Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 1»

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

## Методические указания и контрольная работа № 1 для студентов-заочников машиностроительных специальностей

Минск 2010

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 1»

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольная работа № 1
для студентов-заочников машиностроительных специальностей

*Пятое издание*

М и н с к 2 0 1 0

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я7
В 93

Составители:
А.Н. Андриянчик, Н.А. Микулик, В.И. Юринок

Рецензент Г.А. Романюк

Настоящие методические указания и контрольная работа предназначены для студентов первого курса заочной формы обучения машиностроительных специальностей БНТУ.

Четвертое издание вышло в свет в 2009 году в БНТУ.

## В в е д е н и е

Настоящее издание является методическим руководством для изучения общего курса высшей математики студентами-заочниками инженерно-технических специальностей. Оно является переработанным и дополненным вариантом изданий 1999 и 2002 годов. В пособии содержатся общие рекомендации студенту-заочнику по работе над курсом высшей математики, приводятся правила выполнения и оформления контрольных работ, представлена программа курса высшей математики, соответствующая учебным планам для 1-го семестра; изложены основные понятия, определения, теоремы и т.д. из курса высшей математики, приведены образцы решения типовых примеров и контрольная работа № 1.

Определение номеров задач из контрольной работы производится следующим образом: номер первой задачи контрольной работы равен двум последним цифрам номера зачетной книжки студента; номера последующих задач получаются от прибавления к номеру предыдущей задачи числа 20. Если две последние цифры номера зачетной книжки составляют число, большее чем 20, то номер первой задачи будет равен номеру из двух последних цифр минус число, кратное 20. Например:

| Номер зачетной книжки | Номера задач |
|---|---|
| 301787/148 | 8, 28, 48 и т.д. |
| 303797/121 | 14, 34, 54 и т.д. |
| 301797/100 | 20, 40, 80 и т.д. |
| 303797/106 | 6, 26, 46 и т.д. |

# 1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО РАБОТЕ НАД КУРСОМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих этапов:

изучение теоретического материала по учебникам, учебным пособиям, конспектам лекций и т.д.;

решение задач и упражнений,

выполнение контрольных работ.

В помощь заочникам Белорусский национальный технический университет организует чтение установочных лекций и проведение практических занятий. На кафедре высшей математики № 1 каждую субботу с 10.00 до 13.00 проводятся консультации. Кроме того, студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной консультации. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ.

Завершающим этапом изучения отдельных частей курса высшей математики является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

## Работа с учебником

1. Изучая материал по учебнику, к следующему вопросу следует переходить только после правильного понимания предыдущего, производя самостоятельно на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ради краткости опущены в учебнике) и выполняя имеющиеся в учебнике чертежи.

2. Особое внимание следует обращать на определение основных понятий. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно точно представлять то, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схему доказательств теорем. Правиль-

ному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется вписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.д. На полях следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.

5. Процесс письменного оформления работы студента с учебником имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны чисто, аккуратно и расположены в определенном порядке. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу приучает студента к необходимому в работе порядку и позволяет ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.

6. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой (желательно чернилами другого цвета), чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента.

Список рекомендованной литературы приведен в конце методических указаний.

## Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения, то он должен сравнить их и выбрать самый лучший. До начала вычислений полезно составить краткий план решения.

3. Решения задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует

особо тщательного выполнения (например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом и указывать масштаб.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и, по возможности, в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если они даны). В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа $\pi$ и т.д.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим или геометрическим содержанием, то полезно прежде всего проверить размерность полученного ответа. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.

6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

## Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем.

В случае необходимости надо еще раз внимательно разобраться в материале учебника, решить ряд задач.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, заключающейся в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате применения механически заученных формул, без понимания существа дела. Можно сказать, что умение решать задачи является необходимым, но не достаточным условием хорошего знания теории.

## Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации.

2. В своих запросах студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, или в доказательстве теоремы, или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать, какой это учебник, год его издания и страницу, где рассмотрен затрудняющий его вопрос, и что именно его затрудняет. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

3. За консультацией следует обращаться и при сомнении в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

## Контрольные работы

1. В процессе изучения курса математики студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых – оказать студенту помощь в его работе. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса; указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы; помогают сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

2. Не следует приступать к выполнению контрольной работы, не решив достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольной работы вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

3. Контрольная работа должна выполняться самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю-рецензенту указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала.

4. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления прорецензированных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета или экзамена.

### Лекции и практические занятия

Во время экзаменационных сессий для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия. Они носят преимущественно обзорный характер. Их цель – обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела курса, подчеркнуть важнейшие места, указать главные практические приложения теоретического материала, привести факты из истории науки, обратить внимание студента на место высшей математики в инженерном образовании. Кроме того, на этих занятиях могут быть более подробно рассмотрены отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освещенные в рекомендуемых пособиях.

### Зачеты и экзамены

На экзаменах и зачетах выясняется прежде всего усвоение всех теоретических и практических вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; решение задач в простейших случаях должно выполняться без ошибок и уверенно; всякая письменная и графическая работа должна быть сделана аккуратно и четко.

## 2. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной 4–5 см для замечаний рецен-

зента.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), название дисциплины, номер контрольной работы, номер варианта; здесь же следует указать название учебного заведения, дату отсылки работы в университет и адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и подпись студента.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

Условие задачи должно быть написано так:

Найти работу, произведенную силой $\vec{F}(1,-2,5)$, если ее точка приложения перемещается из точки $M_1(0,\,2,\,1)$ в точку $M_2(1,\,3,\,2)$.

Р е ш е н и е

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

Ответ: $A$ = 10.

6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, кратко и лаконично объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи. Каждую задачу желательно начинать с новой страницы.

7. После получения прорецензированной работы, как не зачтенной, так и зачтенной, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации

рецензента.

Если рецензент предлагает внести в решение задач те или иные исправления и дополнения, то в случае не зачтенной контрольной работы ее следует представить на повторную рецензию в короткий срок.

При повторном представлении работы должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на нее. Поэтому при выполнении контрольной работы рекомендуется оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента.

## 3. ПРОГРАММА

### *3.1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*

1. Системы координат на прямой, плоскости и в пространстве. Пространства $R^2$ и $R^3$. Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Направляющие косинусы и длина вектора. Понятие о векторных диаграммах в науке и технике (диаграммы сил, моментов сил, электрических токов, напряжений и др.). Координаты центра масс.

2. Скалярное произведение векторов и его свойства. Длина вектора и угол между двумя векторами в координатной форме. Условие ортогональности двух векторов. Механический смысл скалярного произведения.

3. Определители второго и третьего порядков, их свойства. Алгебраические дополнения и миноры. Определители $n$-го порядка. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу).

4. Векторное произведение двух векторов, его свойства. Условие коллинеарности двух векторов. Геометрический смысл определителя второго порядка. Простейшие приложения векторного произведения в науке и технике: моменты сил, сила, действующая на проводник с током в магнитном поле, скорость точки вращающегося тела, направление распространения электромагнитных волн.

5. Смешанное произведение векторов. Геометрический смысл определителя третьего порядка.

6. Уравнения линий на плоскости. Различные формы уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до

прямой.

7. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола, их геометрические свойства и уравнения. Технические приложения геометрических свойств кривых (использование фокальных свойств, математические модели формообразования биологических, технических и других объектов).

8. Уравнения плоскости и прямой в пространстве. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

9. Уравнение поверхности в пространстве. Цилиндрические поверхности. Сфера. Эллипсоид. Гиперболоиды. Параболоиды. Геометрические свойства этих поверхностей, исследование их формы методом сечений. Технические приложения геометрических свойств поверхностей (использование фокальных свойств, модели строительных конструкций, физические модели элементов и т.п.).

10. Полярные координаты на плоскости. Спираль Архимеда.

11. Цилиндрические и сферические координаты в пространстве. Различные способы задания линий и поверхностей в пространстве.

12. Матрицы, действия с ними. Понятие обратной матрицы.

13. Системы двух и трех линейных уравнений. Матричная запись системы линейных уравнений. Правило Крамера. Система $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными. Метод Гаусса. Нахождение обратной матрицы методом Гаусса.

14. Пространство $R^n$. Линейные операции над векторами. Различные нормы в $R^n$. Скалярное произведение в $R^n$.

15. Линейные и квадратичные формы в $R^n$. Условие знакоопределенности квадратичной формы.

16. Понятие линейного (векторного) пространства. Вектор как элемент линейного пространства. Примеры. Линейные операторы. Примеры линейных операторов. Применение линейных операторов для моделирования различных процессов.

### *3.2. Введение в математический анализ*

17. Элементы математической логики: необходимое и достаточное условия. Прямая и обратная теоремы. Символы математической логики, их использование. Бином Ньютона. Формулы сокращенного

умножения.

18. Множество действительных чисел. Функция. Область ее определения. Способы задания. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

19. Числовые последовательности, их роль в вычислительных процессах. Предел числовой последовательности. Стабилизация десятичных знаков у членов последовательности, имеющей предел. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.

20. Сложные и обратные функции, их графики. Класс элементарных функций.

21. Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности. Пределы монотонных функций.

22. Непрерывность функций в точке. Непрерывность основных элементарных функций.

23. Бесконечно малые в точке функции, их свойства. Сравнение бесконечно малых. Символы $o$ и $O$.

24. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений.

### *3.3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной*

25. Понятие функции, дифференцируемой в точке, его геометрический смысл. Дифференциал функции. Общее представление о методах линеаризации.

26. Производная функции, ее смысл в различных задачах. Правила нахождения производной и дифференциала.

27. Производная сложной и обратной функции. Инвариантность формы дифференциала. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

28. Точки экстремума функции. Теорема Ферма.

29. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши и их применение.

30. Производные и дифференциалы высших порядков.

31. Правило Лопиталя.

32. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и форме Лагранжа. Представление функций $e^x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$,

с $x$ по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора.

### *3.4. Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения их графиков*

33. Условия монотонности функции. Экстремумы функции, необходимое условие. Достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

34. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба.

35. Асимптоты функций. Понятие об асимптотическом разложении.

36. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

37. Понятие кривой. Примеры. Уравнение касательной к кривой в данной точке.

38. Кривизна плоской кривой. Радиус и центр кривизны кривой. Понятие об эволюте и эвольвенте.

39. Векторная функция скалярного аргумента. Предел, непрерывность. Производная векторной функции. Ее геометрический и механический смысл. Касательная прямая и нормальная плоскость к кривой.

