравнением однородного дифференциального уравнения, корни которого определяют частоты собственных свободных колебаний линейного звена сложносоставной динамической системы.

Взаимный оператор определяет преобразование входного воздействия, происходящее в линейном звене.

Передаточной функцией линейного звена называется отношение изображения по Лапласу входной и выходной переменных при нулевых начальных условиях, тогда

$$W(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0} = \frac{M(S)}{D(S)}. \quad (14)$$

Функция $W(S)$ является важнейшей динамической характеристикой линейного звена системы. Зная передаточную функцию и изображение по Лапласу входного сигнала, можно найти изображение выходной величины

$$X(S) = W(S)F_s. \quad (15)$$

В специальной литературе [3] имеются таблицы соответствий оригиналов и их изображений по Лапласу.

Рассмотрим свойства передаточной функции $W(S)$:

1. Во всякой физически реализуемой системе (звене) степень m полинома числителя функции $W(S)$ не более степени n полинома ее знаменателя, т.е. $m \leq n$. Это обусловлено тем, что в природе не существует идеальных дифференцируемых устройств. Поэтому в реальных звеньях и системах реакция на выходе наступает после или в момент приложения воздействия.

2. Знаменатель $D(S)$ функции $W(S)$ – собственный оператор звена системы, а его нули есть корни характеристического уравнения. В математике их принято называть полюсами передаточной функции, т.к. при комплексной переменной S , равной любому корню, функция $W(S)$ обращается в бесконечность.

3. При $S=0$ следует, что $W(0) = \frac{a_0}{b_0} = k$ – передаточный коэффициент линейного звена.

4. Свободное движение линейного звена системы определяется полюсами передаточной функции, т.е.

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = 0. \quad (16)$$

Тогда общее решение этого однородного дифференциального уравнения

$$X(t) = C_1 e^{S_1 t} + C_2 e^{S_2 t} + \dots + C_n e^{S_n t}, \quad (17)$$

где C_1, C_2, \dots, C_n – некоторые постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий;

S_1, S_2, \dots, S_n – корни характеристического уравнения.

Передаточные функции соединения звеньев. Известно, что в структурных схемах сложносоставных систем линейные звенья могут соединяться различными способами.

1. Последовательное соединение (рис. 5).

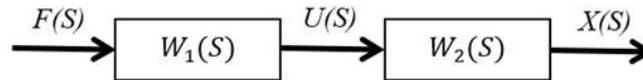


Рис. 5. Последовательное соединение звеньев

Из рисунка следует, что

$$W(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = W_1(S)W_2(S)$$

Для n последовательно соединенных звеньев передаточная функция соединения равна произведению передаточных функций отдельных звеньев

$$W(S) = \prod_{i=1}^n W_i(S). \quad (18)$$

2. Параллельное соединение (рис. 6).

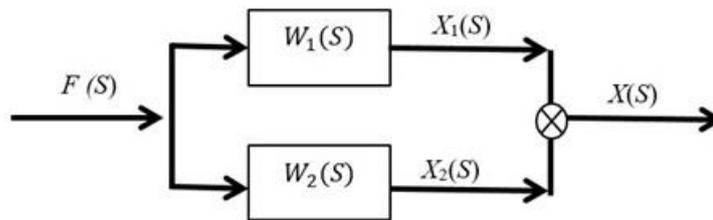


Рис. 6. Параллельное соединение звеньев

Из структурной схемы (рис. 8) следует, что

$$W(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{X_1(S)}{F(S)} + \frac{X_2(S)}{F(S)} = W_1(S) + W_2(S).$$

Если в цепи находится n звеньев, то

$$W(S) = \sum_{i=1}^n W_i(S). \quad (19)$$

3. Встречно-параллельное соединение звеньев при наличии обратной связи. В этом случае для нахождения передаточной функции замкнутого контура необходимо выделить прямую цепь передачи возмущения (воздействия) и цепь обратной связи, найти их передаточные функции и воспользоваться формулой

$$W(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{W_1(S)}{1 + W_1(S)W_2(S)}, \quad (20)$$

где $W_1(S)$ и $W_2(S)$ – соответственно передаточные функции прямого преобразования и

обратной связи

Характеристики линейных звеньев сложносоставных технологических систем. Для анализа линейных звеньев и систем в целом используются временные и частотные характеристики.

1. Временная характеристика. Временной характеристикой называется вынужденная реакция при нулевых начальных условиях, обусловленная типовым воздействием. Единичная ступенчатая функция представлена на рис. 7. Ее математическое описание имеет вид

$$f(t) = 1 = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (21)$$

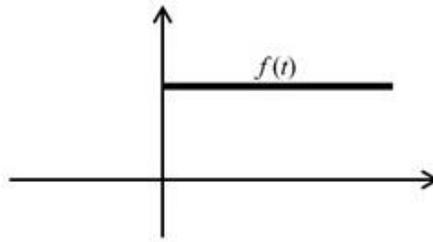


Рис. 7. График ступенчатой функции

Изображение по Лапласу: $L\{f(t)\} = 1/S$

Вынужденная реакция линейного звена системы на воздействие вида единичной ступенчатой функции называется переходной функцией и обозначается $h(t)$

$$L\{h(t)\} = H(S) = \frac{W(S)}{S}, \quad (22)$$

где $W(S)$ – передаточная функция линейного звена.

2. Частотная характеристика. Пусть на вход линейного звена подается гармонический сигнал вида

$$f(t) = a_f \sin \omega t.$$

Учитывая, что

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t,$$

тогда вынужденная реакция

$$f(t) = a_f e^{i\omega t}.$$

Передаточная функция системы описывает линейную систему звена

$$W(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0}$$

При входном сигнале $f(t) = a_f e^{i\omega t}$ и выходном сигнале $x(t) = b_x e^{i\omega t}$ отношение комплексных амплитуд выходного сигнала и входного гармонического сигнала называется частотной передаточной функцией (комплексным коэффициентом передачи звена $W(j\omega)$)

$$W(j\omega) = \frac{X(t)}{F(t)} = \frac{b_x e^{i\omega t}}{a_f e^{i\omega t}} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0},$$

тогда можно записать

$$b_x = a_f W(j\omega). \quad (23)$$

Выделяя в $W(j\omega)$ действительную и мнимую части, можно записать

$$W(j\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) + j \operatorname{Im} W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}. \quad (24)$$

где $A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$ – модуль частотной передаточной функции;

$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\right)$ – начальная фаза частотной передаточной функции.

Следовательно, при подаче на вход линейной системы гармонического сигнала на ее выходе после затухания свободного движения установится гармонический сигнал с той же частотой, но с амплитудой $a_x = A(\omega)a_f$ и со сдвигом по фазе

$$\varphi(\omega) = \arctg(W(j\omega)). \quad (25)$$

Графики функций $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ представляют собой соответственно амплитудно-частотную (АЧХ) и фазо-частотную (ФЧХ) характеристики.

Амплитудно-фазо-частотная характеристика звена может быть построена по уравнению (29) при изменении частоты от 0 до ∞ , так как

$$U(-\omega) = U(\omega) \text{ и } V(-\omega) = V(\omega).$$

Описанный подход позволяет получить полное математическое описание колебаний любых элементов механической системы с учетом взаимовлияния ее элементов и связать характеристики колебательных процессов с долговечностью и показателями качества работы системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудинов В.А. Динамика станков, М.: Машиностроение, 1967. – 358с.
2. Чигарев А.В. Введение в мехатронику: учебное пособие / А.В. Чигарев, К. Циммерманн, В.А. Чигарев. – Минск: БНТУ, 2013. – 388с.
3. Дружинский И.А. Механические цепи, Л.: Машиностроение, – 1977. – 237с.
4. Левитский Н.И. Колебания в механизмах: учебное пособие для вузов. – Москва: Наука, 1988. – 336с.

РАЗРАБОТКА МОДЕЛЕЙ МОБИЛЬНЫХ МИНИАТЮРНЫХ РОБОТОВ В ПАКЕТЕ ТРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Коробейник Д.Ю., Черноус Д.В., к.ф.-м.н. Чигарев В.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Система автоматизированного проектирования SolidWorks [1] создана для автоматизации работ промышленного предприятия на этапах конструкторской и технологической подготовки производства. Обеспечивает разработку изделий любой степени сложности и назначения. Работает в операционной среде Microsoft Windows. В SolidWorks используется принцип трехмерного твердотельного и поверхностного параметрического проектирования, что позволяет конструктору создавать объемные детали и компоновать сборки в виде трехмерных электронных моделей, по которым создаются двухмерные чертежи и спецификации. Трехмерное моделирование изделий дает массу преимуществ перед традиционным двумерным проектированием, например, исключение ошибок собираемости изделия еще на этапе проектирования. С помощью программного комплекса SolidWorks можно смоделировать готовое изделие, придать ему реалистичный вид после чего внести необходимые коррективы в дизайн. Трехмерная деталь SolidWorks получается в результате комбинации трехмерных примитивов. Почти все элементов основаны на плоском эскизе, по которым и создается необходимый трехмерный объект. Последовательное наращивание 3D объектов и позволяет в итоге получить желаемый результат.

Опциональные модули SolidWorks позволяют расширить базовые возможности дополнительными функциями по:

- созданию фотореалистичных изображений (PhotoWorks);
- распознаванию дерева построения и параметризации геометрии импортированной из других (CAD - Computer-aided Design) систем (FeatureWorks);
- созданию презентационных видеороликов изделия в среде SolidWorks (SolidWorks Animator);
- трехмерной обводке кабелей электрических систем и трубопроводов (SolidWorks Routing)
- созданию автономно просматриваемых чертежей и моделей, для обмена информацией с партнерами не имеющими SolidWorks (eDrawings).

Имеются возможности получения статистической информации, характерные только для трехмерного твердотельного моделирования, например, измерение расстояний и углов пространственной модели, определение массовых характеристик, определение количества компонентов в сборке.

Для удобства выбора элементов в SolidWorks существуют фильтры позволяющие выбирать заранее определенные элементы модели.

Функция Print3D одним щелчком мыши дает пользователям, подключенным к сети Internet, прямой доступ к самым эффективным технологиям быстрого прототипирования в промышленности, включая стереолитографию (SLA), нанесение термопластов (FDM - Fused Deposition Modeling), лазерное спекание порошков (SLS - Selective Laser Sintering) и др. Инструмент создания макросов позволяет создавать собственные функции. Сохранив определенную последовательность действий, по одной команде можно воспроизвести ее автоматически. SolidWorks является открытой система для написания пользовательских программ на Visual Basic и Visual C++. Стандартные функции

Windows обеспечивают работу с файлами, печать эскизов 3-D модели с экрана и чертежей SolidWorks осуществляется на любой плоттер или принтер.

Оформление чертежей в SolidWorks осуществляется в соответствии с требованиями единой системы конструкторской документации (ЕСКД). В основе чертежа лежит трехмерная модель детали. Деталь и чертеж имеют взаимосвязи, автоматически обновляющие чертеж при изменениях детали, это обеспечивает постоянное соответствие модели и чертежа. На чертеж можно перенести стандартные виды или любой другой вид с модели, в том числе изометрический. Степень автоматического наполнения чертежного вида с модели регулируется настройками. Так же в базовый пакет SolidWorks входит модуль COSMOSXpress, который используется для экспресс-расчета деформации и определения коэффициента запаса прочности детали по заданным нагрузкам. В результате COSMOSXpress позволяет определить концентраторы напряжения и добиться максимально эффективного использования материала за счет снижения веса элементов конструкции с избыточным запасом прочности.

Обмен данными с другими системами автоматизированного проектирования (САПР) в SolidWorks осуществляется с помощью большого количества трансляторов, как нейтральных: IGES (*.iges); ACIS (*.sat); STL (*.stl); STEP (*.step, .stp); VDAFS (*.vda); *.xmt_bin), так для прямого импорта данных из популярных САД-систем: AutoCad (*.dxf, *.dwg) и д.р.

Создание сборок в SolidWorks /1/ осуществляется по двум основным методам: "снизу-вверх" или "сверху вниз", а также их сочетанием. При проектировании "снизу-вверх" сначала создаются детали, затем они вставляются в сборку и сопрягаются согласно требованиям проекта. Метод проектирования "сверху вниз" отличается тем, что работа начинается в сборке. Проектирование "сверху вниз" в контексте сборки позволяет создавать ссылки на геометрию исходной модели, таким образом, что, если изменяется размер исходной модели, связанная с ней деталь, обновляется автоматически. Так же для повышения производительности, при работе с большими сборками, содержащими десятки тысяч деталей, в SolidWorks предусмотрен специальный режим, позволяющий сократить время загрузки файла и рационально распределять ресурсы компьютера за счет отображения сокращенной информации о компонентах сборки.

В настоящее время одной из актуальных тем, является конструирование и проектирование наземных роботов разведчиков, которые широко используются в военных целях. В данной работе, в программном пакете SolidWorks, была спроектирована и реализована модель наземного робота-разведчика. Модель состоит более чем из 115 деталей, в которые входят: электромоторы, антенна, обод колеса, шины с рисунком протектора, источника питания в виде батареи, рамы, видеокамера, двухслойное защитное стекло, платы дистанционного управления по Bluetooth HC-06, микроконтроллера Arduino, радиопередатчик, крепежные элементы. На рисунке 1 и рисунке 2 приведены результаты данной работы в прямоугольной изометрической проекции с защитной крышкой и вид сзади без крышки соответственно. Так же большую сложность в моделировании данной конструкции представляла модель микросхема Arduino Uno, которая так же состояла из большого количества деталей, представленной на рисунке 3.

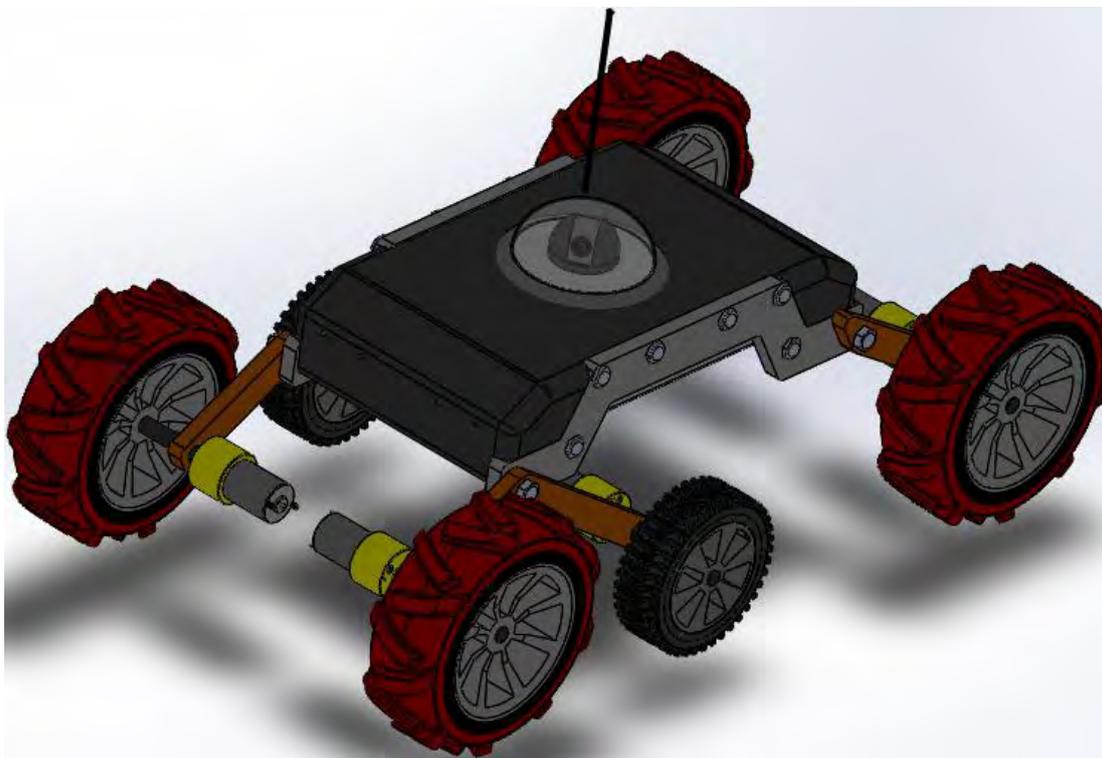


Рис. 1. 3-D модель робота-разведчика (изометрическая проекция)

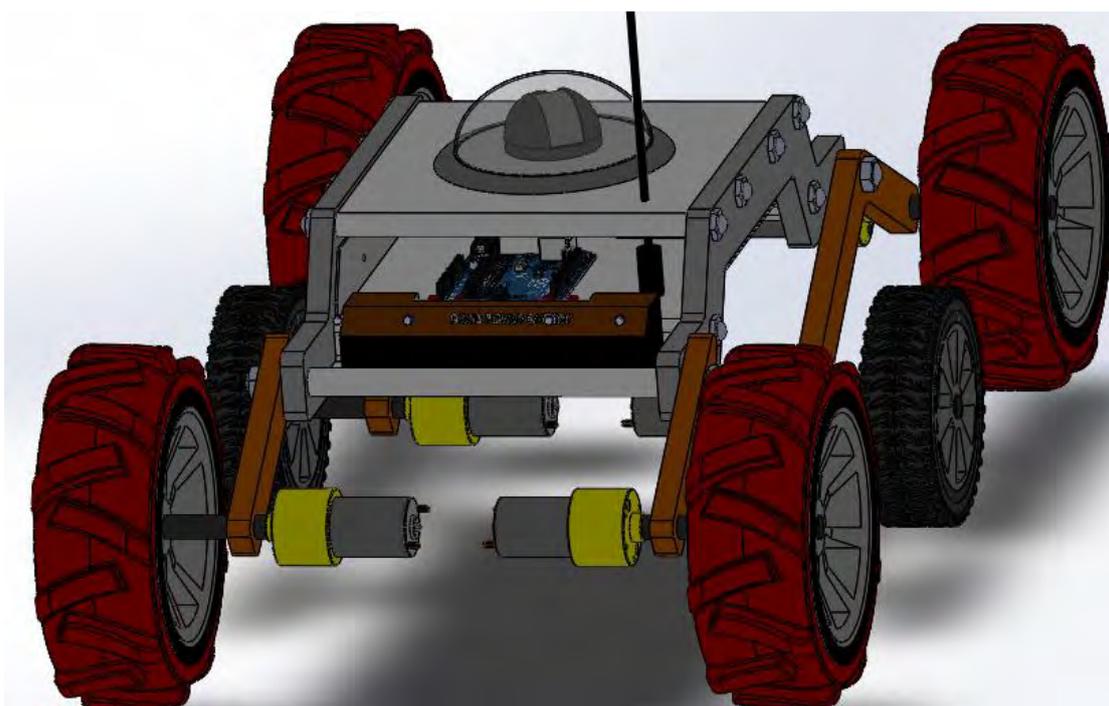


Рис. 2. 3-D модель робота-разведчика (вид сзади без защитной крышки)

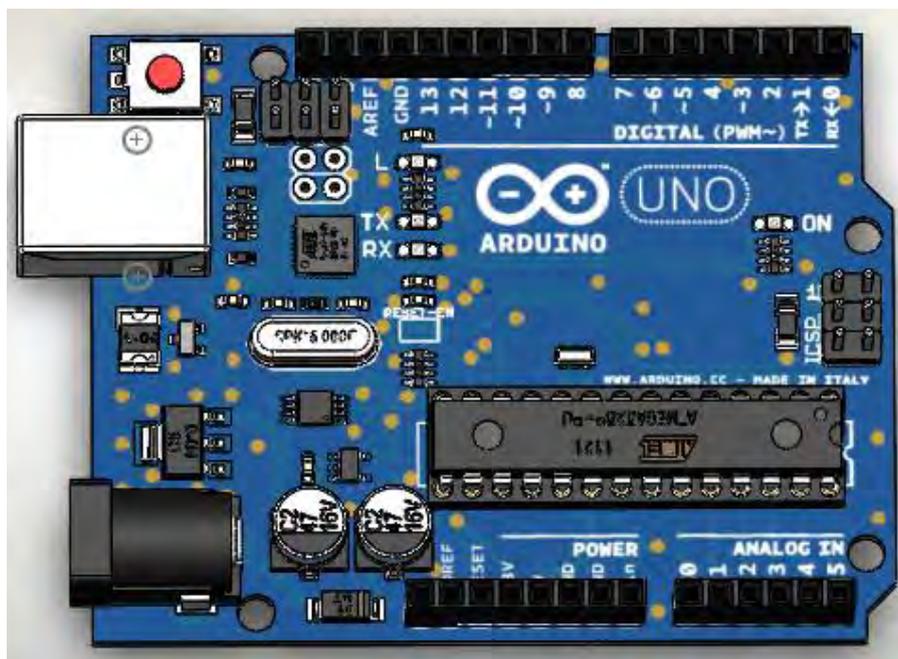


Рис. 3. 3-D модель микросхемы Arduino Uno

Так же была смоделирована модель мобильного робота Car Kit. Который включает в себя мехатронные системы и находит свое применение во многих отраслях, как военных так и исследовательских. В данной модели робота так же используется микросхема Arduino Uno и ИК-порт для дистанционного управления. В программном пакете SolidWorks, была спроектирована и реализована модель данного робота. Она состоит более чем из 70 деталей, в которые входят: несущие пластины, четыре электродвигателя, ультразвуковой датчик HC-SR04, сервопривод, микросхема Arduino Uno, батарея, крепёжные элементы. На рисунке 4 и рисунке 5 приведены результаты данной работы в прямоугольной изометрической проекции с защитной крышкой и вид сзади соответственно. Так же на рисунке 3 представлена модель ультразвукового датчика HC-SR04 с сервоприводом.

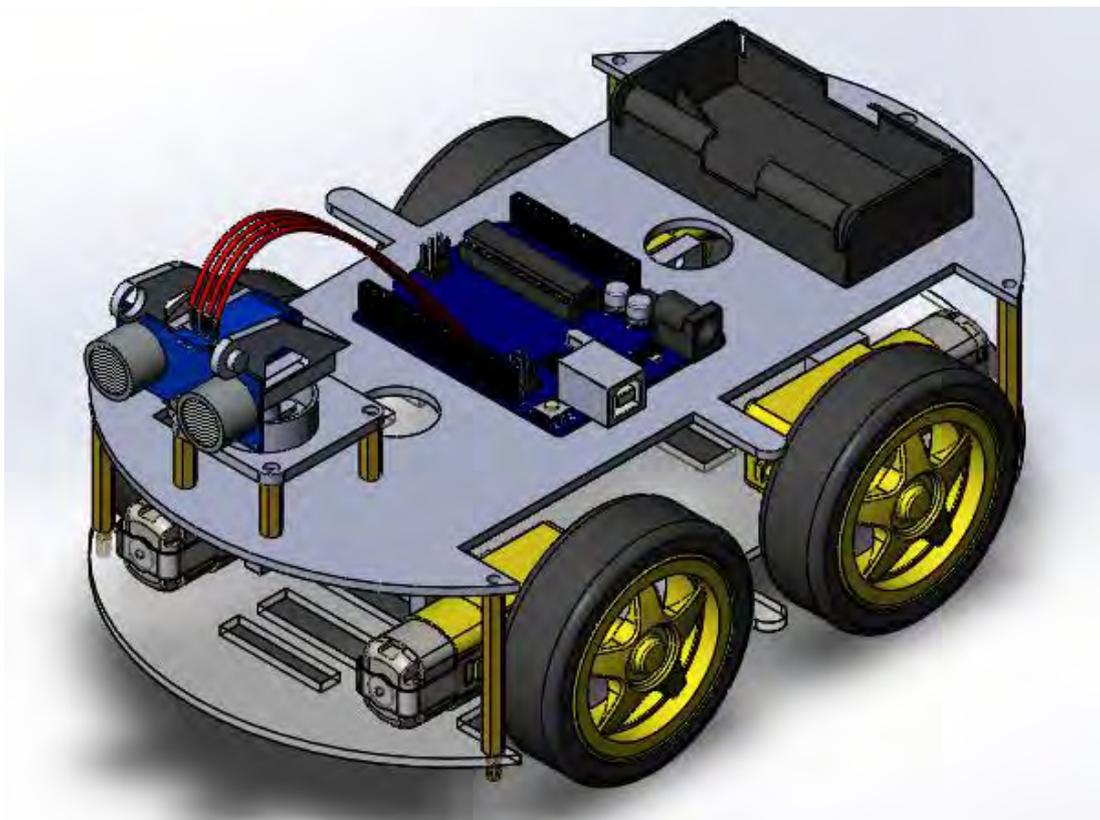


Рис. 4. 3-D модель мобильного робота Car Kit (изометрическая проекция)

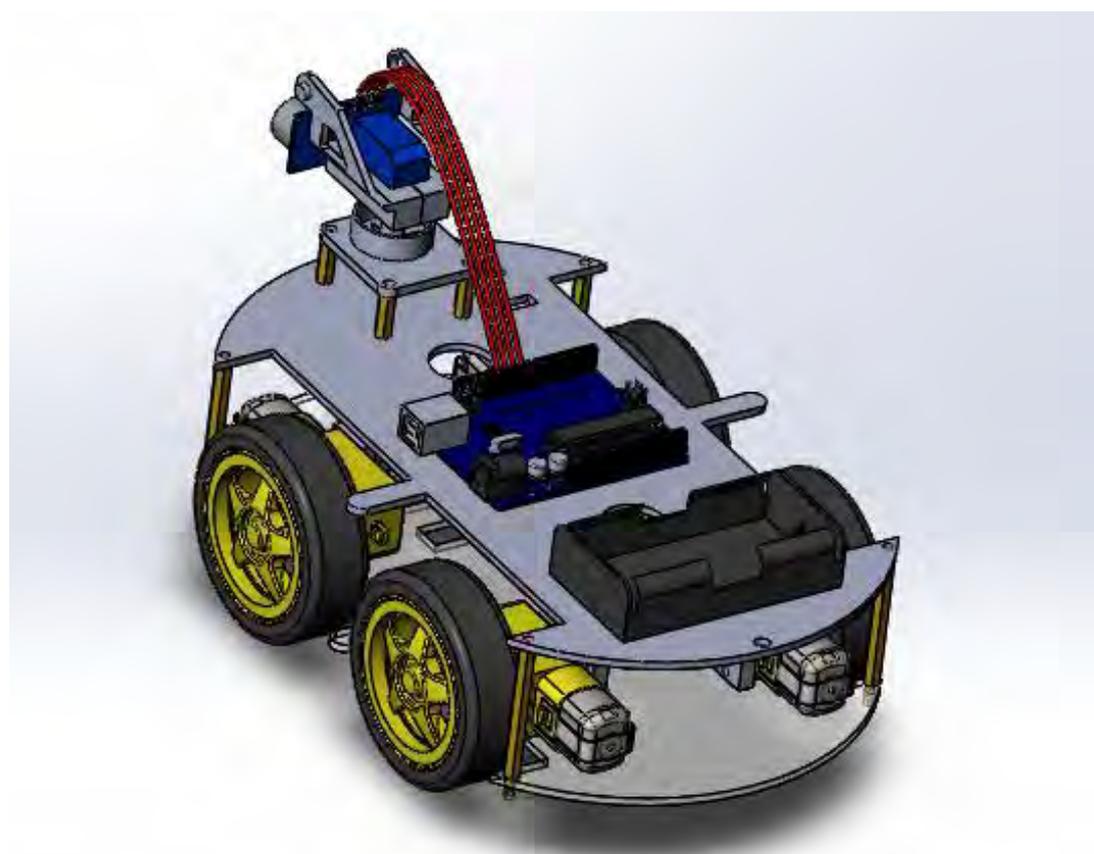


Рис. 5. 3-D модель мобильного робота Car Kit (вид сзади)

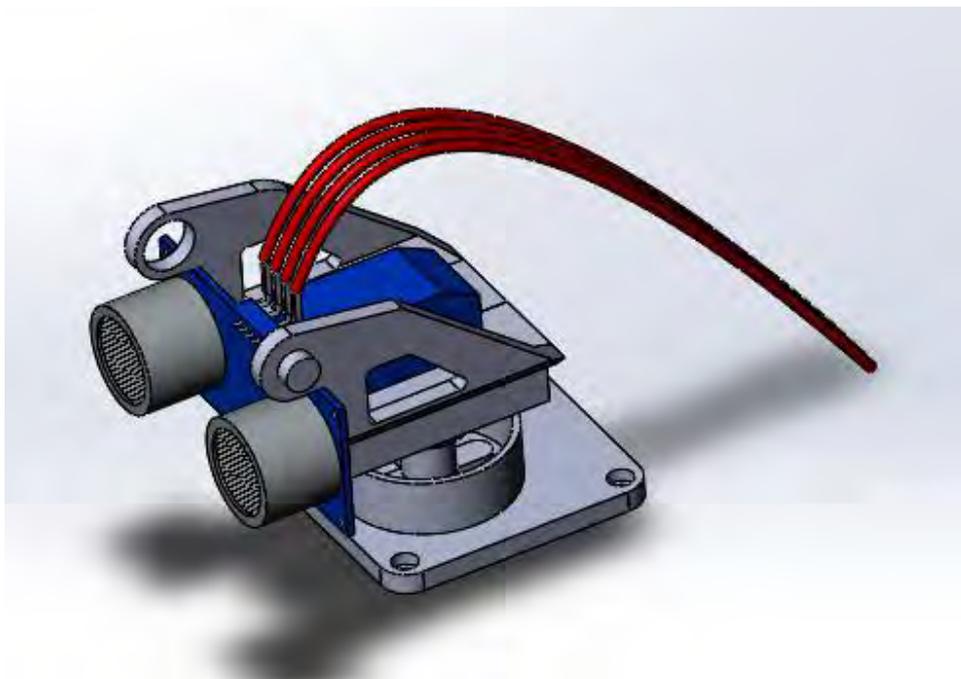


Рис. 6. 3-D модель датчика HC-SR04 с сервоприводом

Можно сделать вывод, что разработанные 3-D модели свидетельствуют о возможности моделирования различных сложных мехатронных и робототехнических систем в пакете SolidWorks.

ЛИТЕРАТУРА

1. Система автоматизированного проектирования SolidWorks [Электронный ресурс]: URL: <http://qoo.by/3msv>
2. Контроллер Arduino Uno [Электронный ресурс]: URL: <https://goo.gl/3eRDQL>
3. Bluetooth-модуль HC-06 [Электронный ресурс]: URL: <https://goo.gl/152src>
4. Ультразвуковой датчик HC-SR04 с сервоприводом [Электронный ресурс]: URL: <https://goo.gl/uXumPB>

ВЫЗНАЧЭННЕ І ДАСЛЕДАВАННЕ МЕХАНІЧНЫХ ХАРАКТАРЫСТЫК РУХУ МАБІЛЬНАЙ СІСТЭМЫ

маг. Дыдышка І.М., к.т.н. Русан С.І., к.т.н. Гаўрыленя А.К.

Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт, Баранавічы

Агульныя звесткі. Мабільныя механічныя сістэмы шырока выкарыстоўваюцца на дапаможных работах у сельскай гаспадарцы і прамысловасці. Такія сістэмы, як правіла, уключаюць цвёрдае цела, на якім замацаваны рабочы орган, сродкі перамяшчэння (цыліндры, колы, гусеніцы і г.д.) і рухавік, злучаны са сродкамі перамяшчэння. Мабільнай сістэмай (машынай) выконваецца работа па пераадоўванні карысных і шкодных супраціўленняў.

Абстрактная мадэль мабільнай механічнай сістэмы складаецца з цела A масы m_A , кола B масы m_B і электрарухавіка E , які прыводзіць сістэму ў рух. Ротар рухавіка жорстка звязаны з колам B і яго маса і момант інерцыі ўлічваюцца ў інерцыйных характарыстыках кола B . Цела A абавязана на гарызонтальную плоскасць S у пункце D (рысунак 1). Корпус электрарухавіка прымацаваны да цела A .

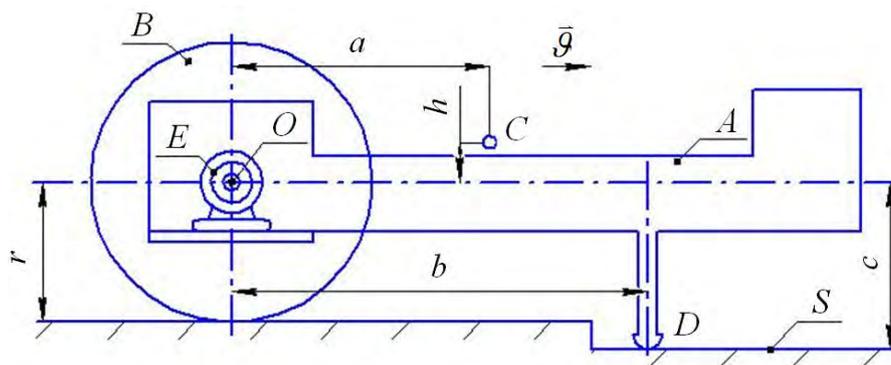


Рис. 1. Агульны выгляд мабільнай механічнай сістэмы

Шурпатаць паверхні S забяспечвае качэнне кола без слізгання. Цэнтры цяжару цела A і кола B абазначаны на рысунку літарамі C і O адпаведна. Напрамак руху паказаны стрэлкай. Прыняты абазначэнні: r — радыус кола; i_ξ — яго радыус інерцыі; f — каэфіцыент трэння ў пункце D ; $M = M(t)$ — момант, перадаваемы ад рухавіка E на кола B . Целы, утвараючыя механічную сістэму, разглядаюцца як абсалютна цвёрдыя. У пачатковы момант часу ($t=0$), калі механічная сістэма нерухома, уключаецца электрарухавік. Праз τ секунд пачынаецца рух сістэмы.

У працэсе работы машыны выдзяляецца некалькі характэрных яе станаў. Пасля ўключэння рухавіка ствараемы ім момант за прамежак часу τ узрастае ад нуля да стартавага (пачатковага) значэння M_τ . Пры $t = \tau$ пачынаецца рух мабільнай сістэмы ў пераходным рэжыме працягласцю $t = \tau_y$; пры гэтым яе скорасць узрастае ад нуля да некаторага ўсталяванага значэння \mathcal{Q}_y . Далей рух машыны працягваецца з пастаяннай скорасцю \mathcal{Q}_y . Падчас руху магчыма зніжэнне скорасці да велічыні $\mu \mathcal{Q}_y$, дзе $\mu < 1$ — каэфіцыент зніжэння ўсталяванай скорасці. Разглядаецца два рэжымы тармажэння: тармажэнне рухавіком і з дапамогай адмысловай тармазной сістэмы. Адпаведныя ім

тармазныя шляхі будзем абазначаць праз s_1, s_2 . Для мабільнай машыны дамінуючае значэнне мае яе манеўровасць, якая залежыць ад такіх характарыстык як $M_{\text{п}}, \mathcal{G}_y, \tau_y, s_1, s_2$.

Вызначэнне стартавага (пачатковага) моманту рухавіка.

Знаходзім момант $M(t)$ у прамежак часу $0 \leq t \leq \tau$.

Будзем лічыць, што механічная характарыстыка рухавіка E вызначаецца дыферэнцыяльным ураўненнем:

$$b_1 \frac{dM}{dt} + b_2 M = b_3 - \alpha \omega, \quad (1)$$

дзе b_1, b_2, b_3, α — пастаянныя каэфіцыенты; ω — вуглавая скорасць.

У інтэрвале часу $0 \leq t \leq \tau$ ва ўраўненні (1) $\omega = 0$. Рашэнне неаднароднага ўраўнення (1) з пастаяннымі каэфіцыентамі шукаем у выглядзе сумы рашэнняў аднароднага M_1 і неаднароднага M_2 ураўненняў: $M(t) = M_1 + M_2$. Карыстаючыся тыпавай метадыкай рашэння, прымаем: $M_1 = C_1 e^{kt}, M_2 = C_2$. Пастаянную k знаходзім з характарыстычнага ўраўнення: $k = -b_2 / b_1$. Агульнае рашэнне ўраўнення (1) прыводзіцца да выгляду:

$$M(t) = C_1 e^{-(b_2/b_1)t} + b_3 / b_2. \quad (2)$$

Пастаянную C_1 вызначаем з пачатковай умовы: пры $t = 0, M(t) = 0$. Атрымліваем: $C_1 = -b_3 / b_2$.

Канчаткова:

$$M(t) = b_3 \left(1 - e^{-\left(\frac{b_2}{b_1}\right)t} \right) / b_2. \quad (3)$$

Патрэбны стартавы момант $M(\tau)$ не можа быць атрыманы з формулы (3), бо ў ёй не вядома значэнне $t = \tau$. Каб працягнуць рашэнне, выкарыстаем тэарэму аб змяненні кінетычнай энергіі ў дыферэнцыяльнай форме (гл. падручнік і дапаможнікі [1-4]) $dT = \sum dA_i$. Прадыферэнцыруем гэту роўнасць па часе. Атрымаем:

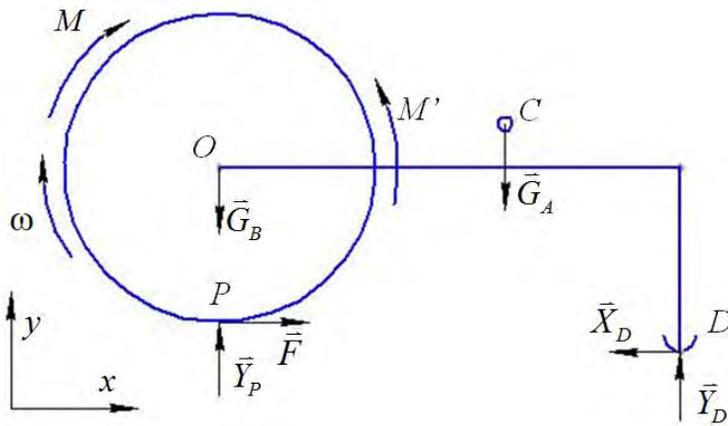
$$dT / dt = \sum N_i, \quad (4)$$

дзе T — кінетычная энергія сістэмы; $N_i = dA_i / dt$ — магутнасць сілы F_i , што дзейнічае на яе; dA_i — элементарная работа сілы.

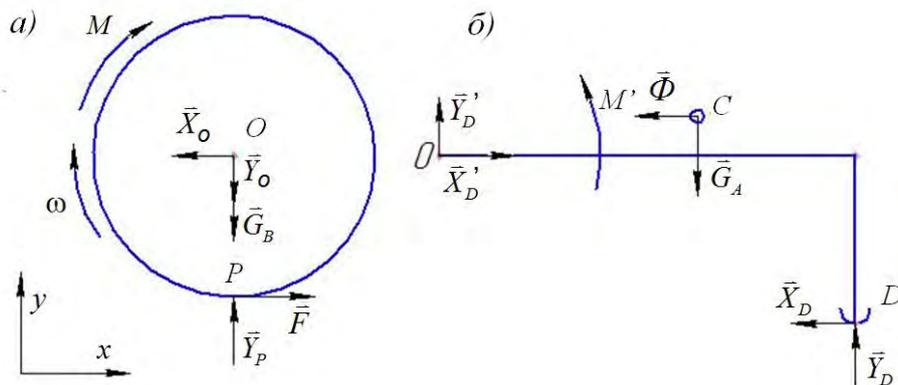
Разліковая схема механічнай сістэмы прадстаўлена на рысунках 2, 3, дзе выкарыстаны агульнапрынятыя абазначэнні сіл цяжару, рэакцый сувязей і скорасцей (гл. [1-4]). Будзем улічваць, што $\mathcal{G}_O = \mathcal{G}_C = \mathcal{G}_A = \mathcal{G} = \dot{x}$, і пры качэнні без слізгання $\omega = \dot{x} / r$. Карыстаючыся мадэллю, што на рысунку 2, і прымаючы да ўвагі залежнасць $X_D = fY_D$, знойдзем выражэнні: $T = m_{\text{пр}} \dot{x}^2 / 2, \sum N_i = (M / r - fY_D) \dot{x}$. Тады паводле роўнасці (4) атрымаем:

$$m_{\text{пр}} \ddot{x} = M / r - fY_D. \quad (5)$$

Тут $m_{\text{пр}} = m_A + \left(1 + \frac{i_{\xi}^2}{r^2} \right) m_B$ — прыведзеная маса сістэмы.



Рыс. 2. Разліковая схема ўсёй мабільнай сістэмы



Рыс. 3. Разліковыя схемы левай (а) і правай (б) частак

Каб выключыць з роўнасці (5) невядомую рэакцыю Y_D , складзем ураўненне метаду кінетастантыкі асобна для цела A (рысунак, 3б): $\sum M_O(\vec{F}_i) = M' - G_A a - f Y_D c + Y_D b + \Phi h = 0$, дзе $\Phi = m_A a_C = m_A \ddot{x}$ — сіла інерцыі. Адсюль $Y_D = (G_A a - M' - m_A h \ddot{x}) / d$. Тут $d = b - fc$; $M' = M$. Падставляем Y_D у роўнасць (5) і ўводім абазначэнні: $a_1 = f + d/r$; $a_2 = f a m_A g$; $a_3 = m_{np} d - f h m_A$. Атрымліваем:

$$a_3 \ddot{x} = a_1 M - a_2. \quad (6)$$

Рух сістэмы пачынаецца пры дадатным паскарэнні, г. зн. Пры $\ddot{x} > 0$ ці $a_3 \ddot{x} > 0$. Але тады ва ўраўненні (6) і правая частка $(a_1 M - a_2) > 0$. Адсюль $M > a_2 / a_1$; а гэта азначае, што мінімальны пачатковы (стартавы) момант

$$M_{np} = a_2 / a_1, \quad (7)$$

Ведаючы $M_{np} = M(\tau)$, з формулы (3) знаходзім час τ пачатку руху сістэмы:

$$\tau = \frac{b_1}{b_2} \ln \left(\frac{b_3}{b_3 - b_2 M_{np}} \right). \quad (8)$$

Вызначэнне руху сістэмы ў пераходным рэжыме.

Каб знайсці скорасць $\vartheta = \dot{x}$ паступальнага руху сістэмы, пераўтворым сумесна ўраўненні (1) і (6). Вынік запішам ў выглядзе дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку з пастаяннымі каэфіцыентамі:

$$\ddot{\vartheta} + 2n\dot{\vartheta} + k^2\vartheta = D, \quad (9)$$

дзе $n = b_2 / 2b_1$; $k = \sqrt{\alpha a_1 / r a_3 b_1}$; $D = (a_1 b_3 - a_2 b_2) / a_3 b_1$.

