

**Министерство народного образования БССР  
БЕЛОРУССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

---

**Кафедра «Теория механизмов и машин»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
к контрольным работам по курсу  
„Теория механизмов и машин“ для  
студентов-заочников механических специальностей**

Минск 1991

УДК 621.01

В работе приведена методика выполнения контрольных работ № 1 и № 2 по Всесоюзным методическим указаниям 1989 г. "Теория механизмов и машин". Излагаются особенности теории по разделам отдельных задач, указывается наиболее подходящая литература, дается последовательность решения и примеры решения задач. Рекомендуется для студентов-заочников механических специальностей.

Составители:

Э.И. Астахов, В.К. Акулич, Г.Н. Девойно,  
В.И. Зинкевич, В.В. Кудин

Под редакцией Э.И. Астахова

Рецензенты:

В.М. Сурин, И.П. Филонов

Учебное издание

АСТАХОВ Эдуард Иванович

АКУЛИЧ Валерий Константинович и др.

### МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к контрольным работам по курсу  
"Теория механизмов и машин" для  
студентов-заочников механических  
специальностей

Под редакцией Э.И. Астахова

Редактор Т.Е. Рачковская

---

Подписано в печать 21.01.91.

Формат 60x84<sup>1</sup>/16. Бумага тип. № 2. Офсет. печать.

Усл. печ. л. 4,2. Уч.-изд. л. 3,3. Тир. 300. Зак. 4. Бесплатно.

---

Белорусский ордена Трудового Красного Знамени  
политехнический институт.

Отпечатано на ротатипре БПИ. 220027, Минск, Ленинский пр., 65.

© Белорусский политехнический  
институт, 1991

## В в е д е н и е

Теория механизмов и машин изучает общие методы исследования (анализа) механизмов, машин и проектирования (синтеза) их схем. Учебный курс теории механизмов и машин, с одной стороны, подготавливает студентов механических специальностей к изучению последующих машиностроительных специализаций, а с другой стороны дает инженерные методы исследования и проектирования схем механизмов и машин, применяемые во многих отраслях техники.

Приступая к изучению данной дисциплины, необходимо твердо помнить основные положения физики, математики и теоретической механики. Из высшей математики особо важны для курса ТММ разделы: а) аналитическая геометрия на плоскости; б) дифференциальные уравнения; в) дифференцирование и интегрирование простейших функций; г) векторная алгебра и элементы векторного анализа. Из теоретической механики необходимы для решений задач по ТММ такие разделы: а) кинематика точки; б) кинематика твердого тела; в) дифференциальные уравнения движения; г) кинетическая энергия; д) принцип д'Аламбера, силы инерции, динамические реакции; е) теория колебаний.

Курс "Теория механизмов и машин" изучается студентами-заочниками путем самостоятельной работы над учебниками и учебными пособиями. Обязательным элементом учебного процесса является выполнение контрольных работ, показывающих степень освоения и закрепления студентом-заочником отдельных разделов курса. Чтобы подготовиться к выполнению контрольных работ, следует или самостоятельно по имеющимся учебникам и учебным пособиям, или на лекционно-практических занятиях в межсессионный период: а) предварительно изучить соответствующие разделы программы курса; б) просмотреть решение примеров в задачнике [ 4 ]; в) решить 1+2 рекомендуемые типовые экзаменационные задачи из рабочей программы курса.

В связи с обновлением в последнее время учебной программы по теории механизмов и машин и включением в нее новых разделов науки и техники, не все вопросы новой программы отражены в достаточной мере в имеющейся учебной литературе. Поэтому основная цель данного пособия состоит в том, чтобы помочь студенту-заоч-

нику в выполнении контрольных работ по всеобщим методическим указаниям "Теории механизмов и машин": Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей вузов / Н.И. Левитский, Л.П. Солдаткин, В.Д. Плахтин, Ю.Я. Гуревич. -М: Высшая школа, 1989 г., особенно по разделам, слабо отраженным в существующей учебной литературе по ТММ.

Материал в данном пособии при изложении методики решения каждой контрольной задачи изложен в следующей последовательности: 1) указание разделов курса, пояснения к исходным данным и что нужно определить; 2) указание страниц учебников и учебных пособий, где наиболее полно и ясно изложены вопросы и примеры для данной задачи; 3) основные вопросы теории для решения задачи и их особенности для данного случая; 4) методика и последовательность решения задачи; 5) примеры решения задачи; 6) особенности разных вариантов задачи и пояснения к ним.

## 1. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Контрольная работа состоит из трех задач по вопросам структуры и кинематического анализа, синтеза рычажных и зубчатых механизмов. Здесь рассматривается движение механизмов без учета сил, вызывающих это движение.

### 1.1. Задача 1. Структурный анализ механизма

1. Задана структурная схема пространственной рычажной кинематической цепи робота или манипулятора. Необходимо произвести ее структурный анализ, определив число степеней свободы и маневренность. Для этого предварительно следует указать стойку, подвижные звенья, выявить вид и число кинематических пар, их взаимное расположение.

2. При решении этой задачи следует изучить вопросы "Структура механизмов" по разделам 1, 2, 3 программы на с. 5 "Методических указаний" и часть вопросов структуры роботов и манипуляторов в разделе 19 на с. 8. Материал к этим вопросам указан по темам 1, 2, 3 и частично 3Г на страницах рекомендуемых учебников и учебных пособий (см. с. 124-126 "Методических указаний"). В других учебных пособиях наиболее близкие вопросы изложены на следующих страницах: 7-8, 12-14 [4]; 13-28 [5]; 13-20

[6]; 37-49 [7]; 13-21 [9]; 11-24, 26-32 [10]; 7-15, 35-40 [11]; 18-34, 321-328 [12]; 4-7, 16-19 [15]. В квадратных скобках указаны номера учебных пособий из списка литературы на с. 69 - данного пособия.

3. Механизмом называют систему тел, предназначенную для преобразования движения одного или нескольких твердых тел в требуемые движения других твердых тел. Внешний признак любого механизма - движущиеся друг относительно друга звенья.