## 4. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

### *4.1. Матрицы*

Прямоугольная таблица из чисел вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из $m$ строк и $n$ столбцов, называется матрицей размеров $m \times n$.

Матрица $A^{-1}$ называется обратной к квадратной матрице $A$, если

$A^{-1}A = AA^{-1} = E$ , где $E$ – единичная матрица. Для невырожденной матрицы $A = (a_{ij}),\ i, j = 1, 2, \ldots, n,\ \det A \neq 0$ , где $\det A$ – определитель матрицы $A$, существует единственная обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $A_{ij}$ – алгебраические дополнения элементов $a_{ij}$ матрицы $A$.

Если матрица $A$ – вырожденная $(\det A = 0)$, то обратной к ней не существует.

П р и м е р 4.1. Найти матрицу $A^{-1}$, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det A = -10 \neq 0$, то $A$ – невырожденная и $A^{-1}$ существует. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы $A$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(6-8) = -2\,;$$

$$\begin{aligned} &A_{11} = -2, && A_{12} = 8, && A_{13} = -7, \\ &A_{21} = 2, && A_{22} = 2, && A_{23} = -3, \\ &A_{31} = -4, && A_{32} = -4, && A_{33} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 8 & 2 & -4 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ -0{,}8 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

### *4.2. Системы линейных уравнений. Матричный метод. Правило Крамера. Метод Гаусса*

Пусть задана система $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{4.1}$$

или, в матричной форме

$$A\,X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим некоторые методы решения системы (4.1).

**Формулы Крамера.** Если система (4.1) невырождена, то она имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\Delta_i$ – определитель, получаемый из определителя $\Delta$ заменой его $i$-го столбца на столбец $B$ свободных членов.

**Матричный метод.**

Решение невырожденной системы (4.1) можно найти по формуле

$X = A^{-1}B$.

**Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса).**

С помощью элементарных преобразований над строками система $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными может быть приведена к виду

$$\left.\begin{array}{r} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1r}x_r + \ldots + c_{1n}x_n = d_1; \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2r}x_r + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ c_{2r}x_r + \ldots + c_{rn}x_n = d_{r;} \\ 0 = d_{r+1}; \\ \ldots \quad \ldots \\ 0 = d_m, \end{array}\right\}, \qquad (4.2)$$

где $c_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \quad r \leq n.$

Система (4.2) эквивалентна исходной системе. Если хотя бы одно из чисел $d_{r+1}, \ldots, d_m$ отлично от нуля, то система (4.2), а следовательно, и исходная система несовместны. Если же $d_{r+1} = d_{r+2} = \ldots = = d_m = 0,$ то система совместна и из уравнений (4.2) выражают последовательно неизвестные $x_r,\ x_{r-1}, \ldots, x_2,\ x_1$ через $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$.

П р и м е р 4.2. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12; \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Расширенная матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 12 \\ 1 & -4 & 3 & -22 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Производя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получаем

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 12 \\ 1 & -4 & 3 & -22 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 2 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 11 & -11 & 66 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \end{pmatrix},$$

где цифрами $[1], [2], [3]$ обозначены следующие операции:

$[1]$ – первую и вторую строки поменяли местами; $[2]$ – ко второй строке прибавили первую, умноженную на (–2); к третьей прибавили первую, умноженную на (–3); $[3]$ – к третьей строке прибавили вторую, умноженную на (–1).

Этой матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22; \\ \quad 11x_2 - x_3 = 56; \\ \qquad -10x_3 = 10. \end{cases}$$

Отсюда последовательно находим

$$x_3 = \frac{10}{-10} = -1; \quad 11x_2 = 56 + x_3; \quad x_2 = \frac{56-1}{11} = 5;$$

$$x_1 = -22 + 4x_2 - 3x_3; \quad x_1 = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = -1.$

П р и м е р 4.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \end{cases}$$

используя формулы Крамера.

Р е ш е н и е . Так как определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

то матрица $A$ невырождена и система имеет единственное решение.

Находим определители $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 28;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 35;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -21.$$

По формулам Крамера находим решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{28}{7} = 4, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{35}{7} = 5, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-21}{7} = -3.$$

### *4.3. Скалярное произведение векторов в $\boldsymbol{R}^3$*

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $\vec{a}\vec{b}$ или $(\vec{a},\vec{b})$ и равное $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, где $\varphi$ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ .

Свойства скалярного произведения:

1. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$;  2. $(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b}), \quad \lambda\in R$;

3. $(\vec{a}+\vec{b},c)=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$;  4. $(\vec{a},\vec{b})=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

Свойство *4* выражает условие ортогональности векторов.

Если векторы $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ представлены своими координатами в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то скалярное произведение равно $(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Из этой формулы и определения скалярного произведения следует:

$$\cos(\vec{a},\overset{\wedge}{\vec{b}})=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Учитывая, что $np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\varphi$, где $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$ – проекция вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, а $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, скалярное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ можно записать в виде

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{b}|np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b}.$$

Пример 4.4. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}, \quad \vec{b}=-\vec{j}+7\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Решение.

Поскольку $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}$,

а векторы $\vec{a}, \vec{b}$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то

$$(\vec{a},\vec{b})=3\cdot 0+(-3)(-1)+1\cdot 7=10.$$

Поэтому

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{10}{\sqrt{1^2+7^2}} = \frac{10}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{50}}{5}.$$

**Механический смысл скалярного произведения**: работа $A$, производимая силой $\vec{F}$, точка приложения которой перемещается из точки $M_1$ в точку $M_2$, вычисляется по формуле $A = (\vec{F}, \overrightarrow{M_1M_2})$.

### *4.4. Векторное произведение векторов*

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется правой, если при наблюдении из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден против часовой стрелки; в противном случае тройка называется левой (рис. 4.1).

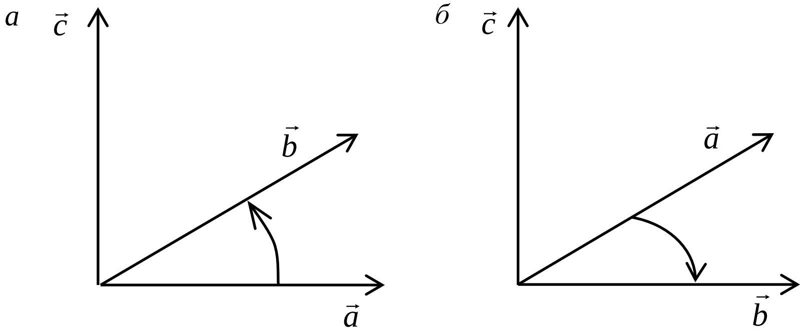


Рис. 4.1: *а* – тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая; *б* – тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ левая

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, $\varphi$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) $\vec{c} \perp \vec{b}$, $\vec{c} \perp \vec{a}$;

3) Упорядоченная тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая.

Обозначение: $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

## Свойства векторного произведения

1) $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$;

2) $\left[\lambda\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{a}, \lambda\vec{b}\right] = \lambda\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, $\quad \lambda \in R$;

3) $\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{c}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right]$;

4) $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ – условие коллинеарности векторов.

Если векторы $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\quad \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$, можно определить по формуле

$$S = \left| \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \right|.$$

П р и м е р 4.5. Найти площадь и длину высоты $BD$ треугольника с вершинами в точках $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$, $C(6, 2, 0)$.

Р е ш е н и е . Поскольку площадь $S$ треугольника $ABC$ равна $S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|$, то $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \dfrac{2S}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$.

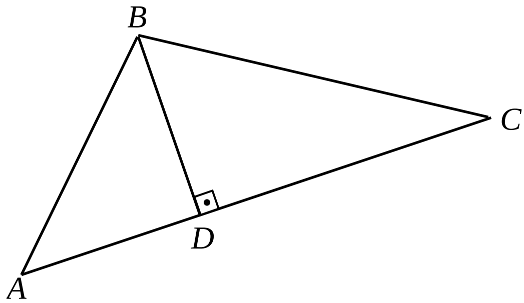


Рис. 4.2

1. Находим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и длину $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ вектора $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}; \quad \overrightarrow{AC} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k};$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{5^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{105}.$$

2. Находим $S$:

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|; \quad \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -28\vec{j} - 14\vec{k}.$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{(-28)^2 + (-14)^2} = 14\sqrt{5}; \quad S = 7\sqrt{5}.$$

3. $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \dfrac{14\sqrt{5}}{\sqrt{105}} = \dfrac{14}{\sqrt{21}} = 2\sqrt{\dfrac{7}{3}}.$

**Механический смысл векторного произведения.** Пусть точка $A$ твердого тела закреплена, а в его точке $B$ приложена сила $\vec{F}$. Тогда возникает вращательный момент $\vec{M}$ (момент силы). По определению момент силы относительно точки $A$ находится по формуле $\vec{M} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{F}\right]$.

### *4.5. Смешанное произведение векторов*

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, получаемое следующим образом: векторное произведение $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ умножается скалярно на вектор $\vec{c}$. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обозначается $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Таким образом, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c})$. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе, то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Объем параллелепипеда $V$, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, можно вычислить по формуле $V = \left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|$. Для того чтобы три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

П р и м е р 4.6. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0, 0, 1)$, $B(2, 3, 5)$, $C(6, 2, 3)$, $D(3, 7, 2)$.

Р е ш е н и е . Рассмотрим три вектора

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\overrightarrow{AC} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$; $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k}$ (рис. 4.3).

Можно показать, что объем пирамиды $ABCD$ равен шестой части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

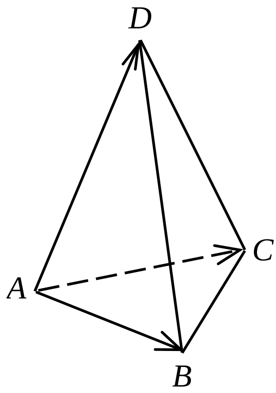


Рис. 4.3

Тогда $V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|$, а так как

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}2&3&4\\6&2&2\\3&7&1\end{vmatrix}=120,\ \text{ то }\ V=\frac{1}{6}120=20.$$

### *4.6. Прямая на плоскости. Плоскость*

**1. Прямая на плоскости.**

В декартовой прямоугольной системе координат *Oxy* прямая на плоскости может быть задана уравнениями:

– общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0; \tag{4.3}$$

– уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n}=(A,B)\neq 0$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0;$$

– уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{S}(m,n)$ (каноническое уравнение прямой):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n};$$

– параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \qquad t \in (-\infty; +\infty);$$

– уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Здесь $a$ и $b$ – величины отрезков, отсекаемых на осях координат $Ox$ и $Oy$ (т.е. длины, взятые с соответствующими знаками);

– уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$$

– уравнение прямой с угловым коэффициентом $k$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Расстояние $\rho(M_0, l)$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $l$, заданной уравнением (4.3), определяется по формуле

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{4.4}$$

Две прямые, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, параллельны, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, и перпендикулярны, если $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

П р и м е р 4.7. Составить уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M(–1, 2)$ перпендикулярно вектору, проходящему через точки $M_1(3, 1)$ и $M_2(4, –2)$. Найти расстояние от точки $M$ до прямой, проходящей через точки $M_1$ и $M_2$.