Паводле тыпавой metodyкі рашэнне ўраўнення (9) неабходна шукаць у выглядзе сумы $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$. Для вызначэння \mathcal{G}_1 складаецца характарыстычнае ўраўненне $z^2 + 2nz + k^2 = 0$. Пры $n > k$ яго карані сапраўдныя: $z_{1,2} = -n \pm k_1$, дзе $k_1 = \sqrt{n^2 - k^2}$. А рашэнне \mathcal{G}_2 пры $D = \text{const}$ належыць шукаць у выглядзе пастаяннай. У выніку атрымаем:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(t) = C_1 e^{-(n-k_1)t} + C_2 e^{-(n+k_1)t} + D/k^2, \quad (10)$$

Тут C_1, C_2 – пастаянныя інтэгравання, што вызначаюцца з пачатковых умоў: пры $t = \tau$, $\mathcal{G}(\tau) = 0$, $\dot{\mathcal{G}}(\tau) = 0$. Пасля вызначэння пастаянных скорасць сістэмы пры $t \geq \tau$ знаходзіцца па формуле:

$$\mathcal{G}(t) = (D / 2k_1 k^2) \left[-(n+k_1) e^{-(n-k_1)(t-\tau)} + (n-k_1) e^{-(n+k_1)(t-\tau)} + 2k_1 \right], \quad (11)$$

Даследуем скорасць паступальнага руху сістэмы. Для гэтай мэты выкарыстаем формулу (11), у якой $(t - \tau)$ — час руху механічнай сістэмы.

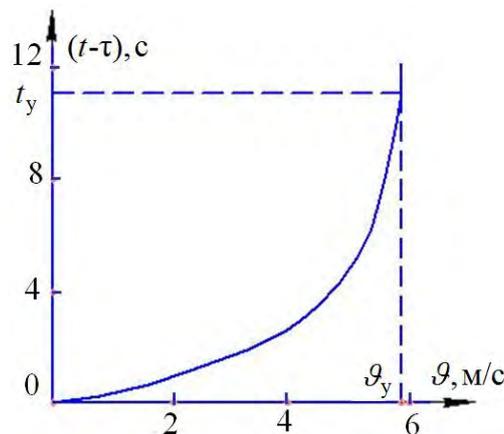
Прыклад. Дадзена: $m_A = 40 \text{ кг}$; $m_B = 90 \text{ кг}$; $r = 0,45 \text{ м}$; $i_\xi = 0,4 \text{ м}$; $f = 0,4 \text{ м}$; $a = 1,6 \text{ м}$; $h = 0,1 \text{ м}$; $b = 1,7 \text{ м}$; $c = 0,6 \text{ м}$; $\alpha = 3,5$; $b_1 = 2,28 \cdot 10^{-2}$; $b_2 = 0,20$; $b_3 = 60$.

Рашэнне. Аналіз формулы (11) паказвае, што праз пэўны час t_y першыя два складаемыя набліжаюцца да нуля і скорасць сістэмы вызначаецца толькі трэцім складаемым – усталяванай скорасцю $\mathcal{G}_y = D/k^2$.

Па атрыманых вышэй формулах знаходзім: $m_{\text{тр}} = 201,11 \text{ кг}$; $d = 1,46 \text{ м}$; $a_1 = 3,64$; $a_2 = 251,136 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $a_3 = 292,02 \text{ кг} \cdot \text{м}$; $\tau = 0,0296 \text{ с}$; $n = 5,482 \text{ с}^{-1}$; $k = 2,062 \text{ с}^{-1}$; $D = 25,258 \text{ м}^3/\text{с}^3$; $\mathcal{G}_y = 5,940 \text{ м/с}$; $k_1 = 5,079 \text{ с}^{-1}$; $n+k_1 = 10,561 \text{ с}^{-1}$; $n-k_1 = 0,403 \text{ с}^{-1}$; $2k_1 = 10,158 \text{ с}^{-1}$; паводле формулы (11)

$$\mathcal{G}(t) = 0,5848 \left[-10,561 e^{-0,403(t-0,0296)} + 0,403 e^{-10,561(t-0,0296)} + 10,158 \right] \quad (12)$$

На рысунку 2 паказаны графік змянення скорасці паступальнага руху сістэмы ў пераходным рэжыме.



Рыс. 4. Графік скорасці ў пераходным рэжыме руху

Час руху сістэмы ў пераходным рэжыме t_y можна набліжана вызначыць з першага складаемага формулы (11), прыняўшы яго дастаткова малым у выглядзе:

$(D/2k_1k^2)(n+k_1)e^{-(n-k_1)t_y} = \mu \vartheta_y$. Для нашого прикладу при $\mu = 0,01$ атрымаем $t_y = 11,524$ с.

Даследаванне дынамічных і кінематычных характарыстык руху.

Для вывучэння залежнасцей дынамічных і кінематычных характарыстык мабільнай сістэмы ад суадносін мас m_A і m_B уводзім абзначэнні: $m_A/m_B = \eta$, $m_A + m_B = m$; тады атрымаем (a_1 не змяняецца): $a_2 = famg\eta/(1+\eta)$;

$$a_3 = \left[(d - fh)\eta/(1+\eta) + \left(1 + \frac{i_\xi^2}{r^2} \right) d/(1+\eta) \right] m; M_{\pi} = c_1 [1 - 1/(1+\eta)], \text{ дзе } c_1 = famg/a_1.$$

З апошняй формулы відаць, што пры $\eta \rightarrow \infty M_{\pi} \rightarrow c_1$.

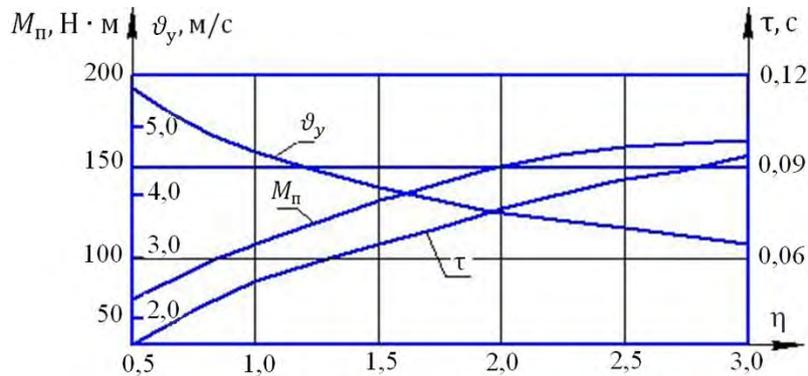
Каб вывучыць уплыў трэння слізгання на тыя ж характарыстыкі, велічыні a_1, a_2, a_3, M_{π} мэтазгодна запісаць у выглядзе: $a_1 = b/r + (1 - c/r)f$;

$$a_2 = a[\eta/(1+\eta)]fmg; \quad a_3 = \left(1 + \eta + \frac{i_\xi^2}{r^2} \right) bm/(1+\eta) - \left[\left(1 + \eta + \frac{i_\xi^2}{r^2} \right) c + h\eta \right] mf/(1+\eta);$$

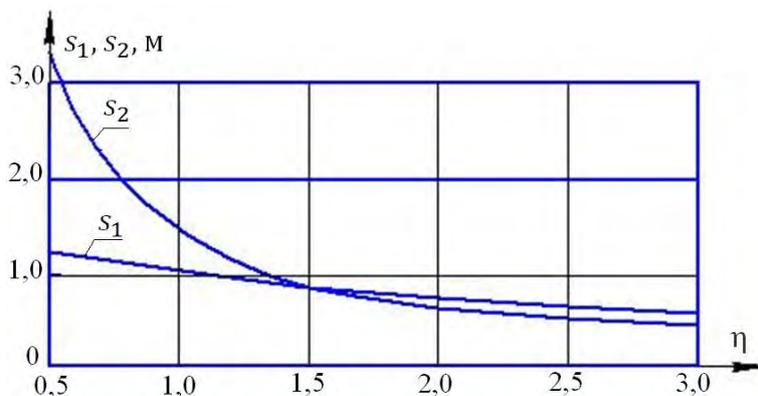
$$M_{\pi} = a[\eta/(1+\eta)]fmg/a_1.$$

Канкрэтызуем параметры сістэмы: $m_A = 40$ кг; $m_B = 90$ кг; $r = 0,45$ м; $i_\xi = 0,4$ м; $f = 0,4$ м; $a = 1,6$ м; $h = 0,1$ м; $b = 1,7$ м; $c = 0,6$ м; $\alpha = 3,5$; $b_1 = 2,28 \cdot 10^{-2}$; $b_2 = 0,20$; $b_3 = 60$; $\mu = 0,9$.

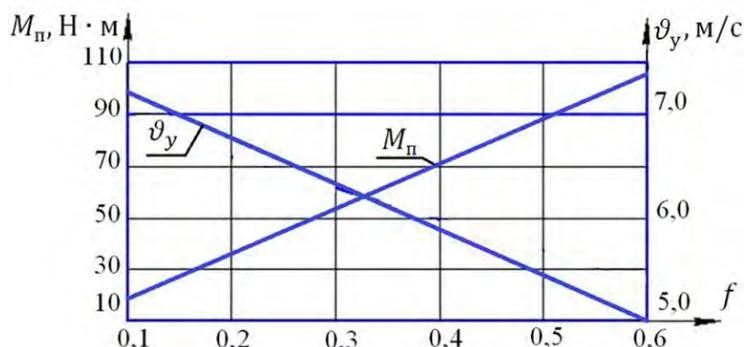
Вынікі разлікаў прадстаўлены ў графічным выглядзе на рысунках 5-7.



Рыс. 5. Залежнасці пачатковага моманту M_{π} , усталюванай скорасці v_y і часу τ пачатку руху ад суадносін мас η



Рыс. 6. Залежнасці тармажных шляхаў S_1, S_2 ад суадносін мас η



Рыс. 7. Залежнасць велічынь M_π і v_y ад каэфіцыента трэння f

Каб сумясціць вынікі разлікаў з інтуітыўным уяўленнем даследчыка, заўважым, што з павелічэннем суадносін η узрастае маса станіны m_A і яе ціск на апору D , а, значыць, і сіла трэння F_T . Тады натуральным падаецца (рысунак 5) паступовае ўзрастанне неабходнага стартавага моманту M_π і адрэзку часу τ_π , неабходнага для пачатку руху сістэмы. Паколькі пры любых значэннях η маса m_A застаецца меншай велічыны m , то і значэнні M_π , τ_π узрастаюць не бязмежна, а набліжаюцца да некаторых гранічных значэнняў M_π^r , τ_π^r . Адначасова зніжаецца ўсталяванае значэнне скорасці v_y , якое таксама набліжаецца да гранічнага значэння v_y^r .

Велічыні гранічных параметраў знаходзім па формулах:

$$M_\pi^r = c_1 = \frac{f a m g}{a_1}; v_y^r = \frac{r(b_3 - b_2 M_\pi^r)}{a}; \tau_\pi^r = \frac{b_1}{b_2} \ln \left(\frac{b_3}{b_3 - b_2 M_\pi^r} \right).$$

Прыведзеным вышэй дадзеным адпавядаюць наступныя лікавыя значэнні:
 $M_\pi^r = 223,95 \text{ Н} \cdot \text{м}; v_y^r = 1,95 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \tau_\pi^r = 0,16 \text{ с}.$

Паводле графікаў, што на рысунку 6, рэжымы тармажэння значна ўплываюць на тармажныя шляхі s_1, s_2 толькі пры $\eta \leq 1,2$. Пры большых значэннях η розніца ў велічынях s_1, s_2 не істотная. З рысунка 7 відаць, што залежнасці велічынь M_π і v_y ад каэфіцыента трэння слізгання носяць амаль лінейны характар.

ЛІТАРАТУРА

1. Чигарев, А. В. Курс теоретической механики: учеб. пособие / А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев. — Минск : Новое знание; М. : ЦУПЛ, 2010. — 397 с.
2. Хвясцько, Г. М. Курс тэарэтычнай механікі: вуч. дапаможнік / Г. М. Хвясцько. — Минск : БДТУ, 2000. — 354 с.
3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики. Ч 2. Динамика : учебник для высших техн. уч. заведений / А. А. Яблонский. — М. : Высш. школа, 1971. — 488 с.
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учебное пособие / коллектив авторов ; под общ. ред. А. А. Яблонского. — 18-е изд., стер. — М. : КНОРУС, 2011. — 392 с.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЛЕГКИМ СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Захарчук Ю.В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Деформированию и колебаниям слоистых, в том числе трехслойных элементов конструкций, посвящены многочисленные исследования. Постановки и методы решения соответствующих краевых и начально-краевых задач приведены в монографиях [1–9]. Исследования деформирования трехслойных стержней и оболочек при квазистатических нагрузках содержатся в работах [10–15].

Следует отметить, что деформирование трехслойных круговых пластин исследовалось только в случае несжимаемого заполнителя. Это вызвано определенными математическими трудностями при постановке и решении соответствующих краевых задач. Однако учет сжимаемости заполнителя в большей степени адекватно описывает деформирование трехслойных элементов конструкций.

1. Постановка краевой задачи. Рассмотрим упругую круговую трехслойную пластину со сжимаемым-растягиваемым заполнителем (рисунок 1). Постановку задачи и ее решение проведем в цилиндрической системе координат r, φ, z . Систему координат свяжем со срединной плоскостью заполнителя. В тонких несущих слоях с толщинами $h_1 \neq h_2$ справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. В заполнителе, воспринимающем нагрузку в тангенциальном и вертикальном направлениях, нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Обжатие по толщине принимается линейным.

На внешний слой стержня действует симметричная распределенная нагрузка с вертикальной $q = q(r)$ и горизонтальной $p = p(r)$ составляющими. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя ($\psi = 0, v = 0$ при $r = r_0$). Через $w(r)$ и $u(r)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, $v(r)$ – функция, характеризующая сжимаемость заполнителя. Обозначим через h_k толщину k -го слоя ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя), при этом $h_3 = 2c$.

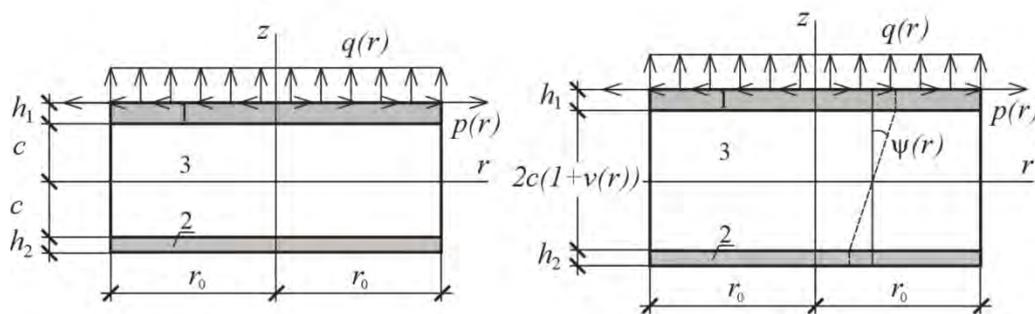


Рис.1. Схема деформирования круговой трехслойной пластины

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w(r), u(r), \psi(r)$ и $v(r)$ следующими соотношениями:

- в несущих слоях 1, 2

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}c), \quad w^{(1)} = w(r) + v(r)c, \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - z(w_{,r} - v_{,r}c), \quad w^{(2)} = w(r) - v(r)c, \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c),$$

▪ в заполнителе 3

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z(w_{,r} + v_{,r}z), \quad w^{(3)}(r, z) = w(r) + v(r)z, \quad (-c \leq z \leq c), \quad (1)$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной поверхности заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях получим из перемещений (1), используя соотношения Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}c), \quad \varepsilon_\phi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}c)), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0, \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\psi_{,r} - z(w_{,rr} - v_{,rr}c), \quad \varepsilon_\phi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - z(w_{,r} - v_{,r}c)), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0, \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}z), \quad \varepsilon_\phi^{(3)} = \frac{1}{r}(u + z\psi - z(w_{,r} + v_{,r}z)), \\ \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}(\psi - v_{,r}z), \quad \varepsilon_z^{(3)} = v, \quad (-c \leq z \leq c). \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, через введенные четыре искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$ выражены перемещения (1) и деформации (2) в круговой пластине со сжимаемым заполнителем.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \phi$), введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине:

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ S_\alpha^{(3)} &= \int_{-c}^c \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz, \quad H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \quad D_\alpha = S_\alpha^{(3)} + c(M_\alpha^{(1)} - M_\alpha^{(2)}), \end{aligned} \quad (3)$$

где интегралы берутся по толщине k -го слоя.

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем получим, используя вариационный принцип Лагранжа:

$$\delta A = \delta W,$$

где $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ – суммарная вариация работы внешних сил δA_1 и контурных усилий δA_2 ; δW – вариация работы внутренних сил упругости.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки будет:

$$\delta A_1 = \iint_S (q\delta w + p\delta u) r dr d\phi. \quad (4)$$

Вариация работы контурных усилий $T_r^0, H_r^0, M_r^0, Q^0, D_r^0, M_{rz}^0$:

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w + D_r^0 \delta v_{,r} + M_{rz}^0 \delta v) d\phi. \quad (5)$$

Вариация работы сил упругости не учитывает в заполнителе работу нормальных $\sigma_z^{(3)}$ и касательных $\sigma_{rz}^{(3)}$ напряжений:

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\phi^{(k)} \delta \varepsilon_\phi^{(k)}) dz \right] r dr d\phi \quad (6)$$

где двойной интеграл распространен по срединной поверхности заполнителя S .

Вариации перемещений в слоях следуют из (1), деформаций – из (2). После необходимых преобразований имеем:

$$\delta W = \iint_S \left[T_r \delta u_{,r} + H_r \delta \psi_{,r} - M_r \delta w_{,rr} - D_r \delta v_{,rr} + \frac{1}{r} (T_\phi \delta u + H_\phi \delta \psi - M_\phi \delta w_{,r} - D_\phi \delta v_{,r}) \right] r dr d\phi \quad (7)$$

где внутренние усилия $T_\alpha, M_\alpha, H_\alpha, D_\alpha$ ($\alpha = r, \phi$) введены соотношениями (3).

Вариацию потенциальной энергии проинтегрируем в полярной системе координат. Подынтегральное выражение в (7) можно разбить на два интеграла, вынося в первом из них операцию дифференцирования за общую скобку, а во втором – группируя слагаемые при одинаковых виртуальных перемещениях:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_0^{2\pi} \left\{ rT_r \delta u + rH_r \delta \psi - rM_r \delta w_{,r} + [(rM_r)_{,r} - M_\phi] \delta w - rD_r \delta v_{,r} + \right. \\ & + [(rD_r)_{,r} - D_\phi] \delta v \left. \right\} d\phi - \int \int \left\{ [(rT_r)_{,r} - T_\phi] \delta u + [(rH_r)_{,r} - H_\phi] \delta \psi + \right. \\ & \left. + [(rM_r)_{,rr} - M_{\phi,r}] \delta w + [(rD_r)_{,rr} - D_{\phi,r}] \delta v \right\} d\phi dr. \end{aligned}$$

Приравняем полученное выражение к работе внешних и контурных усилий (4), (5) и потребуем выполнение этого равенства при любых значениях варьируемых перемещений. Это возможно при равенстве нулю коэффициентов при независимых вариациях искомых функций. Отсюда следует система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круглой трехслойной пластинки со сжимаемым наполнителем:

$$\begin{cases} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\phi) = -p, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\phi) = 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\phi,r}) = -q, \\ D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\phi,r}) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

На контуре пластины $r = r_0$ должны выполняться силовые условия:

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \\ M_r &= M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\phi) = Q^0, \\ D_r &= D_r^0, \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_\phi) = M_{rz}^0. \end{aligned}$$

Выразим внутренние обобщенные усилия (3) через перемещения. Для этого напряжения в слоях рассматриваемой пластины представим через деформации с помощью закона Гука в девиаторно-шаровой форме:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k)} + \sigma^{(k)} \delta_{ij} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= 2G_k \vartheta_{ij}^{(k)}, \quad \vartheta_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \delta_{ij}, \quad \sigma^{(k)} = K_k \theta^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad \varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\phi^{(k)} + \varepsilon_z^{(k)}), \\ & (i, j = r, \phi, z; k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Шаровая и девиаторная части тензора деформаций в (9) будут

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(k)} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\phi^{(k)}), \quad \vartheta_r^{(k)} = \varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\phi^{(k)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\phi^{(k)}, \\ \vartheta_\phi^{(k)} &= \frac{2}{3}\varepsilon_\phi^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(k)}, \quad (k = 1, 2), \quad \varepsilon^{(3)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\phi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \quad \vartheta_r^{(3)} = \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\phi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}, \\ \vartheta_\phi^{(3)} &= \frac{2}{3}\varepsilon_\phi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}, \quad \vartheta_z^{(3)} = \frac{2}{3}\varepsilon_z^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\phi^{(3)}, \quad \vartheta_{rz}^{(3)} = \varepsilon_{rz}^{(3)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Компоненты тензора напряжений связаны с деформациями (10) законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(k)} &= 2G_k \vartheta_r^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} \delta_{ij} = (K_k + \frac{4}{3}G_k) \varepsilon_r^{(k)} + (K_k - \frac{2}{3}G_k) \varepsilon_\phi^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_r^{(k)} + K_k^- \varepsilon_\phi^{(k)}, \quad (k = 1, 2), \\ \sigma_r^{(3)} &= K_3^+ \varepsilon_r^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_\phi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \quad \sigma_\phi^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_\phi^{(k)} + K_k^- \varepsilon_r^{(k)}, \quad (k = 1, 2), \\ \sigma_\phi^{(3)} &= K_3^+ \varepsilon_\phi^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \quad \sigma_z^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_z^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\phi^{(3)}), \quad \sigma_{rz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где введены обозначения

$$K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k.$$

Используя соотношения (9), (10), (11), выразим обобщенные внутренние усилия и моменты через искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$. Подставив их в систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях (8), получим в итоге систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую перемещения в круглой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем:

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_{,r} - a_5v_{,r}) + 2cK_3^-v_{,r} &= -p, \\ L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w_{,r} - a_7v_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r} - a_8v_{,r}) &= -q, \\ L_3(a_5u + a_7\psi - a_8w_{,r} - a_9v_{,r}) + \frac{2}{3}c^3K_3^- \left(v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2 (оператор Бесселя), L_3 определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \\ a_3 &= h_1 \left(c + \frac{1}{2}h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2}h_2 \right) K_2^+, \quad a_4 = c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}c K_3^+ \right), \\ a_5 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2}h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2}h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+ \right], \\ a_6 &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+, \\ a_7 &= c^2 \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2}h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2}h_2 \right) K_2^+ \right], \\ a_8 &= c \left[h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2 \right) K_1^+ - h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2 \right) K_2^+ \right], \\ a_9 &= c^2 \left(h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{5}c^3 K_3^+ \right), \\ L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Краевая задача замыкается добавлением к (12) кинематических граничных условий. При жесткой заделке контура пластины должны выполняться условия

$$u = \psi = w = v = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = r_0.$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$u = \psi = w = v = M_r = 0 \quad \text{при } r = r_0.$$

В случае свободного контура

$$\psi = v = 0, \quad T_r = M_r = M_{r,r} = 0. \quad (13)$$

Следует отметить, что если в системе (12) положить $v(r) \equiv 0$, то первые три уравнения в ней совпадут с известной системой уравнений равновесия для круговой пластины с несжимаемым наполнителем [4].

2. Решение краевой задачи.

Проведя необходимые преобразования в системе (12), приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{a_2} (a_4\psi - a_5w_{,r} - a_7v_{,r}) + C_1 \frac{r}{2} + C_2 \frac{1}{r}, \\ \psi &= \frac{1}{(a_2a_5 - a_3a_4)} \left[(a_2a_6 - a_3a_5)w_{,r} + (a_2a_8 - a_3a_7)v_{,r} \right] - \\ &\quad - \frac{a_2}{(a_2a_5 - a_3a_4)} L_3^{-1}(q) + C_3 \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) + C_4 \frac{r}{2} + C_5 \frac{1}{r}, \end{aligned}$$

$$w = -\frac{d_6}{d_5}v - \frac{d_7}{d_5} \int_0^r L_3^{-1} \left(v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) dr + \frac{d_8}{d_5} \int_0^r L_3^{-1}(q) dr + \frac{C_6}{4} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_7}{4} r^2 + C_8 \ln r + C_9, \quad \Delta \Delta v + \beta^2 \Delta v = q_1. \quad (14)$$

Здесь L_2^{-1} , L_3^{-1} – линейные интегральные операторы, обратные дифференциальным операторам (12)

$$L_2^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int f dr dr, \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f dr dr dr;$$

оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right), \quad \Delta \Delta v \equiv L_3 \left(\frac{dv}{dr} \right);$$

коэффициенты

$$\begin{aligned} d_1 &= (a_2 a_6 - a_3 a_5)(a_2^2 - a_1 a_4) - (a_2 a_3 - a_1 a_5)(a_2 a_5 - a_3 a_4), \\ d_2 &= (a_2 a_8 - a_3 a_7)(a_2^2 - a_1 a_4) - (a_2 a_5 - a_1 a_7)(a_2 a_5 - a_3 a_4), \quad d_3 = 2ca_2(a_2 a_5 - a_3 a_4)K_3^-, \\ d_4 &= a_2(a_2^2 - a_1 a_4), \quad d_5 = (a_2 a_6 - a_3 a_5)(a_2 a_7 - a_4 a_5) - (a_2 a_8 - a_5^2)(a_2 a_5 - a_3 a_4), \\ d_6 &= (a_2 a_8 - a_3 a_7)(a_2 a_7 - a_4 a_5) - (a_2 a_9 - a_5 a_7)(a_2 a_5 - a_3 a_4), \quad d_7 = \frac{2}{3}c^3 a_2(a_2 a_5 - a_3 a_4)K_3^-, \\ d_8 &= a_2(a_2 a_7 - a_4 a_5), \quad \beta^2 = \frac{d_3 d_5 - d_1 d_7}{d_2 d_5 - d_1 d_6}; \end{aligned}$$

приведенная нагрузка

$$q_1 = \frac{d_4 d_5 - d_1 d_8}{d_2 d_5 - d_1 d_6} q. \quad (15)$$

Таким образом, функция сжимаемости должна удовлетворять неоднородному дифференциальному уравнению четвертого порядка (14)₄. Рассмотрим это уравнение. Вынося оператор Лапласа за скобку, получим

$$\Delta(\Delta v + \beta^2 v) = q_1,$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) (\Delta v + \beta^2 v) = q_1.$$

После двукратного интегрирования имеем

$$\Delta v + \beta^2 v = \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r r q_1 dr dr + C_{10} \ln r + C_{11}. \quad (16)$$

Используя оператор Лапласа (15) уравнение (16) сводим к неоднородному уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + \beta^2 v = q_2. \quad (17)$$

где функция

$$q_2(r) = \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r r q_1 dr dr + C_{10} \ln r + C_{11}.$$

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (17):

$$\Delta v_0 + \beta^2 v_0 = 0.$$

Его решение v_0 будет

$$v_0 = C_{12} J_0(\beta r) + C_{13} Y_0(\beta r). \quad (18)$$

где $J_0(\beta r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $Y_0(\beta r)$ – функция Бесселя второго рода нулевого порядка (функция Неймана).

Частное решение v_r уравнения (17) можно получить, используя два независимых решения однородного уравнения (18):

$$v_r = Y_0(\beta r) \int \frac{J_0(\beta r) q_2(r)}{W} dr - J_0(\beta r) \int \frac{Y_0(\beta r) q_2(r)}{W} dr. \quad (19)$$

где W – определитель Вронского. В нашем случае

$$W \{J_0, Y_0\} = Y_{0,r} J_0 - J_{0,r} Y_0 = \frac{2}{\pi r}.$$

Искомое решение уравнения (17) выпишем в виде суммы общего решения однородного уравнения (18) и частного решения (19). В результате

$$v = C_{12} J_0(\beta r) + C_{13} Y_0(\beta r) + \frac{\pi}{2} \left(Y_0(\beta r) \int J_0(\beta r) q_2(r) r dr - J_0(\beta r) \int Y_0(\beta r) q_2(r) r dr \right).$$

Остальные перемещения вычисляются последовательно по формулам (14).

Следует отметить, что для сплошных круглых пластин из условия ограниченности решения в начале координат следует положить

$$C_2 = C_3 = C_5 = C_6 = C_8 = C_{10} = C_{13} = 0.$$

Заключение. Приведенная постановка и предложенное решение позволяет рассчитывать напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым заполнителем при различных нагрузках и граничных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В.В. *Механика многослойных конструкций* / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Гориков, А.Г. *Теория упругости и пластичности* / А.Г. Гориков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.
3. Плескачевский, Ю. М. *Деформирование металлополимерных систем* / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – Минск: Бел. наука. 2004. – 342 с.
4. Плескачевский, Ю. М. *Динамика металлополимерных систем* / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск: Бел. наука. 2004. – 386 с.
5. Старовойтов, Э. И. *Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании* / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 380 с.
6. Плескачевский, Ю.М. *Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием* / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
7. Старовойтов, Э. И. *Сопротивление материалов* / Э. И. Старовойтов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
8. Старовойтов, Э.И. *Трехслойные стержни в терморрадиационных полях* / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко // Минск: Беларуская наука, 2017. – 275 с.
9. Starovoitov, E. I. *Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity* / E. I. Starovoitov, F.V. Nagiyev – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. – 346 p.
10. Старовойтов, Э.И. *Термосиловое деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки* / Э.И. Старовойтов, Ф.Б. Нагиев // Теоретическая и прикладная механика. Вып. 31.– Мн.: БНТУ. –2016. – С. 176–184.
11. Плескачевский, Ю. М. *Деформирование трехслойного упругого стержня нагрузками различных форм в температурном поле* / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник.– Мн.: 2017. – Вып. 32. – С. 5–12.

12. Старовойтов, Э.И. Повторное знакопеременное нагружение упругопластических тел в нейтронном потоке / Э.И. Старовойтов, Д.М. Савицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – Минск: БНТУ. Вып. 30. – С. 20–29.
13. Старовойтов, Э.И. Термосиловое деформирование трехслойных упругопластических стержней / Э.И. Старовойтов, Д.М. Савицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 29. – С. 51–57.
14. Старовойтов, Э.И. Колебания круглых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием / Э.И. Старовойтов, В.Д. Кубенко, Д.В. Тарлаковский // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 2009. – №2. – С. 16–19.
15. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Т. 39, №8. – P. 945-952.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА И РЕКУРРЕНТНОГО АЛГОРИТМА К МОДЕЛИ ПЛОСКОГО МНОГОЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА СО ЗВЕНЬЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

¹Борисов А.В., ²Розенблат Г.М., ³Чигарев А.В.

¹ *Филиал ГОУ ВО НИУ «Московский энергетический институт (Технический университет)» в г. Смоленске*

² *Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Москва*

³ *Белорусский национальный технический университет, Минск*

Введение. Моделирование движений механизмов без конечностей, колес и гусениц только за счет трения и изменения конфигурации, является важной фундаментальной задачей, имеющей при этом много практических приложений, что определяет актуальность данного исследования. Научная новизна исследования заключается в том, что в отличие от имеющихся моделей змееподобных механизмов с абсолютно твердыми звеньями, модели со звеньями переменной длины позволяют приблизить их движения к способу перемещения гусениц и к волновому перемещению вещества. Значимость исследования заключается в увеличении количества степеней свободы в модели плоского механизма и открываемых этим возможностей для синтеза новых алгоритмов управления движением, исследовании передвижений плоских механизмов не только за счет изменения углов между звеньями, но и за счет изменения длин звеньев, в том числе для синтеза прямолинейного перемещения. Управление осуществляется в шарнирах с помощью управляющих моментов и в стержнях за счет изменения длины под действием управляющей продольной силы. Перемещение реализуется при помощи сил трения о поверхность, по которой движется механизм и изменения конфигурации механизма под действием внутренних управляющих усилий.

Цель исследования – разработка модели плоского многозвенового механизма на основе рекуррентного и матричного алгоритмов записи дифференциальных уравнений движения, обеспечивающей моделирование нелинейных свойств змееподобных устройств стержневыми механическими системами, учитывающими изменение длины звеньев, обеспечивающих перемещение за счет поперечных и продольных волнообразных движений корпуса.

Под звеном переменной длины понимается часть механизма между шарнирами в виде прямолинейной, быть может достаточно сложной механической управляемой конструкции, способной изменять свою длину вдоль направления между шарнирами, т.е. реализовывать растяжение-сжатие, но не подверженное деформациям изгиба и кручения, при этом представляющее единую динамическую систему в механизме.

Модель с произвольным количеством масс на звене переменной длины

Используем разработанные нами методы синтеза и анализа различных моделей стержневых систем [1-3] применительно к плоскому змееподобному роботу, перемещающемуся на плоскости (рис. 1). Рассмотрим плоское движение свободной модели, что соответствует безопорной фазе движения антропоморфного механизма [4]. Данная модель является перевернутой на угол $\pi/2$ по отношению к моделям, рассмотренным ранее [1-4]. Движение происходит в горизонтальной плоскости, а не вертикальной, как рассматривалось в [1-4]. В некотором смысле данная модель – проекция рассмотренной

трехмерной модели [5-6] на плоскость XOY . Как и прежде, угол φ_i – угол между осью OX и звеном AB на плоскости XOY , отсчитываемым от направления оси OX против хода часовой стрелки. Угол ψ_i при этом будет равен нулю. Поэтому данная модель является частным случаем рассмотренной выше. Дифференциальные уравнения движения можно получить из других соображений. Горизонтальная плоская модель отличается от плоской вертикальной модели только направлением действия силы тяжести.

Дифференциальные уравнения движения данной модели аналогичны уравнениям движения для антропоморфного механизма в безпорной фазе движения, за исключением слагаемого, содержащего ускорение свободного падения. Для матрицы A из [4] формула принимает вид:

$$A(q,l) = \begin{pmatrix} \theta & 0 & \eta_1 l_1 \sin \varphi_1 & \eta_2 l_2 \sin \varphi_2 \\ 0 & \theta & -\eta_1 l_1 \cos \varphi_1 & -\eta_2 l_2 \cos \varphi_2 \\ \eta_1 l_1 \sin \varphi_1 & -\eta_1 l_1 \cos \varphi_1 & \zeta_1 l_1^2 & 0 \\ \eta_2 l_2 \sin \varphi_2 & -\eta_2 l_2 \cos \varphi_2 & 0 & \zeta_2 l_2^2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где: $\zeta_i = \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta} n_{i\beta}^2$, $\eta_i = \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta} n_{i\beta}$, ($i = 1,2$), $\theta = \sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta}$.

Учитывая это, из уравнений работы [4] можно получить дифференциальные уравнения движения.

Рассматриваемая механическая системы имеет шесть степеней свободы. За обобщенные координаты, однозначно характеризующие положение механизма, примем координаты прикрепления звеньев – шарнира B : $x(t)$, $y(t)$, два угла, которые образуют звенья с горизонталью, отсчитываемые против часовой стрелки $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и две переменных длины звеньев $l_1(t)$, $l_2(t)$. В дальнейших записях аргумент t для краткости будем опускать.

Запишем координаты сосредоточенных масс на звеньях в виде:

$$\begin{aligned} x_{C1\beta} &= x + l_1(1 - n_{1\beta})\cos(\pi + \varphi_1), & y_{C1\beta} &= y + l_1(1 - n_{1\beta})\sin(\pi + \varphi_1), \\ x_{C2\beta} &= x + l_2 n_{2\beta} \cos \varphi_2, & y_{C2\beta} &= y + l_2 n_{2\beta} \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Запишем координаты центра масс механизма:

$$X = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 x_{C i\beta} m_{i\beta}}{\sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta}}, \quad Y = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 y_{C i\beta} m_{i\beta}}{\sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta}}. \quad (3)$$

Запишем дифференциальные уравнения движения механической системы в виде уравнений Лагранжа второго рода. В результате процедуры описанной, протестированной и отработанной выше, получаем дифференциальные уравнения движения. Обобщенные силы находим обычным образом из выражения для элементарной работы. Подставляя их в правые части соответствующих уравнений движения, получаем:

$$\begin{aligned} \theta \ddot{x} + \eta_1 l_1 \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 + \eta_2 l_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + \eta_1 l_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \eta_2 l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + \\ + 2\eta_1 \sin \varphi_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + 2\eta_2 \sin \varphi_2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 - \eta_1 \cos \varphi_1 \ddot{l}_1 - \eta_2 \cos \varphi_2 \ddot{l}_2 = Q_x, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \theta \ddot{y} - \eta_1 l_1 \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - \eta_2 l_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + \eta_1 l_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \eta_2 l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 - \\ - 2\eta_1 \cos \varphi_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 - 2\eta_2 \cos \varphi_2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 - \eta_1 \sin \varphi_1 \ddot{l}_1 - \eta_2 \sin \varphi_2 \ddot{l}_2 = Q_y, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\eta_1 l_1 \sin \varphi_1 \ddot{x} - \eta_1 l_1 \cos \varphi_1 \ddot{y} + \zeta_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + 2\zeta_1 l_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 = Q_{\varphi_1}, \quad (6)$$

$$\eta_2 l_2 \sin \varphi_2 \ddot{x} - \eta_2 l_2 \cos \varphi_2 \ddot{y} + \zeta_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + 2\zeta_2 l_2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 = Q_{\varphi_2}, \quad (7)$$

$$-\eta_1 \cos \varphi_1 \ddot{x} - \eta_1 \sin \varphi_1 \ddot{y} - \zeta_1 l_1 \dot{\varphi}_1^2 + \zeta_1 \ddot{l}_1 = F_1, \quad (8)$$

$$-\eta_2 \cos \varphi_2 \ddot{x} - \eta_2 \sin \varphi_2 \ddot{y} - \zeta_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 + \zeta_2 \ddot{l}_2 = F_2, \quad (9)$$

$$\zeta_i = \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta} n_{i\beta}^2, \quad \eta_i = \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta} n_{i\beta}, \quad (i = 1, 2), \quad \theta = \sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta}.$$

Здесь $Q_x, Q_y, Q_{\varphi_1}, Q_{\varphi_2}, F_1, F_2$ – обобщенные силы, обусловленные силами сухого трения, управляющим моментом в шарнире, управляющими продольными силами обеспечивающими изменение длины звена.

Однако, если в случае с вертикальной плоской моделью, описывающей движения экзоскелета, сила трения играла роль связи с опорной поверхностью в зоне контакта стопы и обеспечивала отсутствие проскальзывания, моделировалась точечным контактом. В горизонтальной плоской модели, описывающей движения змееподобных устройств, сила трения фактически является основной, обеспечивающей целенаправленное движение механизма и требует учета. Подобные модели змееподобных роботов рассмотрены в работах Ф.Л. Черноусько [7-11].

Обозначим проекции на координатные оси силы трения, действующей на точку $C_{i\beta}$ механизма $F_{i\beta}^x$ и $F_{i\beta}^y$ соответственно ($i = 1, 2, \dots, n; \beta = 0, 1, \dots, \alpha - 1$, где n – количество звеньев механизма, α – количество масс на звене). Для рассматриваемого механизма $n = 2, \alpha = 3$. Тогда выражения для обобщенных сил примут вид

$$Q_x = \sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 F_{i\beta}^x, \quad Q_y = \sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 F_{i\beta}^y,$$

$$Q_{\varphi_1} = M + \sum_{\beta=0}^2 F_{1\beta}^x l_1(1 - n_{1\beta})\sin(\pi + \varphi_1) - \sum_{\beta=0}^2 F_{1\beta}^y l_1(1 - n_{1\beta})\cos(\pi + \varphi_1), \quad (10)$$

$$Q_{\varphi_2} = -M - \sum_{\beta=0}^2 F_{2\beta}^x l_2 n_{2\beta} \sin \varphi_2 + \sum_{\beta=0}^2 F_{2\beta}^y l_2 n_{2\beta} \cos \varphi_2.$$

При движении силы трения определяются в соответствии с законом Кулона.

$$F_{i\beta}^x = -\frac{gk_{i\beta} m_{i\beta} \dot{x}_{i\beta}}{\sqrt{\dot{x}_{i\beta}^2 + \dot{y}_{i\beta}^2}}, \quad F_{i\beta}^y = -\frac{gk_{i\beta} m_{i\beta} \dot{y}_{i\beta}}{\sqrt{\dot{x}_{i\beta}^2 + \dot{y}_{i\beta}^2}}; \quad i = 1, 2; \quad \beta = 0, 1, 2. \quad (11)$$

Здесь $k_{i\beta}$ – коэффициент трения в точке $C_{i\beta}$.

В неподвижных точках контакта сила трения не превосходит по величине произведения нормальной реакции на коэффициент трения $F_{тр.нок} < kN$ и может быть направлена произвольным образом. Трудность заключается в том, что при наличии более чем трех точек контакта система является статически неопределимой и нормальные реакции не определяются однозначно.

Таким образом, составлены дифференциальные уравнения движения двузвенника движущегося по горизонтальной плоскости со стержнями переменной длины.

Рассмотрим модель с n подвижными звеньями переменной длины с сосредоточенными массами α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) на каждом звене (рис. 2).

Такая модель с большим количеством звеньев может приближенно моделировать фактически непрерывный, а не дискретный перенос вещества по шероховатой плоскости, что имеет место в живой природе при перемещении змей, гусениц и т.п.

Уравнения движения плоского механизма состоящего из n звеньев переменной длины с сосредоточенными массами на стержнях являются системой нелинейных дифференциальных уравнений, которые в матричной форме можно представить в виде:

$$A(q, l) \ddot{q} + B(q, l) \dot{q}^2 + 2D(q, l) (\dot{l} \dot{q}) + E(q, l) \ddot{l} = M(q, l), \quad (12)$$

$$G(q, l) \ddot{q} + H(q, l) \dot{q}^2 + 2L(q, l) (\dot{l} \dot{q}) + P(q, l) \ddot{l} = F(q, l), \quad (13)$$

где: q – угловые обобщенные координаты $q = (x, y, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$; l – обобщенные координаты, описывающие изменения длины звеньев $l = (x, y, l_1, \dots, l_n)^T$; $A(q, l), B(q, l), G(q, l), H(q, l)$ – матрицы, учитывающие инерционные свойства; $D(q, l), E(q, l), L(q, l), P(q, l)$ – матрицы, учитывающие переменную длину звеньев; $M(q, l), F(q, l)$ – матрицы-столбцы

обобщенных сил; \ddot{q} – матрица-столбец обобщенных ускорений; \dot{q} – матрица-столбец обобщенных скоростей; $(\dot{l}\dot{q})$ – матрица-столбец, составленная из произведений $\dot{l}\dot{q}$ при равных индексах.

Матричная форма записи уравнений движения (12)-(13) полученная выше является универсальной и сохранилась в приложении не к антропоморфным, а к змееподобным устройствам. Обобщения матриц также сохраняются, поэтому здесь не приводятся. Различия заключаются в том, что нет матриц $C(q)$ и $K(q)$, определяемых моментами силы тяжести. Таким образом, методы получения дифференциальных уравнений движения являются универсальными и описывают широкий класс стержневых механических систем. Разработанные методы могут быть применены не только к описанию движения экзоскелета, антропоморфного робота или эндоскелета с любым количеством звеньев переменной длины, движущимся в вертикальной плоскости, но и к змееподобным роботам, движущимся в горизонтальной плоскости. Структура матриц при этом останется такой же, только изменится их размерность, количество масс, длин звеньев и т.п. в каждом элементе матрицы, зависящими от конкретной конструкции механизма.