Звеном называется одно или несколько жестко соединенных твердых тел, входящих в состав механизма. Причем неподвижное звено принято называть стойкой. Обычно движение звеньев при исследовании механизмов рассматривается относительно стойки, хотя сама стойка может перемещаться с движущимся объектом. Звенья механизма имеют конкретные названия в зависимости от их конструкции и характера движения, например, ползун, кривошип, шатун, коромысло, кулиса и т.д. Входным называют звено, которому сообщается движение. Выходным называют звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм. Между входным и выходным могут быть расположены промежуточные звенья.

Чтобы звенья механизма имели возможность двигаться друг относительно друга, они связаны при помощи кинематических пар. Кинематической парой называют соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение. Звенья любой пары могут соприкасаться поверхностями, по линии и точками, называемые элементами звена.

Звенья после образования кинематических пар получают определенные ограничения в своих перемещениях. Известно, что любое звено машины, как и любое свободное твердое тело, обладает в пространстве шестью степенями свободы: тремя поступательными движениями вдоль осей произвольно выбранной системы координат и тремя вращательными движениями вокруг этих осей. Если звено установлено на свое место в машину или механизм, то оно теряет возможность перемещений по некоторым из этих направлений и число его степеней свободы оказывается всегда меньше шести.

Степени свободы, потерянные звеном при образовании кинематической пары, называются связями. Зависимость между числом степеней свободы  $H$  звена, входящего в кинематическую пару, и чис-

лом связей -  $S$  определяется формулой

$$S = 6 - H. \quad (I)$$

Поскольку число связей может изменяться от I до 5, то по числу условий связи, налагаемых на относительное движение звеньев, все кинематические пары делятся на пять классов. На рис. I изображены наиболее распространенные в механизмах манипуляторов кинематические пары с геометрическим замыканием. Рядом показаны условные изображения этих пар, применяемых на схемах механизмов. Стрелками обозначены возможные относительные движения звеньев.

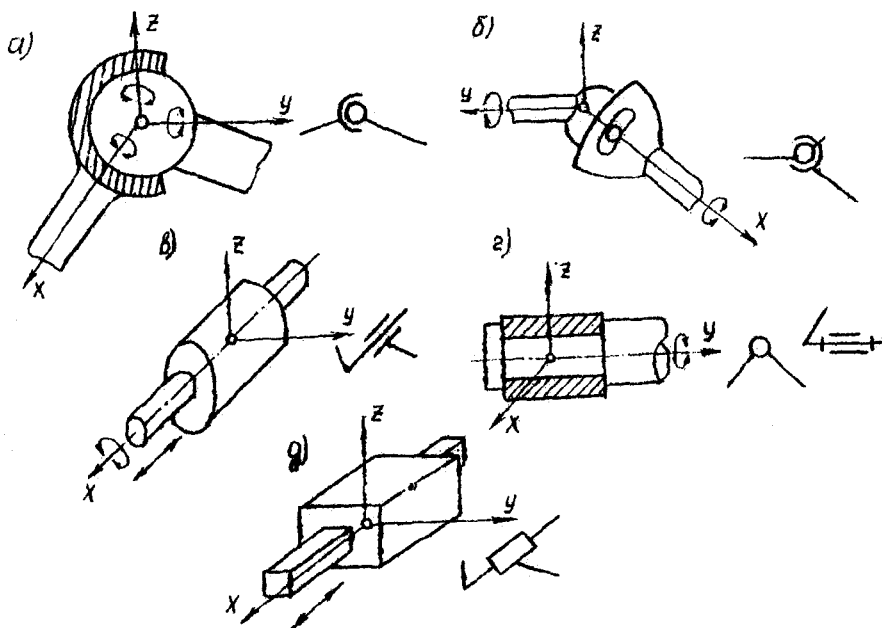


Рис. I

Если шаровой шарнир (рис. I а) сохраняет возможность относительного вращения звеньев вокруг любой из трех осей, то шаровая пара с пальцем (рис. I б) допускает лишь два независимых вращательных движения. Следовательно, шаровая пара относится к третьему

му классу, а шаровая пара с пальцем - к четвертому классу. В цилиндрической паре четвертого класса (рис. I в) звенья имеют возможность двух независимых движений: вращения вокруг оси  $X$  и линейного перемещения вдоль этой оси. К кинематическим парам пятого класса, изображенных на рис. I, относятся вращательная (рис. I г), допускающая относительное вращение вокруг оси  $Y$ , и поступательная (рис. I д), допускающая прямолинейное поступательное движение вдоль оси  $X$ .

Кинематической цепью называется система звеньев, связанных между собой кинематическими парами. Кинематическая цепь представляет собой структурную основу механизма. Однако нельзя утверждать, что механизм всегда образуется из кинематической цепи, так как есть механизмы (например, гидравлические), в которых кинематических цепей может и не быть. Отличительной чертой кинематической цепи, образующей механизм, является подвижность и определенность движения ее звеньев относительно стойки. Кинематические цепи делятся на незамкнутые и замкнутые, плоские и пространственные. Незамкнутой называется такая кинематическая цепь, в которой имеются звенья, входящие в одну кинематическую пару. В замкнутой кинематической цепи каждое ее звено входит не менее чем в две кинематические пары. Если в пространственную кинематическую цепь входит  $n$  подвижных звеньев, то общее число степеней свободы такой системы до образования звеньями кинематических пар равно  $6n$ . Вхождение звеньев в кинематические пары накладывает на движение звеньев дополнительные ограничения, т.е. связи. Так, например, каждая пара первого класса налагает одно условие связи, второго класса - два условия и т.д., а пятого класса - пять условий связи.

Стойка, с которой связывают неподвижную систему координат, является всех 6-ти степеней свободы. Таким образом, число  $W$  степеней свободы звеньев пространственной кинематической цепи относительно стойки определяется формулой

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1, \quad (2)$$

где  $P_5, P_4, P_3, \dots$  - число пар пятого, четвертого, третьего и т.д. классов. Эта структурная формула пространственной кинематической цепи носит название формулы Сомова-Малышева.

В общем случае пространственной кинематической цепи число  $W$  может быть большим. Например, рука человека, представляющая пространственную кинематическую биомеханическую цепь, содержит число звеньев  $n = 19$ , где суставы представляют кинематические пары различных классов. Расчет по формуле (2) дает  $W = 27$ . Таких степеней свободы не имеют самые сложные механизмы. По аналогии с биомеханизмами в современной технике проектируют механические руки-манипуляторы.