Р е ш е н и е . Уравнение прямой запишем в виде:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

где $x_0$, $y_0$ – координаты точки $M$, а $A$ и $B$ – координаты нормального вектора.

Так как $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} = (1, -3)$, то уравнение имеет вид $1(x + 1) - 3(y - 2) = 0$ или $x - 3y + 7 = 0$.

Для нахождения расстояния от точки $M$ до прямой $M_1M_2$ запишем уравнение этой прямой в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \text{т.е. } \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 1}{3},$$

или $3x + y - 10 = 0$.

Подставляя в формулу (4.4) координаты $x_0 = -1$, $y_0 = 2$ точки $M$, получаем

$$\rho(M, l) = \frac{|3(-1) + 1 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{11}{\sqrt{10}}.$$

**2. Плоскость.** Плоскость в прямоугольной системе координат может быть задана уравнениями:

$Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости. (4.5)

Если в уравнении (4.5) отсутствует свободный член $D$, то плоскость проходит через начало координат; если в уравнении (4.5) отсутствует одна из переменных, то плоскость параллельна той оси, название которой не входит в это уравнение;

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ –$$

уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n}(A, B, C) \neq \vec{0}$;

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ \text{– уравнение плоскости в отрезках,}$$

где $a$, $b$, $c$ – величина отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях;

– уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{4.6}$$

Величина угла φ между двумя плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{|(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности данных плоскостей запишется в виде

$$(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=0 \ \text{ или } \ A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Условие параллельности рассматриваемых плоскостей имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}.$$

Расстояние $\rho(M_0,\alpha)$ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $\alpha$, заданной уравнением (4.5), вычисляется по формуле

$$\rho(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

П р и м е р 4.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 0, -1)$, $M_2(2, -3, 0)$, $M_3(4, 7, 1)$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (4.6):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-(-1) \\ 2-1 & -3-0 & 0-(-1) \\ 4-1 & 7-0 & 1-(-1) \end{vmatrix}=0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрыв определитель, получаем искомое уравнение плоскости:

$$13x-y-16z-29=0.$$

### *4.7. Линии второго порядка*

Линией второго порядка называется множество точек плоскости, координаты $x$, $y$ которых в прямоугольной системе координат удовлетворяют уравнению второй степени

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (4.7)$$

Уравнение (4.7) называется общим уравнением линии второго порядка ($A$, $B$, $C$ не равны нулю одновременно).

При помощи преобразования прямоугольной системы координат (параллельного переноса и поворота) всегда можно найти такую новую прямоугольную систему координат, в которой уравнение (4.7) имеет один из следующих трех видов (каноническое уравнение):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad (4.8)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad (4.9)$$

$$y^2=2px, \quad x^2=2py, \qquad (4.10)$$

где *a, b, p* – положительные числа. Уравнение (4.7) может определять так называемую вырожденную кривую (пустое множество, точку, прямую, пару прямых). При этом линия, приводимая к виду (4.8), (4.9), (4.10), называется соответственно эллипсом, гиперболой или параболой.

Эллипс с каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>0,\ b>0,$ $a>b$, имеет форму, изображенную на рис. 4.4.

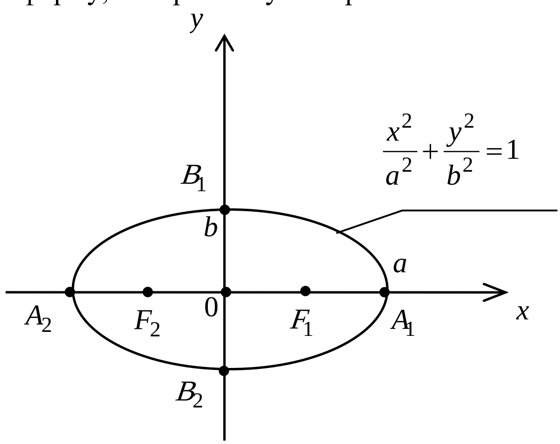


Рис. 4.4

Точки $F_2(-c,\ 0)$ и $F_1(c,\ 0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$, называются фокусами эллипса.

Числа *a* и *b* называются полуосями эллипса.

Гипербола с каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>0,\ b>0$ имеет форму, изображенную на рис. 4.5.

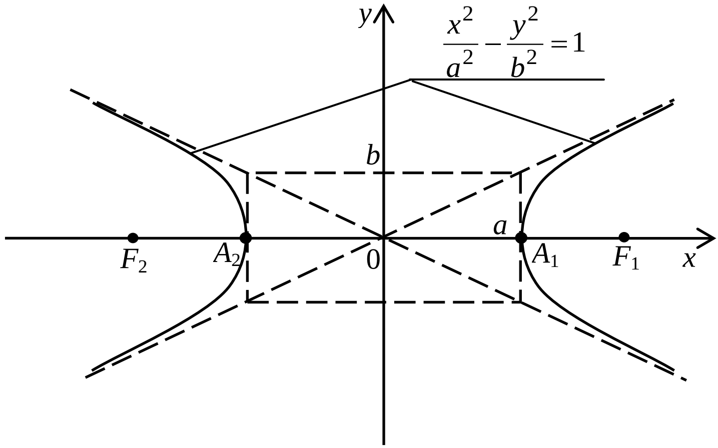


Рис. 4.5

Гипербола имеет две оси симметрии (координатные оси), с одной из которых (осью абсцисс) она пересекается в двух точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, называемых вершинами гиперболы. Числа $a$ и $b$ – полуоси гиперболы: $a$ – действительная полуось, $b$ – мнимая. Точки $F_2(-c, 0)$ и $F_1(c, 0)$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}$ , называются фокусами гиперболы.

Парабола с каноническим уравнением $y^2 = 2px,\ \ p > 0,$ имеет форму, изображенную на рис. 4.6.

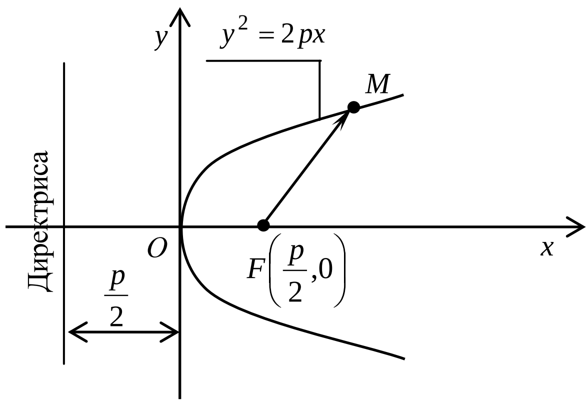

Рис. 4.6

Число $p$ называется параметром параболы, точка $O$ – ее вершиной, а ось $Ox$ – осью параболы, вектор $\overrightarrow{FM}$ – фокальный радиус-вектор точки $M$. Прямая $x = -\dfrac{p}{2}$ называется директрисой параболы.

П р и м е р 4.9. Упростить уравнение $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$, пользуясь переносом начала координат. Построить линию, определяемую этим уравнением.

Р е ш е н и е. Выделим полные квадраты по переменным $x$ и $y$ соответственно.

$$2\left(x^2 - 6x\right) + 5\left(y^2 + 2y\right) + 13 = 0;$$

$$2\left(x^2 - 6x + 9\right) - 18 + 5\left(y^2 + 2y + 1\right) - 5 + 13 = 0;$$

$$2(x-3)^2 + 5(y+1)^2 = 10;$$

$$\frac{(x-3)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1.$$

Обозначая $x - 3 = X$, $y + 1 = Y$, получим каноническое уравнение эллипса $\dfrac{X^2}{5} + \dfrac{Y^2}{2} = 1$. Начало новой системы координат – точка $O_1(3, -1)$; оси $OX$, $OY$ параллельны осям $Ox$ и $Oy$ соответственно. Большая полуось эллипса $a = \sqrt{5}$, малая полуось $b = \sqrt{2}$. Изобразим кривую на рис. 4.7.

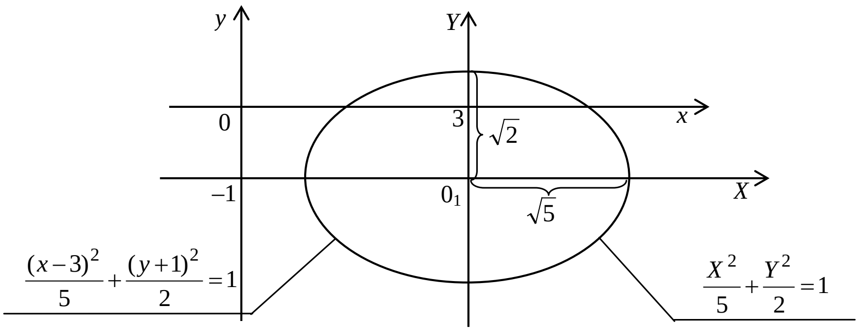


Рис. 4.7

### *4.8. Поверхности второго порядка*

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, координаты *x, y, z* которых в прямоугольной системе координат удовлетворяют уравнению второй степени:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+R=0. \quad (4.11)$$

Уравнение (4.11) называется общим уравнением поверхности второго порядка (коэффициенты *A, B, C, D, E, F* не равны нулю одновременно). Если поверхность невырожденная, то при помощи преобразования прямоугольных координат (параллельного переноса и поворота) всегда можно найти такую новую систему координат, в которой уравнение (4.11) имеет один из следующих видов (каноническое уравнение):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ – эллипсоид; (4.12)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ – однополостный гиперболоид; (4.13)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ – двухполостный гиперболоид; (4.14)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{– конус;} \qquad (4.15)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \quad \text{– эллиптический параболоид;} \qquad (4.16)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z \quad \text{– гиперболический параболоид;} \qquad (4.17)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{– эллиптический цилиндр;} \qquad (4.18)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{– гиперболический цилиндр;} \qquad (4.19)$$

$$y^2=2px \quad \text{– параболический цилиндр.} \qquad (4.20)$$

В уравнениях (4.12)–(4.20) *a, b, c, p* положительны.