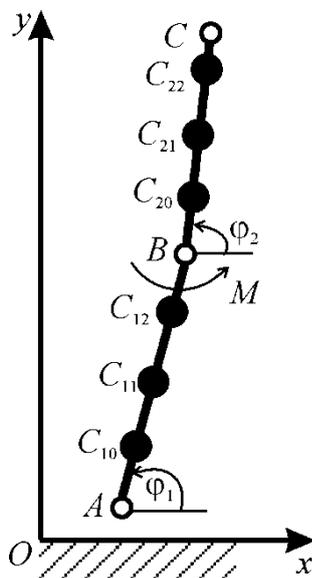


Рис. 1. Движение механизма под действием внутренних усилий и сил трения на плоскости

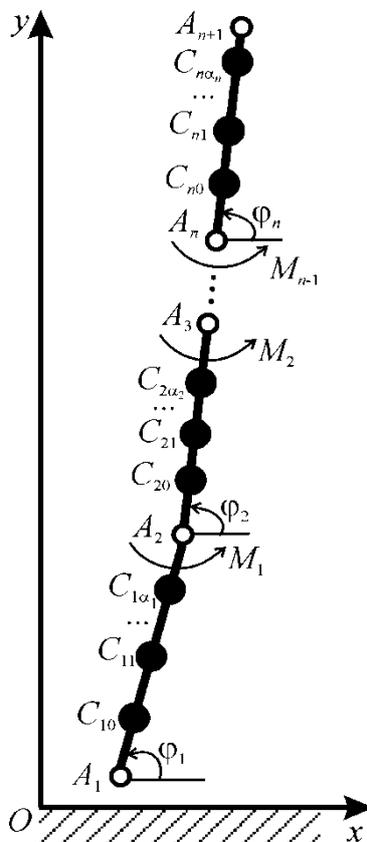


Рис. 2. Движение плоского механизма составленного из n подвижных звеньев переменной длины с произвольным количеством сосредоточенных масс на каждом звене

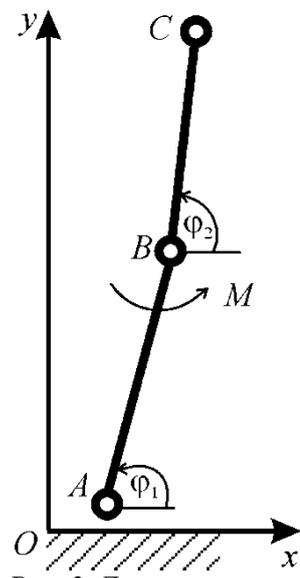


Рис. 3. Движение механизма с тремя сосредоточенными массами под действием внутренних усилий и сил трения на плоскости

Приведем сравнительную таблицу времени составления дифференциальных уравнений движения для плоского змееподобного робота (табл. 1).

Таблица 1 – Сравнение времени составления дифференциальных уравнений движения для модели экзоскелета различными методами с помощью системы компьютерной математики «Mathematica»

Метод	Время, с.	
	2 звена	3 звена
Уравнения Лагранжа второго рода	5,12	23,57
Матричный метод	0,53	0,78
Рекуррентный метод	0,58	0,84

Анализируя таблицу, видим, что для составления дифференциальных уравнений движения стержневых механических систем, как и прежде, наиболее эффективными и рациональными являются специально разработанные в диссертации рекуррентный и матричный методы. Различия в скорости составления уравнений нарастают с увеличением количества звеньев, эффективность предложенных методов является очевидной.

Моделирование управляемого движения механизма на плоскости

Рассмотрим движение механизма с двумя звеньями переменной длины на плоскости. Модель имеет три сосредоточенные массы в точках A, B, C (рис. 3).

Обозначим сосредоточенные массы следующим образом. В точке A расположена масса m_1 , в шарнире $B - m_0$, в точке $C - m_2$.

Система является статически определенной и нормальные реакции имеют вид:

$$N_A = m_1g, N_B = m_0g, N_C = m_2g. \quad (14)$$

Дифференциальные уравнения движения получаются из уравнений движения рассмотренной выше модели, если положить $n_{10} = 1, n_{12} = 0, n_{20} = 0, n_{22} = 1, m_{11} = 0, m_{21} = 0$, то есть C_{10} совместить с точкой A, C_{12} и C_{20} с точкой B, C_{22} с точкой C , а сосредоточенные массы, расположенные на стержнях между шарнирами считать равными нулю. Таким образом, для данной модели дифференциальные уравнения движения имеют вид:

$$\theta \ddot{x} + m_1 l_1 \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - m_2 l_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + m_1 l_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 - m_2 l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + 2m_1 \sin \varphi_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 - 2m_2 \sin \varphi_2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 - m_1 \cos \varphi_1 \ddot{l}_1 + m_2 \cos \varphi_2 \ddot{l}_2 = Q_x, \quad (15)$$

$$\theta \ddot{y} - m_1 l_1 \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + m_1 l_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 - m_2 l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 - 2m_1 \cos \varphi_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + 2m_2 \cos \varphi_2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 - m_1 \sin \varphi_1 \ddot{l}_1 + m_2 \sin \varphi_2 \ddot{l}_2 = Q_y, \quad (16)$$

$$m_1 l_1 \sin \varphi_1 \ddot{x} - m_1 l_1 \cos \varphi_1 \ddot{y} + m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + 2m_1 l_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 = Q_{\varphi_1}, \quad (17)$$

$$-m_2 l_2 \sin \varphi_2 \ddot{x} + m_2 l_2 \cos \varphi_2 \ddot{y} + m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + 2m_2 l_2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 = Q_{\varphi_2}, \quad (18)$$

$$-m_1 \cos \varphi_1 \ddot{x} - m_1 \sin \varphi_1 \ddot{y} - m_1 l_1 \dot{\varphi}_1^2 + m_1 \ddot{l}_1 = F_1, \quad (19)$$

$$m_2 \cos \varphi_2 \ddot{x} + m_2 \sin \varphi_2 \ddot{y} - m_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 \ddot{l}_2 = F_2, \quad \theta = \sum_{i=0}^2 m_i. \quad (20)$$

Здесь $Q_x, Q_y, Q_{\varphi_1}, Q_{\varphi_2}, F_1, F_2$ – обобщенные силы, обусловленные силами сухого трения, управляющим моментом в шарнире, управляющими продольными силами обеспечивающими изменение длины звена.

Обозначим проекции на координатные оси силы трения, действующей на точки A, B, C механизма F_A^x, F_B^x, F_C^x и F_A^y, F_B^y, F_C^y , соответственно. Тогда выражения для обобщенных сил примут вид

$$Q_x = F_A^x + F_B^x + F_C^x, \quad Q_y = F_A^y + F_B^y + F_C^y, \quad (21)$$

$$Q_{\varphi_1} = M + F_A^x l_1 \sin(\pi + \varphi_1) - F_A^y l_1 \cos(\pi + \varphi_1), \quad Q_{\varphi_2} = -M - F_C^x l_2 \sin \varphi_2 + F_C^y l_2 \cos \varphi_2.$$

При движении силы трения определяются в соответствии с законом Кулона.

$$F_A^x = -\frac{gk_1 m_1 \dot{x}_A}{\sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2}}, \quad F_B^x = -\frac{gk_0 m_0 \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad F_C^x = -\frac{gk_2 m_2 \dot{x}_C}{\sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2}}, \quad (22)$$

$$F_A^y = -\frac{gk_1 m_1 \dot{y}_A}{\sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2}}, \quad F_C^x = -\frac{gk_0 m_0 \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad F_C^y = -\frac{gk_2 m_2 \dot{y}_C}{\sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2}}.$$

Здесь k_0, k_1, k_2 , – коэффициенты трения в точках B, A, C соответственно.

В неподвижных точках контакта сила трения не превосходит по величине произведения нормальной реакции на коэффициент трения $F_{тр.нок} < kN$ и может быть направлена произвольным образом. В модели имеется три точки контакта. Поэтому система является статически определимой и нормальные реакции определяются однозначно.

Рассмотрим модель с абсолютно твердыми невесомыми звеньями и сосредоточенными точечными массами на концах звеньев (рис. 3), аналогичную работе [8], разница заключается только в способе отсчета угла φ_1 .

Обозначим сосредоточенные массы следующим образом. В точке A расположена масса $m_1 = 1$ кг, в шарнире $B - m_0 = 4$ кг, в точке $C - m_2 = 3$ кг. Длины звеньев: $AB = l_1 = 0,385$ м, $BC = l_2 = 1,365$ м. Такие значения выбраны в соответствии с критериями, приводимыми в упоминавшийся выше работе.

Для данной модели дифференциальные уравнения движения имеют вид:

$$\theta \ddot{x} + m_1 l_1 \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - m_2 l_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + m_1 l_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 - m_2 l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 = Q_x, \quad (23)$$

$$\theta \ddot{y} - m_1 l_1 \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + m_1 l_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 - m_2 l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 = Q_y, \quad (24)$$

$$m_1 l_1 \sin \varphi_1 \ddot{x} - m_1 l_1 \cos \varphi_1 \ddot{y} + m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 = Q_{\varphi_1}, \quad (25)$$

$$-m_2 l_2 \sin \varphi_2 \ddot{x} + m_2 l_2 \cos \varphi_2 \ddot{y} + m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 = Q_{\varphi_2}, \quad \theta = \sum_{i=0}^2 m_i. \quad (26)$$

Здесь $Q_x, Q_y, Q_{\varphi_1}, Q_{\varphi_2}, F_1, F_2$ – обобщенные силы, обусловленные силами сухого трения, управляющим моментом в шарнире, управляющими продольными силами обеспечивающими изменение длины звена.

Обозначим проекции на координатные оси силы трения, действующей на точки A, B, C механизма F_A^x, F_B^x, F_C^x и F_A^y, F_B^y, F_C^y , соответственно. Тогда выражения для обобщенных сил примут вид

$$\begin{aligned} Q_x &= F_A^x + F_B^x + F_C^x, & Q_y &= F_A^y + F_B^y + F_C^y, \\ Q_{\varphi_1} &= F_A^x l_1 \sin(\pi + \varphi_1) - F_A^y l_1 \cos(\pi + \varphi_1) - F_C^x l_2 \sin \varphi_2 + F_C^y l_2 \cos \varphi_2, \\ Q_{\varphi_2} &= M - F_C^x l_2 \sin \varphi_2 + F_C^y l_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (27)$$

При движении силы трения определяются в соответствии с законом Кулона.

$$\begin{aligned} F_A^x &= -\frac{gk_1 m_1 \dot{x}_A}{\sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2}}, & F_B^x &= -\frac{gk_0 m_0 \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, & F_C^x &= -\frac{gk_2 m_2 \dot{x}_C}{\sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2}}, \\ F_A^y &= -\frac{gk_1 m_1 \dot{y}_A}{\sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2}}, & F_C^y &= -\frac{gk_0 m_0 \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, & F_C^y &= -\frac{gk_2 m_2 \dot{y}_C}{\sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь k_0, k_1, k_2 , – коэффициенты трения в точках B, A, C соответственно. Их считаем одинаковыми и равными 0,4.

В неподвижных точках контакта сила трения не превосходит по величине произведения нормальной реакции на коэффициент трения $F_{тр.нок} < kN$ и может быть направлена произвольным образом. В этой модели имеется три точки контакта. Поэтому система является статически определимой и нормальные реакции определяются однозначно.

Задача заключается в моделировании управляемого движения данного механизма, считая заданными все массы, коэффициенты трения, управляющие воздействия: управляющие моменты и продольные силы. Для этого необходимо провести численное решение задачи Коши для полученной системы дифференциальных уравнений движения.

Начальные условия: $x_0 = 0,5$ м, $y_0 = 0,4$ м, $\varphi_{10} = 0$ рад, $\varphi_{20} = 0$ рад, $\dot{x}_0 = 0,01$ м/с, $\dot{y}_0 = 0,01$ м/с, $\dot{\varphi}_{10} = 0$ рад/с, $\dot{\varphi}_{20} = 0$ рад/с (рис. 4). Время интегрирования $t_k = 0,5$ с.

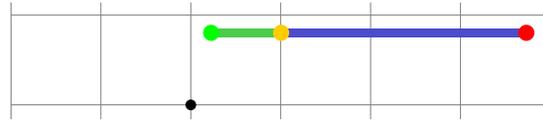


Рис. 4. Начальное положение механизма (черной точкой отмечено начало координат)

Проведем численное решение полученной системы дифференциальных уравнений движения с заданными значениями параметров и управляющими моментами.

Момент задается в виде кусочной функции: при $t < t_k/2$, $M = -3,5$ Нм; при $t \geq t_k/2$, $M = 3,0$ Нм. Получаем следующие результаты (рис. 5).

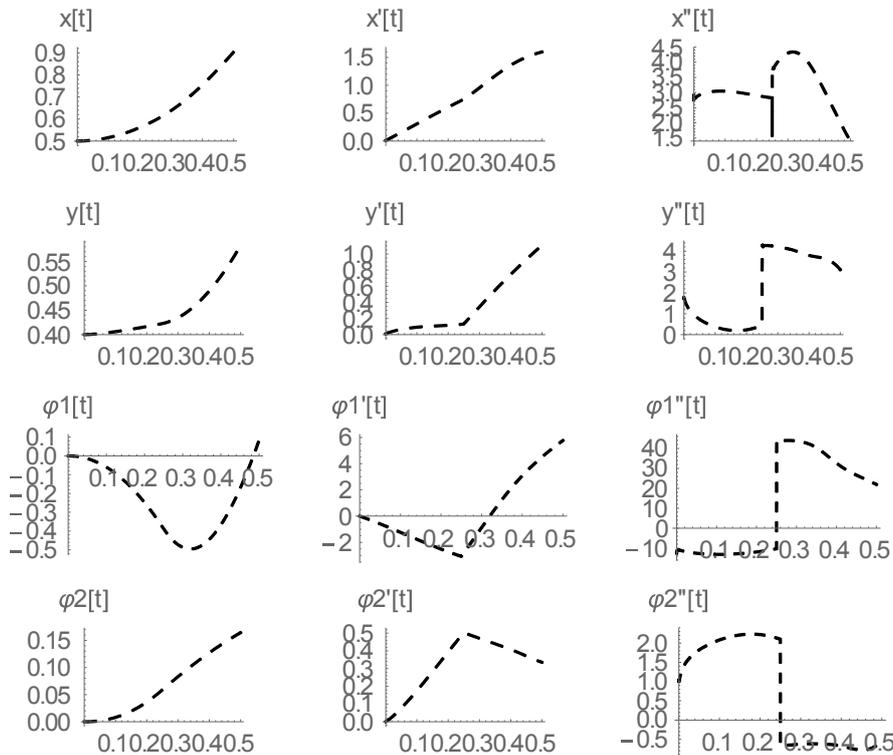


Рис. 5. Результаты численного решения системы дифференциальных уравнений движения плоского механизма

Кадры анимации движения представлены на рис. 6.

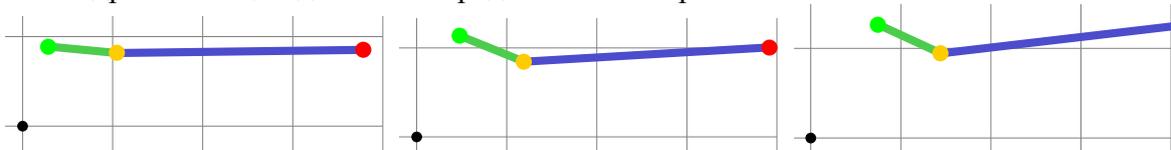


Рис. 6. Кадры анимационной визуализации численного решения системы дифференциальных уравнений движения плоского механизма

Таким образом, проведены численные расчеты движения змееподобного робота и по полученному результату решения синтезирована анимация движения. В данном расчете использовано самое простое управление с помощью постоянных управляющих моментов. Показана адекватность полученного движения реальности. Синтез алгоритмов движения, обеспечивающих более сложные траектории при перемещениях плоского механизма не является целью данного исследования и, кроме того, подробно описано в работах Черноусько Ф.Л. и соавторов [7-11]. Здесь показана применимость разработанных в диссертации методов к модели плоского механизма.

Однако, в отличие от антропоморфных систем, ведущую роль здесь имеют силы трения, подробно исследованные в работах [12-15]. Алгоритмы управления движением

здесь иные и подробное исследование динамики плоского змееподобного робота является темой отдельного исследования.

Модель с телескопическими звеньями

Рассмотрим следующий способ передвижения. Пусть звено робота имеет телескопическую конструкцию (рис. 7).

Соответственно, поступательное движение звена реализуется за счет изменения длины звена и анизотропного покрытия нижней части робота, непосредственно контактирующей с поверхностью. Перемещение происходит в два этапа. На первом этапе перемещается вперед начальная часть звена, за счет сил сопротивления ниже в данном направлении. На втором этапе первая часть звена, сместившаяся вперед, подтягивает остальную конструкцию. Схематически подобная модель анизотропного трения может быть реализована следующим образом (рис. 8). Если будет возможность регулировать направление анизотропного сцепления с поверхностью, робот сможет не разворачиваясь двигаться в обратном направлении.

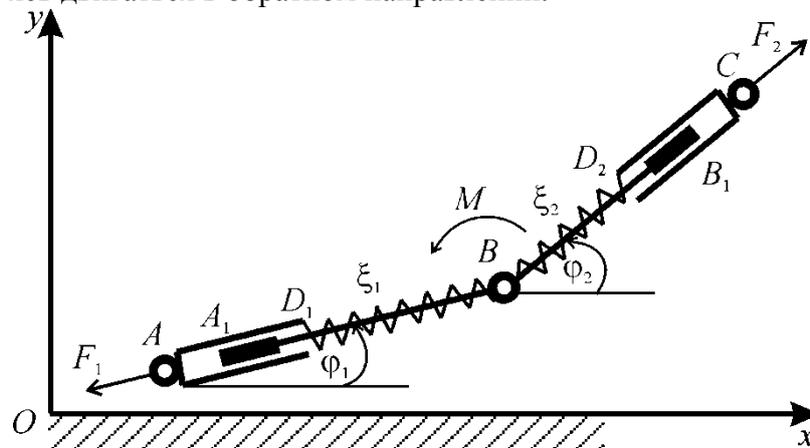


Рис. 7. Модель ползающего робота с двумя звеньями телескопической конструкции



Рис. 8. Схематическая модель зоны контакта, обеспечивающая анизотропное трение

Повороты робота реализуются за счет момента в шарнире. Повтором и комбинацией таких поступательных и вращательных движений робот может реализовывать целенаправленное движение и перемещаться по плоскости в любую заданную точку.

Рассматриваемая механическая системы имеет шесть степеней свободы. За обобщенные координаты, однозначно характеризующих положение механизма, примем координаты прикрепления звеньев – шарнира B : $x(t)$, $y(t)$, два угла, которые, как и ранее, образуют звенья с горизонталью, отсчитываемые против часовой стрелки $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и две переменных длины звеньев $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$. В дальнейших записях аргумент t для краткости будем опускать.

Система имеет два весомых звена переменной длины телескопической конструкции AB и BC . Каждое такое звено состоит из двух весомых абсолютно жестких частей: $AD_1 = l_{12}$, $BA_1 = l_{11}$ и $BB_1 = l_{21}$, $D_2C = l_{22}$. На рис. 7 схематично изображена конструкция и введены соответствующие обозначения. Длины звеньев $AB = l_1$, $CD = l_2$. Пружинные элементы на участках $D_1B = \xi_1$ и $BD_2 = \xi_2$ моделирует восстанавливающую силу. Сама пружина считается невесомой. Также пренебрегаем силой трения штока A_1B о корпус AD_1 и штока BB_1 о корпус D_2C .

Для звена AB масса штока A_1B равна m_{11} момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения I_{11} , у корпуса AD_1 масса равна m_{12} , момент инерции относительно оси проходящей через его конец перпендикулярно плоскости движения I_{12} .

Для звена BC масса штока BB_1 равна m_{21} момент инерции относительно оси, про-

ходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения I_{21} , у корпуса D_2C масса равна m_{22} , момент инерции относительно оси проходящей через его конец перпендикулярно плоскости движения I_{22} .

Тогда кинетическая энергия механизма будет складываться из энергий отдельных звеньев.

$$T = T_{A_1B} + T_{AD_1} + T_{BB_1} + T_{D_2C}.$$

$$T_{A_1B} = [m_{11}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + l_{11}n_{11}\dot{\phi}_1(\dot{x}\sin\phi_1 - \dot{y}\cos\phi_1)) + I_{11}n_{11}^2\dot{\phi}_1^2]/2$$

$$T_{AD_1} = [m_{12}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\xi}_1^2 + \xi_1(l_{12} + \xi_1)\dot{\phi}_1^2 + \dot{x}(\dot{\phi}_1(l_{12} + 2\xi_1)\sin\phi_1 - 2\dot{\xi}_1\cos\phi_1) - \dot{y}(\dot{\phi}_1(l_{12} + 2\xi_1)\cos\phi_1 + 2\dot{\xi}_1\sin\phi_1) + I_{12}\dot{\phi}_1^2)]/2 \quad (29)$$

$$T_{BB_1} = [m_{21}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - l_{21}n_{21}\dot{\phi}_2(\dot{x}\sin\phi_2 - \dot{y}\cos\phi_2)) + I_{21}n_{21}^2\dot{\phi}_2^2]/2$$

$$T_{D_2C} = [m_{22}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\xi}_2^2 + \xi_2(l_{22} + \xi_2)\dot{\phi}_2^2 - \dot{x}(\dot{\phi}_2(l_{22} + 2\xi_2)\sin\phi_2 - 2\dot{\xi}_2\cos\phi_2) + \dot{y}(\dot{\phi}_2(l_{22} + 2\xi_2)\cos\phi_2 + 2\dot{\xi}_2\sin\phi_2) + I_{22}\dot{\phi}_2^2)]/2$$

Дифференциальные уравнения движения, составленные с помощью уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид.

$$\theta\ddot{x} + \eta_1\sin\phi_1\ddot{\phi}_1 - \eta_2\sin\phi_2\ddot{\phi}_2 + \eta_1\cos\phi_1\dot{\phi}_1^2 - \eta_2\cos\phi_2\dot{\phi}_2^2 + 2m_{12}\sin\phi_1\dot{\xi}_1\dot{\phi}_1 - 2m_{22}\sin\phi_2\dot{\xi}_2\dot{\phi}_2 - \dot{\xi}_2\dot{\phi}_2 - m_{12}\cos\phi_1\ddot{\xi}_1 + m_{22}\cos\phi_2\ddot{\xi}_2 = Q_x, \quad (30)$$

$$\theta\ddot{y} - \eta_1\cos\phi_1\ddot{\phi}_1 + \eta_2\cos\phi_2\ddot{\phi}_2 + \eta_1\sin\phi_1\dot{\phi}_1^2 - \eta_2\sin\phi_2\dot{\phi}_2^2 - 2m_{12}\cos\phi_1\dot{\xi}_1\dot{\phi}_1 + 2m_{22}\cos\phi_2\dot{\xi}_2\dot{\phi}_2 - m_{12}\sin\phi_1\ddot{\xi}_1 + m_{22}\sin\phi_2\ddot{\xi}_2 = Q_y, \quad (31)$$

$$\eta_1\sin\phi_1\ddot{x} - \eta_1\cos\phi_1\ddot{y} + (I_{11}n_{11}^2 + I_{12} + m_{12}\xi_1(\xi_1 + l_{12}))\ddot{\phi}_1 + 2m_{12}(\xi_1 + l_{12}/2)\dot{\xi}_1\dot{\phi}_1 = Q_{\phi_1}, \quad (32)$$

$$-\eta_2\sin\phi_2\ddot{x} + \eta_2\cos\phi_2\ddot{y} + (I_{21}n_{21}^2 + I_{22} + m_{22}\xi_2(\xi_2 + l_{22}))\ddot{\phi}_2 + 2m_{22}(\xi_2 + l_{22}/2)\dot{\xi}_2\dot{\phi}_2 = Q_{\phi_2}, \quad (33)$$

$$-m_{12}\cos\phi_1\ddot{x} - m_{12}\sin\phi_1\ddot{y} - m_{12}(\xi_1 + l_{12}/2)\dot{\phi}_1^2 + m_{12}\ddot{\xi}_1 = F_1, \quad (34)$$

$$-m_{22}\cos\phi_2\ddot{x} - m_{22}\sin\phi_2\ddot{y} - m_{22}(\xi_2 + l_{22}/2)\dot{\phi}_2^2 - m_{22}\ddot{\xi}_2 = F_2, \quad (35)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 m_{ij}, \quad \eta_i = m_{i1}l_{i1}n_{i1}/2 + m_{i2}(\xi_i + l_{i2}/2), \quad i = 1, 2.$$

Здесь Q_x , Q_y , Q_{ϕ_1} , Q_{ϕ_2} , F_1 , F_2 – обобщенные силы, обусловленные силами сухого трения, управляющим моментом в шарнире, управляющими продольными силами обеспечивающими изменение длины звена.

Однако, если в случае с вертикальной плоской моделью, описывающей движения экзоскелета, сила трения играла роль связи с опорной поверхностью в зоне контакта стопы и обеспечивала отсутствие проскальзывания, моделировалась точечным контактом. В горизонтальной плоской модели, описывающей движения змееподобных устройств, сила трения фактически является основной, обеспечивающей целенаправленное движение механизма и требует специального учета. Подобные модели змееподобных роботов рассмотрены в работах [7-11].

Обозначим проекции на координатные оси силы трения, действующей на точку $C_{i\beta}$ механизма $F_{i\beta}^x$ и $F_{i\beta}^y$ соответственно ($i = 1, 2, \dots, n$; $\beta = 0, 1, \dots, \alpha - 1$, где n – количество звеньев механизма, α – количество масс на звене). Для рассматриваемого механизма $n = 2$, $\alpha = 3$. Тогда выражения для обобщенных сил примут вид

$$Q_x = \sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 F_{i\beta}^x, \quad Q_y = \sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 F_{i\beta}^y,$$

$$Q_{\phi_1} = M + \sum_{\beta=0}^2 F_{1\beta}^x l_1(1 - n_{1\beta})\sin(\pi + \phi_1) - \sum_{\beta=0}^2 F_{1\beta}^y l_1(1 - n_{1\beta})\cos(\pi + \phi_1), \quad (36)$$

$$Q_{\phi_2} = -M - \sum_{\beta=0}^2 F_{2\beta}^x l_2 n_{2\beta} \sin\phi_2 + \sum_{\beta=0}^2 F_{2\beta}^y l_2 n_{2\beta} \cos\phi_2.$$

При движении силы трения определяются в соответствии с законом Кулона.

$$F_{i\beta}^x = -\frac{gk_{i\beta}m_{i\beta}\dot{x}_{i\beta}}{\sqrt{\dot{x}_{i\beta}^2 + \dot{y}_{i\beta}^2}}, \quad F_{i\beta}^y = -\frac{gk_{i\beta}m_{i\beta}\dot{y}_{i\beta}}{\sqrt{\dot{x}_{i\beta}^2 + \dot{y}_{i\beta}^2}}; \quad i = 1, 2; \quad \beta = 0, 1, 2. \quad (37)$$

Здесь $k_{i\beta}$ – коэффициент трения в точке $C_{i\beta}$.

В неподвижных точках контакта сила трения не превосходит по величине произведения нормальной реакции на коэффициент трения $F_{тр.пок} < kN$ и может быть направлена произвольным образом. Трудность заключается в том, что при наличии более чем трех точек контакта система является статически неопределимой и нормальные реакции не определяются однозначно.

Заключение. Таким образом, составлены дифференциальные уравнения движения плоского двузвенника движущегося по горизонтальной плоскости со стержнями переменной длины. Разработанный метод анализа стержневых механических систем является универсальным и может использоваться для анализа различных стержневых механизмов: манипуляторов, экзоскелетов, антропоморфных роботов, змееподобных роботов и т.д. Класс подобных систем очень широк. Практическое применение разработанных моделей – это перемещения по труднодоступным участкам, что является актуальным и востребованным.

Литература

1. Борисов А. В. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета и управление им / А. В. Борисов, Г. М. Розенблат // ПММ. – 2017. – Т. 81 – № 5. – С. 511-522.
2. Borisov A. V. Twelve-Link Exoskeleton with Biological Endoskeleton Properties / A. V. Borisov, L. V. Konchina, A. V. Chigarev // Journal of Machinery Manufacturing and Automation. – Sept. 2015, Vol. 4 Iss. 3, PP. 23-37. Режим доступа: <http://www.academicpub.org/jmma/paperInfo.aspx?PaperID=16611>
3. Чигарев А. В. Рекурсивный метод получения дифференциальных уравнений движения деформируемых плоских антропоморфных систем в безопорной и двухопорной фазах движения / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник – Минск, БНТУ. – 2015. – Вып. 30. – С. 70-81.
4. Борисов А. В. Дифференциальные уравнения движения плоских стержневых систем со звеньями переменной длины в безопорной и двухопорной фазах движения для моделирования опорно-двигательного аппарата человека, экзоскелета и антропоморфного робота / А. В. Борисов // Международный научный теоретико-практический альманах. Смоленск, 2017. – Вып. 2. – С. 153-165.
5. Чигарев А. В. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения пространственных стержневых антропоморфных систем типа экзоскелета со звеньями переменной длины / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник – Минск, БНТУ. – 2017. – Вып. 32. – С. 52-58.
6. Борисов А. В. Трехмерные модели стержневых систем со звеньями переменной длины с сосредоточенными массами и с абсолютно твердым весомым стержнем и невесомым участком изменяющим длину / А. В. Борисов // Международный научный теоретико-практический альманах. Смоленск, 2017. – Вып. 2. – С. 186-211.
7. Борисенко И. Н. О квазистатических движениях системы трех тел на плоскости / И. Н. Борисенко, Т. Ю. Фигурина, Ф. Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. – 2014. – Т. 78. № 3. – С. 316-327.
8. Черноусько Ф. Л. Влияние сил трения на динамику двузвенного мобильного робота / Ф. Л. Черноусько, М. М. Шундерюк // Прикладная математика и механика. –

2010. – Т. 74, Вып. 1. – С. 22-36.
9. Черноуцько Ф. Л. Движение многозвенника по горизонтальной плоскости. / Ф. Л. Черноуцько // Доклады Академии Наук. – 2000. – Т. 370, № 2. – С. 186-189.
 10. Черноуцько Ф. Л. Локомоция многозвенных систем на плоскости: динамика, управление, оптимизация / Ф. Л. Черноуцько, Н. Н. Болотник. – М. : Издательство ИПМех РАН (Препринт № 1128), 2016. – 154 с.
 11. Черноуцько Ф. Л. Методы управления нелинейными механическими системами. / Ф. Л. Черноуцько, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин. – М.: Физматлит, 2006. – 328 с.
 12. Розенблат Г. М. Динамические системы с сухим трением / Г. М. Розенблат. – Москва-Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2006. – 204 с.
 13. Розенблат Г. М. О движении тела, опирающегося на шероховатую плоскость тремя точками / Г. М. Розенблат // Прикладная математика и механика. – 2011. – № 2, Т. 75. – С. 254-258.
 14. Розенблат Г. М. Об интегрировании уравнений движения тела, опирающегося на шероховатую плоскость тремя точками / Г. М. Розенблат // Доклады академии наук. – 2010. – № 4, Т. 435. – С. 475-478.
 15. Розенблат Г. М. Равновесие твердого тела на плоскости с анизотропным сухим трением / Г. М. Розенблат // Прикладная математика и механика. – 2009. – № 2, Т. 73. – С. 204-218.

ВИРТУАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРУТИЛЬНОЙ ДИНАМИКИ КОЛОННЫ ТЯЖЕЛОГО МНОГОЦЕЛЕВОГО СТАНКА

Довнар С.С.

Белорусский национальный технический университет

Предмет исследования. Работа посвящена важному классу точных машин – горизонтальным сверлильно-фрезерно-расточным станкам (СФР- станкам) с подвижной колонной (“Travelling column”; рис.1).

Станок обрабатывает массивные детали. Они обычно хорошо закреплены на неподвижной площадке и, соответственно, статичны. Основным динамическим объектом станка является колонна в сборе. Кроме подвижности колонны в продольном направлении X присутствует вертикальное (Y) перемещение тяжелой бабки по колонне. Сквозь бабку перемещается ползун с инструментальным шпинделем (в поперечном направлении Z). Переменная сила резания на инструменте оказывает возбуждающее действие на всю колонну.

Станки “Travelling column” выпускаются рядом производителей в мире, в том числе белорусской фирмой «МЗОР». Пропорции колонн примерно одинаковы. Колонна с усредненными современными габаритами смоделирована в работе.

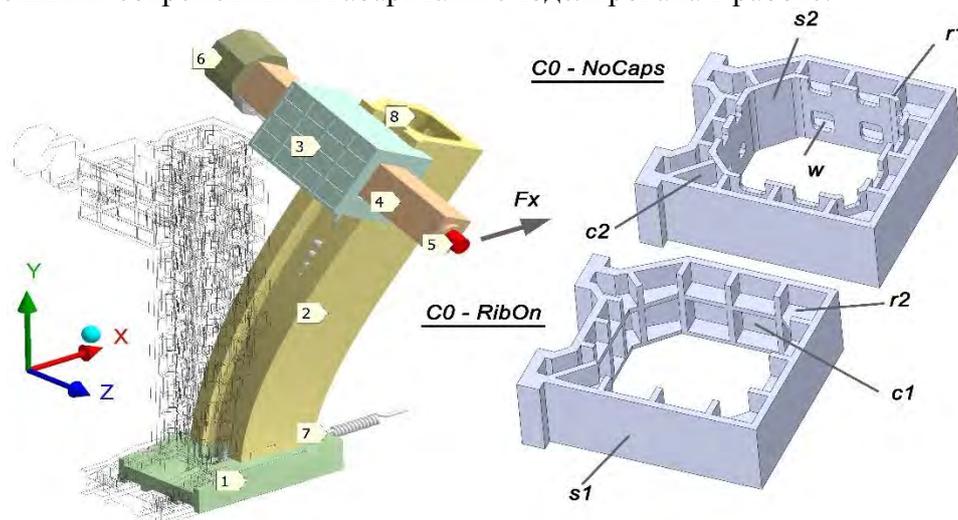


Рис.1. Резонансные изгибные колебания станочной колонны 2 на скользящих салазках 1 (мода $M1$; возбуждение силой $F_x = 1кН$ на частоте 17 Гц; $\times 20000$) и варианты поперечного сечения колонны C0-NoCaps (двойная стенка) и C0-RibOn (одинарная стенка): 3 – бабка; 4 – ползун; 5 – шпиндельный узел; 6 – главный двигатель; 7 – пружина-образ привода X; 8 – проем в колонне; s1 – наружная оболочка; s2 – внутренняя оболочка; r1, r2 –ребра; c1, c2 – открытый и закрытый кессоны; w – окно

Исследование связано с тенденцией - придавать subtilность колоннам. Отношение высоты колонны к габариту сечения растет и составляет не менее 4 – 5 раз. Это угрожает виброустойчивости станков, особенно, при подъеме инструментальных бабок к верху колонны. Тенденция к subtilности колонн обусловлена стремлением уменьшить подвижные массы в станке. При этом динамика subtilных колонн не изучена. Действия конструкторов интуитивны.

Постановка задачи и варьирование системы усиления. Инструментом исследования является виртуальное испытание станка методом конечных элементов (МКЭ)

[1]. Метод известен как точное и надежное средство моделирования. Имеется опыт применения МКЭ для оптимизации тяжелых станков [2-4]. МКЭ-анализ хорошо соответствуют натурным экспериментам.

Направление работы – выяснить возможность усиления субтильной колонны без изменения её пропорций, за счет внутренних конструктивных элементов. Всегда предполагается (рис.1) наличие внутри наружной оболочки (стенки) $s1$ колонны системы вертикальных и горизонтальных ребер ($ribs$) $r1, r2$. Ребра образуют кессоны $c1$ – прямоугольные ячейки с примерно одинаковыми сторонами. Характерный размер – 250 мм, толщина стенки – 35 мм, толщина ребра ~25-30 мм. Это – *минимальный* вариант усиления $C0-RibOn$ с *одинарной* стенкой.

Моделируются еще две сочетаемые методики усиления – создание внутренней оболочки (стенки) $s2$ и заполнение кессонов бетоном (полимербетоном). Внутренняя стенка $s2$ (25 мм) рассматривается единой с наружной $s1$. Например, это цельная чугунная отливка. Можно говорить о появлении у колонны двойной стенки ($C0-NoCaps$ на рис.1). Внутри нее расположены закрытые кессоны $c2$. Толщина двойной стенки в работе – 155 мм при габарите сечения 1 м и высоте колонны 4,5 м.

Применение двойной стенки в отливках станков известно. Заполнение кессонов бетоном является новым предложением. До сих пор бетон применялся в станкостроении только для полной заливки корпусов [5]. В случае подвижной колонны это ведет к нерациональному увеличению массы. Бетон, попадающий в проем колонны (8 на рис.1 и hl на рис.2), не работает ни на изгиб, ни на кручение. В кессонах $c1, c2$ бетон образует открытые и закрытые вкладыши ($i1, i2$ на рис.2).

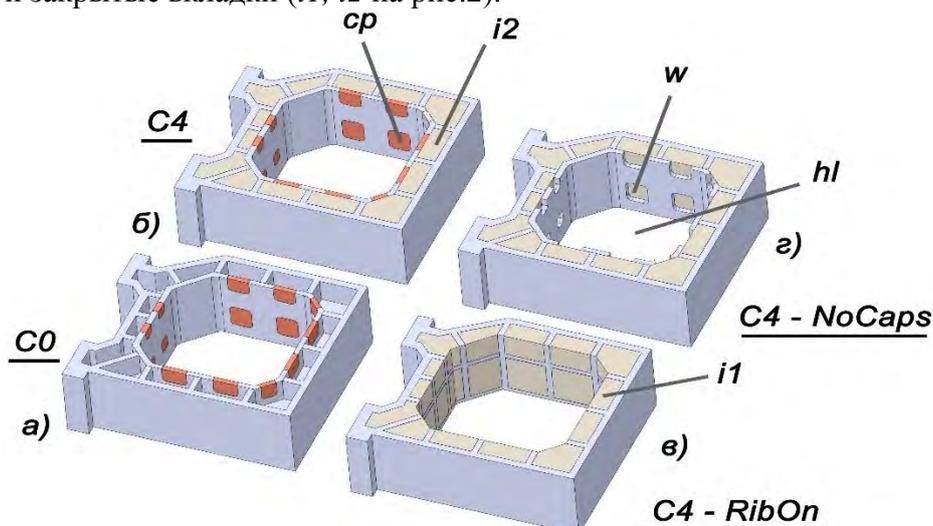


Рис.2. Варианты усиления колонны (поперечное сечение): а – $C0$; б – $C4$; в – $C4-RibOn$; г – $C4-NoCaps$

Обратим внимание на внутренние окна w (рис.1, 2). Они нужны по технологическим соображениям при литье колонны. Окна можно заделать крышками cp ($caps$) и получить цельную двойную стенку колонны. Постановка крышек связана с трудоемкой обработкой внутри колонны. Поэтому нужно оценить существенность вклада крышек в жесткость колонны.

Базовым вариантом является колонна с *двойной стенкой* и закрытыми окнами. Это случаи на рис.2 а, б. Маркер $C0$ обозначает колонну с пустотелыми кессонами, а маркер $C4$ – с бетонными вкладышами. Вариант $C4$ будем называть далее *максимальным* усилением. В отсутствие крышек на внутренней оболочке возможны случаи с бетонированием кессонов ($C4-NoCaps$, рис.2, в) и с пустыми кессонами ($C0-NoCaps$, рис.1, б). Если внутренней оболочки нет, то это случаи ($C4-RibOn$, рис.2, г) и ($C0-RibOn$, рис.1).

Описанные варианты колонны сведены в табл.1. Здесь же указаны статические жесткости на шпинделе в направлении X . Минимальному усилению с одинарной стенкой и внутренними ребрами *C0-RibOn* соответствует самая низкая жесткость 53,8 Н/мкм. Наиболее жесткой является структура двойной стенки с закрытыми окнами и забетонированными кессонами *C4*. Однако, в статике эти варианты различаются умеренно – только в 1,45 раза.

Таблица 1 – Варианты усиления колонны и соответствующая статическая жесткость на шпинделе (по X ; Н/мкм; МКЭ-расчет)

	Только оребрение наружной оболочки (RibOn)	Двойная стенка без крышек внутри (NoCaps)	Двойная стенка с запирающими кессонами крышками
Пустые кессоны – C0	<i>C0-RibOn</i> 53,8	<i>C0-NoCaps</i> 60,8	<i>C0</i> 66,1
Бетон в кессонах - C4	<i>C4-RibOn</i> 69,5	<i>C4-NoCaps</i> 75,1	<i>C4</i> 78,3
Рост жесткости	29,2%	23,5%	18,5%

В отсутствие бетона переход от одинарной к двойной стенке дает выигрыш в жесткости только в 22,9%. При условии бетонирования кессонов рост жесткости еще меньше – 12,7%. Сама процедура бетонирования кессонов повышает жесткость колонны только от 18,5 до 29,2% (последняя строка табл.1). Следовательно, все меры усиления являются скромными в смысле статической жесткости. Надо проанализировать динамическую жесткость колонны.

По литературным данным [6], точное и устойчивое резание требует на вершине инструмента (в данном случае ~ на торце шпинделя) жесткости не менее 20 Н/мкм как в статике, так и в динамике. При динамической жесткости ниже 10 Н/мкм становится вероятным возбуждение автоколебаний (из зоны резания). При жесткости ниже 5 Н/мкм грубые автоколебания почти неизбежны.

Особенности виртуальных испытаний и строение МКЭ-модели. В работе основное внимание уделено крутильной динамике. Кручение колонн и стоек являются основной проблемой для точности обработки и устойчивости резания.

Резонансное кручение колонны опасно из-за ползуна. В среднем положении (по Z) ползун инерционен и подобен коромыслу (двигатель и шпиндельный узел разнесены в разные стороны от оси колонны). Колонна выполняет роль торсионной пружины. Самый опасный случай – бабка с ползуном в верхнем положении.

Испытующую силу будем прикладывать к шпинделю в направлении X . Это максимально эффективно для возбуждения крутильных колебаний. К тому же, деформация по X наиболее опасна для точности станка.