**Манипулятором** называется техническое устройство, предназначенное для воспроизведения рабочих функций руки человека. Примером таких устройств являются механические руки, применяемые в автоматических линиях для установки и съема обрабатываемых деталей на станках, входящих в линию. Число степеней свободы манипулятора определяется по структурной формуле (2). В зависимости от характера выполняемых операций  $W$  механической руки колеблется от трех до двенадцати. Наиболее употребляемое на практике – от четырех до семи.

На рис. 2 изображена кинематическая схема простейшего манипулятора, содержащая стойку 0, три подвижных звена 1, 2, 3 и три низшие кинематические пары  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (две вращательные и одна поступательная). По аналогии с человеческой рукой звенья этой цепи имеют следующие названия:

0 – корпус; 1 – плечо; 2 – предплечье; 3 – кисть или схват. Шарнир  $A$  соответствует повороту в плечевом суставе, а шарнир  $B$  – в локтевом. Поступательному перемещению руки вместе с локтевым суставом соответствует кинематическая пара  $C$  (такого движения в руке человека нет).

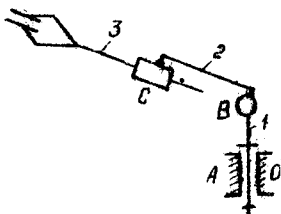


Рис. 2

Все пары – пятого класса.

По формуле Сомова-Малышева число степеней свободы манипулятора на рис. 2 равно:

$$W = 6n - 5P_5 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 3.$$

В манипуляторах число степеней свободы схвата можно представить как сумму подвижностей всех пар открытой кинематической цепи.



$$W = \sum_{i=1}^5 (6-i) P_i = P_5 + 2P_4 + 3P_3 + 4P_2 + 5P_1 \quad (3)$$

**Маневренность**  $m$  манипулятора называется свойство сохранять способность движения промежуточных между стойкой и схватом звеньев при неподвижном схвате. В качестве меры маневренности понимают степень подвижности кинематической цепи манипулятора при закреплённом (фиксированном) схвате. Маневренность манипулятора определяется, если в предыдущей формуле (2) обозначить величину  $W$  через  $m$

$$m = 6n' - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3, \quad (4)$$

где  $n'$  - число подвижных звеньев при неподвижном схвате.

Если  $m > 0$ , то манипулятор может обеспечить произвольную ориентацию схвата в пределах конструктивных возможностей схемы. При  $m < 0$  манипулятор имеет ограниченную маневренность. Так в схеме на рис. 3а при  $m = 3$  звенья I и 2 могут иметь множество положений, поскольку они двигаются в определенном объеме за счет крайних сферических пар A и C. В схеме на рис. 3б  $m = 1$  означает возможность совместного вращения звеньев I и 2 вокруг оси AC. В данном случае схват может подойти к заданной точке в заданном направлении при двух положениях звеньев I и 2. В схеме на рис. 3в  $m = 0$  означает, что схват может подойти к заданной точке в заданном направлении только при одном единственном положении звеньев I, 2 и 3.

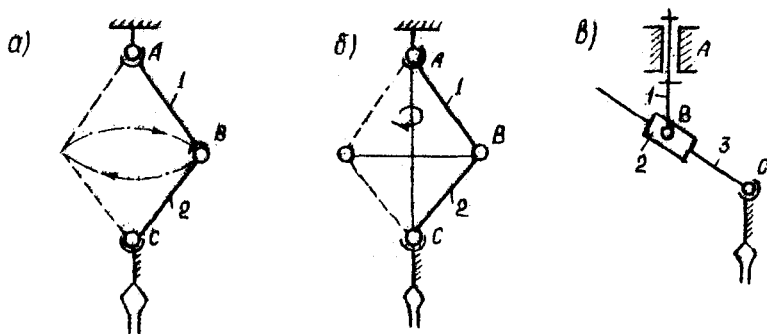


Рис. 3

Маневренность – важное свойство манипулятора, сужающее мертвые зоны механизма. Большое число степеней свободы манипулятора не определяет его маневренности, которая зависит не только от класса, но и от расположения кинематических пар. Повышение маневренности роботосистем дает возможность лучшим образом обходить рукой препятствия в рабочем объеме и выполнять сложные операции.

Промышленный робот – это автономно функционирующая машина-автомат, снабженная манипулятором, для выполнения технологических и транспортных операций. Промышленный робот является автоматическим манипулятором с программным управлением. Для обеспечения определенности движения руки робота число устанавливаемых приводов (т.е. двигателей с передачами) должно быть равно числу  $W$  степеней свободы руки.

4. Последовательность решения задачи: 1) вычертить схему механизма, связать со стойкой систему координат  $OXYZ$ ; 2) пронумеровать на схеме звенья, записать их названия, выделить стойку, определить число  $n$  подвижных звеньев; 3) обозначить буквами кинематические пары, записать в скобках номера образующих каждую пару звеньев, указать название, класс и расположение осей кинематических пар, определить число  $P_i$  кинематических пар различных классов; 4) определить число степеней свободы механизма по формуле (2) Сомова-Малышева, проверить  $W$  по формуле (3); 5) вычертить схему механизма при неподвижном схвате, определить маневренность  $M$  цепи манипулятора или робота.

6. Пример I. Произвести структурный анализ механизма копирующего манипулятора на рис. 4.

1). На схеме механизма связываем со стойкой  $O$  систему координат  $OXYZ$ , направив ось  $X$  по валу I. Как видно из схемы механизм манипулятора образован из пространственной незамкнутой кинематической цепи.

2). Звенья механизма: 0 – стойка; 1, 2, 3 – рычаги плеча, 4, 5, 6 – рычаги предплечья; 7 – кисть (или схват). Число подвижных звеньев руки манипулятора  $n = 7$ .

3). Кинематические пары механизма.