П р и м е р 4.10. Построить тело, ограниченное поверхностями $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=3z.$

Р е ш е н и е. Тело ограничено снизу поверхностью параболоида: $x=e^{2t}$; $y=e^{3t}$, а сверху – поверхностью сферы $x^2+y^2+z^2=4.$

Тело изображено на рис. 4.8.

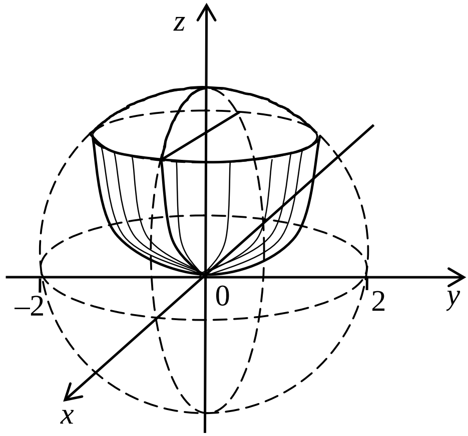


Рис. 4.8

П р и м е р 4.11. Построить тело, ограниченное поверхностями

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1, \quad x=0, z=0 \quad (x\geq 0, z\geq 0), \quad y=3, y=-3.$$

Р е ш е н и е . Поверхность $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ – эллиптический цилиндр. Он пересечен плоскостями $x$ = 0, $z$ = 0 (координатные плоскости $Ozy$ и $Oxy$). По оси $Oy$ тело ограничено плоскостями $y$ = 3, $y$ = –3 (рис. 4.9).

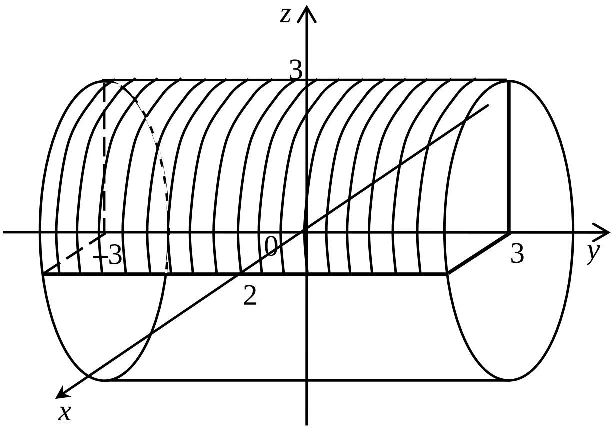


Рис. 4.9

# 5. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

## *5.1. Предел числовой последовательности. Предел функции*

Число $a$ называется пределом числовой последовательности ($x_n$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение предела функции $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a; \quad x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Число $A$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $x$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0,$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение предела функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \to x_0$, то справедливы теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ (если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$).

Решение многих задач основано на следующих замечательных пределах:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e,$$

где $e$ = 2,71828…

П р и м е р ы . Найти пределы:

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^n}{3^n}+\dfrac{3^n}{3^n}}{\dfrac{2^n}{3^n}-\dfrac{3^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1} = -1.$$

2. $$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} = \lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to -2}\frac{x(x+1)}{x-3} = -\frac{2}{5}.$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2+3}{8x^3+2x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5x^3}{x^3}-\dfrac{2x^2}{x^3}+\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{8x^3}{x^3}+\dfrac{2x^2}{x^3}-\dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^3}}{8+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}} = \frac{5}{8}.$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = 0.$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{25}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{5^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5}\left(1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right)}{1+\frac{1}{5}}=\frac{1}{6}.$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{n\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{n\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=$

$=-\lim\limits_{n\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1.$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)\left(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}\right)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-1-x^2+7x-3}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{5}{2}.$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 7x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\cdot 3}{\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)\cdot 7}=\frac{3}{7}.$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\operatorname{arctg}x}{2x+\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-(\operatorname{arctg}x)/x}{2+(\arcsin x)/x}=\dfrac{1}{3}$, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left[\arcsin x=y\right]=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1 \text{ и } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctgx}}{\mathrm{x}}=1.$$

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}=\left[\begin{matrix}\dfrac{\pi}{2}-x=y\\ x\to\dfrac{\pi}{2};\quad y\to 0\end{matrix}\right]=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)}{y^2}=$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin\frac{y}{2}}{2\frac{y}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{y}{2}}{2\frac{y}{2}}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3+2}{x+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+3}\right)^x=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}2-3}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}\right)^2\times$$

$$\times\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{-3}=e^2\cdot 1^{-3}=e^2.$$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\left[\begin{matrix}a^x-1=y, & a^x=1+y\\ x\to 0,\quad y\to 0 & x\ln a=\ln(1+y)\end{matrix}\right]=$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\ln a, \text{ так как}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{1/y}}=\frac{1}{\ln\lim\limits_{y\to\infty}(1+y)^{1/y}}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

### *5.2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции Сравнение бесконечно малых. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация*

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x\to x_0$ и существует предел их отношения $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$. Если $c\neq 0$, $c\neq\infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка малости. Обозначение $\alpha=O(\beta)$ при $x\to x_0$. Если $c$ = 1, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми (обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$). Если $c$ = 0, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой высшего порядка, чем $\beta(x)$ (обозначение $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to x_0$).

При нахождении предела отношения двух бесконечно малых функций каждую из них можно заменить эквивалентной ей бесконечно малой, т.е. если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

П р и м е р 5.1. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)}$.

Р е ш е н и е. При $x\to\frac{1}{2}$ функции $\alpha(x)=1-2x$ и $\beta(x)=$ $=\arcsin(1-2x)$ являются эквивалентными бесконечно малыми. Поэтому

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{1-2x} = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(-(2x+1)\right) = -2.$$

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если для любого положительного числа $M$ существует такое число $\delta > 0$, что при всех $x$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta,\ \ x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Обозначение

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если:

1) функция $f(x)$ определена в точке $x_0$ и ее окрестности;

2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке $x_0$;

3) этот предел равен значению функции в точке $x_0$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x).$$

На практике часто используют другое определение непрерывности функции в точке, равносильное данному.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если выполняются условия:

1) функция $f(x)$ определена в точке $x_0$ и ее окрестности;

2) существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) \ \text{ и } \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0);$$

3) эти пределы равны между собой и равны значению функции в точке $x_0$.

Укажем основные свойства непрерывных функций.

1. Простейшие элементарные функции ($C$, $x^{\alpha}$, $a^{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$) непрерывны во всех точках, где они определены.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0$, то и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0$ непрерывны в точке $x_0$.

3. Если $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0$, а $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке $x_0$.

4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и возрастает (или убывает) на этом отрезке, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ на соответствующем отрезке оси $OY$ существует и является также непрерывной возрастающей (убывающей) функцией.

Точка $x_0$, в которой не выполняется хотя бы одно из трех условий непрерывности функции, называется ***точкой разрыва функции***.

Если в точке $x_0$ существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, такие что $f(x_0 - 0) \neq$ $\neq f(x_0 + 0)$, то $x_0$ называется *точкой разрыва первого рода*. Если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ не существует или равен бесконечности, то точка $x_0$ называется *точкой разрыва второго рода*. Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, но функция в точке $x_0$ не определена или если $f(x)$ в точке $x_0$ определена, но $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то $x_0$ называется *точкой устранимого разрыва*.

П р и м е р  5.2. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ и определить их вид.

Р е ш е н и е . Так как функции $e^x-1$ и $x$ непрерывны, то непрерывным будет и их отношение $\dfrac{e^x-1}{x}$ во всех точках, кроме точки $x=0$. При $x=0$ $f(x)$ не определена, следовательно, разрывна. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ (см. п. 5.1 пример 12), то $x=0$ – точка устранимого разрыва. Если положить $f(0)=1$, то функция

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{(e^x-1)}{x} & \text{при} \quad x\neq 0;\\ 1 & \text{при} \quad x=0\end{cases}$$

будет непрерывной при всех $x$.

П р и м е р  5.3. Установить вид точек разрыва функции

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{при} \quad -\infty<x\leq 0;\\ x+1 & \text{при} \quad 0<x<3;\\ 6-x & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$$

Р е ш е н и е . Область определения функции $f(x)$ – вся числовая ось $(-\infty;+\infty)$. Разрывы возможны только в точках $x=0$ и $x=3$, в которых изменяется аналитическое задание функции. Найдем односторонние пределы в точке $x=0$ и значение функции в этой точке:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}(x^2+1)=1; \quad \lim_{x\to 0+0} f(x)=1, \quad f(0)=1.$$

Следовательно, в точке $x=0$ функция непрерывна.

Рассмотрим точку $x=3$:

$$\lim_{x\to3-0} f(x)=\lim_{x\to3-0}(x+1)=4; \quad \lim_{x\to3+0} f(x)=\lim_{x\to3+0}(6-x)=3.$$

Так как эти пределы конечны но не равны между собой, то $x = 3$ – точка разрыва первого рода. График функции *f(x)* изображен на рис. 5.1.

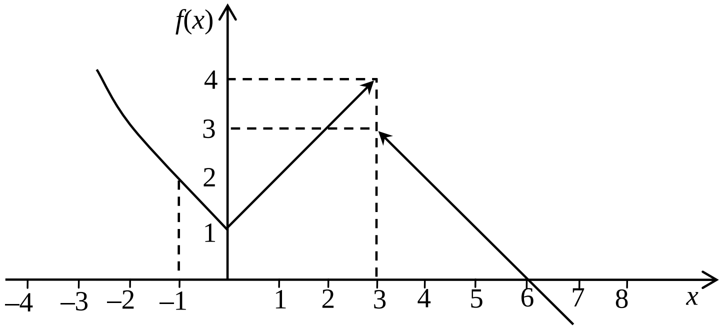


Рис. 5.1

П р и м е р 5.4. Установить вид точек разрыва функции

$$f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}.$$

Р е ш е н и е . Данная функция непрерывна всюду, кроме точки $x = -1$, в которой $f(x)$ не определена.