Салазки удерживаются по X пружиной с жесткостью 400 Н/мкм (7 на рис.1. а). Это образ продольного привода. Аналогично, в вертикальном направлении Y бабку поддерживают две пружины (сверху и снизу) жесткостью по 300 Н/мкм. Поперечная (Z) пружина под ползуном имеет жесткость 400 Н/мкм.

Материалом корпусных деталей (колонны, салазки, ползун) принят чугун с модулем упругости $E_c = 130 \text{ ГПа}$. Различия между бетоном и полимербетоном не моделируются. Обобщенный бетон в кессонах имеет средний модуль упругости $E_o = 30 \text{ ГПа}$. Остальные детали – с модулем упругости стали $E_{cm} = 200 \text{ ГПа}$. По литературным данным для бетона, чугуна и стали установлены коэффициенты демпфирования ξ , равные соответственно 3%, 2% и 1%.

Направляющие по осям X, Y, Z приняты гидростатическими. Это дорогое, но точное и жесткое решение. Трение между подвижными частями практически исчезает. Гидростатические сопряжения моделируются контактными парами в статусе *no separation* (свободное скольжение без отрыва). Остальные детали модели скреплены контактными элементами в статусе *bonded* (заблокировано). В гидростатических направляющих может быть предусмотрен режим гидрозажима, когда скольжение отсутствует. В данной работе это сделано один раз, на салазках, для блокировки всей колонны в сборе (вариант *C4-Fix*).

Картина резонансов колонны в сборе. Модальный МКЭ-анализ станка был проведен для частот до 100 Гц. Рассмотрим те резонансные моды, в которых доминирует движение по X (продольно) для шпинделя. В диапазоне до 60 Гц обнаружено три таких моды – изгибная мода *M1* (рис.1) и связанные крутильные моды *M2a* и *M2b* (рис.3 слева и справа соответственно).

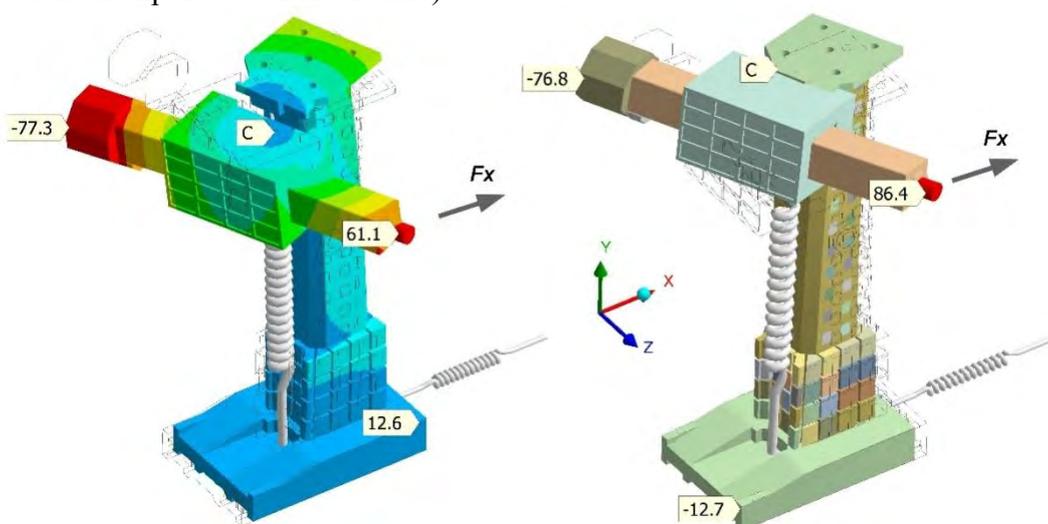


Рис. 3. Возбуждение крутильных резонансов *M2a* (слева; 40 Гц) и *M2b* (справа; 42,5 Гц). Суммарные перемещения в мкм, $\times 12000$. Гармоническая сила на шпинделе F_x с амплитудой 1 кН

Формы мод соответствуют классическим случаям изгибных и крутильных резонансов консольно-закрепленного стержня с массой на свободном конце. Кручение происходит вокруг вертикальной линии, проходящей возле маркера С. Концы ползуна движутся в противоположных направлениях. Для салазок есть два варианта. Они могут скользить синфазно со шпинделем (61,1 и 12,6 мкм) или антифазно (86,4 и -12,7 мкм). Это и есть различие между модами *M2a* и *M2b*.

Базовая форма АЧХ станка. В ходе гармонического МКЭ-анализа построение АЧХ производилось с помощью силы амплитудой 1 кН, действующей в направлении X на торец шпинделя. Сила моделирует соответствующую компоненту резания, например, на фрезе или расточной оправке. Частота осцилляции силы наращивалась шагами в диапазоне от 0 до 60 Н. Для крупных станков в данный интервал попадают практически все общестаночные резонансы. Шаг изменения частоты – 1 Гц. В районе резонансных пиков шаг уменьшался до 0,5 Гц. На практике осциллирующую силу создают зубья инструмента.

На рис.4 АЧХ станка представлена для *максимального* варианта усиления колонны *C4* в случаях подвижных и зафиксированных салазок (*C4-Fix*). В интервале 15 – 25 Гц видны пики изгибного резонанса колонны *M1*. На 40 – 50 Гц наблюдаются пики крутильных резонансов. Для фиксированных салазок есть только один резонанс – по *M2*. Для подвижной колонны график зафиксировал возбуждение резонанса *M2b*. Мода *M2a* здесь почти не проявляет себя.

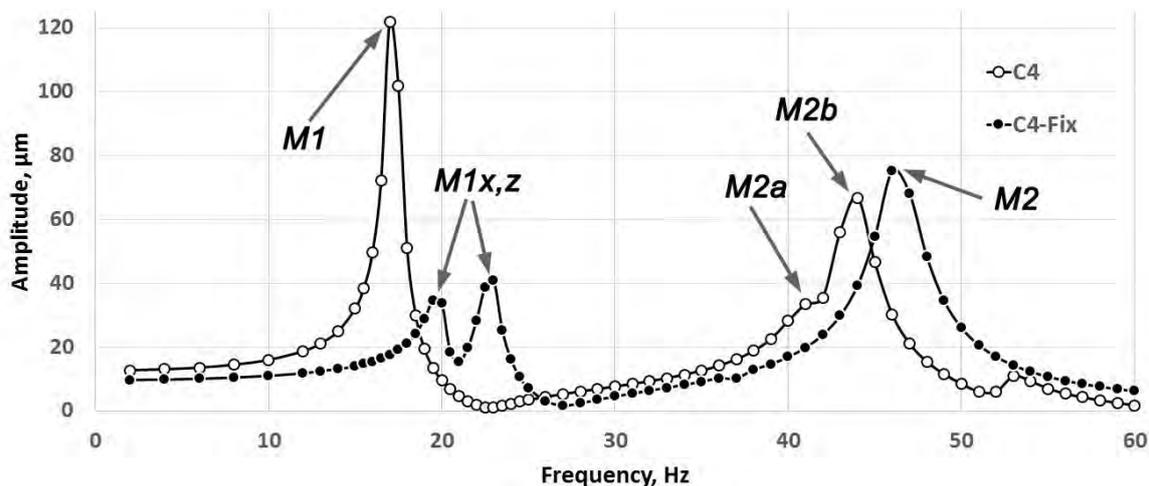


Рис. 4. АЧХ шпинделя в продольном направлении X для случаев подвижной ($C4$) и зафиксированной на салазках колонны ($C4-Fix$). Вход АЧХ – сила 1 кН по X ; выход – амплитуда колебания вдоль X

Видно, что крутильная динамика зафиксированной и подвижной колонн практически одинакова. Не обнаруживается существенного различия ни по высоте, ни по частоте резонансных пиков. Следовательно, управление салазками по X мало влияет на опасные крутильные колебания колонны станка. Одновременно, фиксация салазок хорошо подавляет изгибной пик $M1$. Его высота падает примерно втрое. Появление невысокого двойного пика для $C4-Fix$ на частотах $19 - 24 \text{ Гц}$ связано с кроссингом изгибных резонансов колонн в направления X и Z .

Анализ вариантов внутреннего усиления колонны станка. Далее рассматривается динамика колонны при условии подвижности салазок. На рис.5 представлены АЧХ для разных вариантов усиления именно отливки колонны. Бетонирование кессонов отсутствует (исключая кривую $C4$). Очевидно, что для низкочастотного изгибного резонанса $M1$ система усиления не играет большой роли. Соответствующие пики высоки и почти накладываются друг на друга на частоте $\sim 17 \text{ Гц}$. Динамическая жесткость на резонансе $M1$ во всех случаях не превышает 8 Н/мкм , что недостаточно для точного и устойчивого резания.

Тем не менее, резонанс $M1$ умеренно опасен для станка при правильной настройке системы ЧПУ. Резонансные колебания можно уравновесить подачей противофазного воздействия через двигатель привода.

Большую опасность представляют крутильные колебания по $M2$. Им не может противодействовать ни один из приводов станка. Здесь и обнаруживается различие между *минимальным* вариантом усиления $C0-RibOn$ и *максимальным* $C4$. Частота резонанса поднимается от 35 Гц до 44 Гц . Высота резонансного пика падает для $C4$ в $1,9$ раза. Обеспечивается динамическая жесткость $14,9 \text{ Н/мкм}$. Это дает поле для маневра и обеспечивает некоторую гарантию от наступления регенеративных автоколебаний при резании.

Для $C0-RibOn$ резонансный пик на рис.5 создан модой $M2a$. В случае $C4$ эта мода не проявляет себя. Происходит переключение на связанную моду $M2b$. Для промежуточного структурного варианта $C0$ (двойная стена без бетона) возбуждаются обе моды. Поэтому АЧХ имеет двойной пик. Сравнение вариантов $C0-NoCaps$ и $C0$ отдает предпочтение второму варианту. Следовательно, крышки, дающие цельность внутренней стенке, играют в крутильной динамике положительную роль. Их постановка оправдана.

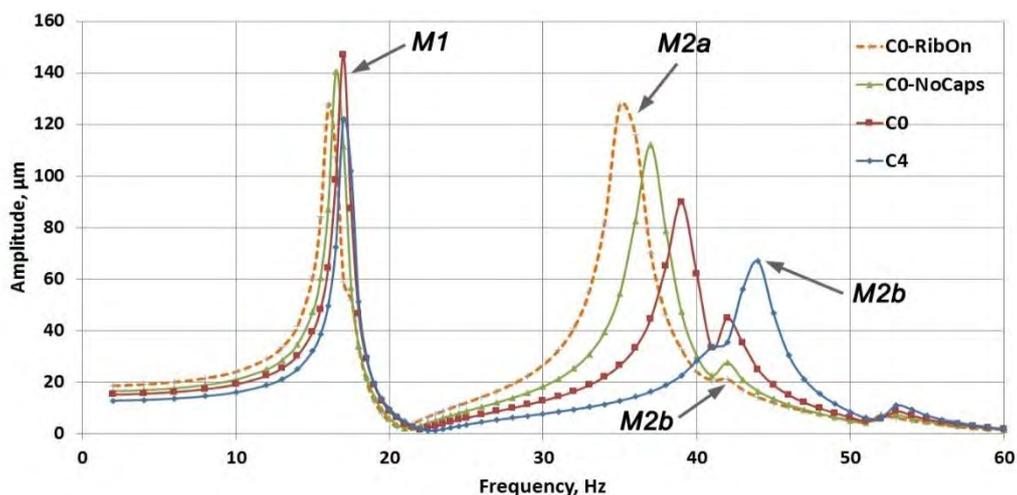


Рис. 5. АЧХ колонны по X для различных случаев исполнения отливки колонны

Итак, в динамике в условиях кручения структурное усиление по типу «двойная стенка + бетонирование кессонов» гораздо эффективнее, чем в статике.

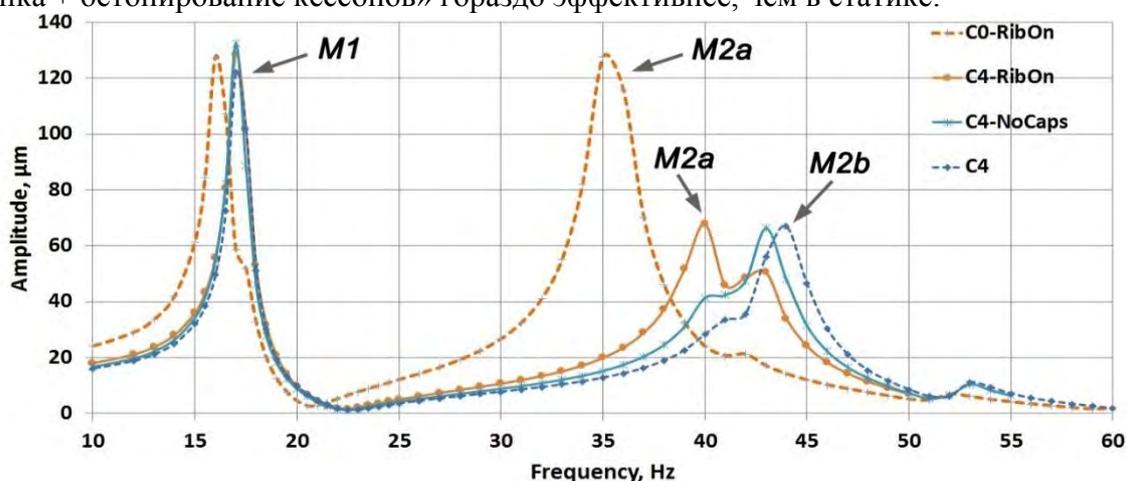


Рис. 6. АЧХ колонны по X для различных случаев усиления при условии бетонирования кессонов

На рис.6 сопоставлены варианты усиления, в которых кессоны заполнены бетоном. Кривая *C0-RibOn* дана для сопоставления. Применение бетона почти не влияет на изгибной резонансный пик *M1*. Его высота и положение по оси абсцисс остаются вполне стабильными. Однако, бетонирование делает крутильную динамику колонны менее опасной для точности резания. Вдвое падают высоты пиков типа “*C4*”. Частоты крутильных резонансов смещаются вверх на 5 – 10 Гц. Поэтому бетонирование кессонов может быть рекомендовано для практики.

На рис.6 вновь (как и на рис.5) видно переключение возбуждения между модами типа *M2*. При умеренном внутреннем усилении по вариантам *C0-RibOn* и *C4-RibOn* возбуждается нижняя крутильная мода *M2a*. Существенное усиление двойной стенкой (варианты *C4-NoCaps* и *C4*) делает активной верхнюю моду *M2b*.

Выводы по результатам виртуальных испытаний станка:

1. Для гидростатических направляющих наблюдается пара связанных крутильных резонансов колонны по модам *M2a* (35 – 40 Гц) и *M2b* (42 – 44 Гц). Им соответствует синфазность и антифазность колебаний шпинделя и салазок.
2. При *минимальном* внутреннем усилении колонны (*C0-RibOn* «одинарная стенка и открытые кессоны») возбуждается только низкочастотный резонанс *M2a*. При *максимальном* усилении (*C4* «двойная стенка и бетонирование закрытых кессонов») возбуждается только высокочастотный резонанс *M2b*.

3. Промежуточные варианты усиления не рекомендуются из-за возбуждения обоих мод. На АЧХ появляется двойной пик, который трудно обойти.
4. Фиксация салазок почти не воздействует на крутильную динамику колонны.
5. Низкочастотный изгибной резонанс колонны **M1** (~17 Гц) не чувствителен к варианту внутреннего усиления. Его ограничивает фиксация салазок.
6. Применение двойной стенки является эффективным приемом усиления колонны против кручения. Окна на внутренней стенке следует перекрывать.
7. В отсутствие бетонирования рекомендуемый вариант усиления колонны – **C0** – «двойная стенка с закрытыми окнами». По сравнению с минимальной структурой **C0-RibOn** резонанс смещается вверх на 5 Гц и ослабевает в 1,5 раза.
8. Показана эффективность подповерхностного бетонирования колонны – только в кессонах. Заливка сердцевины не нужна. Усиление по **C4** переключает возбуждение с моды **M2a** на **M2b**. Пик резонанса уменьшается вдвое.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация: пер. с англ. / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 312 с.*
2. *Туромша, В.И. Баланс жесткости фрезерно-сверлильно-расточного станка с симметричным расположением шпиндельной бабки / В.И.Туромша, С.С.Довнар, А.С.Трусковский, И.И.Шумский. // Вестник ГГТУ им. П.О.Сухого. №3 (50), 2012, с.19-29.*
3. *Василевич, Ю.В. Модальный анализ несущей системы тяжелого горизонтального многоцелевого станка с помощью МКЭ / Ю.В.Василевич, С.С.Довнар, И.И.Шумский // Наука и техника. 2014. - № 4 . С.14 - 24.*
4. *Василевич, Ю.В. Моделирование и анализ динамики несущей системы фрезерно-сверлильно-расточного станка с моностойкой / Ю.В.Василевич, С.С.Довнар, А.С.Трусковский, И.И.Шумский // Наука и техника. 2015. - № 3. С. 9 - 19.*
5. *Металлобетонные базовые конструкции металлорежущих станков / М.И.Браиловский, А.Г.Воскобойник, А.А.Воскобойник. – Коломна, Воентехиздат. – 2010. – 76 с.*
6. *Lopez de Lacalle, L.N. Machine Tools for High Performance Machining // L.N. Lopez de Lacalle, A. Lamikiz. – Springer. – 2009. – 442 p.*

РЕШЕНИЕ АВТОНОМНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ ПОСТРОЕНИИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Причиной высокой проходимости колесно-шагающего движителя является дискретность следов. В работе [1] были рассмотрены вопросы работы данного движителя в составе транспортного средства: как на его эффективность влияет совместное применение ведущих колесно-шагающих движителей и ведомых круглых колес. В такой ходовой системе ведомые круглые колеса уменьшают преимущества от применения ведущих колесно-шагающих движителей, так как происходит прокладка сплошной колеи и затруднено преодоление препятствий. Следовательно, целесообразно использовать в ходовой системе исключительно колесно-шагающие движители. В ряде случаев, когда это оправдано, ходовая система может быть с полным приводом. Если же нет полного привода, то возможно совместное применение колесно-шагающих движителей двух типов: упомянутых выше, в качестве ведущих, и движителей упрощенной конструкции в качестве ведомых (рисунки 1, 2).

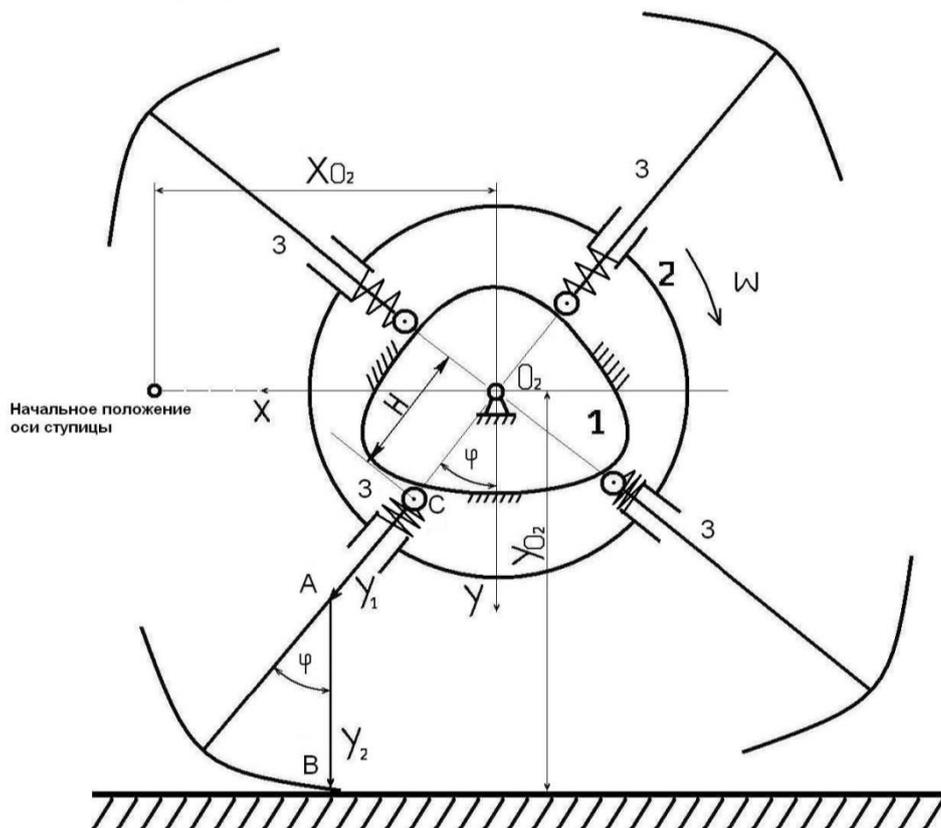


Рис. 1. Ведомый колесно-шагающий движитель с четырьмя ногами

В состав колесно-шагающего движителя упрощенной конструкции согласно рисунку 1 входят звенья: жестко закрепленный на оси O_2 кулачок 1, совершающее вращение вокруг кулачка с угловой скоростью ω водило 2, перемещаемые водилом ноги 3, что обкатываются на роликах вокруг неподвижного кулачка. К ногам присоединены

опорные башмаки. Башмаки могут не иметь надежного сцепления с грунтом, поэтому постоянное вращение водила желательно обеспечить за счет цепной передачи от ведущего движителя.

Таким образом, данный движитель представляет собой кулачковый механизм с четырьмя роликовыми толкателями. Для обеспечения постоянного контакта роликов с профилем кулачка предусмотрены прижимные пружины и направляющий канал на наружной поверхности кулачка. Кроме того, возможен и второй вариант упрощенной конструкции колесно-шагающего движителя, который имеет только три ноги. Этот вариант движителя может обеспечивать тот же размер шага, что и вариант с четырьмя ногами, имея при этом меньшие общие габариты (рисунок 2).

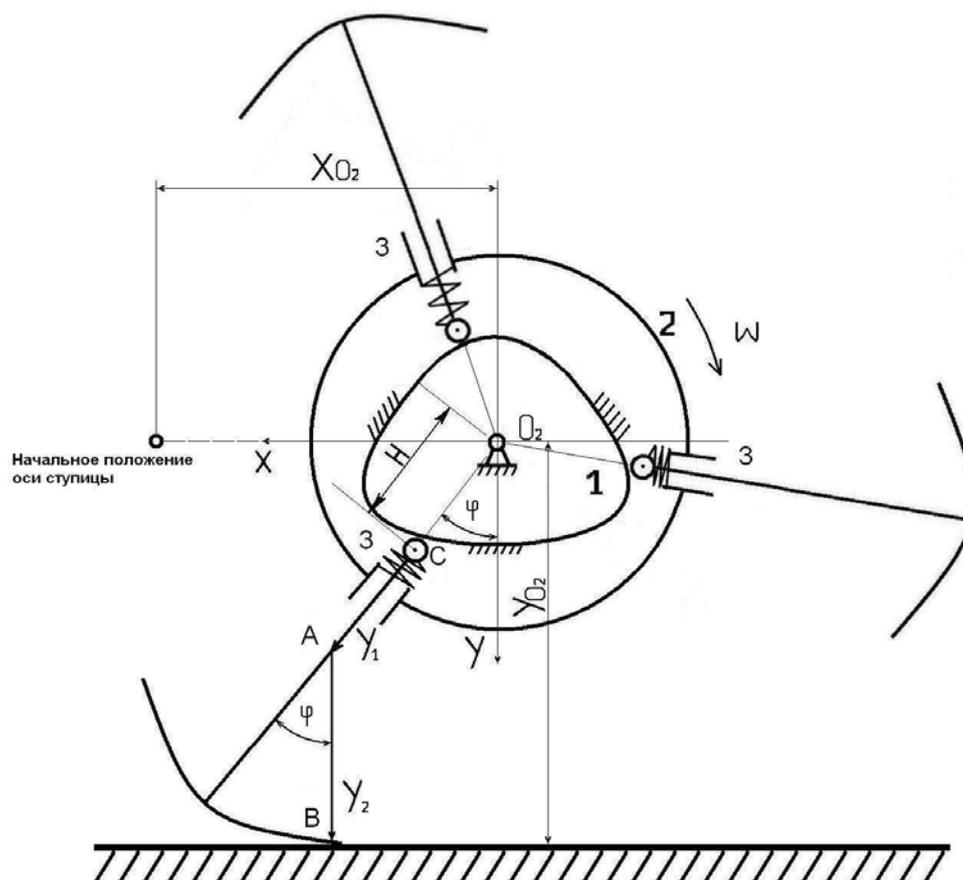


Рис. 2. Ведомый колесно-шагающий движитель с тремя ногами

Таким образом, возможны конструкции ходовых систем нескольких типов. Возможна система с четырьмя ведущими шагающими колесами (полный привод), а также системы с ведущими и ведомыми шагающими колесами. Ведомые движители могут быть как четырехногими, так и трехногими. Данные ходовые системы имеют сравнительно простую и технологичную конструкцию, совмещают в себе преимущества колесного и шагающего способов передвижения.

Таким образом, данные ведомые движители представляет собой кулачковые механизмы с четырьмя или тремя роликовыми толкателями. Для обеспечения постоянного контакта роликов с профилем кулачка предусмотрены прижимные пружины и направляющий канал на наружной поверхности кулачка. Что касается опорных башмаков, то для определения их профиля применяется методика анализа плоских кривых, изложенная в работах [2, 3].

Вертикальное положение оси O_2 ступицы составит:

$$Y_{02} = (H + Y_1) \cdot \cos \varphi + Y_2 \quad (1)$$

Горизонтальное перемещение оси ступицы:

$$X_{02} = (H + Y_1) \cdot \sin \varphi + \int_0^{\varphi} \left(Y_2 - \frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi \right) \cdot d\varphi \quad (2)$$

Аналог скорости по горизонтали:

$$\frac{dX_{02}}{d\varphi} = \frac{dH}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + (H + Y_1) \cdot \cos \varphi + Y_2 \quad (3)$$

При условии движения по плоской поверхности, очень важно обеспечить постоянное значение вертикального положения оси O_2 ступицы:

$$Y_{02} = (H + Y_1) \cdot \cos \varphi + Y_2 = \text{const}$$

Следовательно, получаем равенство:

$$(H + Y_1) \cdot \cos \varphi + Y_2 = R_0 + r + C \quad (4)$$

где: R_0 – радиус начальной окружности кулачка, м; r – радиус ролика, м; C – длина стойки башмака, м.

После подстановки формулы (4) в выражение (3) получаем:

$$\frac{dX_{02}}{d\varphi} = \frac{dH}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + R_0 + r + C \quad (5)$$

Таким образом, задача заключается в том, чтобы определить функцию $H(\varphi)$, затем найти функции $Y_1(\varphi)$ и $Y_2(\varphi)$ при заданных величинах C , R_0 , r согласно работам [1, 2]. По функции $H(\varphi)$ строим профиль неподвижного кулачка в координатах осей X и Y , приведенных на рисунках 1, 2. Для расчетов используем приведенные ниже формулы из работы [3]:

$$\begin{cases} X = H \cdot \sin \varphi - r \cdot \sin \psi, \\ Y = H \cdot \cos \varphi - r \cdot \cos \psi. \end{cases} \quad (6)$$

$$\psi = \varphi - \arctg \left(\left(\frac{dH}{d\varphi} \right) / H \right). \quad (7)$$

После этого, по значениям $Y_1(\varphi)$, $Y_2(\varphi)$ можно вычислить координаты X_B и Y_B точек профиля опорного башмака:

$$\begin{cases} X_B = Y_2 \cdot \sin \varphi, \\ Y_B = Y_1 + Y_2 \cdot \cos \varphi. \end{cases} \quad (8)$$

Затем координаты профиля выразим через радиус-вектор ρ и угол его поворота α , что отсчитывается от оси симметрии башмака:

$$\alpha = \arctg(X_B/Y_B) \quad (9)$$

$$\rho = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}. \quad (10)$$

Описанные выше формулы позволяют определить основные геометрические параметры движителя, но открытым остается вопрос, на основании каких критериев следует искать функцию $H(\varphi)$, которая и задает, по сути дела, все характеристики механизма.

Поскольку движитель подвергается серьезным динамическим нагрузкам, возникает проблема обеспечения контактной прочности соприкасающихся поверхностей кулачка и роликов. Как известно, величина контактных напряжений вычисляется по формуле Герца [4]:

$$\sigma_K = 0,418 \cdot \sqrt{\frac{P_{\Sigma} \cdot E}{b \cdot \cos \gamma} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)}; \text{ МПа.} \quad (11)$$

где: P_{Σ} – суммарная сила, действующая вдоль оси толкателя, Н; E – приведенный модуль упругости материалов кулачка и ролика, МПа; b – длина линии контакта кулачка с роликом, мм; γ – величина угла давления, радианы; r – радиус ролика, мм; R – радиус кривизны кулачкового профиля, мм.

Из зависимости (11) можно сделать вывод, что кривизна профиля криволинейной цилиндрической поверхности неподвижного кулачка оказывает серьезное влияние на величину контактных напряжений. Таким образом, при определении функции $H(\varphi)$ будем придерживаться следующего подхода: зададимся некоторой функцией $K(\varphi)$ изменения кривизны линии, эквидистантной профилю кулачка и проходящей через ось вращения ролика при его движении вокруг кулачка. Данная функция должна обеспечивать допустимую величину контактных напряжений. Затем по заданной функции $K(\varphi)$ находим функцию $H(\varphi)$, что позволит в дальнейшем определить все остальные параметры движителя.

При решении задачи о вычислении радиуса кривизны профиля кулачка были получены следующие выражения [1, 3]:

$$\begin{cases} \frac{dH}{d\varphi} = H \cdot \operatorname{tg} \gamma, \\ R = \frac{H}{\left(1 - \frac{d\gamma}{d\varphi}\right) \cdot \cos \gamma} - r. \end{cases} \quad (12)$$

где: $H(\varphi)$ – расстояние между осями кулачка и ролика, мм; $\gamma(\varphi)$ – угол давления кулачка на ролик, радианы; $R(\varphi)$ – радиус кривизны профиля кулачка, мм; r – радиус ролика, мм; φ – угол поворота ступицы, радианы. Примем обозначение: $K(\varphi) = 1/(R(\varphi) + r)$ – кривизна линии, описываемой осью вращения ролика при его качении вокруг профиля кулачка, 1/мм. Для соответствия методике, изложенной в работах [1, 3] примем обозначение, которого будем придерживаться в дальнейшем: $H(\varphi) = \rho(\varphi)$.

Тогда, после выполнения несложных преобразований системы (12), можно получить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\varphi} = \rho \cdot \operatorname{tg} \gamma, \\ \frac{d\gamma}{d\varphi} = 1 - \frac{\rho \cdot K}{\cos \gamma}. \end{cases} \quad (13)$$

Данная система (13) из двух дифференциальных уравнений первого порядка после подстановок и преобразований приводится к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка [1, 5, 6]:

$$K \cdot \eta''_{\varphi\varphi} - K'_{\varphi} \cdot \eta'_{\varphi} + K \cdot \eta + K'_{\varphi} \cdot \sqrt{1 - \eta^2} = 0. \quad (14)$$

В работе [1] были получены формулы:

$$\rho = \frac{\sqrt{1 - \eta^2} - \eta'_{\varphi}}{K} \quad (15)$$

$$\rho = -\frac{(\eta''_{\varphi\varphi} + \eta)}{K'_{\varphi}}. \quad (16)$$

Таким образом, для нахождения уравнения $\rho(\varphi)$ плоской кривой в полярных координатах следует из уравнения (14) найти функцию $\eta(\varphi)$, а затем воспользоваться выражением (15) или (16). Так как $H(\varphi) = \rho(\varphi)$, находим расстояние между осями кулачка и ролика $H(\varphi)$, а затем по формулам (1-10) определяем все остальные параметры движителя.

Для решения уравнений типа (14) можно воспользоваться методом, позволяющим привести их к линейному виду, чтобы затем получить через разложение в ряд аналитическое решение высокой точности [5, 6]:

$$K \cdot \eta''_{\varphi\varphi} - K'_{\varphi} \cdot \eta'_{\varphi} + K \cdot \eta + K'_{\varphi} \cdot \sqrt{1 - \eta^2} = 0;$$

$$\lambda(\varphi) = \sqrt{1 - (\eta(\varphi))^2}; \quad (17)$$

$$\eta(\varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \varphi^i;$$

$$\lambda(\varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot \varphi^i;$$

$$(\lambda(\varphi))^2 + (\eta(\varphi))^2 = 1. \quad (18)$$

Произведем дифференцирование по углу φ :

$$2 \cdot \lambda(\varphi) \cdot \frac{d\lambda(\varphi)}{d\varphi} + 2 \cdot \eta(\varphi) \cdot \frac{d\eta(\varphi)}{d\varphi} = 0;$$

$$\lambda(\varphi) \cdot \frac{d\lambda(\varphi)}{d\varphi} = -\eta(\varphi) \cdot \frac{d\eta(\varphi)}{d\varphi};$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot \varphi^i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} j \cdot b_j \cdot \varphi^{j-1} \right) = - \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \varphi^i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} j \cdot a_j \cdot \varphi^{j-1} \right); \quad (19)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i \cdot \varphi^i \cdot j \cdot b_j \cdot \varphi^{j-1} = - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i \cdot \varphi^i \cdot j \cdot a_j \cdot \varphi^{j-1};$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i \cdot j \cdot b_j \cdot \varphi^{i+j-1} = - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i \cdot j \cdot a_j \cdot \varphi^{i+j-1}.$$

Запишем равенства для каждой степени $n = i + j - 1$ переменной φ . Так как индекс $j = n + 1 - i$, то для фиксированного значения степени n все значения j будут определяться величиной i . Запишем равенство для конкретной степени n :

$$\sum_{i=0}^n b_i \cdot (n+1-i) \cdot b_{(n+1-i)} \cdot \varphi^n = - \sum_{i=0}^n a_i \cdot (n+1-i) \cdot a_{(n+1-i)} \cdot \varphi^n.$$

После сокращения на величину φ^n получаем окончательно:

$$\sum_{i=0}^n b_i \cdot (n+1-i) \cdot b_{(n+1-i)} = - \sum_{i=0}^n a_i \cdot (n+1-i) \cdot a_{(n+1-i)}. \quad (20)$$

Для степени $n = 0$ получаем:

$$\sum_{i=0}^0 b_i \cdot (1-i) \cdot b_{(1-i)} = - \sum_{i=0}^0 a_i \cdot (1-i) \cdot a_{(1-i)};$$

$$b_0 \cdot b_1 = -a_0 \cdot a_1.$$

Для степени $n=1$ получаем:

$$\sum_{i=0}^1 b_i \cdot (2-i) \cdot b_{(2-i)} = - \sum_{i=0}^1 a_i \cdot (2-i) \cdot a_{(2-i)};$$

$$2 \cdot b_0 \cdot b_2 + b_1 \cdot b_1 = -2 \cdot a_0 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_1.$$

Для степени $n=2$ получаем:

$$\sum_{i=0}^2 b_i \cdot (3-i) \cdot b_{(3-i)} = - \sum_{i=0}^2 a_i \cdot (3-i) \cdot a_{(3-i)}.$$

$$b_0 \cdot b_3 + b_1 \cdot b_2 = -a_0 \cdot a_3 - a_1 \cdot a_2.$$

Для степени $n=m$ получаем:

$$\sum_{i=0}^m b_i \cdot (m+1-i) \cdot b_{(m+1-i)} = - \sum_{i=0}^m a_i \cdot (m+1-i) \cdot a_{(m+1-i)}.$$

Выполнив преобразования, запишем для четной степени $n=m$:

$$\sum_{i=0}^{0,5 \cdot m} b_i \cdot b_{(m+1-i)} = - \sum_{i=0}^{0,5 \cdot m} a_i \cdot a_{(m+1-i)}. \quad (21)$$

Для нечетной степени $n=m$ получаем:

$$2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{0,5 \cdot (m-1)} b_i \cdot b_{(m+1-i)} \right) + (b_{(0,5 \cdot (m-1)+1)})^2 =$$

$$= -2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{0,5 \cdot (m-1)} a_i \cdot a_{(m+1-i)} \right) - (a_{(0,5 \cdot (m-1)+1)})^2. \quad (22)$$

Итак, заданное дифференциальное уравнение можно представить в виде:

$$K \cdot \eta''_{\varphi\varphi} - K'_{\varphi} \cdot \eta'_{\varphi} + K \cdot \eta + K'_{\varphi} \cdot \lambda = 0. \quad (23)$$

Для начального значения угла $\varphi = \varphi_0 = 0$ необходимо знать величины $\gamma = \gamma_0$, $\rho = \rho_0$, а также значение кривизны линии $K(\varphi_0)$. Получаем значения начальных коэффициентов:

$$a_0 = \sin \gamma_0;$$

$$a_1 = \cos \gamma_0 - \rho_0 \cdot K(\varphi_0);$$

$$b_0 = \cos \gamma_0.$$

Выразим расчетные коэффициенты:

$$b_1 = -a_0 \cdot a_1 / b_0;$$

$$b_2 = (-2 \cdot a_0 \cdot a_2 - a_1^2 - b_1^2) / (2 \cdot b_0);$$

$$b_3 = (-a_0 \cdot a_3 - a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) / b_0.$$

Запишем выражения для расчетных коэффициентов более высокого порядка, исходя из формул (21, 22).

Для четной степени $n=m$:

$$b_{(m+1)} = \left(- \sum_{i=0}^{0,5 \cdot m} a_i \cdot a_{(m+1-i)} - \sum_{i=1}^{0,5 \cdot m} b_i \cdot b_{(m+1-i)} \right) / b_0. \quad (24)$$

Для нечетной степени $n = m$:

$$b_{(m+1)} = \left(2 \cdot \left(- \sum_{i=0}^{0,5 \cdot (m-1)} a_i \cdot a_{(m+1-i)} - \sum_{i=1}^{0,5 \cdot (m-1)} b_i \cdot b_{(m+1-i)} \right) - (a_{(0,5 \cdot (m-1)+1)})^2 - (b_{(0,5 \cdot (m-1)+1)})^2 \right) / (2 \cdot b_0). \quad (25)$$

Для расчета профиля кулачка с учетом допустимого уровня контактных напряжений зададимся функцией кривизны следующего вида: $K = k_0 \cdot e^{k_1 \cdot \varphi}$; где k_0, k_1 – постоянные коэффициенты. Уравнение (14) примет вид:

$$\eta''_{\varphi\varphi} - k_1 \cdot \eta'_{\varphi} + \eta + k_1 \cdot \sqrt{1 - \eta^2} = 0. \quad (26)$$

Получено автономное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка [6]. При решении уравнения (26) задаемся начальными условиями и различными значениями коэффициентов k_0, k_1 . Из полученных вариантов функции $H(\varphi)$ выберем тот, что обеспечивает допустимый уровень контактных напряжений при рациональных значениях остальных параметров механизма движителя.

Функция кривизны и ее производная:

$$K = k_0 \cdot e^{k_1 \cdot \varphi}; \quad (27)$$

$$K'_{\varphi} = k_0 \cdot k_1 \cdot e^{k_1 \cdot \varphi}. \quad (28)$$

Воспользуемся подстановками:

$$\eta = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \varphi^i;$$

$$\eta'_{\varphi} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i \cdot \varphi^{i-1};$$

$$\eta''_{\varphi\varphi} = \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot (i-1) \cdot a_i \cdot \varphi^{i-2};$$

$$\lambda = \sqrt{1 - \eta^2};$$

$$\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot \varphi^i.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \eta''_{\varphi\varphi} - k_1 \cdot \eta'_{\varphi} + \eta + k_1 \cdot \lambda &= 0; \\ \eta''_{\varphi\varphi} &= k_1 \cdot (\eta'_{\varphi} - \lambda) - \eta. \end{aligned} \quad (29)$$

Запишем равенства для каждой степени n переменной φ .

$$\eta = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \varphi^i. \text{ Здесь } n = i.$$

$$\eta'_{\varphi} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i \cdot \varphi^{i-1}. \text{ Здесь } n = i-1.$$

$$\eta''_{\varphi\varphi} = \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot (i-1) \cdot a_i \cdot \varphi^{i-2}. \text{ Здесь } n = i - 2.$$

$$\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot \varphi^i. \text{ Здесь } n = i.$$

Таким образом

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \varphi^n; \quad (30)$$

$$\eta'_{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{(n+1)} \cdot \varphi^n; \quad (31)$$

$$\eta''_{\varphi\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{(n+2)} \cdot \varphi^n; \quad (32)$$

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \varphi^n. \quad (33)$$

Запишем равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{(n+2)} \cdot \varphi^n = \\ & = k_1 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{(n+1)} \cdot \varphi^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \varphi^n \right) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \varphi^n. \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{(n+2)} \cdot \varphi^n = \sum_{n=0}^{\infty} (k_1 \cdot ((n+1) \cdot a_{(n+1)} - b_n) - a_n) \cdot \varphi^n.$$

Запишем равенство для конкретной степени n :

$$\begin{aligned} (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{(n+2)} \cdot \varphi^n &= (k_1 \cdot ((n+1) \cdot a_{(n+1)} - b_n) - a_n) \cdot \varphi^n; \\ a_{(n+2)} &= (k_1 \cdot ((n+1) \cdot a_{(n+1)} - b_n) - a_n) / ((n+2) \cdot (n+1)). \end{aligned}$$

Для степени $n = 0$ получаем:

$$a_2 = (k_1 \cdot (a_1 - b_0) - a_0) / 2.$$

Для степени $n = 1$ получаем:

$$a_3 = (k_1 \cdot (2 \cdot a_2 - b_1) - a_1) / 6.$$

Для степени $n = 2$ получаем:

$$a_4 = (k_1 \cdot (3 \cdot a_3 - b_2) - a_2) / 12.$$

Для степени $n = m$ получаем:

$$a_{(m+2)} = (k_1 \cdot ((m+1) \cdot a_{(m+1)} - b_m) - a_m) / ((m+2) \cdot (m+1)). \quad (34)$$

Таким образом, получены выражения для расчетных коэффициентов ряда (30), с помощью которого будет получено приближенное решение автономного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (26).

Приведем пример расчета. Заданы исходные данные для начального значения угла $\varphi_0 = 0$ радиан: $\gamma_0 = 0$ радиан, $\rho_0 = 50$ мм, $k_0 = 0,01$ мм⁻¹, $k_1 = 0,75$.