$A$  между звеньями (0, 1) – вращательная, 5-го класса, ось вращения – вокруг оси  $X$ ;  $B$  (1, 2) – поступательная, 5-го класса, ось движения – по оси  $X$ ;  $C$  (2, 3) – вращательная, 5-го

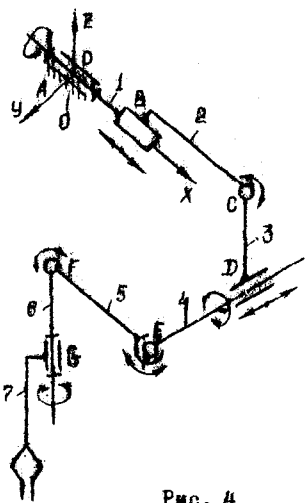


Рис. 4

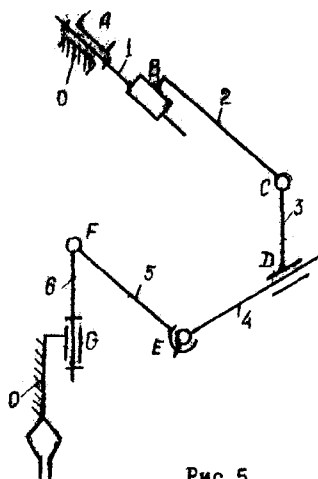


Рис. 5

класса, ось вращения параллельна оси  $Y$ , т.е. перпендикулярна оси звена 2;  $D$  (3,4) - цилиндрическая, 4-го класса, ось ее параллельна оси  $Y$ ;  $E$  (4,5) - шаровая с пальцем, 4-го класса, оси вращения параллельны осям  $Y$  и  $Z$ ;  $F$  (5,6) - вращательная, 5-го класса, ось вращения параллельна оси  $Y$ ;  $G$  (6,7) - вращательная, 5-го класса, ось вращения параллельна оси  $Z$ . Итого число кинематических пар: пятого класса  $P_5 = 5$ , четвертого класса  $P_4 = 2$ .

4). Число степеней свободы механизма манипулятора по формуле (2) Сомова-Малышева равно:

$$W = 6n - 6P_5 - 4P_4 = 6 \cdot 7 - 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 9.$$

Следовательно, рассматриваемый манипулятор обладает 9-ю степенями свободы и для определенности движения всех звеньев и кисти 7 нужно задать девять независимых движений, обозначенных на схеме стрелками. Проверка по формуле (3) дает:

$$W = n_5 + 2P_4 = 5 + 2 \cdot 2 = 9.$$

5). Для определения маневренности манипулятора вычерчиваем схему при неподвижном схвате (рис.5). Здесь уже  $n' = 6$ ;  $P_2 = 5$ ;  $P_4 = 2$ , поэтому  $m = 6n' - 5P_2 - 4P_4 = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 3$ .

Таким образом, в манипуляторе по схеме, показанной на рис.5, при неподвижном схвате маневренность равна трем, т.е. одному и тому же положению схвата соответствуют три различных варианта расположения звеньев, что позволяет оператору обходить некоторые препятствия в рабочем объеме. Такая структура ( $m = 3$ ) предоставляет манипулятору большие возможности выполнения сложных движений.

**Примечание:** Если маневренность манипулятора окажется  $m \leq 0$ , то проникновение руки в труднодоступные места рабочей зоны снижается. Схват в этом случае имеет только одну ориентацию при попадании его в заданную точку рабочей зоны за счет основной подвижности. Другие варианты расположения кинематической цепи при фиксированном схвате в рабочей зоне невозможны.

## 1.2. Задача 2. Кинематический анализ зубчатых механизмов

1. Задаана схема сложного зубчатого механизма, числа зубьев колес, частота вращения входного вала. Необходимо произвести кинематический анализ предложенного зубчатого механизма, определив передаточное отношение всего механизма и частоту вращения выходного вала.

2. Для решения этой задачи нужно изучить вопросы "Кинематический анализ фрикционных и зубчатых механизмов" в теме 5 ( с.6) раздела 2 и "Синтез зубчатых механизмов" (тема 15) раздела 3 программы на с.78 "Методических указаний", Материал к этим вопросам указан по темам 21,22 и частично 18 на страницах рекомендуемых учебников и учебных пособий [1,2,3], приведенных на с.124-126 "Методических указаний". В других учебных пособиях наиболее близкий материал изложен по разделам "Сложные зубчатые механизмы" с неподвижными и подвижными осями колес на следующих страницах: 62-71, 72-77 в [4], 274-281 в [5], 298-308 в [7], 264-268 в [8], 205-216, 286-299 в [10], 293-320 в [11], 402-413 в [12], 80-96 в [13], 189-213 в [14], 108-122 в [15]. Необходимо разобрать решения примеров на с.68-71 в [4] и в [15] на с.11-117.

3. Для освоения методики решения задач по данному разделу рассмотрим последовательность кинематического анализа зубчатых механизмов, заключающегося или в определении передаточного отношения, или в установлении зависимости между угловыми скоростями звеньев,

или нахождении угловой скорости (частоты вращения) одного из колес механизма, если известна угловая скорость (частота вращения) входного звена.

Простейший зубчатый механизм – это зубчатая передача, состоящая из двух колес и стойки. В зависимости от расположения осей вращения колес зубчатые передачи могут быть: 1) с параллельными осями (цилиндрические); 2) с пересекающимися осями (конические); 3) со скрещивающимися осями (гиперboloидные, гипойдные, червячные, винтовые). В задаче 2 все механизмы с цилиндрическими зубчатыми колесами (оси всех колес параллельны). Цилиндрическая передача может быть с внешним (рис.6 б) и внутренним (рис.6 а) зацеплением. При внешнем зацеплении колеса вращаются в противоположные стороны, а при внутреннем – в одну сторону.

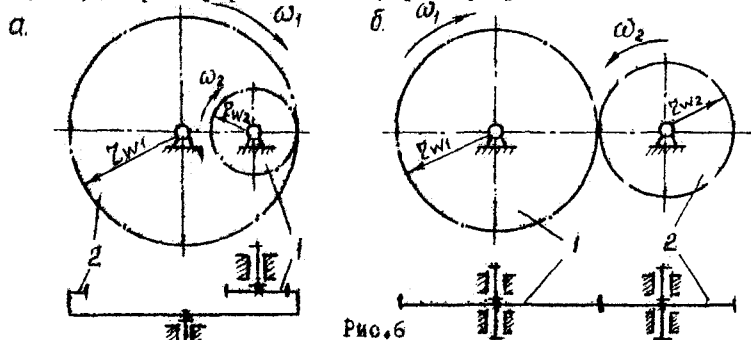


Рис.6

Передачным отношением  $u_{12}$  называется отношение угловой скорости  $\omega_1$  одного звена к угловой скорости  $\omega_2$  другого звена (в механизме с  $W = 1$ )

$$u_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{z_2}{z_1} = \pm \frac{Z_2}{Z_1},$$

где  $Z$  – числа зубьев колес;

$n$  – частота вращения колес, об/мин;

$Z_w$  – радиус начальной окружности.