Поскольку

$$\lim_{x\to-1-0} f(x)=\lim_{x\to-1-0} e^{\frac{1}{x+1}}=0 \text{ (т.к. } \frac{1}{x+1}\to-\infty \text{ при } x\to-1-0\text{)},$$

$$\lim_{x\to-1+0} f(x)=\lim_{x\to-1+0} e^{\frac{1}{x+1}}=+\infty \text{ (т.к. } \frac{1}{x+1}\to+\infty \text{ при } x\to-1+0\text{)},$$

т.е. правосторонний предел бесконечен, то $x = -1$ – точка разрыва второго рода.

# 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## *6.1. Дифференцирование функций*

Производной функции $y = f(x)$ в точке $x$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Производная обозначается $y'$, $y'(x)$, $y'_x$.

**Правила дифференцирования функций.** Пусть $C$ – постоянная, а $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда $C' = 0$,

$$(u + v)' = u' + v', \quad (u \cdot v)' = u'v + v'u, \quad (Cu)' = Cu',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (v \neq 0).$$

**Производная сложной функции $y = f(u(x))$.** Если функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке $x$, а функция $y = f(u)$ дифференцируемая в соответствующей точке $u = u(x)$, то сложная функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке $x$ и ее производная равна

$$y'(x) = f'_u(u) \cdot u'(x).$$

**Таблица производных.**

1. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot u', \quad \alpha \neq 0;$
2. $(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a;$
3. $(e^u)' = e^u \cdot u';$

4. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$;

5. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

10. $(\arcsin u)' = -(\arccos u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

11. $(\operatorname{arctg} u)' = -(\operatorname{arcctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

12. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;

13. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;

14. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$; $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}$.

Функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, неявно задана уравнением $F(x, y)$, если для всех $x \in (a; b)$ выполняется равенство $F(x, f(x)) = 0$.

Для вычисления производной функции, заданной неявно, следует тождество $F(x, f(x)) = 0$ продифференцировать по $x$ (рассматривая левую часть как сложную функцию от $x$), а затем полученное уравнение решить относительно $f'(x)$.

Пример 6.1. Найти производную показательно-степенной функции

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}.$$

Р е ш е н и е . Логарифмируя, а затем дифференцируя левую и правую части, получим

$$\ln y = 2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right);$$

$$\frac{y'}{y} = 2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

Умножая обе части равенства на $y$, имеем:

$$y' = 2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} \cdot \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right).$$

П р и м е р 6.2. Найти производную функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $x^2 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$.

Р е ш е н и е . Дифференцируя по $x$ тождество $x^2 - 2x^2y^2(x) + 5x + {}$ $+ y(x) - 5 = 0$, получим $2x - 4xy^2 - 4x^2yy' + 5 + y' = 0$. Выражая $y'$ из этого равенства, находим:

$$y' = \frac{4xy^2 - 2x - 5}{1 - 4x^2y}.$$

Дифференциал $dy$ функции $y = f(x)$ равен произведению ее производной на приращение $\Delta x$ независимой переменной: $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$.

При достаточно малых $\Delta x$ имеет место приближенная формула $\Delta y \approx dy$, т.е. $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ или $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

П р и м е р 6.3. Найти приближенное значение объема шара, радиус которого равен 1,02 м.

Р е ш е н и е . Воспользуемся формулой $V=V(r)=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ . Тогда $V'=4\pi r^2$. Полагая $r=1, \Delta r=0{,}02$, получим $V(1{,}02)\approx V(1)+V'(1)0{,}02=$ $=\dfrac{4}{3}\pi+4\pi 0{,}02\approx 4{,}43$ м$^3$.

### *6.2. Производные и дифференциалы высших порядков. Дифференцирование функций, заданных параметрически*

Производной второго порядка функции $y=f(x)$ называется производная от ее производной $y'=f'(x)$, т.е. $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}=(y')'$. Аналогично определяются производные более высоких порядков $y'''=(y'')',\ldots,y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$.

Дифференциалы высших порядков функции $y=f(x)$ ($x$ – независимая переменная) вычисляются по формулам

$$d^2y=y''(dx)^2,\ldots,d^ny=y^{(n)}(dx)^n.$$

Если функция $y=y(x)$ задана параметрически соотношениями $x=x(t),\ y=y(t)$, причем $x'(t)\neq 0$, то ее первая $y'_x$ и вторая $y''_{xx}$ производные находятся по формулам:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\quad y''_{xx}=(y'_x)'_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t}=\frac{y''_{tt}x'_t-x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}.$$

П р и м е р 6.4. Найти выражение для производной $n$-го порядка функции $y=\dfrac{1}{x}$.

Р е ш е н и е .

$$y' = -\frac{1}{x^2}; \quad y'' = \frac{2}{x^3}; \quad y''' = -\frac{2\cdot 3}{x^4} = -\frac{3!}{x^4}, \ldots, y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

П р и м е р 6.5. Найти производную 2-го порядка от функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Р е ш е н и е . По правилу дифференцирования функции, заданной неявно, получаем:

$$\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}(y'x - y)}{x^2 + y^2}.$$

Отсюда, используя равенство $e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2 + y^2}$, имеем:

$$\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y'x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ или } x + yy' = y'x - y.$$

Следовательно, $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$.

Дифференцируя последнее равенство и используя найденное для $y'$ выражение, получим:

$$y'' = \frac{(1 + y')(x - y) - (1 - y')(x + y)}{(x - y)^2} = \frac{x - y + xy' - yy' - x - y + xy'}{(x - y)^2} +$$

$$+ \frac{yy'}{(x - y)^2} = \frac{2xy' - 2y}{(x - y)^2} = \frac{2\left(x\dfrac{x + y}{x - y} - y\right)}{(x - y)^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}.$$

П р и м е р 6.6. Найти производную 2-го порядка функции, заданной параметрически: $y = \ln t,\ \ x = t^2,\ \ t \in (0;+\infty)$.

Р е ш е н и е.

$$y'_t = \frac{1}{t}, \quad x'_t = 2t, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{2t^2},$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{1}{2t^2}\right)'_t}{2t} = \frac{-\frac{1}{t^3}}{2t} = -\frac{1}{2t^4}.$$

П р и м е р 6.7. Найти дифференциалы 1-го, 2-го, …, $n$-го порядков функции $y = (2x-3)^3$.

Р е ш е н и е.

$$dy = 3(2x-3)^2 2dx = 6(2x-3)^2 dx,$$

$$d^2y = 12(2x-3)2(dx)^2 = 24(2x-3)(dx)^2,$$

$$d^3y = 48(dx)^3, \quad dy = 0(dx)^4 = 0,\ldots, d^n y = 0.$$

### *6.3. Приложение теорем Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя*

**1. Теорема Ролля.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, дифференцируема на интервале $(a;\, b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует хотя бы одна точка $\xi \in (a; b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.

**2. Теорема Лагранжа.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ и дифференцируема на интервале $(a;\, b)$, то существует точка $\xi \in (a;\, b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ (формула Лагранжа).

**3. Теорема Коши.** Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале $(a;b)$ и $g'(x)\neq 0, \forall x\in(a;b)$, то существует точка $\xi\in(a;b)$ такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ (формула Коши).

Пример 6.8. Доказать, что уравнение $3x^5+15x-8=0$ имеет только один действительный корень.

Решение. Поскольку функция $f(x)=3x^5+15x-8$ непрерывна и на концах отрезка $[0;1]$ принимает значение разных знаков $(f(0)<0,\ f(1)>0)$, то по первой теореме Больцано–Коши на интервале $(0;\ 1)$ уравнение $f(x)=0$ имеет корень. Предположим, от противного, что это уравнение имеет два действительных корня $x=a,\ x=b,\ f(a)=f(b)=0$.

Тогда по теореме Ролля на интервале $(a;b)$ существовала бы точка $\xi$, в которой $f'(\xi)=0$. Но $f'(x)=15x^4+15\neq 0$ при действительных $x$. Полученное противоречие доказывает, что действительный корень – единственный.

Пример 6.9. Используя формулу Лагранжа, доказать неравенство $|\sin x_2-\sin x_1|\leq|x_2-x_1|$.

Решение. Функция $f(x)=\sin x$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на любом отрезке $[x_1;x_2]$; $f'(x)=\cos x$. Поэтому $\sin x_2-\sin x_1=\cos\xi\cdot(x_2-x_1)$. Отсюда, учитывая, что $|\cos\xi|\leq 1$, имеем $|\sin x_2-\sin x_1|=|\cos\xi||x_2-x_1|\leq|x_2-x_1|$.

Пример 6.10. Написать формулу Коши и найти значение $\xi$ для функций $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$ на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Р е ш е н и е . Все условия теоремы Коши выполнены: $g'(x) = -\sin x \neq 0,\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0} = \frac{\cos\xi}{-\sin\xi}; \quad -1 = \mathrm{ctg}\,\xi, \quad \xi = -\frac{\pi}{4}.$$

**Правило Лопиталя** (раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$).

Пусть $\overset{\circ}{U}(x_0)$ – окрестность точки $x_0$ с выброшенной точки $x_0$.

Т е о р е м а . Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на $\overset{\circ}{U}(x_0)$; $g'(x) \neq 0,\ x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$.

Если $\lim\limits_{x - x_0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ (или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$), то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ при условии, что существует предел отношения производных.

З а м е ч а н и я : 1. Аналогичная теорема справедлива и в случае $x_0 = \infty$.

2. Если частное $f'(x)/g'(x)$ в точке $x_0$ также есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют соответствующим условиям, то можно перейти к отношению вторых производных и т.д.

3. Неопределенности вида $0 \cdot \infty$ или $\infty - \infty$ алгебраическими преобразованиями функции приводятся к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, и далее применяется правило Лопиталя.

4. В случае неопределенности вида $0^0$, или $\infty^0$, или $1^\infty$ следует прологарифмировать функцию и предварительно найти предел ее логарифма.

П р и м е р 6.11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin 3x}{\arcsin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-3\cos 3x}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=-1.$$

П р и м е р 6.12.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{3x\ln 3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{3^x\ln^2 3}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{3^x\ln^3 3}=0.$$

П р и м е р 6.13.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}-1}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\ln x+1+1}=-\frac{1}{2}.$$

П р и м е р 6.14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. Здесь неопределенность вида $1^\infty$.

Обозначим $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$. Логарифмируя и применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}(\ln y) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}\right) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x/x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

(здесь дважды использован предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$).

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}(\ln y) = -\frac{1}{6}$, то $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$.