Получаем значения коэффициентов разложения в ряд:

$$a_0 = 0,0; \quad a_1 = 0,5; \quad a_2 = -0,1875; \quad a_3 = -0,130208; \quad a_4 = -0,000977.$$

$$b_0 = 1,0; b_1 = 0,0; b_2 = -0,1250; b_3 = 0,093750; b_4 = 0,039714.$$

Таблица 1 – Параметры вычисленной плоской кривой

№	φ , градусы	η	η'	η''	$\cos \gamma$	$K(\varphi)$, мм ⁻¹	ρ , мм
1	0	0,000000	0,500000	-0,375000	1,000000	0,010000	50,00 0
2	5	0,042119	0,464299	-0,443229	0,999113	0,010676	50,09 3
3	10	0,080862	0,422643	-0,511424	0,996725	0,011399	50,36 5
4	15	0,115711	0,375045	-0,579390	0,993283	0,012170	50,80 2
5	20	0,146148	0,321532	-0,646946	0,989263	0,012993	51,39 3
6	25	0,171658	0,262149	-0,713914	0,985157	0,013871	52,12 2
7	30	0,191732	0,196953	-0,780103	0,981447	0,014810	52,97 2
8	35	0,205866	0,126024	-0,845283	0,978580	0,015811	53,92 0
9	40	0,213564	0,049461	-0,909165	0,976929	0,016881	54,94 2
10	45	0,214339	-0,032606	-0,971363	0,976759	0,018023	56,00 5
11	50	0,207718	-0,120010	-1,031367	0,978189	0,019242	57,07 4
12	55	0,193244	-0,212530	-1,088507	0,981151	0,020543	58,10 6
13	60	0,170484	-0,309882	-1,141925	0,985361	0,021933	59,05 5
14	65	0,139030	-0,411695	-1,190563	0,990288	0,023416	59,87 2
15	70	0,098513	-0,517499	-1,233180	0,995136	0,025000	60,50 5
16	75	0,048610	-0,626712	-1,268474	0,998818	0,026691	60,90 1
17	80	-0,010948	-0,738647	-1,295449	0,999940	0,028497	61,01 0
18	85	-0,080366	-0,852574	-1,314394	0,996765	0,030424	60,78 5
19	90	-0,159791	-0,967925	-1,329273	0,987151	0,032482	60,19 0

Приведенные расчеты показали, что разработанная приближенная методика решения данного дифференциального уравнения дает достаточно высокую точность расчетов, достаточную для решения задач конструирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н. Колесно-шагающие движители для транспортного средства высокой проходимости // *Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика»*, Минск, 2013 г., вып. 28. – С. 228–233.
2. Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н. Рациональный профиль опорных башмаков колесно-шагающего движителя // *Наука и техника. Международный научно-технический журнал*. 2013. № 6. – С. 38–42.
3. Жуковец В.Н. Профиль плоского кулачка в виде замкнутой кривой, описанной системой уравнений в параметрическом виде. // *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук*. 2006. № 1. – С. 76–86.
4. Колчин Н.И. Теория механизмов и машин. Структура и кинематика механизмов. Динамика машин и трение. / Н.И. Колчин, М.С. Мовнин. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 616 с.
5. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы: Справочник. Под ред. Богданова Ю.С. – Мн.: Выш. шк., 1995. – 380 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: 1973. – 832 с.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО КОНЕЧНОГО АВТОМАТА

Долгушев Ю.В., Кулецкий С.В., Чигарев В.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение. Не все окружающие нас преобразователи информации выполняют функциональное отображение информации. Результат преобразования вход/выход зачастую зависит не только от того, какая информация в данный момент появилась на входе, но и от того, что происходило раньше, от предыстории преобразования. Огромное множество примеров тому дают биологические системы: например, один и тот же вход - извинение после того, как вам наступили на ногу в переполненном трамвае - вызовет у вас одну реакцию в первый раз и совсем другую в пятый раз, если вам постоянно наступают на ногу и извиняются. Таким образом, существуют более сложные, не функциональные преобразователи информации, реакция их зависит не только от входа в данный момент, но и от входной истории. Такие преобразователи называются автоматами.

Рассмотрим исследуемую задачу: Опишем поведение родителя, отправившего сына в школу. Сын приносит двойки и пятерки. Отец не хочет хвататься за ремень каждый раз, как только сын получает очередную двойку, и выбирает более тонкую тактику воспитания. Задавать автомат удобно графом, в котором вершины соответствуют состояниям, а ребро из состояния S в состояние q , помеченное x/y , проводится тогда, когда автомат состояния S под воздействием входного сигнала x переходит в состояние q с выходной реакцией y . Граф автомата, моделирующего умное поведение родителя, представлен на рис. 1.

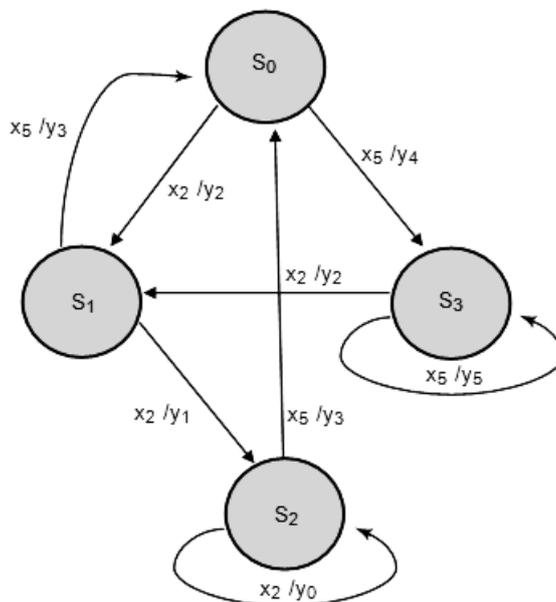


Рис. 1. Граф автомата, описывающий поведение «умного» отца

Здесь конечный автомат изображен графом с вершинами, соответствующими состояниям. Ребра графа соответствуют переходам между состояниями. Ребро помечено входным сигналом, под воздействием которого этот переход происходит, и выходным сигналом, который вырабатывает автомат при получении этого входного сигнала в те-

кущем состоянии. Автомат, моделирующий родителя, имеет четыре состояния $\{S_0, \dots, S_3\}$, и два входных сигнала - оценки, полученные сыном в школе: $\{x_2, x_5\}$. Начиная с начального состояния S_0 (оно помечено входной стрелкой), автомат под воздействием входных сигналов переходит из одного состояния в другое и выдает выходные сигналы - реакции на входы. Выходы автомата $\{y_0, \dots, y_5\}$ будем интерпретировать как действия родителя так:

- y_0 – брать ремень;
- y_1 – ругать сына;
- y_2 – успокаивать сына;
- y_3 – надеяться;
- y_4 – радоваться;
- y_5 – ликовать.

Рассмотрим два вида реализации КА: программную и аппаратную.

Программную реализацию можно выполнить на любом языке высокого уровня разными способами. На рис.2 представлена блок-схема программы, реализующей поведение автомата. Нетрудно увидеть, что топология блок-схемы программы повторяет топологию графа переходов конечного автомата. С каждым состоянием связана операция NEXT, выполняющая функцию ожидания очередного события прихода нового входного сигнала и чтение его в некоторый стандартный буфер x , а также последующий анализ того, какой это сигнал. В зависимости от того, какой сигнал пришел на вход, выполняется та или иная функция y_0 - y_5 и происходит переход к новому состоянию.

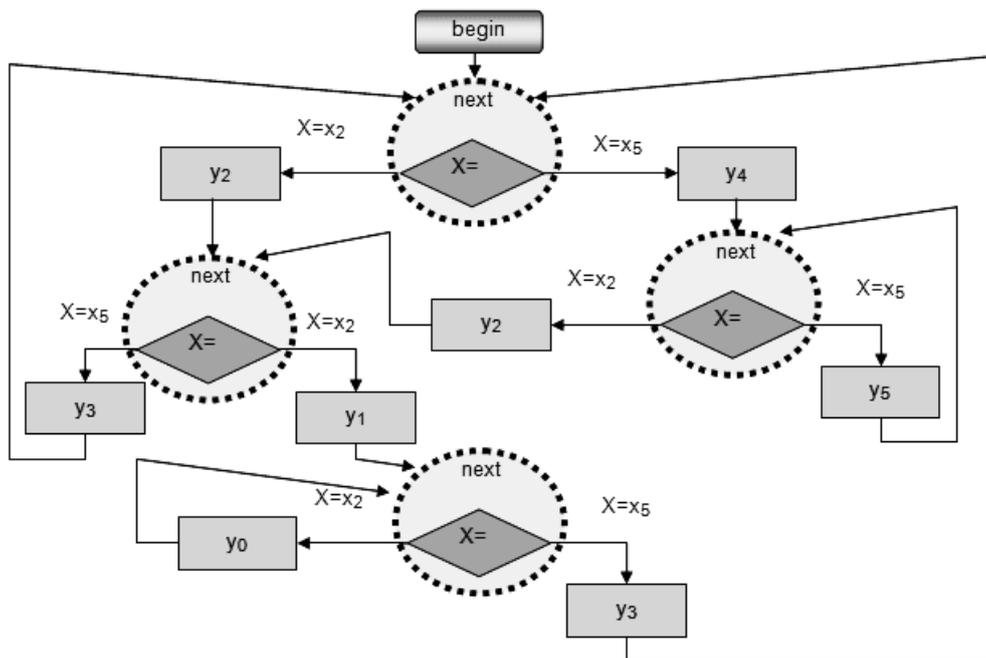


Рис. 2 Схема программы, реализующей поведение конечного автомата.

Необходимо так же подобрать структуру данных, которая содержит в себе информацию о конечном автомате, хранить информацию о различных переходах из одного состояние в другое. Один из вариантов – использовать «хэш-таблицу» с полями «ключ – значение» (key-value). «Ключ» в свою очередь содержит возможные входные параметры, сигналы. Когда «значение» содержит себе необходимую информацию о выходных параметрах, такие как «событие», значение нового состояния графа.

В качестве входных параметров используется текущее состояние конечного автомата, и отметка, которую принес сын. А в качестве выходных – реакция отца, и значение следующего конечного автомата, см. Таблицу 1.

Таблица 1 – Перечисление значений и полей хэш-таблицы

Key	Value
0-2	Успокаивание - 1
0-5	Эйфория - 3
1-2	Словесное наказание - 2
1-5	Надежда - 0
2-2	Наказание ремнем - 2
2-5	Надежда - 0
3-2	Успокаивание - 1
3-5	Эйфория - 3

Аппаратная реализация требует построения устройств памяти для запоминания текущего состояния автомата. Обычно на практике используют двоичные элементы памяти (триггеры), запоминающие значение только одного двоичного разряда. Функциональный блок автомата реализуется как конечный функциональный преобразователь. Таким образом, общий подход к аппаратной реализации конечного автомата такой:

- входные и выходные сигналы и внутренние состояния автомата кодируются двоичными кодами;
- по таблицам переходов и выходов составляются кодированные таблицы переходов и выходов - фактически, табличное задание отображения F рис. 1;
- по кодированным таблицам переходов и выходов проводится минимизация двоичных функций и они реализуются в заданном базисе;
- решаются схемотехнические вопросы синхронизации - привязки моментов выдачи выходного сигнала и изменения состояния внутренней памяти к моментам поступления входных сигналов на вход автомата.

Примером схемы для решения данной задачи будет рис. 3.

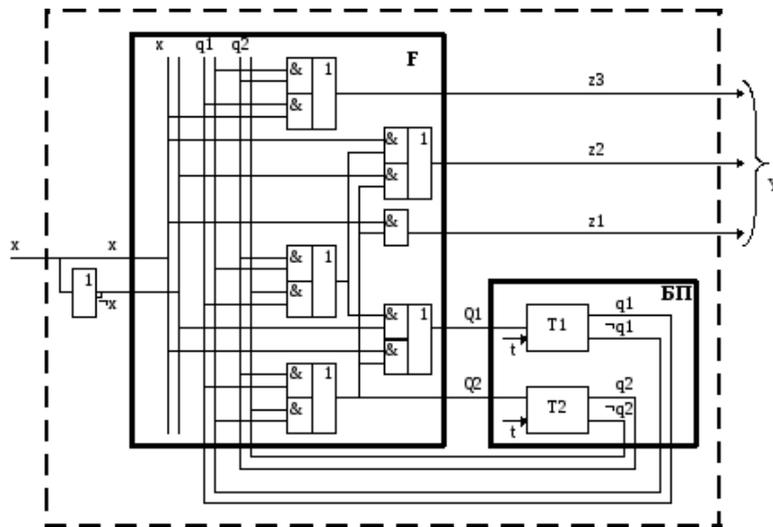


Рис. 3. Функциональная схема. Выделены функциональный блок и блок памяти автомата

Один двоичный разряд x кодирует два входных сигнала, пары двоичных разрядов $q1, q2$; $Q1, Q2$ кодируют соответственно текущее и следующее состояния, разряды $z1, z2, z3$ кодируют выходной сигнал. Блоки $T1$ и $T2$ - триггеры, которые запоминают двоичный сигнал до прихода следующего. Вход t в триггере - синхронизационный вход, разрешающий переключение триггера. Сигнал на этом входе появляется в момент наступления события получения автоматом очередного входного сигнала от окружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поликарпова Н.И., Шалыто А.А. Автоматное программирование. - СПб.: Питер, 2009.-176с.
2. Трахтенброт Б.А., Бардзинь Я.М. Конечные автоматы. Поведение и синтез. - М.: Наука, 1970.
3. Минский М. Вычисления и автоматы. - М.: Мир, 1971.
4. Шалыто А. А., Антипов В. В. Алгоритмизация и программирование задач логического управления. - СПб.: Моринтех, 1996.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ПОВТОРНО-ПЕРЕМЕННОМ НАГРУЖЕНИИ ОБРАЗЦОВ ИЗ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Одинокова О.А.

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия

Технико-экономическая эффективность применения новых материалов в промышленности во многом зависит от того, насколько их использование соответствует задачам повышения надежности и безопасности конструкции.

Однако значительное разнообразие и изменчивость свойств полимеров требуют проведения экспресс испытаний контрольных партий, из которых предполагается выпуск изделий. Гарантированный срок службы конструкций с использованием пластмасс должен быть рассчитан на основе таких строго количественных экспериментальных данных, поэтому математическое описание процессов деформирования становится необходимым при решении практических инженерных задач.

При определении прочностного предела ползучести предложенным нами методом [1,9,10] возникает необходимость в проведении испытаний одного образца растяжением и сжатием в условиях ползучести при равных уровнях постоянного напряжения.

Однако при циклических деформациях обнаруживаются некоторые особенности свойств пластмасс, требующие специального рассмотрения.

Отличие этих испытаний от обычных кратковременных измерений заключается в невозможности нормализации образцов между последовательными нагружениями [2,3,4]. Эти выводы получили экспериментальное подтверждение в работах Г.И. Брызгалова [5] и С.С. Воюцкого [6]. Они подтвердили принцип сложения, то есть справедливость линейной теории ползучести в тех случаях, когда механическое воздействие не приводит к существенным изменениям структуры материала. Результаты таких опытов представляют в виде периодически повторяющихся деформационных кривых (рис 1).

Зависимость деформаций от напряжений можно выразить в интегральной форме. В области малых рабочих деформаций согласно линейно-наследственной теории ползучести Больцмана-Вольтерры, используем интегральное уравнение Вольтерры второго рода:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \cdot \int_0^t k(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (1)$$

где: $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ – напряжения и деформации в момент наблюдения t при одноосном напряженном состоянии;

τ - предшествующее моменту t время;

$k(t-\tau)$ – ядро, которое можно представить в виде комбинации конечного (или бесконечного) числа экспоненциальных функций:

$$k = (t-\tau) = \sum_{i=1}^n A_i \cdot e^{-\alpha_i(t-\tau)} \quad (2)$$

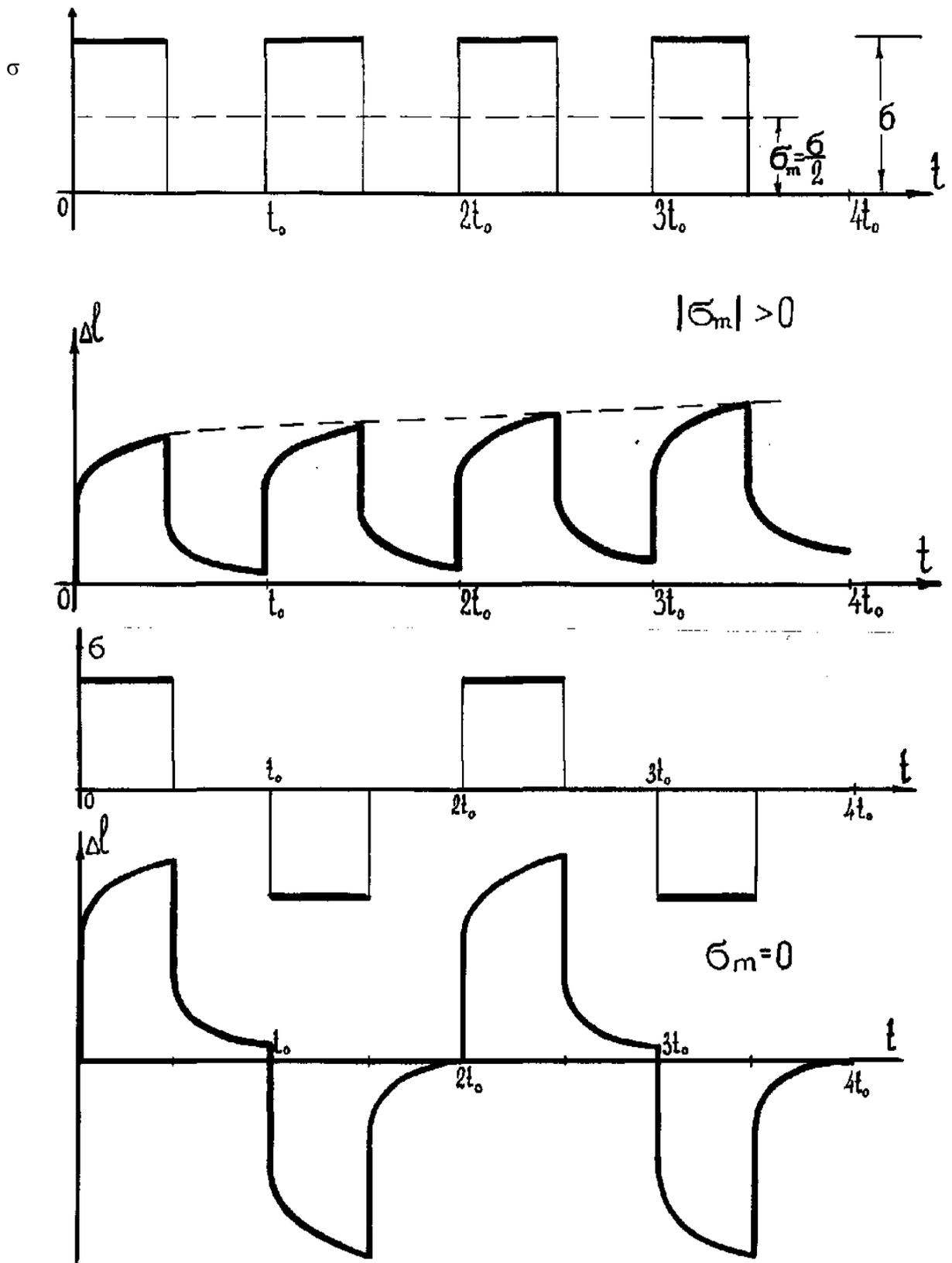


Рис. 1. Графики развития деформации при циклических нагрузках постоянным напряжением

Интегральные соотношения наследственной теории упругости с ядром в виде суммы экспоненциальных функций эквивалентны линейным дифференциальным соотношениям с постоянными коэффициентами. Но при обработке опытных данных оказывается, что такие ядра плохо подходят для описания деформационных свойств реальных поли-

мерных материалов, так как не обладают свойствами сингулярности: при $t = \tau$ они имеют конечную величину.

При постоянном напряжении $\sigma = \sigma_0$ уравнение (1) принимает вид:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot \left[\frac{1}{E} + \int_0^t k(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \right]. \quad (3)$$

В выражении (3) содержание квадратных скобок представляет собой функцию ползучести:

$$П = \frac{1}{E} + \int_0^t k(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau,$$

которую принимаем в виде:

$$\varepsilon(t) = a + b \lg t + c \lg^2 t. \quad (4)$$

Параметры этой функции возможно определить с использованием метода равных сумм.

Механическое кондиционирование образцов при повторно-переменном нагружении

Способ многократного испытания одного образца повторяющейся нагрузкой имеет явные преимущества по сравнению со способом однократного испытания многих образцов вследствие сокращения времени на изготовление, измерение, установку образцов, экономии материалов и энергоресурсов, исключения разброса данных из-за различия свойств самих образцов. Однако при многократном нагружении образца растягивающим (или сжимающим) напряжением в образце накапливаются остаточные деформации, даже если период “отдыха” значителен. Это свидетельствует о наличии ориентационных процессов, приводящих к изменению в структуре полимерного материала и не исчезающих со снятием нагрузки.

Восстановить исходную структуру образца может либо очень длительный “отдых”, либо термостатирование. Но необходимость длительного “отдыха”, несмотря на хорошее качество восстановления исходной структуры, значительно увеличивает продолжительность испытаний, а многократное термостатирование приводит к ускоренному “старению” материала. Кроме того, частые переустановки, связанные с необходимостью помещения образца в термостат, приводят к дополнительным затратам времени и труда на монтаж и демонтаж испытательного стенда. Последние операции значительно снижают точность проводимых испытаний. Поэтому с целью сокращения времени на восстановление первоначальных размеров образца перед каждым последующим нагружением к нему прикладывают статическую нагрузку противоположного знака. Но такое нагружение - жесткое и приводит лишь к принудительному, хотя и быстрому, восстановлению исходных размеров, но не исходной структуры образца.

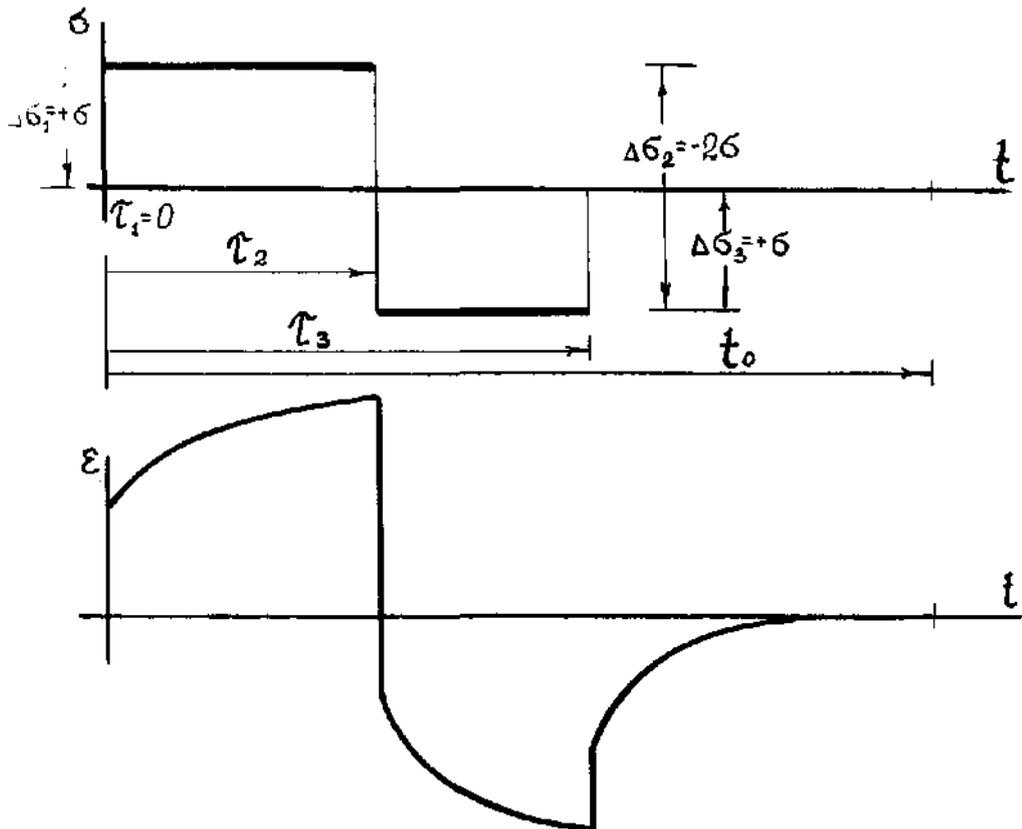


Рис. 2. Первая программа механического кондиционирования образца

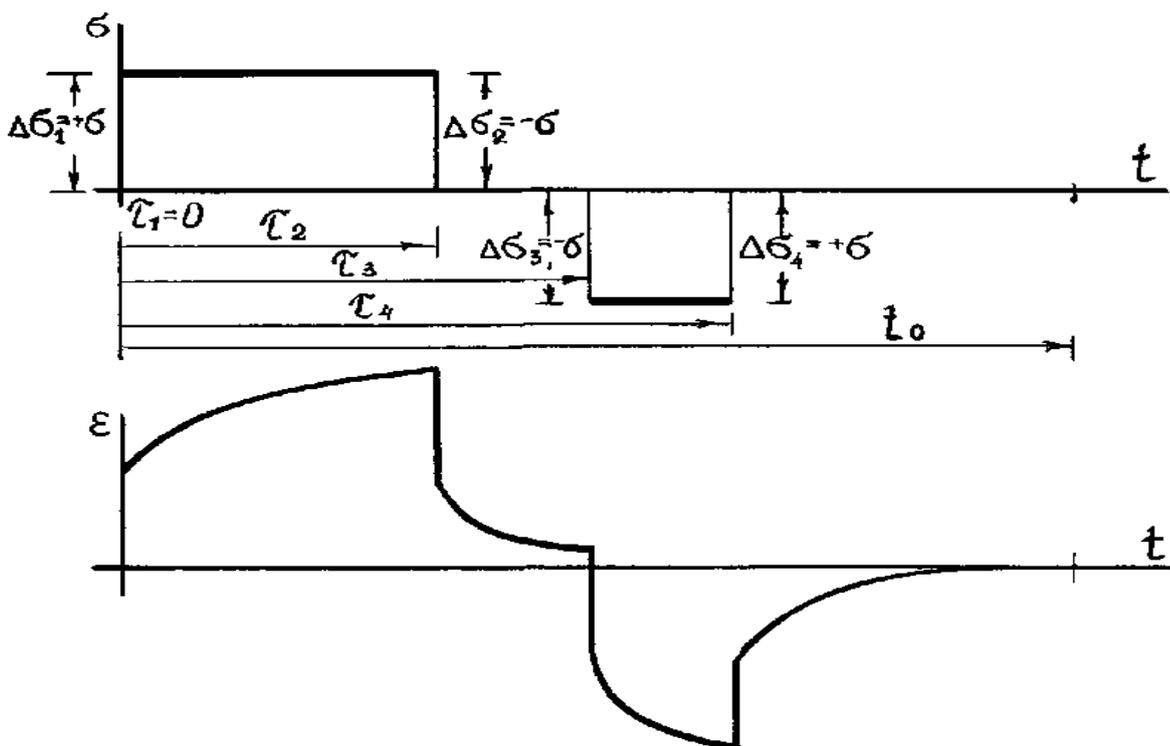


Рис. 3. Вторая программа механического кондиционирования образца

Для снижения влияния предыстории нагружения полимерного образца последующие нагружения производят при напряжениях, больших, чем предыдущие [11,12], но это вносит определенные ограничения в программу испытаний.

Нами разработан способ механического кондиционирования образцов, сочетающий положительный эффект и механического воздействия и естественного “отдыха” образца [7,8]. При этом возможны два варианта, в которых изменения напряжения подчиняются закону

$$\sigma = \sigma_0 \cdot h(t) + \sigma_0 \cdot h_1 \cdot (t - \tau_i),$$

где h – функция Хевисайда.

При $t < 0$ $h = 0$, а при $t > 0$ $h = 1$.

По первому варианту схема кондиционирования представлена на рис. 2. Нагружение образца постоянным напряжением σ_0 производят в момент времени $t=0$. Тогда τ_1 также равно нулю.

В этом случае длительность испытания определяет τ_2 , которое известно заранее. В момент $t = \tau_2$ на образец воздействует напряжение $\sigma = -2\sigma_0$. Длительность обратного нагружения определяется величиной τ_3 , которое нужно подобрать таким образом, чтобы к моменту времени $t=t_0$, большему, чем τ_3 , деформация образца стала равна нулю. При этом τ_3 определяет начало “отдыха” образца.

При $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ условие кондиционирования запишется следующим образом:

$$\varepsilon(t_0) = \sigma \cdot P^+(t_0 - 0) - 2\sigma \cdot P^-(t_0 - \tau_2) + \sigma \cdot P^+(t_0 - \tau_3) = 0,$$

или, сократив на величину σ , получим

$$P^+(t_0 - 0) - 2P^-(t_0 - \tau_2) + P^+(t_0 - \tau_3) = 0. \quad (5)$$

где $P^+(t_0 - \tau_i)$ и $P^-(t_0 - \tau_i)$ – функции ползучести полимера при растяжении и сжатии.

Таким образом, параметры τ_1 , τ_2 , t_0 и σ_0 заданы программой испытания, а определяемым параметром является только τ_3 , который определяет соотношение длительности действия обратного нагружения и “отдыха” образца в пределах отводимого на цикл испытания времени.

Второй вариант программы механического кондиционирования образца представлен на рисунке 3. После основного испытания постоянным напряжением $\sigma = \sigma_0$ образец получает “отдых” в момент, равный τ_2 , и при $t = \tau_3$ производят обратное нагружение образца, которое длится до $t = \tau_4$. После чего наступает повторный “отдых” образца, длительность которого в момент $t = t_0$ должна закончиться выполнением условия равенства нулю деформации образца. Следовательно

$$\varepsilon(t_0) = \sigma \cdot P^+(t_0 - 0) - \sigma \cdot P^-(t_0 - \tau_2) - \sigma \cdot P^-(t_0 - \tau_3) + \sigma \cdot P^+(t_0 - \tau_4) = 0,$$

или

$$P^+(t_0 - 0) - P^-(t_0 - \tau_2) - P^-(t_0 - \tau_3) + P^+(t_0 - \tau_4) = 0. \quad (6)$$

При заданных параметрах τ_1 , τ_2 , t_0 и $\sigma = \sigma_0$ следует найти соотношения τ_3 и τ_4 , удовлетворяющие выражению (6).

Функции ползучести $P^+(t_0 - \tau_i)$ и $P^-(t_0 - \tau_i)$ определяют по результатам опытов на ползучесть при растяжении и сжатии согласно выражению 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.с. 890132 СССР, МКИ G 01 N 3/08. Способ определения характеристик ползучести образцов материалов / Одинокова О.А., Даниловский Ю.М. (СССР). 1981. Бюл. № 46. 2 с.
2. Глухов Е.Е. Основные понятия о конструкционных и технологических свойствах пластмасс. М.: Химия, 1970. 128 с.

3. Прокопович И.Е., Зединидзе В.А. Прикладная теория ползучести. М.: Стройиздат, 1980. 240 с.
4. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. М.:Наука, 1973. 288 с.
5. Брызгалин Г.И. Испытания на ползучесть пластинок из стеклопластика. // Прикладная механика и техническая физика. 1965. № 1.
6. Упруго-вязкие свойства нетканых текстильных материалов / С.С.Воюцкий, В.А.Каргин, Е.Т.Устинова, М.Н.Штединг // Докл. АН СССР, 1965. Т.160. № 1.
7. А.с. 922576 СССР, МКИ G 01 N 3/00. Способ испытания материалов на ползучесть / О.А. Одинокова, А.В.Одинокоев (СССР). 1982. Бюл. № 15.2 с.
8. Одинокоева О.А., Одинокоев А.В.Способ испытания полимерных материалов на ползучесть: Информ. листок № 82-51 НТД. Хабаровск, 1982.:Межотраслевой территориальный ЦНТИ и пропаганды. 3 с.
9. Odinkova O.A. Creep strength of viscoelastic materials. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Issue 4 (2), (November), Volume 69. "Oxford University Press", 2016. - Pages 657-693.
- 10.Odinkova O.A. Method for determining creep strength. *National science review issue 4 (2), december 2017 volume 4* "Oxford university press" 2017- Pages 1443-1449.
11. А.с. 373577 СССР, МКИ G 01 N 3/08. Способ определения механической прочности полимерного материала / Л.П.Сошина, Ф.П.Заостровский, А.М.Нудель (СССР). 1973. Бюл. № 14. 2 с.
12. Тернер С. Механические испытания пластмасс: Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1979. 176.

РАЗРАБОТКА ОБОБЩЕННОЙ МАТРИЦЫ ВРАЩЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ МУЛЬТИКОПТЕРА

инженер ¹Трифанков Д.В., к.ф.-м.н. ²Ширвель П.И., асп. ²Конон И.И.

¹ОАО «АГАТ-системы управления» – управляющая компания холдинга “Геоинформационные системы управления” АГАТ

²Белорусский национальный технический университет

При решении поставленных в [1] задач, в части правильного задания, требуемого/желаемого положения объекта исследований в пространстве, а также для осуществления переходов от одной системы координат к другой, будем в дальнейшем применять матрицы вращения. Матрица вращения [2] для любого беспилотного летательного аппарата (вращательная матрица мультикоптера) может быть задана в угловых поворотах, характеризующих текущее положение в пространстве мультикоптера. В дальнейшем матрицу поворота размерностью 3×3 определим, как матрицу преобразования трехмерного вектора положения в евклидовом пространстве, переводящую его координаты из повернутой (связанной) системы отсчета $Oxyz$ в абсолютную систему координат $O_1x_1y_1z_1$ ($Ox_2y_2z_2$). На рис. 1 показаны две правые прямоугольные системы координат: $Oxyz$ с осями Ox , Oy , Oz и система $Ox_2y_2z_2$ с осями Ox_2 , Oy_2 , Oz_2 .

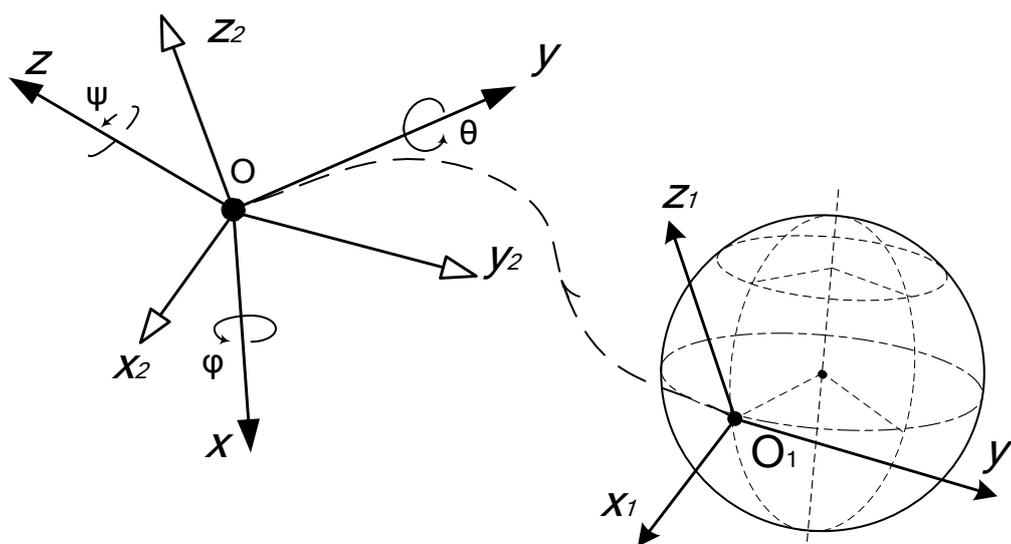


Рис. 1. Схема расположения осей неподвижной (земной) $Ox_1y_1z_1$, локальной кениговой $Ox_2y_2z_2$ и связанной с телом $Oxyz$ систем координат

Считаем, что начала этих систем совпадают и расположены в точке O . Система координат $O_1x_1y_1z_1$ фиксирована в трехмерном пространстве и принята за абсолютную, а $Oxyz$ вращается относительно абсолютной системы $O_1x_1y_1z_1$ ($Ox_2y_2z_2$). Физически система $Oxyz$ рассматривается как связанная система координат. Это означает, что она соответствующим образом жестко связана с твердым телом (мультикоптером) и движется вместе с ним [3].

Пусть (i, j, k) и $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ – единичные векторы, направленные вдоль осей систем $Oxyz$ и $Ox_2y_2z_2$ соответственно. Некоторую точку p в пространстве можно охарактеризовать координатами относительно любой из указанных систем. Для простоты предполо-

жим, что точка p фиксирована и неподвижна в системе отсчета $Oxyz$. Тогда в системах координат $Ox_2y_2z_2$ и $Oxyz$ она имеет координаты

$$\begin{bmatrix} p_{x_2} \\ p_{y_2} \\ p_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} i_{x_2} \cdot i_x & i_{x_2} \cdot j_y & i_{x_2} \cdot k_z \\ j_{y_2} \cdot i_x & j_{y_2} \cdot j_y & j_{y_2} \cdot k_z \\ k_{z_2} \cdot i_x & k_{z_2} \cdot j_y & k_{z_2} \cdot k_z \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}; \quad (1)$$

$$p_{x_2y_2z_2} = R \cdot p_{xyz} \quad (2)$$

$$R = \begin{pmatrix} i_{x_2} \cdot i_x & i_{x_2} \cdot j_y & i_{x_2} \cdot k_z \\ j_{y_2} \cdot i_x & j_{y_2} \cdot j_y & j_{y_2} \cdot k_z \\ k_{z_2} \cdot i_x & k_{z_2} \cdot j_y & k_{z_2} \cdot k_z \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$$p_{xyz} = Q \cdot p_{x_2y_2z_2} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} i_x \cdot i_{x_2} & i_x \cdot j_{y_2} & i_x \cdot k_{z_2} \\ j_y \cdot i_{x_2} & j_y \cdot j_{y_2} & j_y \cdot k_{z_2} \\ k_z \cdot i_{x_2} & k_z \cdot j_{y_2} & k_z \cdot k_{z_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{x_2} \\ p_{y_2} \\ p_{z_2} \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$Q = \begin{pmatrix} i_x \cdot i_{x_2} & i_x \cdot j_{y_2} & i_x \cdot k_{z_2} \\ j_y \cdot i_{x_2} & j_y \cdot j_{y_2} & j_y \cdot k_{z_2} \\ k_z \cdot i_{x_2} & k_z \cdot j_{y_2} & k_z \cdot k_{z_2} \end{pmatrix}; \quad (6)$$

$$Q = R^{-1} = R^T, \quad Q \cdot R = R^T R = R^{-1} R = I_3 \quad (7)$$

Матрицей поворота (или матрицей направляющих косинусов) будем называть ортогональную матрицу, которая используется для выполнения собственного ортогонального преобразования в евклидовом пространстве. Так, например, в двумерном пространстве Oxy поворот можно описать одним углом со следующей матрицей линейного преобразования в декартовой системе:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \mp \sin \alpha \\ \pm \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (8)$$

Поворот выполняем путем умножения матрицы поворота на вектор-столбец, описывающий вращаемую точку. Координаты (x', y') в результате поворота точки (x, y) будут задаваться формулами

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos \alpha \pm y \cdot \sin \alpha \\ y' &= y \cdot \cos \alpha \pm x \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (9)$$

Конкретные знаки в формулах зависят от того, является ли система координат правосторонней или левосторонней, и выполняется ли вращение по или против часовой стрелки. Верхний знак в (9) указан для обычного соглашения: правосторонняя система координат и положительное направление вращения против часовой стрелки (тот же знак верен для левосторонней координатной системы при выборе положительного направления вращения по часовой стрелке; в оставшихся двух комбинациях – нижний знак).

Как известно, любое вращение в трехмерном пространстве может быть представлено как композиция поворотов вокруг трех ортогональных осей. Этой композиции соответствует матрица, равная произведению соответствующих трех матриц поворота. Матрицами вращения вокруг оси декартовой системы координат на угол α в трехмерном пространстве являются матрицы, реализующие:

1) вращение вокруг оси x (здесь приведена матрица поворота от исходной системы координат к результирующей при повороте против часовой стрелки):

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad (10)$$

2) вращение вокруг оси y :

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad (11)$$

3) вращение вокруг оси z :

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Положительным углам при этом соответствует вращение вектора против часовой стрелки в правой системе координат, и по часовой стрелке в левой системе координат, если смотреть против направления соответствующей оси. Правая система координат связана с выбором правого базиса.

При повороте по часовой стрелке в правосторонней системе координат или совершая поворот против часовой стрелки в левостороннем базисе необходимо учесть правило знаков согласно (9), а матрицу обратного поворота можно получить транспонированием матрицы прямого поворота. Таким образом, матрица поворота определит положение основных осей повернутой системы координат относительно абсолютной системы координат. Заметим, что операции умножения матриц не коммутативны поэтому для однозначного определения положения нужно знать не только 3 угла, но и схему умножения матриц. В дальнейшем, матрицы R_x , R_y и R_z используются для определения вращения мультикоптера в фиксированной системе координат, движущегося в связанной системе координат, а обобщенная матрица вращения будет представлена уравнением:

$$D_b^n = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\varphi). \quad (13)$$

В дальнейшем будет необходимо конвертировать динамические характеристики и кинематические параметры движения из одной системы отсчета в другую [4,5]. Очевидно, что угловые взаимозависимости для описания положения можно обобщить на описание угловой ориентации одной системы координат по отношению к другой. Например – конвертирование компонент линейной скорости из неподвижной или скоростной системы координат в систему отсчета, связанную с телом [6].

На схеме рис.1 $O_1x_1y_1z_1(Ox_2y_2z_2)$ направление осей неподвижной системы отсчета; $Oxyz$ – направление осей фиксированной с телом система координат; (φ, θ, ψ) обобщенные координаты угловой ориентации неподвижных осей по отношению к неподвижным. Положение мультикоптера по отношению к локальным осям системы $Oxyz$ можно определить последовательным вращением вокруг глобальных (земных) осей $O_1x_1y_1z_1$,

сонаправленных с осями системы $Ox_2y_2z_2$. Для этого совершаем первый поворот вокруг оси Oz_2 на угол рыскания ψ и получаем промежуточное положение системы отсчета – систему координат $Ox'y'z_2$. Т.е. при повороте на угол ψ вокруг оси Oz_2 получаем следующую зависимость для осей текущей и исходной систем. После вращения вокруг оси z на угол рыскания имеем

$$\begin{aligned} Ox' &= \cos \psi \cdot Ox_2 - \sin \psi \cdot Oy_2 \\ Oy' &= \sin \psi \cdot Ox_2 + \cos \psi \cdot Oy_2 . \\ Oz' &= Oz_2 \end{aligned} \quad (14)$$

Соответственно в матричном виде более удобно записать:

$$\begin{bmatrix} Ox' \\ Oy' \\ Oz' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ox_2 \\ Oy_2 \\ Oz_2 \end{bmatrix} . \quad (15)$$

Второй поворот совершаем вокруг уже повернутой оси Oy' на угол тангажа θ – получаем промежуточную систему $Ox''y''z''$ для которой справедливо:

$$\begin{bmatrix} Ox'' \\ Oy'' \\ Oz'' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ox' \\ Oy' \\ Oz' \end{bmatrix} . \quad (16)$$

Аналогично, последний, третий, поворот выполняем вокруг вспомогательной оси Ox'' ($Ox'' = Ox$) на угол крена φ . Окончательно получая систему координат $Oxyz$, связанную с корпусом мультикоптера:

$$\begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ox'' \\ Oy'' \\ Oz'' \end{bmatrix} . \quad (17)$$

Подставляя в эту формулу выражения для поворота на угол тангажа и рыскания, получим матричную зависимость для перехода от неподвижных осей к подвижным: связанную с корпусом мультикоптера:

$$\begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ox_2 \\ Oy_2 \\ Oz_2 \end{bmatrix} . \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix} = D_n^b \begin{bmatrix} Ox_2 \\ Oy_2 \\ Oz_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$D_n^b = R_x(\varphi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_z(\psi) \quad (20)$$

$$[D_n^b] = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi; & -\cos \theta \sin \psi & \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi; & \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \theta \sin \psi; & -\cos \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \theta; & \cos \varphi \sin \theta \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi; & \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (21)$$

Оси (Ox, Oy, Oz) системы $Oxyz$ представляющие компоненты линейных величин, заданных в $O_1x_1y_1z_1$, сонаправленных $Ox_2y_2z_2$. И (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) представляют такие

же компоненты линейных величин, конвертируемых в осях связанной системы $Oxyz$. Величины, представляющие в дальнейшем интерес: ускорение, скорость, перемещения и т.д., также пересчитываются после вращения в соответствии с вышеописанной схемой (см. рис. 2).