Для механизмов с параллельными осями передаточное отношение считается положительным при одинаковом направлении угловых скоростей (внутреннее зацепление, рис.6 а) и отрицательным при противоположном направлении (внешнее зацепление, рис.6 б). Связь между прямым

$u_{12}$  и обратным  $u_{21}$  передаточными отношениями:

$$u_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \text{ то } u_{21} = \frac{1}{u_{12}}, \text{ т.е. } u_{21} : u_{12} = 1$$

Для получения больших передаточных отношений или для сложения-распределения вращения звеньев применяются сложные зубчатые механизмы с числом колес больше двух. Сложные зубчатые механизмы разделяют на две группы: 1) механизмы с неподвижными геометрическими осями колес; 2) механизмы с подвижными осями колес.

В механизмах с неподвижными осями колес общее передаточное отношение равно произведению передаточных отношений отдельных ступеней:

$$U_{1n} = U_{12} \cdot U_{23} \dots U_{(n-1)n} = (-1)^K \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2'} \dots \frac{z_n}{z_{n-1}'}, \quad (5)$$

где  $K$  - число внешних зацеплений.

Например, для ступенчатого ряда на рис. 7, а

$$U_{14} = U_{12} \cdot U_{2'3} \cdot U_{3'4} = \left(-\frac{z_3}{z_2'}\right) \left(-\frac{z_4}{z_3'}\right) \cdot \frac{z_2}{z_1} = (-1)^2 \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_2' \cdot z_3'},$$

а для последовательного (паразитного) ряда на рис. 7 б

$$U_{14} = U_{12} \cdot U_{23} \cdot U_{34} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1}.$$

В последнем случае промежуточные колеса 2 и 3 не влияют на величину  $U_{14}$  и называются "паразитными". Паразитные колеса определяют знак общего  $U$ .

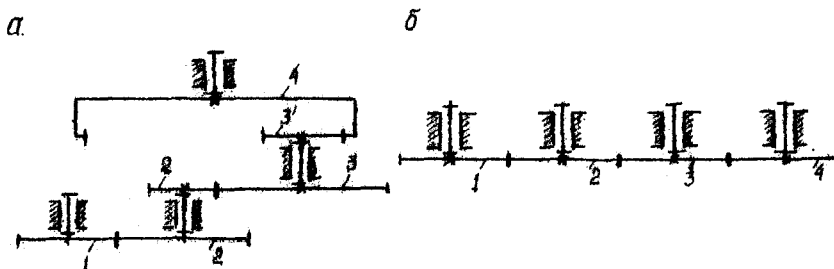


Рис. 7

Зубчатые механизмы с подвижными осями колес могут быть трех типов: дифференциальные, планетарные и замкнутые дифференциальные. В дифференциальных механизмах степень подвижности  $W \geq 2$  и все колеса вращаются (подвижные). Например, в дифференциальном механизме на рис. 8  $n = 4$ ;  $P_3 = 4$  (вращательные кинематические пары  $A, B, C, D$ );  $P_4 = 2$  (высшие зубчатые пары  $E$  и  $F$ ), поэтому

$$W = 3n - 2P_3 - P_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2.$$

Таким образом, для определения движения звеньев должно быть два входных звена. Например, нужно задать вращение колесам I и 3, тогда водило  $H$  будет выходным. В составе механизмов с подвижными осями имеются следующие звенья: I и 3 - центральные колеса; 2 - колесо с подвижной осью, сателлит;  $H$  - водило, несущее ось сателлита. Водило  $H$  и центральные колеса I и 3 имеют общую ось вращения, т.е. соосны.

Для определения зависимости между угловыми скоростями звеньев в механизмах с подвижными осями используют метод "инверсии" (обращенного движения). Всему механизму, включая стойку, сообщает вращение с угловой скоростью  $\omega_H$  водила, но в обратную сторону,  $\omega_{обр} = -\omega_H$ . Тогда водило  $H$  становится неподвижным и получается "обращенный" механизм с неподвижными осями вращения колес, для которого можно определить передаточное отношение между колесами  $P$  и  $q$ .

$$U_{pq}^H = \frac{\omega_P^H}{\omega_q^H} = \frac{\omega_P - \omega_H}{\omega_q - \omega_H} = \frac{n_P - n_H}{n_q - n_H}, \quad (6)$$

где  $U_{pq}^H$  - передаточное отношение "обращенного" механизма (при неподвижном водиле  $H$ );  $U_{pq}^H = U_{p2}^H \cdot U_{23}^H \dots U_{s2}^H = (-1)^k \frac{z_2 \cdot z_3 \dots z_4}{z_p \cdot z_2 \dots z_5}$ .

Формула (6) носит название формулы Виллиса для дифференциальных механизмов. Для механизма на рис.8 формула Виллиса между колесами I и 3 принимает вид:  $U_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H}$ ,

где  $U_{13}^H = U_{12}^H \cdot U_{23}^H = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \frac{z_3}{z_2} = -\frac{z_3}{z_1}$ . (7)

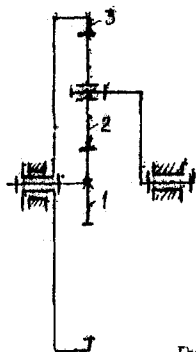


Рис.8

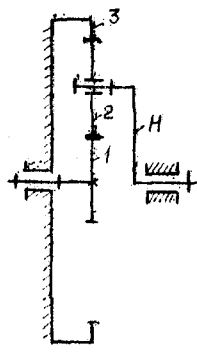
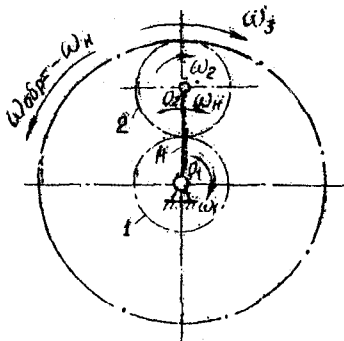


Рис.9

В планетарных механизмах одно из центральных колес неподвижно и  $W = I$ . Например, если в дифференциальном механизме (рис.8) закрепить со стойкой колесо 3, то получим планетарный механизм (рис.9). Здесь  $P = 3$ ;  $P_5 = 3$ ;  $P_4 = 2$  и  $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = I$ . Подставляя в формулу Виллиса (7)  $\omega_3 = 0$ , получится

$$U_{IH} = 1 - U_{I3}^H,$$

где  $U_{IH}$  - передаточное отношение планетарного механизма (или планетарной передачи) от колеса I к водилу H при неподвижном колесе 3.