### *6.4. Формула Тейлора и ее приложения*

Если функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки $x_0$, то для любого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ имеет место формула Тейлора *n*-го порядка

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}\cdot(x - x_0)^{n+1}$, $0 < \theta < 1$ – остаточный член в форме Лагранжа.

Приведем разложения некоторых функций по формуле Тейлора при $x = 0$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)\,!} x^{n+1};$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\,!} + R_{2n}(x);$$

$$R_{2n}(x) = (-1)^n \cos(\theta x) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x}{(2n)\,!} + R_{2n+1}(x);$$

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \cos(\theta x) \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)\,!};$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_n(x);$$

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot (1+\theta x)^{n+1}};$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_n(x);$$

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)\,!} x^{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1}; \quad 0 < \theta < 1.$$

Остаточный член формулы Тейлора может быть представлен в форме Пеано: $R_n(x) = 0\left(\left|x - x_0\right|^n\right)$ при $x \to x_0$.

П р и м е р 6.15. Разложить многочлен $f(x) = x^4 - 2x^2 + 13x + 9$ по степеням двучлена $x + 2$.

Р е ш е н и е . Поскольку $f(x)$ – многочлен 4-й степени, то $f^{(5)}(x) = 0$ и формула Тейлора при $x_0 = -2$ имеет вид

$$f(x) = f(-2) + \frac{f'(-2)}{1!}(x+2) + \frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(-2)}{3!}(x+2)^3 + \frac{f^{IV}(-2)}{4!}(x+2)^4 .$$

Подставляя в эту формулу значения $f(-2) = -9$, $f'(-2) = \left(4x^3 - 4x + 13\right)\Big|_{x_0=-2} = -11$, $f''(-2) = \left(12x^2 - 4\right)\Big|_{x_0=-2} = 44$, $f'''(-2) = 24x\Big|_{x_0=-2} = -48$, $f^{IV}(-2) = 24$, получим

$$f(x) = -9 - 11(x+2) + 22(x+2) - 8(x+2)^3 + (x+2)^4.$$

П р и м е р 6.16. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $f(x) = 10^x$ в точке $x_0 = 0$.

Р е ш е н и е . Имеем

$$f(x) = 10^x;\ f'(x) = 10^x \ln 10;\ f''(x) = 10^x \ln^2 10;\ f'''(x) = 10^x \ln^3 10;$$

$$f^{(IV)}(x) = 10^x \ln^4 10;\ f(0) = 1;\ f'(0) = \ln 10,\ f''(0) = \ln^2 10,$$

$$f'''(0) = \ln^3 10,\ f^{(IV)}(\theta x) = 10^{\theta x} \cdot \ln^4 10.$$

По формуле Тейлора получаем

$$10^x = 1 + (\ln 10)x + \frac{\ln^2 10}{2!}x^2 + \frac{\ln^3 10}{3!}x^3 + \frac{10^{\theta x} \cdot \ln^4 10}{4!}x^4,\ 0 < \theta < 1.$$

П р и м е р 6.17. Вывести приближенную формулу $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ и оценить ее точность при $|x| < 0{,}05$.

Р е ш е н и е . Запишем формулу Тейлора 4-го порядка для функции $\sin x$ в точке $x_0 = 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_4(x), \text{ где } R_4(x) = \frac{\cos\theta x \cdot x^5}{5!}, \; 0 < \theta < 1.$$

При $|x| < 0{,}05$ имеем $\Delta = |R_4(x)| \le |\cos\theta x| \cdot \frac{|x|^5}{5!} \le \frac{(0{,}05)^5}{5!} < 3 \cdot 10^{-9}$.

Поэтому $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ с точностью $\Delta < 3 \cdot 10^{-9}$.

П р и м е р 6.18. Вычислить $e^{0{,}2}$ с точностью до $10^{-3}$.

Р е ш е н и е . Формула Тейлора для функции $e^x$ имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$.

Полагая $x = 0{,}2$, получим:

$$e^{0{,}2} = 1 + \frac{0{,}2}{1!} + \frac{0{,}2}{1!} + \frac{0{,}2^2}{2!} + \cdots + \frac{0{,}2^n}{n!} + R_n(0{,}2).$$

где $R_n(0{,}2) = \frac{0{,}2^{n+1}}{(n+1)!} e^{0{,}2\theta}$, $0 < \theta < 1$.

Так как $0<\theta<1;\ 2<e<3;\ 1<e^{0,2\theta}<3,$ то

$$R_n(0,2)<3\frac{0,2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Определим наименьшее значение $n$ так, чтобы выполнялось неравенство $R_n(0,2)<10^{-3}$.

Если $n=2,$ то $R_2<3\cdot\frac{0,2^3}{3!}\approx 0,0013$, а если $n=3$, то $R_3<3\frac{0,2^4}{4!}\approx$ $\approx 0,00018<10^{-3}.$ Поэтому $e^{0,2}\approx 1+\frac{0,2}{1!}+\frac{0,2^2}{2!}+\frac{0,2^3}{3!}=1,221$ с точностью до $10^{-3}$.

П р и м е р 6.19. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}$.

Используем формулу Тейлора с остаточными членами в форме Пеано:

$$\sin x=x+0(x),\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+0\left(x^5\right),e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+0\left(z^3\right).$$

Из последней формулы при $z=-\frac{x^2}{2}$ получим

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+0\left(x^6\right).$$

Искомый предел может быть переписан в виде

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+0\left(x^6\right)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+0\left(x^5\right)}{x^4+0\left(x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{0\left(x^5\right)}{x^4}+\frac{0\left(x^6\right)}{x^4}}{1+\frac{0\left(x^4\right)}{x^4}}=\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=\frac{1}{12},$$

(поскольку $\frac{0\left(x^5\right)}{x^4}\to 0,\ \frac{0\left(x^6\right)}{x^4}\to 0$ при $x\to 0$).

# 7. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЯ ИХ ГРАФИКОВ

## *7.1. Исследование функций на экстремум. Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба. Асимптоты*

Если существует окрестность $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки $x_0$ такая, что для всякой точки $x\neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$ (или $f(x)<f(x_0)$), то точка $x_0$ называется точкой минимума (максимума) функции $y=f(x)$. Точки минимума и максимума функции называются ее точками экстремума.

**Теорема 1 (необходимое условие экстремума).** Если $x_0$ – точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0)=0$ или $f'(x)$ не существует ($x_0$ – критическая точка этой функции).

**Теорема 2 (первое достаточное условие экстремума).** Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0-\delta;$ $x_0+\delta)$ критической точки $x_0$, за исключением, быть может, самой этой точки. Если при этом в интервалах $(x_0-\delta;\ x_0)$ и $(x_0; x_0+\delta)$

производная $f(x)$ имеет противоположные знаки, то $x_0$ – точка экстремума, причем если $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, то $x_0$ – точка максимума. Если же $f'(x)$ при $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ сохраняет знак, то точка $x_0$ не является точкой экстремума.

**Теорема 3 (второе достаточное условие экстремума).** Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема и $f'(x_0) = 0$. Если $f''(x_0) < 0$, то $x_0$ – точка максимума функции $f(x)$, если $f''(x_0) > 0$, то $x_0$ – точка минимума. Если же $f''(x_0) = 0$, то требуются дополнительные исследования.

Если на интервале $(a; b)$ всякая касательная располагается выше (ниже) дуги кривой, то график дифференцируемой функции на этом интервале называется выпуклым (вогнутым).

Если $f''(x) > 0$ на интервале $(a; b)$, то график функции является вогнутым на этом интервале; если же $f''(x) < 0$, то график функции – выпуклый на $(a; b)$.

Точка $(x_0, f(x_0))$, при переходе через которую направление выпуклости графика функции меняется на противоположное, называется *точкой перегиба*.

**Теорема 4 (необходимое условие точки перегиба).** Если $x_0$ – абсцисса точки перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

**Теорема 5 (достаточное условие точки перегиба).** Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки $x_0$, в которой $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Если при этом в интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ вторая производная $f''(x)$ имеет противоположные знаки, то $(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба.

Прямая $l$ называется асимптотой графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции до прямой $l$

стремится к нулю при неограниченном удалении точки $M$ от начала координат.

Для существования вертикальной асимптоты $x = a$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$ был равен бесконечности.

Для существования наклонной асимптоты $y = kx + b$ необходимо и достаточно существование двух пределов

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ \text{или } x \to -\infty}} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

П р и м е р 7.1. Для функции $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}$ найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума.

Р е ш е н и е . Находя производную $y' = \dfrac{4(1 - x^2)}{x^5}$ и приравнивая ее нулю, получаем $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 0$ (при $x = 0$ $f'(x)$ не существует). Эти точки разбивают область определения функции на интервалы монотонности. Результаты исследования удобно представить в виде таблицы.

| $x$ | $(-\infty; -1)$ | –1 | (–1; 0) | 0 | (0; 1) | 1 | $(1; +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | Не сущ. | + | 0 | – |
| $f(x)$ | $\uparrow$ | 1 | $\downarrow$ | Не сущ. | $\uparrow$ | 1 | $\downarrow$ |

Следовательно, $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$ – интервалы возрастания функции; $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$ – интервалы убывания функции; $x = -1$, $x = 1$ – точки максимума. Точек минимума нет.

П р и м е р  7.2. Для графика функции $y=\sqrt[3]{6x^2-x^2}$ найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба.

Р е ш е н и е . Находим вторую производную $y''=\dfrac{-8}{\sqrt{x^4(6-x)}}$.

Критическими точками второй производной являются точки $x_1=0$ и $x_2=6$ ( в этих точках $y''(x)$ не существует). Они разбивают область определения функции на три интервала, на которых сохраняется направление выпуклости или вогнутости. Результаты исследования удобно представить в виде таблицы.

| $x$ | $(-\infty;\ 0)$ | 0 | (0; 6) | 6 | $(6;\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | – | Не сущ. | – | Не сущ. | + |
| $f(x)$ | $\cap$ | 0 | $\cap$ | 0 | $\cup$ |

Таким образом, $(-\infty;\ 0)\cup(0;6)$ – интервалы выпуклости графика функции; $(6;\ +\infty)$ – интервал вогнутости графика функции; (6, 0) – точка перегиба.

П р и м е р  7.3. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

Р е ш е н и е . Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой, так как

$$\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{x^3}{2(x-1)^2}=\infty .$$

Наклонную асимптоту ищем в виде $y=kx+b$,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2(x-1)^2}=\frac{1}{2},$$

где $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-k(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}-\dfrac{1}{2}x\right)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x-1)^2}{2(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{2(x-1)^2}=1.$$

Поэтому прямая $y=\dfrac{1}{2}x+1$ – наклонная асимптота.