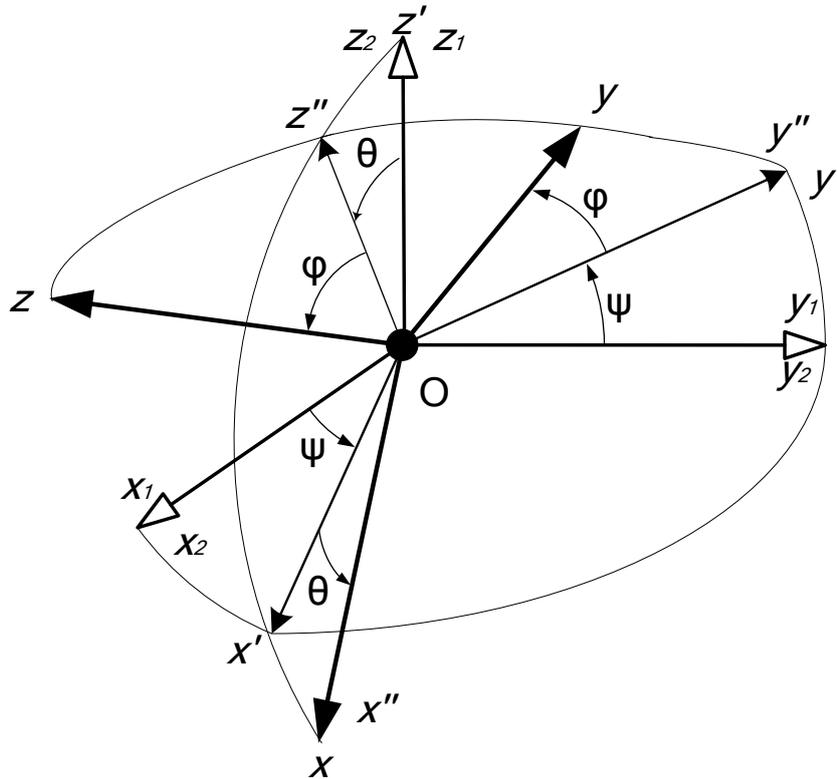


Рис. 2. Взаимное расположение кениговой $O_{x_2}y_2z_2$ и связанной с телом $Oxyz$ систем координат

Положение мультикоптера по отношению к осям неподвижной системы отсчета можно определить последовательным вращением вокруг подвижных осей [7]. Поэтому первый поворот вокруг оси Ox на угол крена φ – получаем $O_{x''}y''z''$. Второй поворот осуществляем вокруг оси Oy'' на угол тангажа θ – получаем $O_{x'}y'z'$. После третьего вращения вокруг оси z' на угол рыскания ψ – получаем направление системы $O_{x_2}y_2z_2$, сонаправленной с неподвижной (земной) системой координат $O_{1x_1y_1z_1}$

Таким образом, направление осей кениговой $O_{x_2}y_2z_2$ (параллельной инерционной системе координат $O_{1x_1y_1z_1}$) определяем обратным поворотом от неизменно связанной с мультикоптером системы $Oxyz$. В соответствии со схемой (рис. 3) направление этих осей соответствуют следующей последовательности поворотов. Обратный поворот на угол ψ вокруг оси Oz''

$$\begin{aligned} O_{x_2} &= \cos \psi \cdot O_{x''} + \sin \psi \cdot O_{y''} \\ O_{y_2} &= -\sin \psi \cdot O_{x''} + \cos \psi \cdot O_{y''} \\ O_{z_2} &= O_{z''} \end{aligned} \quad (22)$$

т.е. соответственно в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} O_{x_2} \\ O_{y_2} \\ O_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} O_{x''} \\ O_{y''} \\ O_{z''} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

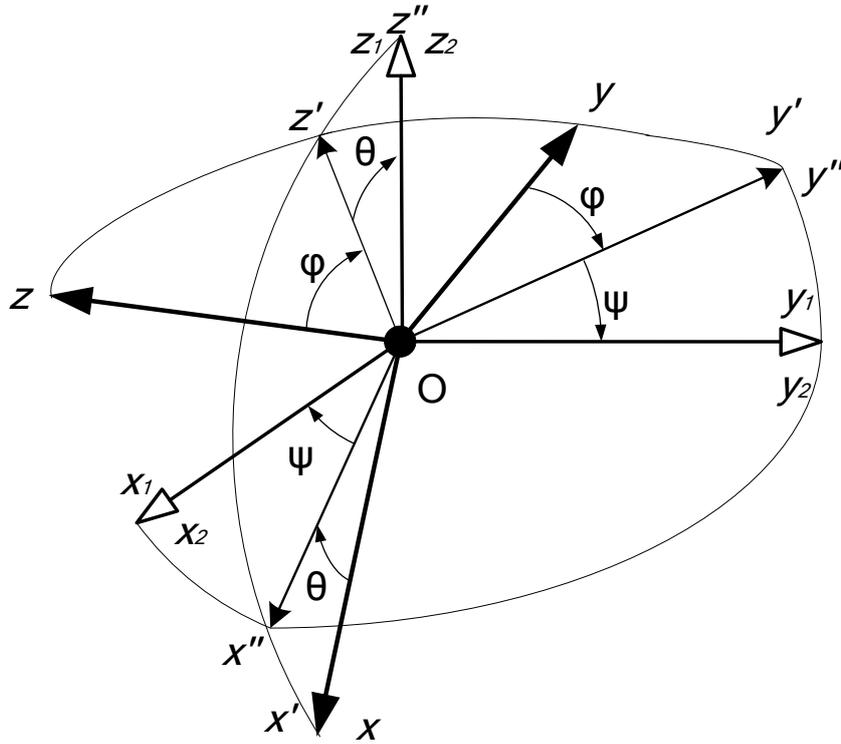


Рис. 3. Взаимное расположение неизменно связанной с мультикоптером системы отсчета $Oxyz$ и кениговой системы координат $Ox_2y_2z_2$

В свою очередь вспомогательные оси Ox'' , Oy'' , Oz'' определяются поворотом на угол θ вокруг оси Oy' , т.е.:

$$\begin{bmatrix} Ox'' \\ Oy'' \\ Oz'' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ox' \\ Oy' \\ Oz' \end{bmatrix}. \quad (24)$$

И, наконец, промежуточные оси Ox' , Oy' , Oz' определяются поворотом в обратном направлении на угол крена φ вокруг оси Ox :

$$\begin{bmatrix} Ox' \\ Oy' \\ Oz' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Подставляя полученные выражения в матричную формулу для определения направления осей $Ox_2y_2z_2$ ($O_1x_1y_1z_1$) определяем направление осей кениговой системы $Ox_2y_2z_2$ (параллельной инерционной системе координат $O_1x_1y_1z_1$) относительно неизменно связанной с мультикоптером системы $Oxyz$:

$$\begin{bmatrix} Ox_2 \\ Oy_2 \\ Oz_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix}. \quad (26)$$

т.е. переход от системы координат $Oxyz$ к неподвижной $O_1x_1y_1z_1$ ($Ox_2y_2z_2$) системе отсчета определяется следующей матрицей перехода

$$\begin{bmatrix} Ox_2 \\ Oy_2 \\ Oz_2 \end{bmatrix} = [D_b^n] \begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix}. \quad (27)$$

$$[D_b^n] = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$[D_b^n] = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi; & \sin \varphi \sin \theta \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi; & \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \theta; \\ -\cos \theta \sin \psi; & \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \theta \sin \psi; & \cos \varphi \sin \theta \cdot \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi; \\ \sin \theta & -\cos \theta \cdot \sin \varphi & \cos \varphi \cdot \cos \theta \end{pmatrix} \quad (29)$$

Матрица обратного поворота получается по аналогии матрицы прямого поворота вращением на углы рыскания, тангажа и крена по часовой стрелке, что соответствуют следующей последовательности:

$$D_b^n = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\varphi). \quad (30)$$

где

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица обратного поворота может быть получена обычным транспонированием матрицы прямого поворота [7]:

$$[D_b^n] = [D_n^b]^{-1} = [D_n^b]^T. \quad (31)$$

Тогда для нашего случая также будут справедливы соотношения

$$\begin{bmatrix} Ox_2 \\ Oy_2 \\ Oz_2 \end{bmatrix} = [D_b^n] \begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix} = [D_n^b]^{-1} \begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix} = [D_n^b]^T \begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Таким образом, с помощью поворотов $R_x(\varphi)$, $R_y(\theta)$, $R_z(\psi)$ можно задать основные движения мультикоптера по отношению к земле в любой момент времени, что поможет в дальнейшем следить за правильностью работы измерительных бортовых систем миниатюрного летательного аппарата.

Движение мультикоптера, описанное в [1] в компонентах силы, моментов, линейных и угловых скоростей, а также текущего положения аппарата в пространстве в дальнейшем будем решать относительно неизменно связанной с телом системы координат $Oxuz$. Так как в последствии будет необходимо конвертировать динамические характеристики движения и кинематические параметры из одной системы отсчета в другую, то очевидно, что угловые взаимозависимости для описания положения можно обобщить на описание угловой ориентации одной системы координат по отношению к другой. Разработанная обобщенная матрица вращения для динамических моделей движения мультикоптера позволяет автоматизировать процесс расчета, например, в случае конвертирования компонент линейной скорости из неподвижной или скоростной системы координат в систему отсчета, связанную с телом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширвель, П.И. *Механико-математическое моделирование динамики полета мультикоптерного летательного аппарата = Mechanics and Mathematical modeling of multicopter dynamics flight* / П. И. Ширвель, А. В. Чигарев, И. И. Конон // *Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник. - Вып. 32. - 2017. - С. 105 – 116.*
2. Горбатенко С.А. и др. *Расчет и анализ движения летательных аппаратов. - М.: Машиностроение, 1971.*
3. Горбатенко С.А. и др. *Механика полета. Общие сведения. Уравнения движения. - М.: Машиностроение, 1969.*
4. Дмитриевский А. А. *Внешняя баллистика. - М.: Машиностроение, 1972.*
5. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. *Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. - М.: Машиностроение, 1973.*
6. Микеладзе В. Г., Титов В. М. *Основные геометрические и аэродинамические характеристики самолетов и ракет. - М.: Машиностроение, 1978.*
7. Лурье А. И. *Аналитическая механика — М.:Физматлит — 1961 г. — 824 с.*

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МОБИЛЬНОГО МЕХАТРОННОГО КОМПЛЕКСА В НЕПРЯМОУГОЛЬНОЙ И СВЯЗНОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

асп. ¹Конон И.И., к.ф.-м.н. ¹Ширвель П.И., инженер ²Трифанков Д.В.,

¹Белорусский национальный технический университет

²ОАО «АГАТ-системы управления» – управляющая компания холдинга “Геоинформационные системы управления” АГАТ

Ранее в [1] рассматривалась механико-математическая модель и вывод определяющих зависимостей уравнений движения мультикоптера. В настоящей работе рассмотрим процесс решения задач расчета и анализа движения полета мобильного мехатронного комплекса мультикоптерного типа. Как и ранее рассматриваем мультикоптер как твердое тело с шестью степенями свободы: три составляющих линейного перемещения и три составляющих углового смещения. В первом приближении используем систему координат, начало которой совпадает с центром тяжести летающего аппарата (рис. 1). Оси x и z лежат в симметричной плоскости, а ось y перпендикулярна ей. Составляющие углового смещения относительно осей координат обозначены φ , θ и ψ (крен, тангаж и рыскание, соответственно) [2].

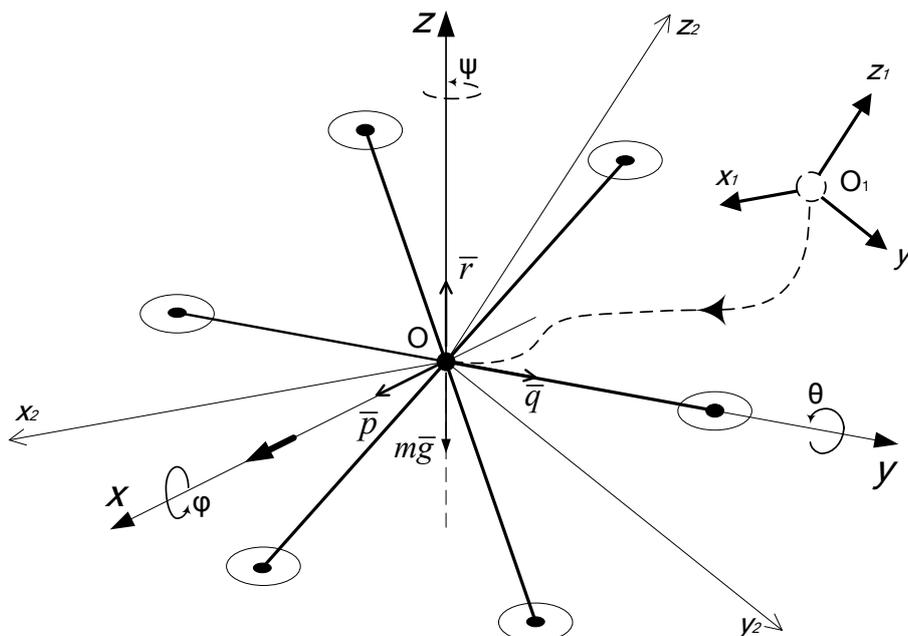


Рис. 1. Схема движения мультикоптера, система координат и отсчет положения в пространстве

Представленные в [1] уравнения описывают обобщенное движение мультикоптера с учетом принятых допущений [3]. Выражая из этих систем динамических уравнений угловые ускорения и скорости поворота, получим систему дифференциальных уравнений вращения мультикоптера вокруг центра масс:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= \frac{I_z M_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{I_{xz} M_y}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{(I_x - I_y + I_z) I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} \omega_x \omega_y + \frac{(I_y - I_z) I_z - I_{xz}^2}{I_x I_z - I_{xz}^2} \omega_y \omega_z; \\ \dot{\omega}_y &= \frac{M_y}{J_y} - \frac{(J_x - J_z) \omega_x \omega_z}{J_y} - \frac{J_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2)}{J_y},\end{aligned}\quad (1)$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{I_{xz} M_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{I_x M_y}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{(I_x^2 - I_y I_x + I_{xz}^2)}{I_x I_z - I_{xz}^2} \omega_x \omega_y + \frac{(I_y - I_x - I_z) I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} \omega_y \omega_z.$$

Перепишем последнюю систему в более компактном виде, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_x}{dt} &= \frac{1}{K} \left[I_z M_x + I_{xz} M_y + (I_x - I_y + I_z) I_{xz} \omega_x \omega_y + (I_y I_z - I_z^2 - I_{xz}^2) \omega_y \omega_z \right]; \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= \frac{1}{J_y} \left[M_y - (J_x - J_z) \omega_x \omega_z - J_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2) \right];\end{aligned}\quad (2)$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{1}{K} \left[I_{xz} M_x + I_x M_y + (I_x^2 - I_y I_x + I_{xz}^2) \omega_x \omega_y + (I_y - I_x - I_z) I_{xz} \omega_y \omega_z \right],$$

где $K = I_x I_z - I_{xz}^2$. Здесь $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора угловой скорости мультикоптера на оси связанной системы координат; M_x, M_y, M_z – проекции результирующего момента крена, тангажа и рыскания; J_x, J_y, J_z, J_{xz} – осевые и центробежный моменты инерции мультикоптера.

Уравнения (2), описывающие основные движения мобильной мехатронной системы крен, тангаж и рыскание, можно значительно упростить, если расположить строительные оси мультикоптера (связную систему координат) по его главным осям инерции. Для такого частного случая, все центробежные моменты инерции будут равны нулю, включая и $I_{xz}=0$ (конечно же, при условии, что мы заранее вычислили направление главных осей инерции летательного аппарата). Кроме того, отметим, что в любом случае, принятая вертикальная симметрия мультикоптера относительно плоскости $x-z$ (при постоянстве массы) даст значение I_{xz} много меньшее, чем I_x, I_y и I_z . Т.е. в любом случае I_{xz} при проведении практических расчетов можно будет в определенной степени пренебречь.

Необходимо подчеркнуть, что если полученная общая система дифференциальных уравнений (2) еще может быть решена в угловых скоростях, то уже найденные скорости вращения не могут быть проинтегрированы для отыскания угловых перемещений φ, θ и ψ . Другими словами, из систем уравнений (1) или (2) нельзя однозначно определить ориентацию мультикоптера в пространстве, так как не представляется возможным найти набор всех параметров, которые бы определяли ориентацию аппарата по имеющимся их производным по времени. В тоже время искомая ориентация в пространстве может быть определена с помощью угловых координат Эйлера (далее используем 3 угловых параметра: φ – угол крена, θ – угол тангажа и ψ – угол рысканья). Теперь необходимо установить взаимосвязь между изменением во времени угловых координат Эйлера и скоростями в связанной системе координат. Для этого примем $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ векторами угловых скоростей, ассоциированными со скоростями поворотов в соответствующих угловых направлениях ψ, θ, φ . Тогда суммарный вектор вращения или мгновенная угловая скорость может быть представлена:

$$\overline{\omega} = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\varphi}\quad (3)$$

$\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ направлены по осям прямоугольной системы координат (рисунок 2).

Далее получим выражения проекций мгновенной угловой скорости мультикоптера через углы крена, тангажа и рысканья и их производные. Заметим, что векторы $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ не взаимно ортогональны – $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ направлены по осям непрямоугольной системы координат (как видно из рисунка). Теперь общие зависимости могут быть записаны между скоростями в связанной системе координат $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и скоростями $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ в Эйлеровых координатах. Заметим, что $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ не взаимно ортогональная тройка векторов (рисунок 2). Общие зависимости между скоростями в связанной системе координат $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и скоростями $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ в Эйлеровых координатах можно записать суммированием соответствующих ортогональных проекций на оси $Oxyz$ (см. рисунок). Для этого необходимо составить кинематические уравнения, характеризующие вращения мультикоптера относительно осей неподвижной (инерционной системы координат). В полученных выше уравнениях заданы проекции угловой скорости относительно связанных с телом осей координат: $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Как видно из рисунка, при переходе из инерционной системы в систему связанную с телом осуществляется вращения мультикоптера последовательно на угол ψ с угловой скоростью $\dot{\psi}$ относительно оси Oz , на угол θ с угловой скоростью $\dot{\theta}$ вокруг оси Oy' и на угол ϕ с угловой скоростью $\dot{\phi}$ вокруг оси Ox . Таким образом, проекции угловой скорости $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ будут направлены по осям непрямоугольной системы координат $Ozy'x$.

Заметим, что используя ранее разработанные матрицы поворота R_x, R_y, R_z связь $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ с угловыми скоростями крена, тангажа и рыскания $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ можно представить

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = R_x \left(\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_y \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) \right) = R_x \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_x R_y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_x R_y R_z \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}; \quad (4)$$

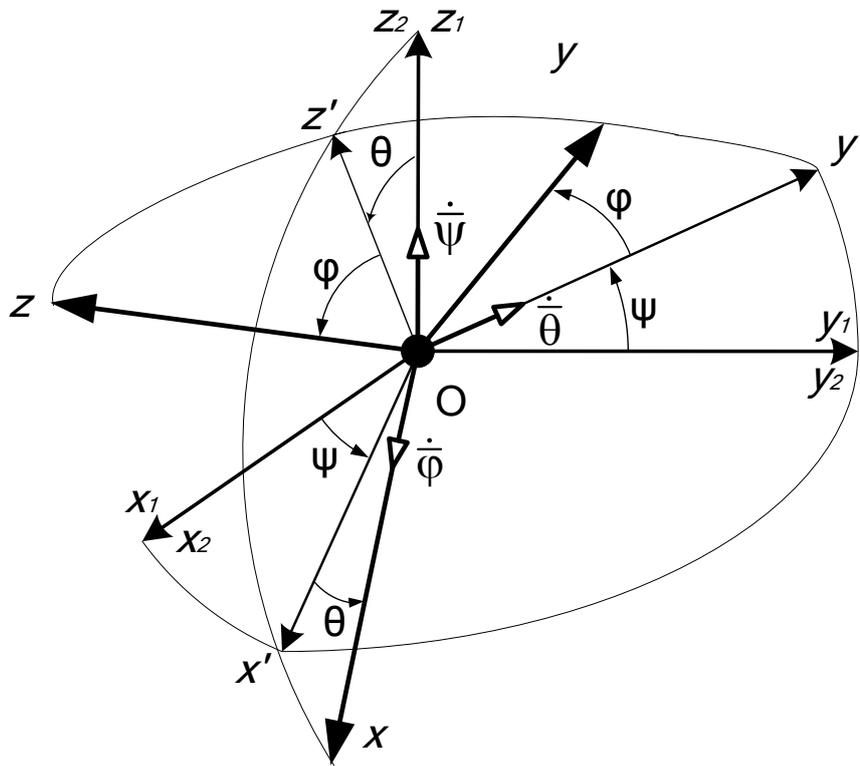


Рис. 2. Схема определения проекций угловой скорости на оси подвижных координат, выраженные через скорости Эйлера

После проведения всех преобразований получим следующие проекции угловой скорости на оси подвижных координат, выраженные через скорости Эйлера

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \sin \theta; \\ \omega_y &= \dot{\theta} \cdot \cos \varphi - \dot{\psi} \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi; \\ \omega_z &= \dot{\theta} \cdot \sin \varphi + \dot{\psi} \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi;\end{aligned}\quad (5)$$

Систему уравнений (5) можно разрешить относительно производных углов Эйлера. Обратное преобразование, соответственно, дает искомое изменение углов Эйлера, которые будут определяться через известные проекции угловой скорости [4-5]. Таким образом, изменения углов Эйлера определяются через проекции угловой скорости:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega_x - \omega_z \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \theta + \omega_y \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \theta; \\ \dot{\theta} &= \omega_y \cos \varphi + \omega_z \cdot \sin \varphi; \\ \dot{\psi} &= \frac{-\omega_y \sin \varphi + \omega_z \cos \varphi}{\cos \theta}.\end{aligned}\quad (6)$$

Уравнения (6) являются кинематическими уравнениями, описывающими движение мобильной мехатронной системы. При проведении расчета может возникнуть неопределенность, когда аппарат поднимается вертикально вверх или опускается вертикально вниз (при угле тангажа $\theta = \pi/2$).

С учетом последних выражений мы можем найти изменение скоростей мультикоптера при переходе от связанной с телом системы координат к Эйлеровым скоростям: можно заменить в (2) вращательные скорости относительно связанной системы координат Эйлеровыми угловыми скоростями. Скорости изменения углов Эйлера могут быть проинтегрированы по времени, и мы получим угловые перемещения (координаты Эйлера), которые определяют текущую ориентацию объекта в пространстве.

Таким образом, решение общих уравнений вращательного движения мультикоптера может быть представлено следующей расчетной схемой для систем дифференциальных уравнений относительно угловых перемещений:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} dt \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} dt \quad (8)$$

Если задать начальные условия

$$\begin{aligned} \omega_x = p = p_0, \quad \omega_y = q = q_0, \quad \omega_z = r = r_0 \quad \text{при } t = 0; \\ \varphi = \varphi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \psi = \psi_0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

то система уравнений (1) или (2) определит единственным образом положение мультикоптера во все время движения, если все проекции моментов сил M_x, M_y, M_z известны.

Уравнения (6-9), (1) или (2) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающую движение свободного твердого тела. Алгоритм их решения может быть следующим: сначала находим угловую скорость в связанной системе координат $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, а потом переходим к мгновенным угловым скоростям $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ и $\dot{\psi} \rightarrow \psi, \dot{\theta} \rightarrow \theta, \dot{\varphi} \rightarrow \varphi$. Определяем ориентацию ψ, θ, φ , т.е. угловые перемещения Эйлера в переменных крен, тангаж и рыскание.

Представленные выше зависимости (5), проекции угловой скорости на оси подвижных координат, выраженные через скорости Эйлера, можно использовать для разработки матрицы перехода от прямоугольной к связанной системе координат, которую зададим в виде:

$$R_{non-ortho}^{body} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin \theta \\ 0 & \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (10)$$

тогда

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = R_{non-ortho}^{body} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin \theta \\ 0 & \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (11)$$

При проведении практических расчетов потребуется также провести обратное преобразование $R_{body}^{non-ortho}$, которое находят по обычным правилам вычисления обратных матриц [5]:

$$R_{Body_to_Non-ortho} = R^{-1}_{Non-ortho_to_Body} = \frac{\tilde{R}}{|R_{Non-ortho_to_Body}|} \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что определитель в (12) равен

$$|R_{Non-ortho_to_Body}| = \cos \theta \quad (13)$$

Записав союзную (взаимную) матрицу, получим для (12)

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \phi \cdot \sin \theta & -\cos \phi \cdot \sin \theta \\ 0 & \cos \theta \cdot \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (14)$$

Таким образом, связь между проекциями угловой скорости в разных базисах окончательно выражается следующими уравнениями:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = R_x \left(\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_y \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) \right) = R_x \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_x R_y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_x R_y R_z \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}; \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin \theta \\ 0 & \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}; \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = R_{body}^{non-ortho} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \phi \cdot \sin \theta & -\cos \phi \cdot \sin \theta \\ 0 & \cos \theta \cdot \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = R_{body}^{non-ortho} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \cdot \operatorname{tg} \theta & -\cos \phi \cdot \operatorname{tg} \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (18)$$

Разработанная матрица перехода от непрямоугольной к связанной системе координат позволяет легко конвертировать и устанавливать взаимосвязь между изменением во времени угловых координат Эйлера и скоростями в связанной системе координат, описывая основные движения мобильной мехатронной системы крен, тангаж и рыскание в соответствии с основополагающими принципами динамики полета [3,6].

**Работа выполняется в рамках совместного проекта БРФФИ-Минобразование Т16МВ-013 (№ государственной регистрации: 20162767 от 12.07.2016)*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширвель, П. И. Механико-математическое моделирование динамики полета мультикоптерного летательного аппарата/ П.И. Ширвель, А.В. Чигарев, И.И. Конон//Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник. - Вып. 32. - 2017. - С. 105 – 116.
2. Горбатенко С. А. и др. Механика полета. Общие сведения. Уравнения движения. – М.: Машиностроение, 1969.
3. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1973.
4. Горбатенко С. А. и др. Расчет и анализ движения летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1971.
5. Лурье А. И. Аналитическая механика — М.:Физматлит — 1961 г. — 824 с.
6. M. V. Cook. Flight Dynamics Principles: A Linear Systems Approach to Aircraft Stability

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СОВМЕСТИМОСТЬ ПО КОНДУКТИВНЫМ ПОМЕХАМ ЗОНДОВОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ МИКРО- И НАНОЭЛЕКТРОНИКИ

к.т.н. ¹Минченко В.А., проф. ²Карпович С.Е., доц. ²Дик С.К., ²Кекиш Н.И.

¹ОАО «Планар», Минск

²УО «Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники», Минск

Принцип построения и комплект аппаратуры. Одним из основных принципов построения ИП является принцип, основанный на заряде и разряде накопительного элемента в качестве которого используется длинная линия (ДЛ) длиной l , в качестве разрядного ключа (коммутатора) – элетромеханическое реле, тиратроны, быстродействующие тиристоры, управляемые и неуправляемые разрядники и др. Простейший тип ИП содержит ДЛ с волновым сопротивлением ρ , заряжаемую через большое сопротивление R_3 ($R_3 \gg \rho$) до напряжения E_n и коммутатор, периодически соединяющий ДЛ с нагрузкой R_n . В случае, если сопротивление коммутатора равно нулю и $R_n = \rho$ на R_n возникает импульс тока амплитудой $E_n / 2$ и длительностью (при скорости распространения сигнала V) $t = 2l/V$ (для ИП с накопительной емкостью $t = 0,7 R_n C$). Наилучшей стабильностью выходных сигналов обладает ИП, использующий управляемый газовый разрядник и тиристорные многокаскадные формирователи помех с бегущей волной напряжения и тока. Как правило, ИП имеют форму близкую к экспоненциальной (ИП подключаются к сети переменного тока через развязывающее устройство). Лучшую форму имеет так называемый самосогласованный ИП. Имитаторы помех, использующие коммутаторы в виде реле или тиратронов, вырабатывают сигналы длительностью соответственно 10-20 нс и 30-50 нс (длительность фронта ИП зависит от типа формирующего элемента).

Принцип действия ГЭСР основан на заряде накопительной емкости напряжением 1-15 кВ и последующем разряде через электрод (выполненный в виде шара) на корпус испытуемого оборудования. Основными узлами ГЭСР являются: регулируемый источник высокого напряжения, накопительный конденсатор, разрядник-шар диаметром 8 мм (закрепленный на ручке из диэлектрика), зарядно-разрядные резисторы, разрядный блок нагрузки 2 Ом из безындукционных резисторов. Конструктивно ГЭСР выполнен в виде пистолета, заканчивающегося разрядным шариком.

Принцип действия ГЭСР-К основан на заряде от высоковольтного источника питания емкости заданного значения и разряда с известной постоянной времени через ртутное реле. ГЭСР-К имеет режим получения однократного импульса и режим генерации с частотой 20 Гц для определения метрологических характеристик.

Разработаны цифровые многоканальные измерители параметров помех и регистраторы помех [2].

Методы измерений при метрологической аттестации. Микро- нано- и пикосекундный диапазон сигналов и высокое напряжение (несколько киловольт) аппаратуры испытаний электронного оборудования и изделий микроэлектроники на электромагнитную совместимость (АИ ЭМС) и отсутствие необходимой по полосе пропускания измерительной аппаратуры потребовали поиска методов, методик и средств измерений с помощью которых возможно с приемлемой погрешностью оценить метрологические характеристики разработанной аппаратуры как специальных средств измерений.

Основными методами измерения параметров ИП, ГЭСР, РП и ИПП являются осциллографический, неосциллографический, с использованием специализированных измерителей и цифровой, с использованием импульсных вольтметров. Анализ методов и средств измерения параметров АИ ЭМС показывает, что каждый из указанных методов имеет недостатки, в том числе и значительную погрешность измерения (до $\pm 20\%$). Поэтому необходима разработка специальных методик, с помощью которых можно уменьшить суммарную погрешность измерения параметров АИ ЭМС за счет уменьшения ряда составляющих погрешностей, оптимального использования средств измерений, а также аттестации ряда широкополосных узлов и разработке специальных методик и программ аттестации АИ ЭМС. В основе указанных методик положены следующие предложенные методы измерений АИ ЭМС:

– метод прямого измерения параметров ИП, РП, ИПП с использованием аттестованного с помощью импульсного калибратора В1-5 и калибратора напряжения В1-12 высокоомного делителя (аттенюатора) и осциллографа с повышенным допустимым входным напряжением и временем нарастания переходной характеристики $t = 5-10$ нс (для аттестации ИП с $t_{\phi} = 30-50$ нс);

– метод прямого измерения с использованием комплекта широкополосных 50-омных аттенюаторов типа Д2 (50 дБ) и специального осциллографа С9-4А ($t_n = 0,7$ нс), используемого в режиме подачи измеряемого сигнала непосредственно на трубку осциллографа. Для обеспечения временного сдвига используется линия задержки ЛЗ-05 от осциллографа С1-70 или генератор Г5-54 (метод используется для измерения в 50-омных трактах одиночных и редкоповторяющихся сигналов от имитаторов помех, с длительностью фронта $t_{\phi} = 3-15$ нс);

– метод косвенного измерения (с расчетом коэффициента передачи канала) путем калибровки измерительного канала с помощью прецизионного генератора Г5-60 и использования широкополосного (350 МГц) осциллографа С1-108 со встроенным цифровым измерителем амплитудных и временных параметров ($\delta = \pm 1\%$), уменьшающим субъективную ошибку оператора (метод используется для аттестации ИП с $t_{\phi} = 5-15$ нс и исключает аттестацию аттенюаторов); метод косвенного измерения разрядного тока (30 А) ГЭСР путем измерения импульсного напряжения с последующим расчетом значения разрядного тока;

– дифференциальный метод для определения параметров регистраторов импульсных помех: испытательный сигнал формируется путем смещения в соединительном щите сетевого напряжения, подаваемого от эквивалента сети (типа NNB-101) и импульсного напряжения амплитудой 600-1000 В от имитатора помех ИП-1; оба напряжения подаются на входы осциллографа С1-70 (1У13, $K = 20$ В/дел), после вычитания напряжения сети из испытательного сигнала измеряются параметры помех (указанные измерения недостижимы другими методами и обеспечивают измерение параметров импульсных параметров при наличии сетевого напряжения);

– компенсационный метод для точного измерения амплитуды и выброса импульсов: использует калибратор В1-12, компенсационные головки и двухканальный осциллограф, имеющий аттестованный с погрешностью $\pm 1\%$ усилитель ВО (метод используется для аттестации импульсов имитаторов помех);

– прецизионный формирователь напряжения испытательного сигнала с временем нарастания 0,5-0,6 нс, амплитудой 100-2000 В и погрешностью по амплитуде $\pm(0,1-0,2)\%$ (используется для аттестации параметров измерителей помех).

Кроме того, при аттестации проведена оценка предела основной погрешности ИП, РП, ИПП и определены ее составляющие: неисключенная систематическая и случайная составляющая погрешности.

Практическая реализация указанных методов и методик измерения ИП, РП, ИПП в виде структурных схем со всеми согласующими, переходными и вспомогательными

устройствами показала, что погрешность измерения не выходит за пределы $\pm(3-5) \%$, что достаточно при МА АИ ЭМС.

Расчётная модель метрологической аттестации. Особенностью измерителей помех является возможность запоминать и накапливать информацию о форме помехи с последующим выводом ее (за определенный интервал времени), а также быстродействие, соответствующее наносекундному диапазону.

Метрологическая аттестация АИ ЭМС может проводиться поэлементно, тогда погрешность i -го узла определяется по формуле

$$\Delta a_i = Y_0 - f(x_0), \quad (1)$$

где x_0 – калиброванный сигнал от образцового средства измерений.

Затем определяется суммарная погрешность АИ ЭМС (при условии некоррелированности погрешностей отдельных узлов).

Расчетными и экспериментальными методами проведена оценка составляющих имитаторов помех в частности систематической Δs , неисключенной систематической Δos , случайной Δc , а также предела допустимой основной погрешности Δop . Предел допустимой основной погрешности ИП

$$\Delta op = \Delta s + \sqrt{os^2 + t^2 \sigma^2 (\Delta c)}, \quad (2)$$

где $k = 1,1$, $p = 0,95$; σ – среднее квадратическое отклонение; t – коэффициент Стьюдента; Δs – погрешность меры.

Неисключенная систематическая составляющая погрешности

$$\Delta os = \sqrt{\Delta am^2 + \Delta z^2 + \Delta vo^2 + \Delta p^2} \quad (3)$$

где Δam , Δz , Δvo , Δp – соответственно погрешности, вносимые аттенуатором, из-за задержки сигнала, визуального отсчета и рассогласования измерительного тракта Составляющие погрешности ослабления и суммарная погрешность определяется формулой

$$\Delta am = \Delta n \sqrt{\Delta^2 o + \Delta c^2 + \Delta^2 p}, \quad (4)$$

где Δn – погрешность из-за нелинейности аттенуаторов; Δc – случайная составляющая погрешности аттенуатора; Δp – погрешность от рассогласования аттенуатора; Δo – погрешность образцового (эталонного) аттенуатора

С учетом всех составляющих, в том числе погрешности образцового аттенуатора $\Delta o = \pm(0,05-0,1)\%$, погрешность ослабления аттенуатора Δam составляет не более $\pm(0,5-1)\%$, а погрешность имитаторов помех по амплитуде в пределах $\pm(3-20)\%$.

Считая погрешности, вносимые каждым узлом измерителя некоррелированными можно оценить неисключенную составляющую погрешности измерителя помех с помощью следующей формулы:

$$\Delta os = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta^2 a + \Delta^2 n^2 + \Delta^2 \phi + \Delta^2 o}, \quad (5)$$

где Δy , Δa , Δn , $\Delta \phi$, Δo соответственно погрешность масштабного (согласующего) усилителя, аттенуатора, АЦП, устройства обработки информации, устройства отсчета.

Допустимая погрешность Δop измерителя с учетом систематической Δos и случайной Δc составляющих определится по формуле:

$$\Delta op = \sum_{l=1}^P \Delta s_l + k \sqrt{\sum_{l=1}^M \Delta^2 os_l + \sum_{\kappa=1}^N T_{\kappa}^2 \sigma_{\kappa}^2 (\Delta)}, \quad (6)$$

где Δs – погрешность меры или образцового средства измерения с помощью которых осуществляется аттестация измерителя; k – коэффициент, зависящий от соотношения Δos и Δc (при $p = 0,95, k = 1,1$); σ, T – среднее квадратическое значение, коэффициент Стьюдента.

Исследования показали, что для измерителей помех $\delta_{op} = \pm (5-15)\%$ (при $t_n = 15$ нс).

Неисключенная систематическая составляющая погрешности генератора электростатических разрядов (ГЭСР) определяется по формуле

$$\Delta os = \sqrt{\Delta un^2 + \Delta at^2 + \Delta^2 p + \Delta^2 o}, \quad (7)$$

где $\Delta un, \Delta at, \Delta p, \Delta o$ – соответственно погрешности, вносимые источником питания ГЭСР, аттенуатором, из-за рассогласования и отсчета.

Параметры сигналов имитаторов помех существенно зависят от нагрузки и схемы соединения испытательных, измерительных и согласующих устройств, используемых при испытаниях СТО на помехозащищенность. Так как испытательный сигнал при его подаче на вход оборудования (по сети питания) нагружается в первую очередь сетевым помехоподавляющим фильтром, то проведено исследование влияния его на сигнал имитаторов помех и степень подавления сигналов ИП фильтром. Подавление сетевым помехоподавляющим фильтром фирмы Gorgom (Англия) сигнала несимметричной помехи имитатора составляет порядка 25 дБ, подавление сигнала симметричной помехи составляет 38 дБ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Носов, В.В. *Промышленные помехи и обеспечение надежности функционирования систем управления технологическими процессами – Измерение, контроль, автоматизация.* – 1987, вып. 2 – С. 61–72.
2. Минченко, В.А., Ковальчук Г. Ф., Школык С. Б. *Принципы построения и структурные схемы зондовых автоматических систем контроля параметров изделий микро- и нанoeлектроники на пластине / В.А. Минченко, Г.Ф. Ковальчук, С.Б. Школык // Приборы и методы измерений.* – № 2, 2012 – С. 67–75.
3. Онегин, Е.Е. *Автоматическая сборка ИС / Е.Е. Онегин, В.А. Зенькович, Л.Г. Битно.* – Минск : Выш. шк., 1990. – 382 с.
4. Карпович, С.Е. *Прецизионные системы перемещений для оборудования производства изделий электронной техники / С.Е. Карпович, В.В. Жарский, И.В. Дайняк // Доклады БГУИР.* – 2014. – № 2(80). – С. 60–72.
5. Дайняк, И.В. *Интегрированная система многокоординатных перемещений для сборочного оборудования микроэлектроники // И.В. Дайняк, Д.Г. Бегун, В.В. Поляковский / Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. В. Промышленность. Прикладные науки.* – 2014 г. – № 11. – С. 59–64.

ИССЛЕДОВАНИЯ СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

к.ф.-м.н. Конон П.Н., маг. Макоед А.Г.

Белорусский государственный университет, Минск

Постановка задачи и исследование устойчивости движения. Рассматривается движение осесимметричной струи плотности ρ_0 , вытекающей из отверстия радиуса R_0 со скоростью U_0 в поле капиллярных и гравитационных сил. Движение исследуется в цилиндрической системе координат r, z, θ с началом в центре выходного отверстия, ось z при этом направлена по линии действия силы тяжести. Размерные составляющие скорости и давления для осесимметричной струи:

$$\begin{aligned} v_z = u^* = u^*(r, z, t^*), \quad v_r = v^* = v^*(r, z, t^*), \quad v_\theta = w^* = 0, \\ p^* = p^*(r, z, t^*). \end{aligned} \quad (1)$$

Учитывается сильное невязкое взаимодействие с окружающей средой, причем давление среды $p_c^* = p_c^*(r, z, t^*)$ - заданная функция координат и времени. Форма поверхности струи $D^* = D^*(z, t^*)$ является неизвестной.

При $v^* \ll u^*$, что имеет место при образовании достаточно длинных волн, движение жидкости описывается уравнениями пограничного слоя. Предположим также, что давление в струе слабо зависит от r и равно давлению на поверхности. Введём безразмерные величины t, x, y, h, u, v, p_c :

$$\begin{aligned} t^* = R_0 U^{-1} t, \quad r = R_0 y, \quad z = R_0 x, \quad D^* = R_0 h, \\ u^* = U_0 u, \quad v^* = U_0 v, \quad w^* = 0, \quad p_c^* = \rho_0 U_0^2 p_c. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения осесимметричного движения жидкости в струе и уравнения неразрывности будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y = Fr^{-1} - \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} - h_{xx} \right) + Re^{-1} \left(u_{yy} + \frac{1}{y} u_y \right) - \frac{\partial p_c}{\partial x}, \\ u_x + v_y + \frac{1}{y} v = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

При выводе (3) учтено, что выражение для давления с учетом кривизны поверхности струи и переменного внешнего давления в случае длинных волн определяется выражением:

$$p(x, t) = p_c(x, t) + \sigma \left(\frac{1}{h} - h_{xx} \right). \quad (4)$$

Условие непротекания определяет следующее уравнение поверхности

$$h_t + uh_x = v \quad (5)$$

Из предположения отсутствия трения на поверхности имеем:

$$u_y = 0, \quad y = h(x, t), \quad (6)$$

а из предположений симметрии течения получаем два условия на оси

$$v = 0, \quad u_y = 0, \quad y = 0. \quad (7)$$

В сечении $x = 0$ задан профиль скорости и толщина струи:

$$v = 0, \quad u = u(0, y, t), \quad h = h(0, t). \quad (8)$$

Характер течения зависит от безразмерных параметров

$$Fr^{-1} = \frac{gR_0}{U_0^2}, \quad Re^{-1} = \frac{\nu}{U_0 R_0}, \quad We^{-1} = \sigma = \frac{T}{\rho_0 R_0 U_0^2}, \quad (9)$$

где Fr – число Фруда, Re – число Рейнольдса, We – число Вебера, ν – коэффициент кинематической вязкости, g – ускорение силы тяжести, Γ – коэффициент поверхностного натяжения.