В общем случае передаточное отношение планетарного механизма от центрального колеса P к водилу H равно:

$$U_{PH} = 1 - U_{PQ}^H, \quad (8)$$

где

$$U_{PQ}^H = U_{P1}^H \cdot U_{12}^H \dots U_{4q}^H = (-1)^K \frac{Z_1}{Z_P} \cdot \frac{Z_2}{Z_1} \dots \frac{Z_q}{Z_4};$$

q - номер неподвижного центрального колеса.

В замкнутых дифференциальных механизмах  $W = I$  и все звенья (колеса) подвижны. В их составе выделяют две части: обычный дифференциальный механизм и замыкающую кинематическую цепь, которая связывает движения центральных колес дифференциального механизма. Решение таких замкнутых дифференциалов производится путем совместного решения формулы Виллиса для дифференциальной части и формулы передаточного отношения замыкающей кинематической цепи. Например, замкнутый дифференциальный механизм на рис.10 состоит из дифференциального механизма, включающего центральные колеса I и 3, блок сателлитов 2 - 2' и водило H, и замыкающей цепи в виде зубчатого ряда колес 5, 4-4', 6 с неподвижными осями, связывающей движения центрального колеса I и водила H. Формула Виллиса для дифференциальной части

$$U_{I3}^H = \frac{\omega_I - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}. \quad (9)$$

Для замыкающей цепи, так как  $\omega_5 = \omega_I$  и  $\omega_6 = \omega_H$

$$U_{56} = \frac{\omega_5}{\omega_6} = \frac{\omega_I}{\omega_H}, \text{ отсюда } \omega_H = \frac{\omega_I}{U_{56}} = \omega_I U_{65}. \quad (10)$$

Нужно определить  $U_{I3}$  между колесами I и 3. Подставляя (10) в (9), получаем

$$U_{I3}^H = \frac{\omega_I - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{\omega_I}{\omega_3 - \omega_H} \cdot \frac{1 - U_{65}}{1 - U_{65}} = \frac{U_{I3} - U_{65}}{1 - U_{65}}. \quad (10')$$



Отсюда выражается искомое  $U_{13}$

$$U_{13} = U_{65} + U_{13}^H (1 - U_{65}^H),$$

где  $U_{13}^H = U_{12}^H \cdot U_{23}^H = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \frac{z_3}{z_2}$ ;  $U_{65} = U_{64} \cdot U_{45} = \frac{z_4' z_5}{z_6 z_4}$ .

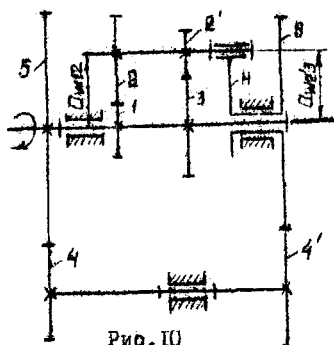


Рис. 10

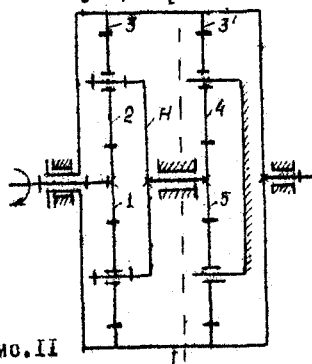


Рис. 11

В ряде случаев в схемах механизмов оказываются незадаанными числа зубьев некоторых колес. Их следует найти из условия соосности, определяющего соосное расположение основных звеньев-водила и центральных колес, т.е. такое их расположение, когда основные звенья имеют общую ось вращения. Соосность основных звеньев приводит к равенству межосевых расстояний  $A_w$ . Например, для механизма, изображенного на рис. 10, имеем:

$$A_{w12} = A_{w2'3}, \text{ или } z_{w1} + z_{w2} = z_{w3} + z_{w2'}.$$

Если считать, что зубчатые колеса имеют одинаковый модуль и нарезаются без смещения инструмента (нулевые), то  $z_w = m z / 2$  и условие соосности в рассматриваемом механизме, примет вид:

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_2'.$$

Отсюда можно определить число зубьев одного из колес, если известны числа зубьев трех других колес.

4. Последовательность решения задачи: 1) определить неизвестные числа зубьев колес из условия соосности, выделив и записав равенство соответствующих межосевых расстояний; 2) уяснить структуру предложенного механизма, записав его составные части (зубчатые ряды, планетарные передачи, дифференциальные механизмы, замыкающие цепи), указав колеса, их образующие; 3) оставить выражения передаточных отношений для каждой ступени и совместным решением их получить алгебраическое выражение для искомого передаточного отношения;

4) определить через  $Z$  величины составных передаточных отношений, подставив их в алгебраическое выражение искомого передаточного отношения, найти его величину; 5) по найденному  $U$  и заданной  $n_1$  (или  $\omega_1$ ) определить  $n$  (или  $\omega$ ) выходного вала или колеса. Для коробки скоростей нужно составить схему на каждой передаче и вести решение по пунктам 2)–5) для каждой передачи.

**Пример 2.** В механизме замкнутого дифференциального зубчатого редуктора (рис. II) определить передаточное отношение от входного вала I к выходному валу колеса 3 (барабану лебедки) и частоту  $n_3$  вращения выходного вала. Задано:  $Z_1 = Z_5 = 14$ ;  $Z_2 = Z_4 = 28$ ;  $n = 3000$  об/мин. Незаданные значения чисел зубьев колес определить из условия соосности, считая колеса нулевыми, а модули колес одинаковыми.