### *7.2. Исследование функций и построение их графиков*

Исследование функций и построение их графиков удобно выполнять по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, является ли функция четной, нечетной, периодической.
3. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Установить интервалы монотонности функции. Найти точки экстремума функции, вычислить значения функции в этих точках.
6. Определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба.
7. Используя результаты проведенного исследования, построить график функции. При необходимости уточнения отдельных участков кривой можно вычислить координаты нескольких дополнительных точек (в частности, координаты точек пересечения графика с осями координат).

Пример 7.4. Исследовать функцию $y=\dfrac{2x^3}{4-x^2}$ и построить ее график.

Функция определена и непрерывна на всей оси, кроме точек $x=\pm 2$.

Функция нечетная, так как $y(-x)=-y(x)$, ее график симметричен относительно начала координат, поэтому достаточно исследовать функцию для $x > 0$. Прямые $x = -2$ и $x = 2$ являются вертикальными асимптотами, поскольку $\lim\limits_{x\to\pm 2} y = \infty$. Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{4 - x^2} = -2;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{4 - x^2} + 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + 8x - 2x^3}{4 - x^2} = 0.$$

Следовательно, $y = -2x$ – наклонная асимптота.

Производная функции $y' = 2\dfrac{3x^2(4 - x^2) - (-2x)x^3}{(4 - x^2)^2} = \dfrac{2x^2(12 - x^2)}{(4 - x^2)^2}$ обращается в нуль при $x = 0$ и $x = \pm 2\sqrt{3}$.

Вторая производная

$$y'' = 2\frac{(24x - 4x^3)(4 - x^2) - (12x^2 - x^4)\cdot 2(4 - x^2)(-2x)}{(4 - x^2)^4} = \frac{16x(x^2 + 12)}{(4 - x^2)^3}$$

обращается в нуль при $x = 0$.

Составим таблицу

| $x$ | 0 | (0; 2) | 2 | $(2;\ 2\sqrt{3})$ | $2\sqrt{3}$ | $(2\sqrt{3};\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | 0 | + | Не сущ. | + | 0 | – |
| $y''$ | 0 | + | Не сущ. | – | – | – |
| $y$ | 0 | $\uparrow\cup$ | Не сущ. | $\uparrow\cup$ | $-6\sqrt{3}$ | $\cap\downarrow$ |

Следовательно, $x = 2\sqrt{3}$ – точка максимума, $y_{\max} = y(2\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$. В силу нечетности имеем: $x = -2\sqrt{3}$ – точка минимума $y_{\min} = -6\sqrt{3}$. Поскольку $y'' < 0$ при $x \in (-2;\ 0)$ и $y'' > 0$ при $x \in (0;\ 2)$, то $x = 0$ – абсцисса точки перегиба, 0(0;0) – точка перегиба.

Используя полученные данные, строим график функции (рис. 7.1).

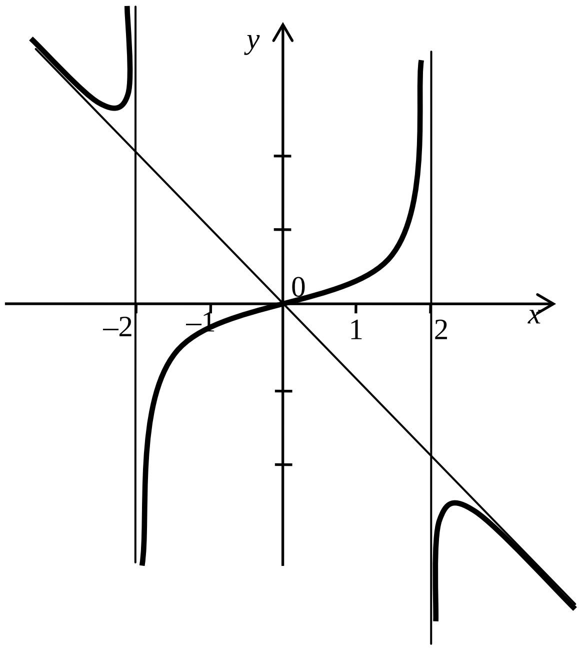


Рис. 7.1

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

1 – 20. Решить системы по формулам Крамера, матричным способом и методом Гаусса.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 21, \\ 7x_1 - x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 11, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 - 4x_3 = -6, \\ x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_2 + 3x_3 = -6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

21 – 40. Даны вершины треугольника *A, B, C.* Найти уравнение и длину высоты, опущенной из вершины *B*.

21. $A(-1, 3)$, $B(0, 2)$, $C(4,-1)$.

22. $A(0, 2)$, $B(2, 4)$, $C(3, 0)$.

23. $A(1,-1)$, $B(3, 4)$, $C(-5, 0)$.

24. $A(1, 4)$, $B(3, 0)$, $C(-3, 2)$.

25. $A(1,-1)$, $B(3, 1)$, $C(2, 1)$.

26. $A(-1, 1)$, $B(1, 5)$, $C(3,-2)$.

27. $A(3, 4)$, $B(-1, 2)$, $C(2,-1)$.

28. $A(4, 6)$, $B(-8, 9)$, $C(5,-6)$.

29. $A(-2, 4)$, $B(-6, 8)$, $C(6,-16)$.

30. $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$, $C(-1, 3)$.

31. $A(1, 3)$, $B(3, 7)$, $C(-1, 1)$.

32. $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$, $C(-1, 3)$.

33. $A(2, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(-3, 2)$.

34. $A(1, 0)$, $B(5, 2)$, $C(3,-1)$.

35. $A(0,-3)$, $B(-2,-1)$, $C(1, 1)$.

36. $A(-3, 2)$, $B(1,-4)$, $C(2, 5)$.

37. $A(0, 2)$, $B(2, 4)$, $C(4, 0)$.

38. $A(1, 5)$, $B(3, 1)$, $C(-1,-1)$.

39. $A(2, 3)$, $B(2, 1)$, $C(-1,-1)$.

40. $A(1, 5)$, $B(3, 1)$, $C(-1,-1)$.

41 – 60. Найти угол (в градусах) между плоскостью $2x + 3y - 6z + 1 = 0$ и плоскостью, проходящей через точки $M_1$, $M_2$, $M_3$.

41. $M_1(1, 2,-1)$, $M_2(-1, 0, 4)$, $M_3(-2,-1, 1)$.

42. $M_1(1,-3, 4)$, $M_2(0,-2,-1)$, $M_3(1, 1,-1)$.

43. $M_1(1,-2,-\frac{1}{2})$, $M_2(2, 1, 3)$, $M_3(0,-1,-1)$.

44. $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(4,-1,-2)$, $M_3(4, 0, 3)$.

45. $M_1(1,-1,-3)$, $M_2(0, 6, 1)$, $M_3(2, 2,-2)$.

46. $M_1(1, 1, 4)$, $M_2(2,-1, 0)$, $M_3(3, 2, 1)$.

47. $M_1(2, 1,-3)$, $M_2(1, 1, 0)$, $M_3(-1, 2, 7)$.

48. $M_1(2, 3,-10)$, $M_2(1,-1,-9)$, $M_3(0,-1,-4)$.

49. $M_1(2, 1, 3)$, $M_2(0, 0, 4)$, $M_3(1, 1, 1)$.

50. $M_1(1, 0, 1)$, $M_2(0, 0, 2)$, $M_3(1, 1, 1)$.

51. $M_1(2,-2, 9)$, $M_2(-2, 0, 1)$, $M_3(-4, 1, 3)$.

52. $M_1(2, 3, 1)$, $M_2(4,-4,-2)$, $M_3(1, 0, 0)$.

53. $M_1(1,-2,-5)$, $M_2(2, 3, 2)$, $M_3(-1, 0, 5)$.

54. $M_1(1, 2,-1)$, $M_2(2, 3,-10)$, $M_3(0, 4, 1)$.

55. $M_1(-1, 2, 0)$, $M_2(6, 3, 1)$, $M_3(-15, 0, 2)$.

56. $M_1(1, 3, 4)$, $M_2(0, 1, 2)$, $M_3(2, 5, 0)$.

57. $M_1(2,-3, 5)$, $M_2(1,-2, 12)$, $M_3(4,-1, 7)$.

58. $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(2, 4, 1)$, $M_3(2, 0,-3)$.

59. $M_1(1,-1, 1)$, $M_2(5, 4,-2)$, $M_3(-1,-2, 2)$.

60. $M_1(3,-1, 2)$, $M_2(4,-1,-1)$, $M_3(2, 0, 2)$.

61 – 80. Упростить уравнение кривой и изобразить ее на рисунке.

61. $x^2+8x+2y+20=0.$

62. $x^2+2y^2-2x+8y+7=0.$

63. $x^2+y^2+4x-10y+20=0.$

64. $4x^2+9y^2-40x-36y+100=0.$

65. $2x^2+8x-y+12=0.$

66. $9x^2+4y^2-54x-32y+109=0.$

67. $x^2-4y^2+6x+15y-11=0.$

68. $9x^2+4y^2-18x=0.$

69. $x^2+4y^2-6x+8y=3.$

70. $9x^2+10y^2+40y-50=0.$

71. $x=2y^2-12y+14.$

72. $x^2+2y^2+2x=0.$

73. $2x^2-2y^2+2x=0.$

74. $y^2+4y=2x.$

75. $3x^2-4y^2+18x+15=0.$

76. $x^2-8x+y+15=0.$

77. $5x^2+9y-30x+18y+9=0.$

78. $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0.$

79. $x^2-5x-y+7=0.$

80. $4x^2+8x-y+7=0.$

81 – 100. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

81. а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+7x+12}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x+1}{3x^3+7x^2-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)^{x+2}$.

82. а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-2x^3+1}{5x^3+4x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

83. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^2+x-4}{3x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5+4x-12}{3x^6-4x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+2}\right)^{x+2}$.

84. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+x^2-6}{2x^4-x-12}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\,\mathrm{tg}\,x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$.

85. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-8x+1}{7x^5+4x^2+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x-1}\right)^{x+3}$.

86. а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-6x-5}{5x^2-x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

87. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\dfrac{x}{2}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+2)^2+(x+1)^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{2x}$.

88. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^2+1}{4x^6+6x^3-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\operatorname{ctg}^2 2x}{\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

89. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5x^2-3}{4x^6+6x^3-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$.

90. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+5x^2-4x^6}{8-6x+x^5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2\dfrac{x}{3}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

91. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-10}{x^3-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-2x^4+3}{2x^6+3x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\sqrt{1-x^2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{2x}-1}{x}$.

92. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{20+x-x^2}{3x^2-11x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^3+x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2x\operatorname{tg} 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$.

93. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^5-5x^2-1}{24x^4-4x+7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin x\cdot \mathrm{ctg}\, 3x$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\,\mathrm{tg}^2\, x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

94. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+7x+2}{2x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^6+5x^5-x^3+5}{3x^4-4x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{3x\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$.

95. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x-5x^2}{1+4x+2x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)(\ln(2x+1)-\ln(2x-1))$.

96. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2x}{x^2-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+x-3x^2+3}{1-3x+6x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; г). $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-3)(\ln(x-2)-\ln(x-1))$.

97. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2-2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\,\mathrm{tg}\, 2x}$; г). $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)(\ln(3x+1)-\ln(3x-2))$.

98. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos x-1}$; г). $\lim\limits_{x\to\infty}(x-4)(\ln(2-3x)-\ln(5-3x))$.

99. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-9x-5}{x^2-4x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\, x-\sin 2x}{x\sin^2 2x}$; г). $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-5)(\ln(2x+4)-\ln(2x+1))$.

100. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{5x^2+9x-44}{2x^2+5x-12}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+1}{5x^2-x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$; г). $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)(\ln(2x+3)-\ln(2x-4))$.

101 – 120. Исследовать данные функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии *б* дополнительно построить график функции.

101. а) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$; б) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{при} \quad -\infty<x\le 1; \\ \dfrac{2}{x} & \text{при} \quad 1<x<4; \\ x-3 & \text{при} \quad x\ge 4. \end{cases}$

102. а) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при} \quad -\infty<x\le 0; \\ \sin x & \text{при} \quad 0<x<\dfrac{\pi}{6}; \\ \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$

103. а) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$; б) $f(x)=\begin{cases} \ln x & \text{при} \quad 0<x\le 1; \\ x-1 & \text{при} \quad 1<x\le 3; \\ x^2-3 & \text{при} \quad x>3. \end{cases}$

104. а) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{1-x}}$; б) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{tg}x & \text{при} \quad 0<x<\dfrac{\pi}{4}; \\ \dfrac{2\pi}{x} & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{4}<x<\pi; \\ \sin x+2 & \text{при} \quad x\ge\pi. \end{cases}$

105. а) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$; б) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{при} \quad -\infty<x<0; \\ 3^x & \text{при} \quad 0<x\le 2; \\ 6-x & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$

106. а) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$; б) $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при} \quad 0<x\le 1; \\ x^2+2 & \text{при} \quad 1<x\le 2; \\ \dfrac{2}{x}+4 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$

107. а) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-x^3}$; б) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{при} \quad -\infty<x\le 1; \\ \dfrac{2}{x} & \text{при} \quad 1<x\le 4; \\ x-2 & \text{при} \quad x>4. \end{cases}$

108. а) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$; б) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{при} \quad -\infty<x\le 3; \\ 3x-7 & \text{при} \quad 3<x\le 4; \\ 3+\sqrt{x} & \text{при} \quad x>4. \end{cases}$

109. а) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$; б) $f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{при} \quad x\le 0; \\ 1-x & \text{при} \quad 0<x\le 3; \\ x^2-5 & \text{при} \quad x>3. \end{cases}$

110. а) $f(x)=\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$; б) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0; \\ \operatorname{tg} x & \text{при} \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}; \\ \dfrac{4}{\pi}x & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

111. а) $f(x)=\dfrac{2}{4-x^2}$; б) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{при} \quad x\le 0; \\ x & \text{при} \quad 0<x<\pi; \\ \sin x & \text{при} \quad x>\pi. \end{cases}$

112. а) $f(x)=e^{\frac{1}{4x-2}}$; б) $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{при} \quad x\le 1; \\ x & \text{при} \quad 1<x\le 2; \\ x-2 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$

113. а) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$; б) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{при} \quad x\le 0; \\ 1+x & \text{при} \quad 0<x<1; \\ x & \text{при} \quad x\ge 1. \end{cases}$

114. а) $f(x)=\dfrac{x+2}{x+4}$; б) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0; \\ 1 & \text{при} \quad 0<x<1; \\ 2-x & \text{при} \quad x\ge 1. \end{cases}$

115. а) $f(x)=2^{-\frac{1}{x+3}}$; б) $f(x)=\begin{cases} x & \text{при} \quad x\le 0; \\ x^2 & \text{при} \quad 0<x\le 1; \\ x^2+1 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

116. а) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+3x}$; б) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0; \\ 1 & \text{при} \quad 0<x\le 1; \\ x & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

117. а) $f(x)=\dfrac{3}{x^2-9}$; б) $f(x)=\begin{cases} \sin x & \text{при} \quad x\le 0; \\ x^2 & \text{при} \quad 0<x<1; \\ x-1 & \text{при} \quad x\ge 1. \end{cases}$

118. а) $f(x)=4^{-\frac{1}{4-x}}$; б) $f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{при} \quad x\le 0; \\ 1 & \text{при} \quad 0<x\le 1; \\ 1-x & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

119. а) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}$; б) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0; \\ -2 & \text{при} \quad 0<x\le 1; \\ x-2 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

120. а) $f(x)=\dfrac{\sin(2-x)}{2-x}$; б) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \le 1; \\ x & \text{при} \quad 1 < x \le 2; \\ 1-x^2 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$

121 – 140. Найти производные первого и второго порядков от функций, заданных параметрически:

121. $x=t^2+2$; $y=\dfrac{1}{3}t^3-1$.

122. $x=\arcsin t$; $y=\sqrt{1-t^2}$.

123. $x=at^2$; $y=b\cdot 3^t$.

124. $x=\cos t$; $y=\sin t$.

125. $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$.

126. $x=a\cos^2 t$; $y=a\sin^3 t$.

127. $x=\ln t$; $y=t^2-1$.

128. $x=\arcsin t$; $y=\ln(1-t^2)$.

129. $x=at\cdot\cos t$; $y=at\cdot\sin t$.

130. $x=\arccos\sqrt{t}$; $y=\sqrt{t-t^2}$.

131. $x=\dfrac{1}{\cos t}$; $y=\operatorname{tg} t$.

132. $x=\operatorname{arctg} t$; $y=\ln(1+t^2)$.

133. $x=a\cos^3 t$; $y=a\sin^3 t$.

134. $x = R\sin t + \sin Rt;\quad y = R\cos t + \cos Rt.$

135. $x = t^2 + 2t;\quad y = \ln(t+1).$

136. $x = 1 + e^{\alpha t};\quad y = \alpha t + e^{-\alpha t}.$

137. $x = \cos t + t\sin t;\quad y = \sin t - t\cos t.$

138. $x = 2\cos t;\quad y = \sin t.$

139. $x = t^2;\quad y = \sqrt{t + t^3}.$

140. $x = e^{2t};\quad y = 3^{et}.$

141 – 160. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке $x_0$.

141. $xe^{2x},\quad x_0 = -1.$

142. $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\quad x_0 = 0.$

143. $\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}),\quad x_0 = 0.$

144. $\ln(1 + \sin x),\quad x_0 = 0.$

145. $e^x,\quad x_0 = -1.$

146. $\ln(5 - 4x),\quad x_0 = 0.$

147. $4^x,\quad x_0 = 0.$

148. $3^x,\quad x_0 = 0.$

149. $\sqrt{x},\quad x_0 = 4.$

150. $\frac{1}{x},\quad x_0 = 1.$

151. $x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2,\quad x_0 = 1$

152. $e^{5x-1},\quad x_0 = 0.$

153. $\frac{1}{x+8},\quad x_0 = 0.$

154. $\frac{1}{x+2},\quad x_0 = -3.$

155. $x\cos x,\quad x_0=0$.

156. $\arcsin x,\quad x_0=0$.

157. $\dfrac{x}{x-1},\quad x_0=2$.

158. $x^3\ln x,\quad x_0=1$.

159. $e^{\sin x},\quad x_0=0$.

160. $\ln x,\quad x_0=1$.

161-180. Исследовать функцию и построить ее график.

161. $y=\dfrac{1-x^2}{x^2}$.

162. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

163. $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

164. $y=\dfrac{x}{(1+x)^3}$.

165. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

166. $y=\dfrac{4x^3}{1-x^3}$.

167. $y=\dfrac{4x^2+1}{x}$.

168. $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$.

169. $y=\dfrac{x^2}{1-x}$.

170. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

171. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

172. $y=\dfrac{x^4}{1-x^2}$.

173. $y=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$.

174. $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

175. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

176. $y=\dfrac{x^3+2}{2x}$.

177. $y=\dfrac{2+x^3}{x^2}$.

178. $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$.

179. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

180. $y=\dfrac{x^4+1}{x^2}$.

## Литература

1. Математика: сборник заданий для аудиторной и самостоятельной работы студентов инженерно-технических специальностей втузов: в 2 ч. / А.Н. Андриянчик [и др.]: – Минск: БНТУ, 2005. – Ч. 1.
2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р.Ф. Апатенок [и др.]. – Минск: Вышэйшая школа, 1986.
3. Гусак, А.А. Высшая математика: в 2 т. / А.А. Гусак. – Минск: Изд-во БГУ, 1978, 1983. – Т. 1, 2.
4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1986. – Ч. 1, 2.
5. Жевняк, Р.М. Высшая математика: в 2 ч. / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1984, 1985. – Ч. 1, 2.
6. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. – М.: Наука, 1986.
7. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Наука, 1989.
8. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: в 3 т. / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – Т. 1–3.
9. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике: учебное пособие: в 2 ч. / Т.А. Сухая. – Минск: Вышэйшая школа, 1993.
10. Высшая математика для инженеров / С.А. Минюк [и др.] / под ред. Н.А. Микулика. – Минск: Элайда, 2007. – Т. 1, 2.
11. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч. / под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2004.

## Содержание

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольная работа № 1
для студентов-заочников машиностроительных специальностей

Составители:
АНДРИЯНЧИК Анатолий Николаевич
МИКУЛИК Николай Александрович
ЮРИНОК Виктор Иванович

Редактор Т.Н. Микулик
Компьютерная верстка Н.А. Школьниковой

---

Подписано в печать 19.02.2010.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 3,64. Тираж 700. Заказ 145.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.