Пусть начальный профиль струи равномерный, то есть $u(0, y, t) = f(t)$. Тогда в случае длинных волн, незначительно изменяющих зависимость течения от y , движение описывается системой уравнений для $u(x, t), h(x, t)$:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= Fr^{-1} - \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} - h_{xx} \right) - \frac{\partial p_c}{\partial x}, \\ h_t + uh_x + \frac{1}{2}u_x h &= 0, \quad v = -\frac{1}{2}u_x h. \end{aligned} \quad (10)$$

Следует отметить, что вязкие члены уравнения (3) при данном предположении исчезли.

Рассмотрим периодические по x возмущения с волновым числом α , которые представляют собой волны, распространяющиеся вдоль полуограниченной струи с изменяющейся по времени амплитудой.

Введём как и в [3] независимые переменные ξ, τ и функции $u_k(\xi, \tau), h(\xi, \tau)$:

$$\xi = \alpha x - \omega t, \quad \tau = \alpha \sigma^{\frac{1}{2}} t, \quad u = 1 + \sigma^{\frac{1}{2}} u_k. \quad (11)$$

После преобразований системы (10) будем иметь следующие уравнения для u_k и h , где индекс k опущен:

$$\begin{aligned} u_\tau + (c^* + u)u_\xi &= h^{-2}h_\xi + \alpha^2 h_{\xi\xi\xi} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p_c}{\partial \xi}, \\ h_\tau + (c^* + u)h_\xi + \frac{1}{2}hu_\xi &= 0, \quad v = -\frac{1}{2}\alpha\sigma^{-\frac{1}{2}}hu_\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

В системе (12) параметр c^* определяется по формуле:

$$c^* = (1 - c)\sigma^{-\frac{1}{2}}, \quad c = \omega\alpha^{-1}. \quad (13)$$

Надо заметить, что в предлагающейся модели совместного течения среды вязкое взаимодействие на границе не рассматривается. Среда и струя взаимодействуют через внешнее по отношению к жидкости давление p_c , причем принимается $p_c = k(\alpha x - \omega t) = k\xi, k = const$.

Рассмотрим нелинейные решения системы (12), периодические по ξ .

$$\begin{aligned} h &= h_0 + h_1 \cos \xi + H_1 \sin \xi + h_2 \cos 2\xi + H_2 \sin 2\xi + \dots \\ u &= u_0 + u_1 \cos \xi + U_1 \sin \xi + u_2 \cos 2\xi + U_2 \sin 2\xi + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь величины $u_0, u_1, U_1, u_2, U_2, h_0, h_1, H_1, h_2, H_2$ являются неизвестными функциями времени τ . Сбрав члены при одинаковых тригонометрических функциях до второго приближения, получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} u'_0 &= -\frac{k}{\sigma}, \quad h'_0 = -\frac{1}{4}(H_1 u_1 - h_1 U_1), \\ u'_1 &= -U_1(c^* + u_0 - \omega) - H_1(\alpha^2 - h_0^{-2}) - \frac{1}{2}u_1 U_2 + \frac{1}{2}U_1 u_2 - \\ &\quad - h_0^{-3}(h_1 H_2 - H_1 h_2), \\ h'_1 &= -H_1(c^* + u_0 - \omega) - \frac{1}{2}h_0 U_1 - \frac{3}{4}H_2 u_1 + \frac{3}{4}h_2 U_1, \\ U'_1 &= u_1(c^* + u_0 - \omega) + h_1(\alpha^2 - h_0^{-2}) + \frac{1}{2}U_1 U_2 + \frac{1}{2}u_1 u_2 + h_0^{-3}(H_1 H_2 - h_1 h_2), \\ H'_1 &= h_1(c^* + u_0 - \omega) + \frac{1}{2}h_0 u_1 + \frac{3}{4}h_2 u_1 + \frac{3}{4}H_2 U_1, \\ u'_2 &= -2U_2(c^* + u_0 - \omega) - 2H_2(4\alpha^2 - h_0^{-2}) - u_1 U_1 - 2h_1 H_1 h_0^{-3}, \\ h'_2 &= -2H_2(c^* + u_0 - \omega) - h_0 U_2 - \frac{3}{4}H_1 u_1 - \frac{3}{4}h_1 U_1, \\ U'_2 &= 2u_2(c^* + u_0 - \omega) + 2h_2(4\alpha^2 - h_0^{-2}) + \frac{1}{2}u_1^2 - \frac{1}{2}U_1^2 + h_1^2 - H_1^2 + \end{aligned} \quad (15)$$

$$+2h_0h_2h_0^{-3},$$

$$H'_2 = 2h_2(c^* + u_0 - \omega) + h_0u_2 + \frac{3}{4}h_1u_1 - \frac{3}{4}H_1U_1.$$

Численные расчёты и анализ результатов. В итоге получили систему (15) из 10 дифференциальных уравнений первого порядка. Для ее решения должны быть заданы начальные значения функций $h_k(0), H_l(0), u_k(0), U_l(0), k = 0, 1, 2, l = 1, 2$. По крайней мере одно из этих значений должно быть ненулевым. Волновое число α определяет длину волны вдоль осевой координаты и считается заданным. Параметр c^* определяется по формуле (13). Численное интегрирование системы проводится по формулам Рунге-Кутты 4-го порядка точности с помощью встроенных функций пакета Wolfram. При $\tau = 0$ на течение накладывалось возмущение формы струи $h_1(0) = \varepsilon$. Другие начальные условия равны нулю. Значение волнового числа было взято из промежутка $0 < \alpha < 1$. Эти α соответствуют неустойчивым возмущениям по линейной теории. Временем распада струи будем считать тот момент, когда на длине волны впервые появляется точка ξ_0 , в которой $h(\xi_0) = 0$.

На рисунке 1 изображено развитие возмущений поверхности со временем при $\omega = 0.07, \alpha = 0.4, \sigma = 0.35, c^* = 1.3945, \varepsilon = 0.001$ для $k = 0$ (сплошная линия) и $k = 5$ (штриховая линия). При малых значениях времени возмущения достаточно малы, и форма поверхности близка к гармонической. С ростом времени становится заметна роль второй гармоники на развитие возмущений. Колебания становятся нелинейными, и при $\tau = 11.262$ для $k = 0$ и $\tau = 11.257$ для $k = 5$ видно образование второго максимума на длине волны. Наличие второго максимума поверхности определяет возможность образования капель разного размера, что наблюдается в действительности при распаде струй. С учетом полученных данных можно сделать вывод о том, что с увеличением значения k время распада струи на капли уменьшается, и возмущения развиваются более интенсивно.

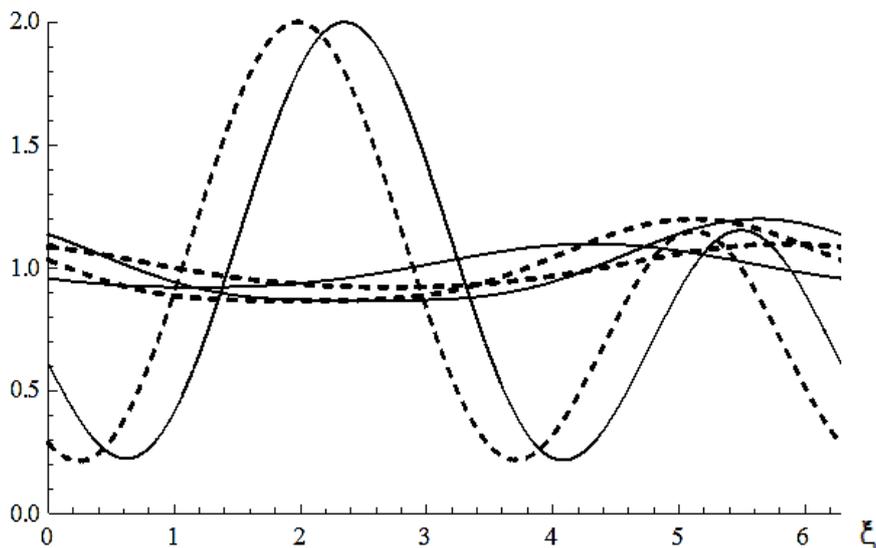


Рис. 1. Развитие возмущений поверхности $h(\xi)$ со временем при $k = 0$, (сплошная линия) в различные моменты $\tau = 8, \tau = 9, \tau = 11.262$ и $k = 5$ (штриховая линия) в моменты $\tau = 8, \tau = 9, \tau = 11.257$

Зависимость измененной продольной компоненты u_k и поперечной компоненты скорости v из последнего соотношения (12) от переменной ξ в момент появления второго максимума при $\tau = 11.262$ и тех же значений для остальных параметрах показано

на рисунке 2. Максимальные значения поперечной скорости по длине струи соответствуют наибольшим значениям ее поверхности.

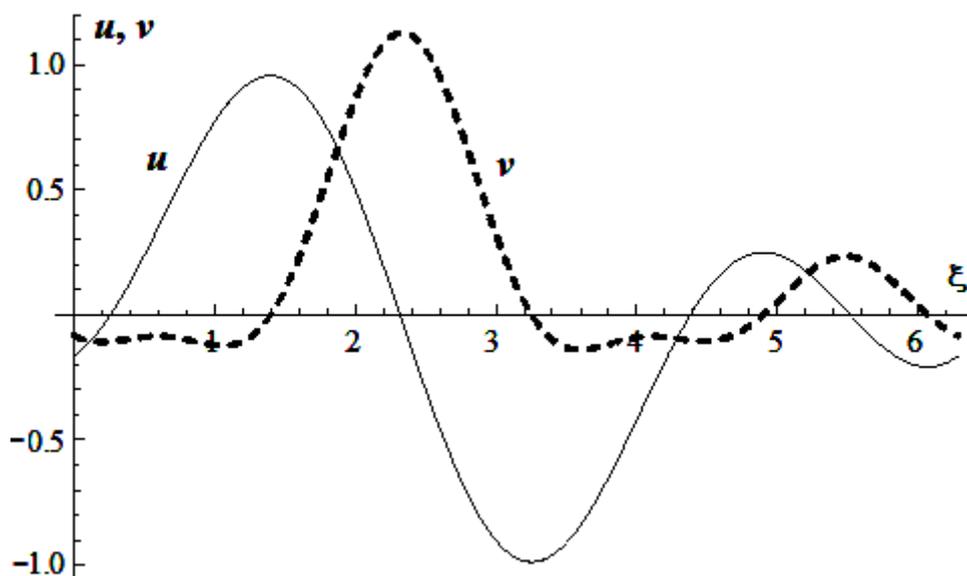


Рис.2. Зависимость изменения продольной компоненты скорости и поперечной компоненты от переменной ξ при $k = 0$ в момент времени $\tau = 11.262$
 $h(\xi)$

Работа выполнена в рамках задания 2.48 ГПНИ Беларуси «Энергетические системы, процессы и технологии».

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В.Я., Маркова М.М. Нелинейное развитие капиллярных волн в струе жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, №3, с.30-37.
2. Чесноков Ю.Г. Нелинейное развитие капиллярных волн в струе вязкой жидкости // Журнал технической физики, 2000, т.70, вып.8, с.31-38.
3. Шкадов В.Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости // Ин-т механики МГУ. Научн. тр.- М., 1973. Вып. 25.- 192 с.
4. Кулаго А.Е., Конон П.Н. Определение ускорений точек поверхности возмущенной струи Сб. трудов ВНИПИ Теплопроект «Конструкция и строительство специальных сооружений».-М.,1983.- С. 39-48.

РЕФЕРАТЫ

УДК 001.2

Сосновский Л. А., Щербаков С. С., Богданович А. В. **Современная наука и мультидисциплинарная система образование–наука–производство: некоторые достижения** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 3-11. Приведены наиболее значимые результаты, достигнутые в трибофатике и механотермодинамике за последние десятилетия, достигнутые при мультидисциплинарных исследованиях в системе образование–наука–производство. – Ил. 7. Библиогр. – 38 назв.

УДК 539.3

Плескачевский Ю.М., Журавков М.А., Старовойтов Э.И. **Локальные нагрузки трехслойной балки со сжимаемым наполнителем в температурном поле** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 12-17. Рассмотрено влияние температурного поля на НДС трехслойного упругого стержня со сжимаемым наполнителем при локальных нагрузках. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в тонких несущих слоях справедливы гипотезы Бернулли; в сжимаемом по толщине наполнителе выполняется гипотеза Тимошенко. Учитывается работа наполнителя в тангенциальном направлении. Уравнения равновесия выведены вариационным методом. Получены аналитические решения при локальной равномерно распределенной нагрузке, сосредоточенной силе и моменте. Проведен численный анализ решений. – Ил. 4. Библиогр. - 15 назв.

УДК 621.313.13

Карпович С.Е., Жарский В.В., Алехнович Г.Н., Салманзадех Г.Й. **Системы многокоординатных перемещений на механизмах параллельной кинематики** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 18-22. В статье представлены три системы перемещений на механизмах параллельной кинематики с шестью степенями свободы рабочей платформы, которая базируется на многокоординатных приводах прямого действия линейного, поворотного и планарного типов. – Ил. 6. Библиогр. – 3 назв.

УДК 539.3

Chigarev A.V., Chigarev Ju.V. **Ray expansion in inhomogeneous and stochastic media** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 23-35. Simulation of wave propagation processes in inhomogeneous media is based on kinematic and dynamic principles for the process of ray propagation and wave surfaces (fronts) in different media. Huygens' principle of constructing wave fronts in according to algorithm of a contact transformation is easily implemented if the perturbation region is non-concave. – Ил. 21. Библиогр. – 17 назв.

УДК 539.3

Немировский Ю.В., Болтаев А.И. **Сложный изгиб гибридных деревянных брусьев** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 36-55. В работе представлено решение проблемы определения напряженно-деформированного состояния гибридных деревянных брусьев при сложном изгибе с растяжением-сжатием. – Ил. 8. Табл. 7. Библиогр. – 29 назв.

УДК 531.19

Грода Я.Г., ди Каприо Д., Вихренко В.С. **Влияние характера межчастичного взаимодействия и числа заблокированных узлов на коэффициент диффузии решеточного флюида на простой кубической решетке** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 56-61. Рассмотрен процесс диффузии решеточного флюида на простой кубической решетке, содержащей некоторое число заблокированных узлов. Предложен алгоритм и выполнено компьютерное моделирование процесса миграции частиц по методу Монте-Карло. Предпринята попытка оценить кинетический коэффициент диффузии с помощью соотношения Жданова на основе информации о равновесных параметрах системы. – Ил. 2. Библиогр. – 8 назв.

УДК 624.1+539.3

Козловский Е.Я., Богдан С.И., Журавков М.А. **Решение сопряженных задач геомеханики и геотехники на основе моделей механики деформируемого твердого тела** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 62-64. Описывается текущая ситуация в инженерных расчетах актуальных задач геомеханики и геотехники методами механики деформируемого твердого тела. Показаны решения задач с использованием численных методов и моделей грунта с упрочнением. – Ил. 3. Библиогр. – 9 назв.

УДК 539.3

Леоненко Д.В., Зеленая А.С. **Упругопластический изгиб прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 65-71. Исследован упругопластический изгиб несимметричных по толщине упругих трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем. Кинематические гипотезы основаны на гипотезе ломаной линии: для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхго-

фа, в жестком сжимаемом наполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной. Равномерно распределенная нагрузка приложена к внешней поверхности первого несущего слоя. При решении задачи был применен метод «упругих» решений Ильющина, который показал хорошую практическую сходимость. – Ил. 2. Библиогр. – 6 назв.

УДК 539.4

Михасев Г.И., Авдейчик Е.В., Каплунов Ю.Д., Приказчиков Д.А. **Исследование свободных продольных колебаний наноразмерной балки с позиций двухфазной нелокальной теории упругости эрингена** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 72-80 . С использованием двухфазной нелокальной модели Эрингена исследованы свободные продольные колебания нанобалки с различными вариантами граничных условий. Анализ различных нелокальных теорий упругости выявил, что чисто нелокальная модель и ее «эквивалентный» дифференциальный аналог являются некорректными, так как не позволяют удовлетворить граничным условиям и не учитывают нелокальные краевые эффекты. Получены асимптотические формулы для собственных частот и форм колебаний для всех вариантов граничных условий. Показана высокая точность асимптотических формул. – Ил. 2. Библиогр. – 32 назв.

УДК 621.762

Дудяк А.И., Хвасько В.М. **Оптимизация радиусов контактов составных толстостенных цилиндров в блок-матрицах аппаратов высокого давления** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 81-85 . В работе анализируется конструкция блок-матрицы аппарата высокого давления, состоящая из трех колец, запрессованных друг в друга с радиальным натягом. Предложены условия равнопрочности, которые позволяют определить радиусы контактов составных цилиндров, при соблюдении которых становится возможным создать максимальное давление на боковую поверхность матрицы. Благодаря этому достигается увеличение несущей способности составной конструкции в целом. Также предложенная методика может быть применена для расчета многослойного блока из n стальных цилиндров, запрессованных друг в друга. – Ил. 1. Библиогр. – 4 назв.

УДК 621.313.13

Дайняк И.В., С.К. Дик, Кузнецов В.В., Поляковский В.В. **Управление мехатронными системами перемещений в режиме реального времени** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 86-91 . Рассмотрены подходы к управлению мехатронными многокоординатными системами в режиме реального времени, основанные на технологии EtherCAT. Управление с помощью протокола EtherCAT позволяет осуществить необходимое быстрое действие передачи данных обеспечивая при этом быстрое и качественное формирование заданных пространственных траекторий многокоординатной системы перемещений. – Ил. 4. Библиогр. – 6 назв.

УДК 539.3+(616.314-089.23)

Босяков С.М., Юркевич К.С., Афанасьева М.А., Шпилевский И.Э. **Оценка предельной нагрузки на большеберцовую кость голени после секторальной резекции: влияние анизотропии костной ткани в поперечном сечении кости** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 92-97 . Целью настоящей работы является оценка предельной нагрузки на кость голени с пострезекционным дефектом с учетом различных упругих свойств и вязкости разрушения костной ткани в различных квадрантах поперечного сечения кости. – Ил. 4. Библиогр. – 4 назв.

УДК 539.3

Веремейчик А.И., Гарбачевский В.В., Сазонов М.И., Хвисевич В.М. **Исследование НДС ножей для измельчения пищевых продуктов при поверхностной плазменной закалке движущимся источником нагрева** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 98-104 . В статье исследована износостойкость измельчителей пищевых продуктов и разработана технология поверхностной плазменной закалики режущей кромки с целью повышения их ресурса работы. По результатам экспериментальных и теоретических исследований износостойкости и температурных полей определены оптимальные режимы процесса упрочнения. – Ил. 9. Табл. 1 Библиогр. – 12 назв.

УДК 539.3

Василевич Ю.В., Скворцов К.Г. Сахоненко С.В., Сахоненко В.М. **Влияние процесса отверждения связующего на упругие характеристики композиционного материала** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 105-111 . Рассматривается влияние химической усадки связующего на остаточные напряжения в намоточных изделиях. Поставленная задача решена с помощью уравнений, которые получены из условий равновесия и совместности деформаций наполнителя и связующего, находящихся в неотвержденном состоянии. Предложенный метод расчета напряжений применяется к препрегам и позволяет учитывать не только хими-

ческую усадку связующего, но и термическое расширение компонентов композита. – Ил. 0. Библиогр. – 5 назв.

УДК 539.3

Яровая А. В. **Изгиб трехслойной ортотропной пластины с усиливающей накладкой** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 112-116 . Исследован цилиндрический изгиб упругой трехслойной ортотропной пластины с деформируемой накладкой. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета пластины принята гипотеза ломаной нормали. С помощью вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений равновесия. Выписано ее аналитическое решение с учетом разрывности границы. Проведен численный параметрический анализ перемещений и напряжений в пластине. – Ил. 2. Библиогр. – 9. назв.

УДК 621.313.13

Жарский В.В., Луценко В.Е., Форулан М.М., Шоломицкий В.Г., Дрогун Е.А. **Реализация программируемых движений в замкнутой системе управления на основе датчиков Холла** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 117-122 . Рассмотрена реализация программируемых движений для планарного привода на линейных шаговых двигателях (ЛШД). Представлены: схема встраивания датчиков Холла ЛШД, принципы и алгоритмы построения системы замкнутого управления. Исследована ошибка позиционирования системы перемещений. – Ил. 5. Библиогр. – 5 назв.

УДК 532.516

Конон П.Н., Докукова Н.А., Нестерович С.С. **Локализация наиболее опасных возмущений слоя жидкости на вращающемся цилиндре и их экспериментальное наблюдение** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 123-129 . Рассмотрена задача невязкой неустойчивости слоя жидкости на внешней поверхности горизонтально расположенного цилиндра, вращающегося с постоянной скоростью в поле центробежных и поверхностных сил. Получено дисперсионное соотношение, определены области неустойчивых возмущений и максимально растущие волны. Показано, что в экспериментах наблюдаются нестационарные возмущения, максимально нарастающие во времени. – Ил. 4. Библиогр. – 7 назв.

УДК 539.4:... 517.958:539.3; 621.9.06

Щербатов С.С., У Ши, Шао Жуньпэн, Насань О.А. **Пространственное напряженно-деформированное состояние расточной оправки штанги сверхмощного горизонтального расточного станка в зависимости от радиусов расточки** // ТПМ. Выпуск 33. 2018 г., С. 130–136. В работе описываются механико-математические модели, позволяющие определять напряженно-деформированное состояние и контактное взаимодействие упругих элементов расточной оправки штанги сверхмощного CNC горизонтального расточного станка при его загрузке затяжкой болтовых соединений и расточкой в трехмерной статической постановке. В ANSYS Workbench были разработаны 24 механико-математические модели, описывающие напряженно-деформированное состояние в зависимости от радиуса расточки расточной оправки штанги. Проведена оптимизация на основе минимизации интенсивности напряжений в системе при увеличении радиуса растачивания. Были даны рекомендации для дополнительных исследований. – Ил. 4. Табл. 3. Библиогр. – 4 назв.

УДК 621.313.13

Карпович С.Е., Войтов А.Ю., Нестеренко В.Н., Манин А.С. **Математическая модель и алгоритмизация прямой задачи кинематики параллельного манипулятора с шестью степенями свободы** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 137-143 . Разработана математическая модель и выполнена алгоритмизация для решения в среде MATLAB прямой задачи кинематики параллельного манипулятора на шестикоординатном линейном приводе прямого действия. – Ил. 3. Библиогр. – 3 назв.

УДК 536.2; 519.6; 539.3

Плескачевский Ю.М., Чigareва Ю.А. **Предельные состояния в микрослоистой пластине при хрупком и пластическом разрушении вследствие изменения температурного поля** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 144-154 . В работе рассмотрена неоднородная среда градиентного типа, что стимулируется проблемами, возникающими в практике использования различных композитных материалов в машинах, реакторах, технологических процессах, связанных с температурным воздействием на них. – Ил. 10 . Библиогр. – 7 назв.

УДК 531.255

Куликов И.С., Шкиндер И.В. **Ндс шестигранной призматической оболочки конечной длины в условиях ползучести** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 155-161 . Одним из важнейших элементов активной зоны ядерного реактора является чехол тепловыделяющей сборки, представляющий собой тонкостенную ше-

стигранную оболочку. С использованием программного пакета SolidWorks решена задача определения НДС тонкостенной шестигранной оболочки в условиях ползучести. – Ил. 7. Библиогр. – 3 назв.

УДК 004.94

Ланно И.А., Лукьянчик А.Ю. Букса Д.А., Чигарев В.А. **Разработка моделей мехатронных систем в современных пакетах трехмерного компьютерного проектирования** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 162-166 . Проведена постановка задачи об моделировании мехатронных систем в современных пакетах 3-D моделирования, приведены графические эксперименты. – Ил. 4. Библиогр. 2 назв.

УДК 378.6

Хвисевич В.М., Веремейчик А.И., Мазырка М.В. **Применение автоматизированного программного комплекса «АССИСТЕНТ» для активизации самостоятельной работы по общетехническим и специальным дисциплинам** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 167-172 . В статье рассмотрены особенности применения разработанного автоматизированного программного комплекса «Ассистент» в учебном процессе по теоретической и прикладной механике, позволяющего разнообразить задания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ, упростить процесс проверки заданий преподавателем и активизировать самостоятельную работу студентов. – Ил. 8. Библиогр. – 1 назв.

УДК 517.958:531.12; 541.43/49; 539.62; 532.516; 539.375.6; 539.4:620.2

Щербаков С.С., Козик А.Н., Насань О.А., Подгайская Д.А. **Напряженно-деформированное состояние секции нефтепровода с учетом различных видов коррозионных дефектов и ремонтных работ** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 173-179 . Проведено компьютерное конечно-элементное моделирование трехмерного напряженно-деформированного состояния линейной секции трубопровода. Расчеты проводились для условий ее нагружения внутренним давлением с учетом двух типов внутренних коррозионных повреждений (одиночное протяженное и множественные мелкие), а также двух видов ремонтных работ (ремонт стальной муфтой или стеклополимерной манжетой) и заглупления в грунт на 0,8 м. На основе полученных результатов даны рекомендации по использованию стеклополимерной манжеты и определению ее толщины в зависимости от максимальных напряжений. – Ил. 4. Табл. 3. Библиогр. – 7 назв.

УДК 621.313.13

Титко Д.В., Зубов Г.А., Чеушев К.В., Марко А.Ф. **Удалённое управление системой перемещений через интернет** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 180-184 . В статье рассмотрены особенности реализации удалённого управления системы многокоординатных перемещений через сеть интернет. Описан пользовательский интерфейс, позволяющий через веб-страницу осуществлять доступ к локальному контроллеру системы управления. – Ил. 3. Библиогр. – 6 назв.

УДК 531/534

Пронкевич С.А., Шпургалова М.Ю. **Модели грунтов и горных пород при конечноэлементном моделировании** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 185-192 . Рассмотрены модели горных пород при конечноэлементном моделировании, в том числе с помощью программ ANSYS и LS-DYNA. – Ил. 4. Библиогр. – 9 назв.

УДК 624.131+539.215

Алтынбеков Ш.А., Ниязымбетов А.Д., Такибаева Г.А., Алимкулова Б.Т. **Задачи консолидации многослойного неоднородного грунта и их решения** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 193-198 . Сформулированы постановки задач теории фильтрационной консолидации k -слойных неоднородных грунтовых оснований в виде параллелепипеда и цилиндра. Обоснован метод аппроксимации решения задач. Проведен анализ предварительных численных расчетов. – Ил. 2. Библиогр. – 9 назв.

УДК 539.4

Чигарева Ю.А., Чигарев Ю.В. **Моделирование процесса разрыхления почвы в поверхностном слое при воздействии обрабатывающих устройств** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 199-206 . В работе рассмотрено применение методов узлов, связей, эффективной среды для процессов разрыхления почвенного слоя. – Ил. 6. Табл. 1. Библиогр. – 4 назв.

УДК 531; 539.3; 620.3

Щербаков С.С., Полещук М.М. **Электромагнитное управление движением посредника для воздействия на наночастицу в нелинейном канале с потоком жидкости** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 207-212 . Предложен и численно реализован метод электромагнитного управления движением токопроводящего посредника для манипулирования наночастицей в нелинейном канале с жидкостью. Были учтены колебания давления в канале, профиль и направление скорости жидкости, электрическая проницаемость и магнитное сопротивление среды. Решен ряд модельных обратных задач определения компонент элект-

тромагнитного поля, обеспечивающего движение макропосредника по заданным траекториям. – Ил. 4. Библиогр. – 9 назв.

УДК 536

Щербаков С.С. **Анализ повреждаемости трибофатических и механотермодинамических систем: энтропийный подход** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 213-238 . Второй закон термодинамики основан на фундаментальном представлении об энтропии. Кроме того, ведутся работы по применению энтропии для описания процессов повреждения в условиях механической усталости, трения и износа. В последнее время содержание этого понятия было существенно расширено: речь идет о трибофатической и механотермодинамической энтропии. Дается систематический анализ энтропийного подхода для исследования повреждаемости материалов, элементов конструкций, пар трения, трибофатических и механотермодинамических систем. – Ил. 10. Библиогр. – 50 назв.

УДК 539.3+(616.314-089.23) 617.577+(611.717.9:611.747.7)

Босяков С.М., Петуховский А.С., Степанова А.О., Крушевская Е.Е. **Конечно-элементный анализ движений фаланг кисти человека при повреждении сухожилий сгибателей пальцев** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 239-242 . Целью настоящей работы является оценка предельной нагрузки на кость голени с пострезекционным дефектом с учетом различных упругих свойств и вязкости разрушения костной ткани в различных квадрантах поперечного сечения кости. – Ил. 4. Библиогр. – 6 назв.

УДК 624.953

Агаев В.Н., Мартыненко Т.М., Пронкевич С.А., Скляр О.Н., Мартыненко И.М. **Исследование устойчивости прямоугольной в плане оболочки в условиях линейного распределения температуры** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 243-248 . Предложено решение задачи по определению устойчивости оболочечной системы при накоплении повреждений вследствие действия циклических температурных полей и потере устойчивости ключевых элементов конструкций путем проведения виртуальных испытаний с использованием пакета компьютерных программы ANSYS. В результате исследований рассмотрены вопросы устойчивости вследствие линейного распределения отдельных элементов тренировочного модуля которые стремятся изменить свои геометрические свойства, а так как они образуют силовой каркас конструкции, то в оболочке возникает напряженное состояние. – Ил.4. Библиогр.- 7 назв.

УДК 517.9

Акимов В.А., Гончарова С.В. **Об одном дифференциальном уравнении k-го порядка, используемом в операторном методе теории упругости** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 249-250 . В своих работах по решению граничных задач теории упругости авторы разрабатывали так называемый операторный метод разложения функций в ортогональные и не ортогональные ряды. . – Ил.0. Библиогр. - 2 назв.

УДК 539.3

Коваль И.В., Щербаков С.С. **Компьютерное моделирование контактных взаимодействий и трехмерного напряженно-деформированного состояния применительно к зубочелюстному аппарату человека** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 251-255 . Проведено компьютерное конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния многоэлементного зубочелюстного аппарата человека, включающего два фрагмента костей нижней и верхней челюстей, два элемента периодонта, восемь зубов, а также восемь элементов дентина. Рассчитаны контактные взаимодействия между элементами системы и трехмерные распределения напряжений – Ил. 3. Табл. 1. Библиогр. – 7 назв.

УДК 539.3

Поддубный А.А. **Деформирование трехслойного упругопластического стержня, частично опертого на упругое основание, под действием равномерно распределенной нагрузки** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 256-259 . Рассмотрены изменения прогиба, сдвига в заполнителе, нормальных напряжений трехслойного стержня, частично опертого на упругое основание, под действием равномерно распределенной нагрузки с учетом пластичности несущих слоев и физической нелинейности заполнителя. – Ил. 2. Библиогр. – 4 назв.

УДК 621. 81

Капушта П.П. **Виртуальное конструирование зубчатых редукторов и коробок передач в курсовом проектировании деталей машин** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 260-266 . Приведены, предложенные автором, общие принципы, методика и основные стадии виртуального конструирования узлов и деталей машин, обеспечивающие реализацию программных требований обучения по курсу “Детали машин”. Разработанная методика эффективно используется в процессе курсового проектирования деталей машин для машиностроительных и механико-технологических специальностей учреждений высшего образования.

Использование разработок проиллюстрировано на примерах проектирования зубчатых редукторов и коробок передач. – Ил. 13. Библиогр. – 0 назв.

УДК 681.5

Антуневич А.Л., Ильёв И.Г., Гончаренко В.П., Миронов Д.Н. **Моделирование сложной механической системы, подверженной неоднородным переменным воздействиям в среде Simulink\Simmechanics** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 267-271 . В статье рассмотрена реализация модели многоствольной пусковой установки в среде Simulink\SimMechanics. Использование SimMechanics существенно ускоряет и упрощает процесс создания модели исследуемой механической системы. При этом результаты моделирования имеют достаточную степень соответствия с данными эксперимента и математического моделирования. – Ил. 5. Библиогр. - 5 назв.

УДК: 621.317.331 (079.2)

Кончина Л.В., Поваренкова А.А. **Исследование на прочность магистральных трубопроводов на криволинейных участках** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 272-275 . Исследуется влияние центробежной силы на изгиб трубопровода в вертикальной плоскости. – Ил. 2. Библиогр. – 5 назв.

УДК 681.5+004.8

Миронов Д.Н., Гончаренко В.П. **Роевые мехатронные системы** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 276-280 . В статье предложено объединить миниатюрные мехатронные устройства в единый универсальный механизм функционирующий как рой. Созданная универсальная боевая система, способна самостоятельно, благодаря искусственному интеллекту, самовосстанавливаться и выполнять боевые задачи со 100% вероятностью, без человеческих жертв и с минимальными материальными затратами. – Ил. 5. Библиогр. – 6 назв.

УДК 539.3

Щербakov С.С., Грибовский Г.В. **Напряжённо-деформированное состояние многокомпонентной системы диск–шина–асфальтобетон при различных соотношения радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 281-286 . Проведено компьютерное моделирование напряжённо-деформированного состояния многоэлементной многокомпонентной системы диск–шина–асфальтобетон, нагруженной различными комбинациями радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине. Рассчитаны контактные взаимодействия между элементами системы и получено трехмерное распределение напряжений в системе. Построены зависимости интенсивности напряжений и деформаций от различных значений радиальной нагрузки и внутреннего давления. – Ил. 4. Табл. 2. Библиогр. – 5 назв.

УДК 621.313.13

Кузнецов В.В. **Имитационное моделирование динамики параллельного манипулятора на трёх планарных позиционерах** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 287-294 . В статье рассмотрено имитационное моделирование в среде MATLAB динамики параллельного манипулятора на трёх планарных позиционерах. Разработана блочно-модульная структура динамической модели на основании которой инструментами MATLAB/Simulink были получены графики силовых функций, обеспечивающих реализацию требуемого пространственного перемещения платформы. – Ил. 15. Библиогр. – 7 назв.

УДК 534.611:534.511

Мачихо Д.В., Сакевич В.Н. **Спектральные особенности колебаний, возникающих в стержневой конструкции после импульсного воздействия на неё** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 295-298 . Экспериментально изучены спектры колебаний стержневой конструкции после импульсного воздействия на неё как периодическими, так и одиночными импульсами. Дана оценка частоты ударного воздействия, при которой стержневая система периодическое воздействие будет воспринимать как одиночные импульсы и спектр частот будет сплошным. – Ил. 4. Библиогр. – 4 назв.

УДК 539.3

Василевич Ю.В., Федотов Д.А., Сахonenко С.В., Сахonenко В.М., **Исследование процесса формирования композита на этапе полимеризации связующего** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 299-306 . Целью данной работы является отыскание величины возникающих напряжений и жесткостных характеристик в момент полимеризации и после отверждения связующего в результате его химической усадки. Рассматривая условие равновесия и совместности деформаций наполнителя и связующего получены два линейных уравнения, выражающих зависимости между кольцевыми и радиальными напряжениями круглого сечения композита, перпендикулярно волокнам. – Ил. 1. Библиогр. – 5 назв.

УДК 681.3

Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М. **Определение координат центрального и действительного профиля кулачка** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 307-308 . Рассматривается задача получения выражений декартовых координат как центрального, так и действительного профиля кулачка без использования формул полярных координат. – Ил. 1. Библиогр. – 2 назв.

УДК 528.1+539.3

Горбач Н.И., Ширвель П.И., Штургалова М.Ю., Кадышина А.В. **Применение принципа Даламбера для составления дифференциальных уравнений движения эллиптического маятника** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 310-317 . В настоящей работе применен кинетостатический метод составления дифференциальных уравнений колебаний эллиптического маятника. – Ил. 4. Библиогр. – 2 назв.

УДК 539.3

Козел А.Г. **Деформирование круговой трехслойной пластины, заземленной по контуру, на основании пастернака** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 318-323 . Разработана механико-математическая модель, описывающая деформирование несимметричной по толщине упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака. Соответствующая краевая задача включает дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях и граничные условия. Общее решение задачи получено в функциях Бесселя. Рассмотрен случай изгиба пластины под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки при жёстком закреплении ее контура. – Ил. 2. Библиогр. – 12 назв.

УДК 539.3

Щербаков С.С., Мозолевский О.А. **Моделирование напряженно-деформированного состояния и объемной повреждаемости системы вкладыш/вал** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 324-331 . Рассмотрены механико-математические и компьютерные модели, описывающие напряженно-деформированное состояние и состояние объемной повреждаемости системы вкладыш/вал, работающей при комплексном нагружении контактными и неконтактными изгибающими вал силами. Приложение к валу данной системы неконтактных нагрузок принципиально изменяет картину распределения напряжений и деформаций в области контактного взаимодействия, что свидетельствует о сильном проявлении трибофатического обратного эффекта. Показаны значительные изменения качественных и количественных характеристик напряженного состояния и опасных объемов в трехмерной окрестности площадки контакта как в вале, так и во вкладыше. – Ил. 4. Библиогр. – 4 назв.

УДК 62-1/-9

Капустина П.П. **Разработка программного содержания учебного курса «Детали и проектирование машин» для подготовки инженеров по специальности «Компьютерная мехатроника»** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 332-343 . Приведены сведения по разработанному программному содержанию учебного курса «Детали и проектирование машин» для подготовки инженеров по специальности «Компьютерная мехатроника», основанные на современных научно-методических представлениях о состоянии и перспективах развития механических и мехатронных машинных систем. – Ил. . Библиогр. – 7 назв.

УДК 60.001.11:531.8

Авсиевич А.М., Кудин В.В., Качанов И.В., Кругликов А.А., Самойлов И.Р. **Составление динамических моделей и математическое описание сложных колебательных систем на основе выделения динамических звеньев** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 344-350 . В сложносоставной механической системе состояние каждого из звеньев влияет на все прочие. Совокупность этих звеньев в системе описывается линейными дифференциальными уравнениями. Анализ состояния всей системы целесообразно производить на отдельно выделенном динамическом звене, к которому можно привести все инерционные, жесткостные и диссипативные параметры всех звеньев и все факторы, описывающие внешние воздействия. В итоге состояние сложносоставной системы будет являться функцией обобщенных координат и времени, и описываться системой уравнений, соответствующих количеству обобщенных координат. – Ил. 7. Библиогр. – 4 назв.

УДК 004.94

Коробейник Д.Ю., Черноус Д.В., Чигарев В.А. **Разработка моделей мобильных миниатюрных роботов в пакете трехмерного проектирования** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 351-356 . Проведена постановка задачи о моделировании мехатронных систем в современных пакетах 3-D моделирования, приведены графические эксперименты. – Ил. 4. Библиогр. 2. назв.

УДК 531.8

Дыдышка І.М., Русан С.І., Гаўрыленя А.К. **Вывзначэнне і даследаванне механічных характарыстык руху мабільнай сістэмы** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 357-362 . У артыкуле даследуецца рух мабільных

систем. Атрыманья формулы дазваляюць вызначыць стартавы (пачатковы) момант рухавіка, вызначыць рух сістэмы ў пераходным рэжыме, даследаваць дынамічныя і кінематычныя характарыстыкі руху. Прыводзіцца прыклад, у якім для прыватнага выпадку вызначаюцца ўсе дынамічныя і кінематычныя характарыстыкі механічнай сістэмы. — Ил. 7. Библиогр. — 4 назв.

УДК 539.3

Захарчук Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 363-369 . Приведена постановка задачи о симметричном изгибе несимметричной по толщине упругой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем. Получено аналитическое решение, позволяющее рассчитывать напряженно-деформированное состояние при различных нагрузках и граничных условиях – Ил. 1. Библиогр. – 15 назв.

УДК 531.3

Борисов А.В. Розенблат Г.М., Чигарев А.В. Применение матричного метода и рекуррентного алгоритма к модели плоского многосвязного механизма со звеньями переменной длины, движущегося по горизонтальной плоскости // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 370-380 . Используя разработанные матричный метод и рекуррентный алгоритм в работе впервые предложена модель плоского механизма с произвольным конечным количеством звеньев переменной длины. Предложена новая модель перемещения плоского механизма за счет изменения как углов в шарнирах, так и длин звеньев. Это позволяет приблизить движения плоского многосвязного механизма к волновому перемещению вещества. – Ил. 8. Библиогр. 15 назв.

УДК 621.9.011:517.962.1

Довнар С.С. Виртуальное исследование крутильной динамики колонны тяжелого многоцелевого станка // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 381-387 . Сделан МКЭ-анализ крутильной динамики подвижной колонны тяжелого сверлильно-фрезерно-расточного станка. Смоделированы варианты внутреннего усиления колонны. Выявлена картина изгибных и крутильных резонансов. Обнаружены две связанные крутильные моды. Рекомендовано создание в колонне двойной стенки, заполнение кессонов бетоном и закрытие внутренних окон. Возбуждение переключается на менее сильную, высокочастотную моду. Амплитуда колебаний падает вдвое. – Ил. 6. Библиогр. 6 назв.

УДК 621.835-41:514.764

Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н. Решение автономного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка при построении плоских кривых // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 388-397 . В статье рассматривается принципиальная схема колесно-шагающего движителя упрощенной конструкции. Дана методика решения автономного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с целью расчета основных параметров движителя. – Ил. 2. Табл. 1. Библиогр. 6 назв.

УДК 519.713.1

Долгушев Ю.В., Кулецкий С.В., Чигарев В.А. Проектирование детерминированного конечного автомата // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 398-401 . Предлагаемый для решения рассматриваемой задачи подход весьма надежен, рационален и прост в исполнении. Используя построенные схемы можно легко создать конечный автомат. – Ил. 3. Табл. 1. Библиогр. 4 назв.

УДК 620.172.251.2 (088.8)

Одинокова О.А. Стабилизация деформаций при повторно - переменном нагружении образцов из вязкоупругих материалов // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 402-407 . Предложен способ повышения точности испытания полимерного образца за счет снижения влияния предистории нагружения и преодоления неравновестности структуры материала после снятия нагрузки. – Ил. 3. Библиогр. 12 назв.