**Решение:** 1). Недостающие числа зубьев колес  $Z_3$  и  $Z_3'$  определяем из условий соосности. Как видно из схемы механизма на рис. II, для колес 1 и 2, 2 и 3 можно записать равенство межосевых расстояний  $a_{w12} = a_{w23}$ , т.е.  $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_3$ , откуда  $Z_3 = Z_1 + 2Z_2 = 14 + 2 \cdot 28 = 70$ . Аналогично для колес 5 и 4, 4 и 3:  $a_{w43} = a_{w54}$ ;  $Z_5 + Z_4 = Z_3' - Z_4$ , откуда  $Z_3' = Z_5 + 2Z_4 = 14 + 2 \cdot 28 = 70$ .

2). Так как это замкнутый дифференциальный механизм, то в его составе выделяются: а) дифференциальный механизм (слева от линии I-I') с центральными колесами 1 и 3, сателлитами 2 и водилом H; б) замыкающая кинематическая цепь в виде зубчатого ряда колес с неподвижными осями 5, 4 и 4, 3). Для дифференциального механизма записываем формулу Виллиса между колесами 1 и 3 в обращенном механизме

$$U_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} \quad (II)$$

Для замыкающей цепи записываем передаточное отношение между колесами 5 и 3; учитывая, что водило H и колесо 5 является одним звеном, а также 3 и 3' - одно звено, поэтому  $\omega_H = \omega_5$  и

$$\omega_3 = \omega_3' \quad U_{53}' = \frac{\omega_5}{\omega_3'} = \frac{\omega_H}{\omega_3} \quad (I2)$$

Так как по условию нужно определить  $U_{13}$ , то из (I2) выражаем  $\omega_H$  через  $\omega_3$ ,

$$\omega_H = \omega_3 U_{53}'$$

Это выражение для  $\omega_H$  подставляется в (II):

$$U_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_3 U_{53}'}{\omega_3 - \omega_3' U_{53}'} = \frac{\omega_1}{\omega_3} - U_{53}' = \frac{U_{13} - U_{53}'}{1 - U_{53}'}$$

Отсюда выражается искомое  $U_{13}$ :

$$U_{13} = U_{53}' + U_{13}^H (1 - U_{53}') \quad (I3)$$

4). Определяем через  $Z$  составные передаточные отношения:

$$U_{53}' = U_{54} \cdot U_{43}' = \left(-\frac{Z_4}{Z_5}\right) \cdot \frac{Z_3}{Z_4} = -\frac{Z_3'}{Z_5} = -\frac{70}{14} = -5;$$

$$U_{13}^H = U_{12}^H \cdot U_{23}^H = \left(-\frac{Z_2}{Z_1}\right) \cdot \frac{Z_3}{Z_2} = -\frac{Z_3}{Z_1} = -\frac{70}{14} = 5.$$

Подставляя в (I3), определяем величину искомого  $U_{13}$ :

$$U_{13} = -5 + (-5) \cdot (1 + 5) = -35.$$

Знак "минус" говорит о том, что колеса I и 3 вращаются противоположно.

5). Используем выражение передаточного отношения

$$U_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{n_1}{n_3}.$$

Отсюда искомая частота вращения выходного вала 3:

$$n_3 = \frac{n_1}{U_{13}} = \frac{3000}{-35} = -85,7 \text{ об/мин.}$$

**Пример 3.** В двухскоростной планетарной коробке передач с электромагнитным управлением (рис. I2) первая передача получается при включении муфты  $M_1$ , вторая передача при - включении муфты  $M_2$ .

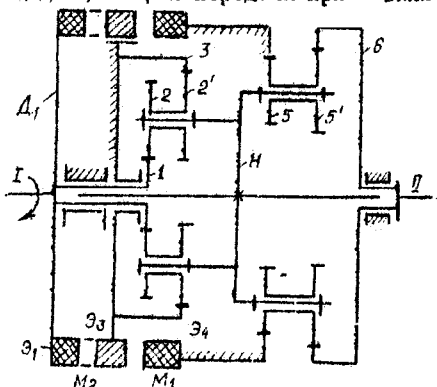


Рис. I2

Определить значения передаточных отношений на каждой передаче и скорости вращения выходного вала 6, если заданы числа зубьев колес ( $Z_1 = 15$ ,  $Z_2 = 25$ ,  $Z_2' = 22$ ,  $Z_4 = 50$ ,  $Z_5 = 14$ ,  $Z_5' = 16$ ) и скорость вращения входного вала  $\omega_1 = 142$  рад/с.

**Решение:** 1). Недостающие числа зубьев колес  $Z_3$  и  $Z_6$  определяем из условия соосности. Как видно из схемы на рис. 12, для колес 1 и 2, 2' и 3 можно записать равенство межосевых расстояний  $a_{W12} = a_{W2'3}$ , т.е.  $Z_1 + Z_2 = Z_3 - Z_2'$ . Откуда  $Z_3 = Z_1 + Z_2 + Z_2' = 15 + 25 + 22 = 62$ . Аналогично для колес 4 и 5, 5' и 6:  $a_{W45} = a_{W5'6}$ ,  $Z_4 - Z_5 = Z_6 - Z_5'$ , откуда  $Z_6 = Z_4 - Z_5 + Z_5' = 50 - 14 + 16 = 52$ .

**Первая передача:** При включении муфты  $M_1$  она соединяет вместе элементы 3з и 34. Но так как 34 связан с неподвижным колесом 4, то и колесо 3 также становится неподвижным. Показываем схему передачи движения на I-й скорости (рис. 13). Так как колесо 3 стало неподвижным, оно заштриховано. Вращение от входного вала I через колеса 1, 2-2', 3 передается на водило  $H$ , а далее от водила через колеса 4, 4-5, 6 передается на ведомое колесо 6 с выходным валом II.