УДК 621.865:004.896

Трифанков Д.В., Ширвель П.И., Конон И.И. Разработка обобщенной матрицы вращения для динамических моделей движения мультикоптера // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 408-415 . Разработанная обобщенная матрица вращения для динамических моделей движения мультикоптера позволяет автоматизировать процесс расчета, например, в случае конвертирования компонент линейной скорости из неподвижной или скоростной системы координат в систему отсчета, связанную с телом. – Ил. 3. Библиогр. 7 назв.

УДК 621.865:004.896

Конон И.И., Ширвель П.И., Трифанков Д.В. Построение решения уравнений движения мобильного мехатронного комплекса в непрямоугольной и связной системах координат // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 416-421 . Разработанная матрица перехода от непрямоугольной к связной системе координат

позволяет легко конвертировать и устанавливать взаимосвязь между изменением во времени угловых координат Эйлера и скоростями в связанной системе координат, описывая основные движения мобильной мехатронной системы крен, тангаж и рыскание в соответствии с основополагающими принципами динамики полета. – Ил. 2. Библиогр. 6 назв.

УДК 621.382.088

Минченко В.А., Карпович С.Е., Дик С.К., Кекиш Н.И. **Электромагнитная совместимость по кондуктивным помехам зондового технологического оборудования микро- и наноэлектроники** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 422-425 . Предложенные расчётные и экспериментальные методы исследования электро-магнитной совместимости позволили повысить качество разработки аппаратуры и гарантировать выходные характеристики аппаратуры испытаний электронного оборудования для зондового контроля. – Ил. . Библиогр. 5 назв.

УДК 532.516

Конон П.Н., Макоед А.Г. **Исследования струйного течения жидкости с учетом внешнего воздействия** // ТПМ. Выпуск 33. 2018. С 426-429 . Исследована нелинейная устойчивость капиллярной струи с учетом переменного по времени и осевой координате внешнего давления. Изучено образование второго максимума, обеспечивающего формирование капель разного размера. Определены области неустойчивых возмущений, форма поверхности струи и параметры течения. Найдено время распада в зависимости от начальных возмущений поверхности и волнового числа. - Ил. 2. Библиогр. – 4 назв.

ABSTRACTS

UDC 001.2

Sosnovskiy L.A., Sherbakov S.S., Bogdanovich A.V. **Modern science and a multidisciplinary education–science–production system: some achievements** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 3–11 . The most significant results achieved in Tribo-Fatigue and Mechanothermodynamics over the last decades, achieved with multidisciplinary research in the education-science-production system, are given. – **Fig. 7. Ref.: 38 titles.**

UDC 539.3

Pleskatshevsky Yu.M., Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I. **Local loading of sandwich beams with the compressible filler in a temperature field** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 12–17 . The effect of a thermal field on the SSS of a sandwich elastic beams with compressible filler under local loads is considered. For the asymmetric in thickness three-layer bar we have accepted the kinematic hypothesis of a broken normal. In the thin external layers the Bernoulli's hypotheses are accepted. The filler is compressible through thickness. Its normal remains straight, but turns by some extra angle. The work of arising shear stresses is taken into account. The equations of equilibrium in terms of displacements of the rod were obtained by the Variational method. The thermal flow has a constant intensity. The analytical solution of the boundary-value problem in the case of a local uniformly distributed load, point force and moment was obtained. The numerical analysis of the solutions is given. – **Fig. 4. Ref.: 15 titles.**

UDC 621.313.13

Karpovich S.E., Jarski V.V., Aliachnovich G.N., Salmanzadeh G.I. **Systems of multicoordinate displacements on the mechanisms of parallel kinematics** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 18–22 . Three systems of displacements on the base of the mechanisms of parallel kinematics with six degrees of freedom of work platform, which base on the multicoordinate drives of direct action of linear, rotate and planar types are presented. – **Fig. 6. Ref.: 3 titles.**

UDC 539.3

Chigarev A.V., Chigarev Ju.V. **Ray expansion in inhomogeneous and stochastic media** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 23–35 . Simulation of wave propagation processes in inhomogeneous media is based on kinematic and dynamic principles for the process of ray propagation and wave surfaces (fronts) in different media. Huygens' principle of constructing wave fronts in according to algorithm of a contact transformation is easily implemented if the perturbation region is non-concave. – **Fig. 21. Ref.: 17 titles.**

UDC 539.3

Nemirovsky Yu.V., Boltaev A.I. **Complex bending of hybrid wooden beams** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 36–55 . The paper presents a solution to the problem of determining the stress-strain state of hybrid wooden beams under complex bending with stretching-compression. – **Fig. 8. Tab. 7 Ref.: 29 titles.**

UDC 531.19

di Caprio D., Vikhrenko V.S., Groda Ya.G. **The influence of the type of the interparticle interaction and the number of blocked sites on the diffusion coefficient of the lattice fluid on a simple cubic lattice** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 56–61 . The process of diffusion of lattice fluid on the simple square lattice with blocked sites is considered. The algorithm of Monte Carlo simulation of migration process adparticles on the lattice is proposed. The computer simulation of diffusion process is realized. The attempt to estimate the jump diffusion coefficient of the system using the Zhdanov's expression on the basis of information on the equilibrium parameters of the system was made. – **Fig. 1. Ref.: 9 titles.**

UDC 624.1+539.3

Kozlovskiy E.Y., Bogdan S.I., Zhuravkov M.A. **Geomechanics and geotechnics problem solving with solid mechanics models** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 62–64 . This paper describes current situation in field of geomechanics and geotechnics actual problems engineering calculations using methods of solid state mechanics. The solutions with the use of numerical methods and soil models with hardening are shown. – **Fig. 3. Ref.: 7 titles.**

UDC 539.3

Leonenko D.V., Zelenaya A.S. **Elastoplastic bending of rectangular three-layer plate with compressible filler** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 65–71 . Elastoplastic bending of asymmetric elastic three-layer plates with a compressible filler. Kinematic hypotheses are based on the hypothesis of a broken

line: Kirchhoff's hypotheses are accepted for the outer layers, in the rigid compressible filler the deformed normal remains rectilinear. A uniformly distributed load is applied to the outer surface of the first carrier layer. When solving the problem, Ilyushin's method of "elastic" solutions was applied, which showed good practical convergence. – **Fig. 2. Ref.: 11 titles.**

UDC 539.4

Mikhasev G.I., Avdeichik E.V., Kaplunov J.D., Prikazchikov D.A. **Studying free longitudinal vibrations of nanosized beam on the basis of two-phase nonlocal elasticity theory of Eringen** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 72–80 . Using the two-phase nonlocal constitutive model of Eringen, free longitudinal vibrations of nanobeams with different variants of boundary conditions were studied. The analysis of different nonlocal theories of elasticity has revealed that the pure nonlocal integral model and its equivalent differential analogue are incorrect because do not allow to satisfy to boundary conditions and do not take into account nonlocal edge effects in a nanosized beam. The asymptotic formulae approximating natural frequencies and modes for all variants of boundary conditions have been obtained. It has been shown the high precision of asymptotic formulae. – **Fig. 2. Ref.: 32 titles.**

UDC 621.762

Dudyak A.I., Khvasko V.M. **Optimization of the contact radii of compound thick-walled cylinders in the block matrices of high-pressure apparatuses** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 81–85 . The block-matrix construction of the high-pressure apparatus consisting of three rings pressed into each other with a radial tension is analyzed in the article. The conditions of equal strength were proposed to determine the contact radii of compound cylinders in order to create the maximum pressure on the matrix lateral surface. Therefore the load-carrying capacity of the whole composite construction is increased. Also, the proposed method can be used to calculate a multilayer block of n steel cylinders pressed into each other. – **Fig. 1. Ref.: 4 titles.**

UDC 621.313.13

Dainiak I.V., Dick S.K., Kuzniatsou V.U., Poliakouski V.V., Forootan M.M. **Manipulating of mechatronic displacement systems in real time** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 86–91 . Approaches for manipulating of the mechatronic multicoordinate systems in real time, based on the technology EtherCAT are proposed. Manipulating with the help of EtherCAT allows to create necessary speed for sending data providing fast and quality formation of given space trajectories of the multicoordinate displacement systems. – **Fig. 4. Ref.: 6 titles.**

UDC 539.3 + (616.314-089.23)

Bosyakov S.M., Yurkevich K.S., Afanasyeva M.A., Shpilevsky I.E. **Assessment of ultimate load to the tibia after surgical resection: anisotropy effect of toughness in the bone cross-section load** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 92–97 . The purpose of this work is to evaluate the ultimate load-bearing capacity of the tibia with the post-resection defect, taking into account various types of distributions of elastic properties and toughness in different quadrants of a cross section of the bone. – **Fig. 4. Ref.: 4 titles.**

UDC 539.3

Veremeichik A. I., Garbachevskiy V.V., Sazonov M.I., Khvisevich V. M. **Research stress-strain state of cutters for grinding food products with surface plasma harding by a moving heating source** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 98–104 . The article studies the wear resistance of food grinders and developed the technology of surface plasma harding of the cutting edge for increasing their service life. According to the results of experimental and theoretical studies of wear resistance and temperature fields, optimal hardening process regimes are determined. – **Fig. 9. Tabl. 1. Ref.: 12 titles.**

UDC 539.3

Vasilevich Yu.V., Skvortsov K.G. Sakhonenko SV, Sakhonenko V.M. **Influence of the process of curing the binder on the elastic characteristics of the composite material** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P. 105–111 . The influence of chemical shrinkage of binder on residual stresses in winding products is considered. The problem is solved by means of equations that are obtained from the equilibrium and compatibility conditions of the deformations of the filler and binder in an uncured state. The proposed method of stress calculation is applied to prepregs and allows us to take into account not only the chemical shrinkage of the binder, but also the thermal expansion of the components of the composite. – **Fig. 0. Ref.: 5 titles.**

UDC 539.3

Yarovaya A.V. **Bending of a three-layer orthotropic plate with a reinforcing plate** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 112–116 . Studied the cylindrical bending of an elastic three-layer orthotropic plate with a deformable lining. To describe kinematics of asymmetrical on the thickness of the plate pack is

adopted the hypothesis of broken normal. With the help of a variational principle of Lagrange, the resulting system of differential equations of equilibrium. Discharged its analytical solution, given occlusion boundary. Numerical parametric analysis of displacements and stresses in the plate. – **Fig. 2. Ref.: 9 titles.**

UDC 621.313.13

Jarski V.U., Lutsenka V.E., Forootan M.M., Sholomitski V.G., Drogun E.A. **Realization of programming motions in closed system of management on the base of Hall sensors** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 117–122 . Realization of programming motions for the planar drive on the base of linear step engines is proposed. Scheme of incorporation of Hall sensors, principles and algorithms of creating systems for closed management are presented. Issue of positioning of the system displacements is explored. – **Fig. 5. Ref.: 5 titles.**

UDC 532.516

Konon P.N., Dokukova N.A., Nesterovich S.S. **Localization of the most dangerous perturbations of the liquid layer on a rotating cylinder and their experimental observation** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 123–129 . The problem of the inviscid instability of the liquid layer on the outer surface of a horizontally located cylinder rotating at a constant velocity in the field of centrifugal and surface forces is considered. The dispersion relation is obtained, the regions of unstable perturbations and the maximally growing waves are determined. It is shown that nonstationary perturbations that are maximally increasing in time are observed in the experiments. – **Fig. 4. Ref.: – 7 titles.**

UDC 539.4:... 517.958:539.3; 621.9.06

Sherbakov S.S., Wu Shi, Shao Junpeng, Nasan A.A. **Spatial stress-strain state of the boring bar front-end structure of heavy-duty horizontal boring lathe depending on the boring radius** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P. 130-136. The work describes mechanical and mathematical models allowing determination of the stress-strain state and contact interaction of the elastic elements of the boring bar front-end structure of heavy-duty horizontal boring lathe during its loading with boring and bolts tightening forces in spatial static statement. 24 mechanical and mathematical models describing stress-strain state depending on the boring radius of the boring bar front-end structure were developed in ANSYS Workbench. Optimization based on minimizing von-Mises stress in the system while increasing the boring radius was made. Recommendations for the additional studies were given. – **Fig. 4. Tables 3. Ref.: 4 titles.**

UDC 621.313.13

Karpovich S.E., Voitau A.U., Nesterenka V.N., Manin A.S. **Mathematical model and algorithmization of direct problem of kinematics of the parallel manipulator with six degrees of freedom** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 137–143 . Mathematical model is developed and algorithmization for solving of direct problem of kinematics of the parallel manipulator on six coordinates linear drive of direct action in MATLAB is performed. – **Fig. 3. Ref.: 4 titles.**

UDC 536.2; 519.6; 539.3

Pleskachevsky Yu.M., Chigareva Yu.A. **Limiting states in a microslope-shaped plate for brittle and plastic fracture due to a change in the temperature field** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 144–154 . The paper considers a heterogeneous medium of gradient type that is stimulated by problems arising in the practice of using various composite materials in machines, reactors, and technological processes associated with the temperature effect on them. – **Fig. 10. Ref.: 7 titles.**

UDC 531.255

Kulikov I.S., Shkinder I.V. **Stress-strain state of a hexagonal prismatic shell of finite length under creep conditions** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 155–161 . One of the most important elements of the core of the nuclear reactor is the cover of the fuel assembly, which is a thin-walled hexagonal shell. Using the SolidWorks software package, the task of determining the SSS for a thin-walled hexagonal shell under creep conditions was solved. – **Fig. 7. Ref.: 3 titles.**

UDC 004.94

Lappo I.A., Lukyanichik A.U., Buksa D.A., Chigarev V.A. **Modelling of mechatronic systems in modern packages of three-dimensional computer-aided design** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 162–166 . The formulation of a question about the modeling of mechatronic systems in modern packages of 3-D modeling, graphical experiments. – **Fig. 4. Ref.: 2 titles.**

UDC 378.6

Khvisevich V.M., Veremeichik A.I., Mazyrka M.V. **The application of automated software complex «ASSIS-TANT» to enhance individual technical and special disciplines** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018.

– Issue 33. – P 167–172 . In the article the peculiarities of application of the developed program software "Assistant" in the educational process on theoretical and applied mechanics, allowing to diversify the job to perform the calculated graphic and control works, to simplify the process of validating job as a teacher and intensify the independent work of students. – **Fig. 8. Ref.: 1 titles.**

UDC 517.958:531.12; 541.43/.49; 539.62; 532.516; 539.375.6; 539.4:620.2

Sherbakov S.S., Kozik A.N., Nasan A.A., Padhaiskaya D.A. **Stress-strain state of the oil pipeline section, taking into account various types of corrosion defects and repair works** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 173–179 . Computer finite element simulation of a spatial stress-strain state of the linear pipeline section was made. Calculations were performed for the conditions of loading by internal pressure taking into account two types of internal corrosion damages (single extended and multiple small ones) as well as two types of repair works (repairing by the crimped steel coupling or by the glass-polymer sealing ring) and deepening into the ground by 0.8 m. On the basis of the models obtained the recommendations for using glass-polymer sealing ring and determination of its thickness depending on maximum stresses were made. – **Fig. 4. Tables 3. Ref.: 7 titles.**

UDC 621.313.13

Titko D.V., Zubov G.A., Cheushev K.V., Marko A.F. **Remote management of system displacements through the Internet** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 180–184 . Implementation features of remote system management of the multicoordinate displacements through the Internet are considered in this article. Graphic user interface for getting access to the local controller of system management through web-page is described. – **Fig. 3. Ref.: 6 titles.**

UDC 531/534

Pronkevich S.A., Shpurgalova M.Y. **Models of soils and rocks with finite-element modeling** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 185–192 . Models of rocks are considered for finite element modeling, including using ANSYS and LS-DYNA programs. – **Fig. 4. Ref.: 9 titles.**

UDC 624.131+539.215

Altynbekov Sh.A., Niyazimbetov A.D., Takibaeva G.A., Alimkulova B.T. **Problems of consolidation of multi-layer heterogeneous soil and their solution** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 193–198 . Formulations of the problems of the theory of filtration consolidation-layer inhomogeneous soil bases in the form of a parallelepiped and a cylinder are formulated. The method for approximating the solution of problems is substantiated. The analysis of preliminary numerical calculations is carried out. – **Fig. 2. Ref.: 9 titles.**

UDC 539.4

Chigareva Yu.A., Chigarev Yu.V. **Modeling the process of loosening the soil in the surface layer under the influence of processing devices** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 199–206 . The paper considers the application of the methods of knots, bonds, effective media for the processes of loosening the soil layer. – **Fig. 6. Ref.: 4 titles.**

UDC 531; 539.3; 620.3

Sherbakov S.S., Poleschuk M.M. **Electromagnetic control of the motion of a mediator for the action on a nanoparticle in a nonlinear channel with a fluid flow** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 207–212 . The method of electromagnetic control of the motion of a conductive mediator for manipulating a nanoparticle in a nonlinear channel with fluid is proposed and numerically realized. The pressure fluctuations in the channel, the profile and direction of the fluid velocity, the electrical permeability and the magnetic resistance of the medium were taken into account. A number of model inverse problems of determining the components of the electromagnetic field that ensures the motion of the macro medium through the given trajectories is solved. – **Fig. 4. Ref.: 9 titles.**

UDC 536

Sherbakov S.S. **Analysis of the damageability of tribo-fatigue and mechanothermodynamic systems: the entropy approach** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 213–238 . The second law of thermodynamics is based on the fundamental concept of entropy. In addition the works are underway to apply entropy to describe the damage processes in the conditions of mechanical fatigue, friction and wear. Recently the content of this concept has been substantially broadened: it is a question of tribo-fatigue and mechanothermodynamic entropy. A systematic analysis of the entropy approach is given for the investigation of damage of materials, structural elements, friction pairs, tribological and mechanothermodynamic systems – **Fig. 10. Tables 9. Ref.: 50 titles.**

UDC 539.3+ (616.314-089.23) 617.577+ (611.717.9: 611.747.7)

Bosyakov S.M., Petukhovskiy A.S., Stepanova A.O., Krushevskaya E.E. **Finite-element analysis of the movements of the phalanges of the human hand in case of damage to the flexor tendons of the fingers** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 239–242 . The purpose of this work is to evaluate the ultimate load-bearing capacity of the tibia with the post-resection defect, taking into account various types of distributions of elastic properties and toughness in different quadrants of a cross section of the bone. – **Fig. 4. Ref.: 6 titles.**

UDC 624.953

Agayev V.N., Martynenko T. M., Pronkevich S.A., Sklyar O.N., Martynenko I.M. **Issledovaniye of stability rectangular in respect of an envelope in the conditions of the linear distribution of temperature**// Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 243–248 . The solution of a task of definition of stability of capsule system at accumulation of damages owing to action of cyclic temperature profiles is for the first time proposed and loss of stability of key elements of designs by carrying out the virtual tests with use of a package computer the ANSYS programs. As a result of researches stability questions owing to the linear distribution of separate elements of the training module which seek to change the geometrical properties and as they form a power framework of a design are considered, in an envelope there is a stressed state. – **Fig. 4. Ref.: 7 titles.**

UDC 517.9

Akimov V.A., Goncharova S.V. **On a differential equation of the k-th order, used in the operator method of the theory of elasticity** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 249–250 . In their work on solving boundary problems of the theory of elasticity, the authors developed the so-called operator-method for expanding functions into orthogonal and non-orthogonal series. – **Fig. 0. Ref.: 2 titles.**

UDC 539.3

Koval I.V., Sherbakov S.S. **Computer simulation of contact interactions and stress-strain state as applied to human dentoalveolar apparatus** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 251–255 . Computer finite element simulation of the stress-strain state was carried out for a multi-element human dentoalveolar apparatus including two fragments of the bones of the lower and upper jaws, two periodontal elements, eight teeth and eight dentin elements. The contact interactions between the elements of the system and the three-dimensional stress distributions were calculated – **Fig. 3. Tables 1. Ref.: 7 titles.**

UDC 539.3

Poddubny A.A. **Deformation of a three-layer elastoplastic rod, partially supported on an elastic base, under the action of a uniformly distributed load** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 256–259 . Changes in deflection, shear in the aggregate, normal stresses of a three-layered rod partially supported on an elastic base, under the action of a uniformly distributed load, taking into account the plasticity of the bearing layers and the physical nonlinearity of the filler are considered. – **Fig. 2. Ref.: 4 titles.**

UDC 621. 81

Kapusta P.P. **Virtual designing of gear reducers and gear boxes in course designing of machine components** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 260–266 . It is described, offered by the author, the general principles, a technique and the basic stages of virtual designing of machine units and components, providing implementation of learning requirements for the course of "Machine components". The developed technique is effectively used in the course designing of machine components for mechanical engineering and mechanical-technological specialty of establishments of higher education. Using of workings out is shown on examples of gear reducers and gear boxes designing. – **Fig. 13. Ref.: 0 titles.**

UDC 681.5

Antunevich A.L., Ilyov I.G., Goncharenko V.P., Mironov D.N. **Modeling of a complex mechanical system subject to inhomogeneous alternating effects in the Simulink \ Simmechanics environment** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 267–271 . In article realization of model of the launcher in the environment of Simulink\SimMechanics is considered. SimMechanics use essentially accelerates and simplifies process of creation of model of studied mechanical system. Thus results of modeling have good degree of compliance with data of experiment and mathematical modeling. – **Fig. 5. Ref.: 5 titles.**

UDC 621.317.331 (079.2)

Konchina L.V., Povarenkova A.A. **Research of the strength of main pipelines on curvilinear sections** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 272–275 . The effect of centrifugal force on the bending of the pipeline in the vertical plane. – **Fig. 2. Ref.: 5 titles.**

UDC 681.5 + 004.8

Mironov D.N., Goncharenko V.P. **Root mechatronic systems** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 276–280 . In article proposed to combine miniature mechatronic devices into a single universal mechanism functioning as a swarm. Created a versatile combat system capable of on their own, thanks to artificial intelligence, to regenerate itself and to carry out combat missions with 100% certainty, without casualties and with minimal material costs. – **Fig. 5. Ref.: 6 titles.**

UDC 539.3

Sherbakov S.S., Gribovskii G.V. **Stress-strain state of multicomponent rim–tire–asphalt-concrete system for different values of radial load on the rim and internal pressure in the tire** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 281–286 . Computer simulation of stress-strain state of rim–car tire–asphalt-concrete multielement system for the various combinations of internal pressure in the tire and axle load on the rim was made. Contact interactions between system elements were calculated and three-dimensional distribution of stresses in the system was obtained. The dependences of stress and strain intensity on different values of radial load and internal pressure were constructed. – **Fig. 4. Tables 2. Ref.: 5 titles.**

UDC 621.313.13

Kuzniatsova V.U. **Imitation modeling of dynamics of the parallel manipulator on three planar positioners** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 287–294 . Imitation modeling in MATLAB of dynamics of the parallel manipulator on three planar positioners is considered. Block-modular structure of dynamic model is developed. Graphics of force functions for of platform displacement are took with the help of block-modular structure of dynamic model with the help of MATLAB/Simulink. – **Fig. 15. Ref.: 7 titles.**

UDC 534.611:534.511

Machiho D.V., Sakevich V.N. **Spectral features of oscillations occurring in the core structure after pulsed exposure to it** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 295–298 . Experimentally ranges of oscillations in rod system after pulse action on it are studied by both periodic and single pulses. An assessment of frequency of shock influence in case of which the rod system will perceive periodic influence as single pulses is given and the frequency spectrum will be continuous. – **Fig. 4. Ref.: 4 titles.**

UDC 539.3

Vasilevich Yu.V., Fedotov D.A., Sakhonenko S.V., Sakhonenko V.M. **Investigation of the process of composite molding at the stage of polymerization of the binder** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P. 299–306 . The purpose of this paper is to find the magnitude of the stresses and stiffness characteristics at the moment of polymerization and after curing the binder as a result of its chemical shrinkage. Considering the condition of equilibrium and compatibility of the deformations of the filler and the binder, two linear equations are obtained, expressing the relationship between the annular and radial stresses of the circular section of the composite, perpendicular to the fibers. – **Fig. 1. Ref.: 5 titles.**

UDC 681.3

Antsiparovich P.P., Akulich V.K., Dubovskaya E.M. **Determination of coordinates of centre and valid cam profiles** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P. 307–308 . In a paper the problem of deriving of expressions of the Cartesian coordinates as centre is considered and real cam contours without use of formulas of polar co-ordinates. – **Fig. 1. Ref.: 2 titles.**

UDC 528.1 + 539.3

Gorbach N.I., Shirvel P.I., Shpurgalova M.Yu., Kadyshina A.V. **The application of the d'Alembert principle for the formulation of differential equations of motion of an elliptic pendulum** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 310–317 . In this paper, a kinetostatic method is used to compose the differential equations of oscillations of an elliptic pendulum. – **Fig. 4. Ref.: 2 titles.**

UDC 539.3

Kozel A.G. **Deformation of the circular three-layer plate on the basis on the basis Pasternak** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 318–323 . Mechanical-mathematical model describing the deformation of the steel thickness elastic circular sandwich plate on the Pasternak Foundation is developed. Corresponding boundary-value problem involves a differential equation of equilibrium displacement and boundary conditions. The general solution is obtained in the Bessel functions. We considered the particular case of plate bending under the action of a uniformly distributed surface load at fixed outline. – **Fig. 2. Ref.: 12 titles.**

UDC 539.3

Sherbakov S.S., Mozolevski A.A. **Simulation of stress-strain state and volume damageability of liner/shaft system** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 324–331 . Mechanical, mathematical and

computer models of the stress-strain state and the state of volume damageability of the liner/shaft system which operates under complex loading by contact and non-contact bending forces are considered. The application to the shaft of non-contact loads fundamentally changes the picture of the distribution of stresses and strains in the region of contact interaction which indicates strong manifestation of tribo-fatigue back effect. Significant changes in the qualitative and quantitative characteristics of the stress state and dangerous volumes in the three-dimensional vicinity of the contact area are shown both in the shaft and liner. – **Fig. 4. Ref.: 4 titles.**

UDC 62-1/-9

Kapusta P.P. **Development of the contents of a training course «Machines components and designing» for preparation of engineers on a specialty «Computer mechatronics»** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 332–343 . It is described data under the developed contents of a training course «Machines components and designing» for training of engineers on a specialty «Computer mechatronics», based on modern scientific and methodological representations about a state and development prospects of mechanical and mechatronics machine systems. – **Fig. . Ref.: 7 titles.**

UDC 60.001.11:531.8

Ausiyevich A.M., Kudin V.V., Kachanov I.V., Kruhlikau A.A., Samoylau I.R. **Drawing up of dynamic models and a mathematical description of a complex vibratory systems based on selection of dynamic links** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 344–350 . In a mechanical system the state of each link affects to each other's. The totality of these system elements is described by linear differential equations. Analysis of the status of the system is appropriate to produce on a separate dynamic link with given all external influences and inertia, stiffness and dissipative parameters of all real links. Therefore, the state of a complex system will be a function of the generalized coordinates and time, and it's described by the equations system accordingly to the number of generalized coordinates. – **Fig. 7. Ref.: 4 titles.**

UDC 004.94

Korobeinik D.U., Chernous D.V., Chigarev V.A. **Development of models of mobile miniature robots in a package of three-dimensional design** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 351–356 . The formulation of a question about the modeling of mechatronic systems in modern packages of 3-D modeling, graphical experiments. – **Fig. 4. Ref.: 2 titles.**

UDC 531.8

Dydyshko I.M., Rusan S.I., Haurylenia A.K. **Identification and study of mechanical characteristics of the motion of the mobile system** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 357–362 . The article examines the movement of mobile systems. The received formulas allow to determine the starting (initial) torque of the motor, determine the motion of the system in transient mode, to investigate the dynamic and kinematic characteristics of the motion. Is an example in which the particular case determine all kinematic and dynamic characteristics of the mechanical system. – **Fig. 7. Ref.: 4 titles.**

UDC 539.3

Zakharchuk Yu.V. **Deformation of a circular three-layer plate with a light compressible filler** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P 363–369 . The formulation of the problem of symmetric bending of an asymmetric elastic three-layer plate with a light compressible filler is given. An analytical solution is obtained that allows calculating the stress-strain state at various loads and boundary conditions. – **Fig. 1. Ref.: 15 titles.**

UDC 531.3

Borisov A.V., Rozenblat G.M., Chigarev A.V. **Application of the matrix method and the recurrent algorithm to the model of a plane-multipurpose mechanism with lines of variable length moving on a horizontal plane** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P. 370–380 . Using the developed matrix method and the recursive algorithm, the paper first proposed a model of a plane mechanism with an arbitrary finite number of links of variable length. A new model of the movement of a flat mechanism is proposed due to a change in both the angles in the hinges and the lengths of the links. This makes it possible to approximate the motion of a plane multi-link mechanism to a wave displacement of matter. – **Fig. 8. Ref.: 15 titles.**

UDC 621.9.011:517.962.1

Doumar S.S. **Virtual investigation of column torsional dynamics for heavy multipurpose machine tool** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P. 381–387 . FEA-analysis of column torsional dynamics is provided for heavy drilling-milling-boring machine. Variants of inner reinforcement of column are simulated. Layout of bending and torsional resonances is disclosed. Two bonded torsional eigenmodes are revealed. Creation of double wall with concrete filled caissons is recommended under condition of inner windows

closing. It makes excitation to shift to less powerful eigenmode. Oscillation amplitude lowered at twice. – **Fig. 6. Ref.: 6 titles.**

UDC 621.835-41:514.764

Skoybeda A.T., Zhukavets V.M. **The solution of autonomous nonlinear second-order differential equation in the construction of plane curves** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P. 388–397 . The basic scheme of wheel-step mover of simplified construction is considered in the article. The method of solving an autonomous nonlinear second-order differential equation for the purpose of calculation of the main parameters of the mover has been given. – **Fig. 2. Tab. 1. Ref.: 6 titles.**

UDC 519.713.1

Dolgushev Yu.V., Kuletsky S.V., Chigarev V.A. **Designing a deterministic finite automaton** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P. 398–401 . The approach proposed for the solution of the problem under consideration is very reliable, rational and simple in execution. Using the constructed circuits, you can easily create a finite state machine. – **Fig. 3. Tab. 1. Ref.: 4 titles.**

UDC 620.172.251.2 (088.8)

Odinokova O.A. **Stabilization of the deformations at re - ac-grueenie samples of viscoelastic materials** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P. 402–407 . A method of increasing the accuracy of the test polymer sample by reducing the influence of the prehistory of loading and overcoming neravnovesnoi structure of the material after removal of the load. – **Fig. 3. Ref.: 12 titles.**

UDC 621.865: 004.896

Trifankov D.V., Shirvel P.I., Konon I.I. **Development of a generalized rotation matrix for dynamic models of motion of a multicopter** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P. 408–415 . The developed generalized rotation matrix for dynamic models of motion of a multi-copter allows to automate the calculation process, for example, in the case of converting linear velocity components from a fixed or high-speed coordinate system into a reference frame associated with the body. – **Fig. 3. Ref.: 7 titles.**

UDC 621.865: 004.896

Konon I.I., Shirvel P.I., Trifankov D.V. **Construction of the solution of the equations of motion of the mobile mechatronic complex in the nonrectangular and coherent coordinate systems** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P. 416–421 . The developed matrix of the transition from the non-rectangular to the coherent coordinate system makes it easy to convert and establish the relationship between the time evolution of the Euler angular coordinates and the velocities in the coherent coordinate system, describing the basic motions of the mobile mechatronic system roll, pitch and yaw, in accordance with the fundamental principles of flight dynamics. – **Fig. 2. Ref.: 6 titles.**

UDC 621.382.088

Minchenko V.A., Karpovich S.E., Dick S.K., Kekish N.I. **Electromagnetic compatibility by conductive interference of probe technologic devices of the micro- and nanoelectronics** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P. 422–425 . Calculated and experimental methods of research of electromagnetic compatibility allow to increase the quality of development of devices and to guarantee output characteristics of research devices of the electronic devices for probe control. – **Fig. . Ref.: 5 titles.**

UDC 532.516

Konon P.N., Makoyed A.G. **Localization of the most dangerous perturbations of the liquid layer on a rotating cylinder and their experimental observation** // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Issue 33. – P. 426–429 . The nonlinear stability of a capillary jet with allowance for the time-varying external pressure is investigated. Studied the formation of the second maximum, which provides the formation of drops of different size. The regions of unstable perturbations, the shape of the surface of the jet and the flow parameters are determined. The decay time, depending on the initial perturbations of the surface, is found. – **Fig. 2. Ref.: 4 titles.**

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Сосновский Л.А., Щербаков С.С., Богданович А.В.</i> Современная наука и мультидисциплинарная система образование–наука–производство: некоторые достижения.....	3
<i>Плескачевский Ю.М., Журавков М.А., Старовойтов Э.И.</i> Локальные нагружения трехслойной балки со сжимаемым заполнителем в температурном поле.....	12
<i>Карпович С.Е., Жарский В.В., Алехнович Г.Н., Салманзадех Г.Й.</i> Системы многокоординатных перемещений на механизмах параллельной кинематики.....	18
<i>Chigarev A.V., Chigarev Ju.V.</i> Ray expansion in inhomogeneous and stochastic media.....	23
<i>Немировский Ю.В., Болтаев А.И.</i> Сложный изгиб гибридных деревянных брусьев...36	
<i>Грода Я.Г., ди Каприо Д., Вихренко В.С.</i> Влияние характера межчастичного взаимодействия и числа заблокированных узлов на коэффициент диффузии решеточного флюида на простой кубической решетке.....	56
<i>Козловский Е.Я., Богдан С.И., Журавков М.А.</i> Решение сопряженных задач геомеханики и геотехники на основе моделей механики деформированного твердого тела.....	62
<i>Леоненко Д.В., Зеленая А.С.</i> Уругоупругий изгиб прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем.....	65
<i>Михасев Г.И., Авдейчик Е.В., Каплунов Ю.Д., Приказчиков Д.А.</i> Исследование свободных продольных колебаний наноразмерной балки с позиций двухфазной нелокальной теории упругости эрингена.....	72
<i>Дудяк А.И., Хвасько В.М.</i> Оптимизация радиусов контактов составных толстостенных цилиндров в блок-матрицах аппаратов высокого давления.....	81
<i>Дайняк И.В., Дик С.К., Кузнецов В.В., Поляковский В.В.</i> Управление мехатронными системами перемещений в режиме реального времени.....	86
<i>Босяков С.М., Юркевич К.С., Афанасьева М.А., Шпилевский И.Э.</i> Оценка предельной нагрузки на большеберцовую кость голени после секторальной резекции: влияние анизотропии костной ткани в поперечном сечении кости.....	92
<i>Веремейчик А.И., Гарбачевский В.В., Сазонов М.И., Хвисевич В.М.</i> Исследование напряженно-деформированного состояния ножей для измельчения пищевых продуктов при поверхностной плазменной закалке движущимся источником нагрева.....	98
<i>Василевич Ю.В., Скворцов К.Г., Сахоненко С.В., Сахоненко В.М.</i> Влияние процесса отверждения связующего на упругие характеристики композиционного материала...105	
<i>Яровая А. В.</i> Изгиб трехслойной ортотропной пластины с усиливающей накладкой...112	
<i>Жарский В.В., Луценко В.Е., Форулан М.М., Шоломицкий В.Г., Дрозун Е.А.</i> Реализация программируемых движений в замкнутой системе управления на основе датчиков Холла.....	117
<i>Конон П.Н., Докукова Н.А., Нестерович С.С.</i> Локализация наиболее опасных возмущений слоя жидкости на вращающемся цилиндре и их экспериментальное наблюдение.....	123
<i>Sherbakov S.S., Wu S., Shao J., Nasan Aleh A.</i> Spatial stress-strain state of the boring bar front-end structure of heavy-duty horizontal boring lathe depending on the boring radius...130	
<i>Карпович С.Е., Войтов А.Ю., Нестеренко В.Н., Манин А.С.</i> Математическая модель и алгоритмизация прямой задачи кинематики параллельного манипулятора с шестью степенями свободы.....	137
<i>Плескачевский Ю.М., Чигарева Ю.А.</i> Моделирование напряженно-деформированного состояния в микрослоистой пластине при хрупком и пластическом разрушении под действием температурного поля.....	144
<i>Куликов И.С., Шкиндр И.В.</i> НДС шестигранной призматической оболочки конечной длины в условиях ползучести.....	155
<i>Лаппо И.А., Лукьянчик А.Ю., Букса Д.А., Чигарев В.А.</i> Разработка моделей мехатронных систем в современных пакетах трехмерного компьютерного проектирования.....	162

<i>Хвисевич В.М., Веремейчик А.И., Мазырка М.В.</i> Применение автоматизированного программного комплекса «Ассистент» для активизации самостоятельной работы по общетехническим и специальным дисциплинам.....	167
<i>Щербаков С.С., Козик А.Н., Насань О.А., Подгайская Д.А.</i> Напряженно-деформированное состояние секции нефтепровода с учетом различных видов коррозионных дефектов и ремонтных работ.....	173
<i>Титко Д.В., Zubov Г.А., Чеушев К.В., Марко А.Ф.</i> Удалённое управление системой перемещений через интернет.....	180
<i>Пронкевич С.А., Шпургалова М.Ю.</i> Модели грунтов и горных пород при конечно-элементном моделировании.....	185
<i>Алтынбеков Ш.А., Ниязымбетов А.Д., Такибаева Г.А., Алимкулова Б.Т.</i> Задачи консолидации многослойного неоднородного грунта и их решения.....	193
<i>Чигарева Ю.А., Чигарев Ю.В.</i> Моделирование процесса разрыхления почвы в поверхностном слое при воздействии обрабатывающих устройств.....	199
<i>Щербаков С.С., Полещук М.М.</i> Электромагнитное управление движением посредника для воздействия на наночастицу в нелинейном канале с потоком жидкости.....	207
<i>Щербаков С.С.</i> Анализ повреждаемости трибофатических и механотермодинамических систем: энтропийный подход.....	213
<i>Босяков С.М., Петуховский А.С., Степанова А.О., Крушевская Е.Е.</i> Конечно-элементный анализ движений фаланг кисти человека при повреждении сухожилий сгибателей пальцев.....	239
<i>Агаев В.Н.о., Мартыненко Т.М., Пронкевич С.А., Скляр О.Н., Мартыненко И.М.</i> Исследование устойчивости прямоугольной в плане оболочки в условиях линейного распределения температуры.....	243
<i>Акимов В.А., Гончарова С.В.</i> Об одном дифференциальном уравнении k -го порядка, используемом в операторном методе теории упругости.....	249
<i>Коваль И.В., Щербаков С.С.</i> Компьютерное моделирование контактных взаимодействий и трехмерного напряженно-деформированного состояния применительно к зубочелюстному аппарату человека.....	251
<i>Поддубный А. А.</i> Деформирование трехслойного упругопластического стержня, частично опертого на упругое основание, под действием равномерно распределенной нагрузки.....	256
<i>Капуста П.П.</i> Методика виртуального конструирования зубчатых редукторов и коробок передач в курсовом проектировании деталей машин.....	260
<i>Антуневич А.Л., Ильёв И.Г., Гончаренко В.П., Миронов Д.Н.</i> Моделирование сложной механической системы, подверженной неоднородным переменным воздействиям в среде Simulink/Simmechanics.....	267
<i>Кончина Л.В., Поваренкова А.А.</i> Исследование на прочность магистральных трубопроводов на криволинейных участках.....	272
<i>Миронов Д.Н., Гончаренко В.П.</i> Роевые мехатронные системы.....	276
<i>Щербаков С.С., Грибовский Г.В.</i> Напряженно-деформированное состояние многокомпонентной системы диск–шина–асфальтобетон при различных соотношениях радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине.....	281
<i>Кузнецов В.В.</i> Имитационное моделирование динамики параллельного манипулятора на трёх планарных позиционерах.....	287
<i>Мачихо Д.В., Сакевич В.Н.</i> Спектральные особенности колебаний, возникающих в стержневой конструкции после импульсного воздействия на неё.....	295
<i>Василевич Ю.В., Федотов Д.А., Сахоненко С.В., Сахоненко В.М.</i> Исследование процесса формования композита на этапе полимеризации связующего.....	299
<i>Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М.</i> Определение координат центрального и действительного профилей кулачка.....	307

Горбач Н.И., Ширвель П.И., Шпургалова М.Ю., Кадышина А.В. Применение принципа Даламбера для составления дифференциальных уравнений движения эллиптического маятника.....	310
Козел А.Г. Деформирование круговой трехслойной пластины, заземленной по контуру, на основании пастернака.....	318
Щербаков С.С., Мозолевский О.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния и объемной повреждаемости системы вкладыш/вал.....	324
Капуста П.П. Программа курса «детали и проектирование машин» для подготовки инженеров по специальности «компьютерная мехатроника».....	332
Авсиевич А.М., Кудин В.В., Качанов И.В., Кругликов А.А., Самойлов И.Р. Составление динамических моделей и математическое описание сложных колебательных систем на основе выделения динамических звеньев.....	344
Коробейник Д.Ю., Черноус Д.В., Чигарев В.А. Разработка моделей мобильных миниатюрных роботов в пакете трехмерного проектирования.....	351
Дыдышка І.М., Русан С.І., Гаўрыленя А.К. Визначення і дослідження механічних характеристик руху мобільної системи.....	357
Захарчук Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем.....	363
Борисов А.В., Розенблат Г.М., Чигарев А.В. Применение матричного метода и рекуррентного алгоритма к модели плоского многозвенного механизма со звеньями переменной длины, движущегося по горизонтальной плоскости.....	370
Довнар С.С. Виртуальное исследование крутильной динамики колонны тяжелого многоцелевого станка.....	381
Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н. Решение автономного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка при построении плоских кривых.....	387
Долгушев Ю.В., Кулецкий С.В., Чигарев В.А. Проектирование детерминированного конечного автомата.....	397
Одинокова О.А. Стабилизация деформаций при повторно-переменном нагружении образцов из вязкоупругих материалов.....	401
Трифанков Д.В., Ширвель П.И., Конон И.И. Разработка обобщенной матрицы вращения для динамических моделей движения мультикоптера.....	407
Конон И.И., Ширвель П.И., Трифанков Д.В. Построение решения уравнений движения мобильного мехатронного комплекса в непрямоугольной и связанной системах координат.....	415
Минченко В.А., Карпович С.Е., Дик С.К., Кекиш Н.И. Электромагнитная совместимость по кондуктивным помехам зондового технологического оборудования микро- и нанoeлектроники.....	422
Конон П.Н., Макоед А.Г. Исследования струйного течения жидкости с учетом внешнего воздействия.....	426
РЕФЕРАТЫ	430
ABSTRACTS	439

Научное издание

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

Международный научно-технический сборник

Основан в 1975 году

Выпуск 33

Оформление и компьютерная верстка *В.А. Чигарева*