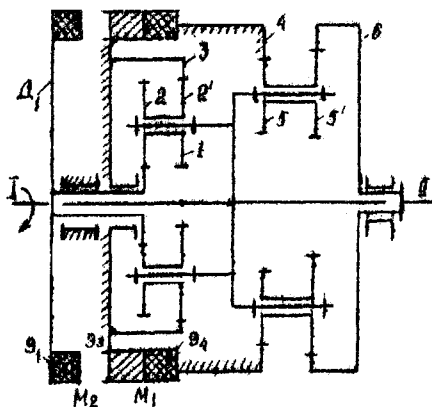


Рис. 13

2). Определяем строение механизма на первой передаче. Весь механизм коробки передач состоит из двух частей. Так как центральное колесо 3 неподвижно, то оно с центральным солнечным колесом 1, блоком сателлитов 2-2' и водилом  $H$  образует I-й планетарный механизм, с передаточным отношением  $U_{IH}$  от входного колеса 1 к водилу  $H$ . Далее водило  $H$  с блоком сателлитов 5-5', неподвижным центральным колесом 4, выходным центральным колесом 6 образует

2-й планетарный механизм с передаточным отношением  $U_{H6}$  от водила  $H$  к колесу 6.

3). Выражаем передаточные отношения составных механизмов. Для I-го планетарного механизма, используя формулу (8) для планетарных передач, выражаем передаточное отношение  $U_{1H}$  при неподвижном колесе 3

$$U_{1H} = 1 - U_{13}^H, \quad (14)$$

где  $U_{13}^H$  - передаточное отношение обращенного механизма между колесами 1 и 3 при остановленном водиле  $H$ .

Для 2-го планетарного механизма, используя формулы (4) и (8), выражаем передаточное отношение  $U_{H6}$  от водила  $H$  к колесу 6 при неподвижном колесе 4.

$$U_{H6} = \frac{1}{U_{6H}} = \frac{1}{1 - U_{64}^H}, \quad (15)$$

где  $U_{64}^H$  - передаточное отношение обращенного механизма между колесами 6 и 4 при остановленном водиле.

Так как два планетарных механизма соединены последовательно, то общее передаточное отношение  $U_{I-II}$  между входным I и выходным II валами будет равно произведению их передаточных отношений (14) и (15);

$$U_{I-II} = U_{16} = U_{1H} \cdot U_{H6} = \frac{1 - U_{13}^H}{1 - U_{64}^H}. \quad (16)$$

4). Определяем составные передаточные отношения через числа зубьев  $Z$ .

$$U_{13}^H = U_{12}^H \cdot U_{2'3}^H = \left( -\frac{Z_2}{Z_1} \right) \cdot \frac{Z_3}{Z_2'} = -\frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2'} = -\frac{25 \cdot 62}{15 \cdot 22} = -4,7; \quad ;$$

$$U_{64}^H = U_{65}^H \cdot U_{54}^H = \frac{Z_5'}{Z_6} \cdot \frac{Z_4}{Z_5} = \frac{16 \cdot 50}{52 \cdot 14} = 1,1.$$

Подставляя в формулу (16), определяем величину общего передаточного отношения на I-й передаче:

$$U_{I-II} = U_{16} = \frac{1 - (-4,7)}{1 - 1,1} = -5,7.$$

Так как  $U_{I\text{B}}$  отрицательно, то вал II с колесом B будет вращаться на I-й передаче противоположно валу I с колесами I.

5). Используя заданную скорость вращения  $\omega_I$  и найденное  $U_{I-II}$ , определяем скорость  $\omega_{II}$  вращения выходного вала II.

$$U_{I-II} = \frac{\omega_I}{\omega_{II}}, \quad \text{т.е. } \omega_{II} = \frac{\omega_I}{U_{I-II}} = \frac{142}{-57} = -2,49 \text{ 1/\%}.$$

2-я передача. Включена муфта  $M_2$ , элемент  $Z_3$  смещается влево, в результате чего элементы  $Z_3$  и  $Z_1$  соединяют в одно целое колесо 3 и ведущий диск  $\Delta$  с колесом I (на рис. 12 показано штриховой линией). Вращение от центральных колес I и 3 через сателлиты 2-2' передается на водило H, а далее через колеса 4, 5-5', 6 передается на ведомое колесо B с выходным валом II.

2). Определяем строение механизма на 2-й передаче. Весь механизм коробки передач состоит из двух частей. Так как колесо 3 вращается вместе с колесом I, то звенья I, 2-2', 3 и водило образуют формально I-й дифференциальный механизм с двумя входными колесами I и 3. А далее, как и в I-й передаче, водило H с сателлитами 5-5', центральными колесами 4 и 6 (при неподвижном колесе 4) образует 2-й планетарный механизм.

3). Выражаем передаточные отношения составных механизмов. Для I-го дифференциального механизма используем формулу Виллиса (6), учитывая, что колеса I и 3 вращаются как одно целое, т.е.

$$U_{I3}^H = \frac{\omega_I - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{\omega_I - \omega_H}{\omega_I - \omega_H}.$$

Отсюда выражаем  $\omega_H$ :

$$\omega_H = \frac{\omega_I (1 - U_{I3}^H)}{1 - U_{I3}^H} = \omega_I.$$

Т.е. водило H вращается с той же скоростью, что и колеса I и 3. Фактически все колеса I, 3, H вращаются как одно целое, сателлиты 2-2' не проворачиваются вокруг своих осей, т.е. в этом случае передача заблокирована.

$$\omega_I = \omega_3 = \omega_H, \quad \text{т.е. } U_{IH} = \frac{\omega_I}{\omega_H} = 1.$$

Для 2-го планетарного механизма, как и на I-й передаче,

$$U_{H6} = \frac{1}{U_{6H}} = \frac{1}{1 - U_{64}^n}$$

Общее передаточное отношение  $i_{I-II}$  между входным I и выходным II валами будет равно фактически передаточному отношению 2-го планетарного механизма

$$U_{I-II} = U_{16} = U_{1H} \cdot U_{H6} = \frac{1}{1 - U_{64}^n}$$

4) Подставляя найденное ранее  $U_{64}^n = 1,1$ , определяем величину  $U_{I-II}$  на 2-й передаче

$$U_{I-II} = \frac{1}{1 - 1,1} = -10.$$

Передаточное отношение здесь также отрицательно.

5). Скорость вращения выходного вала на 2-й передаче

$$\omega_{II} = \omega_6 = \frac{\omega_1}{U_{I-II}} = \frac{142}{-10} = -14,2 \text{ } \%/с.$$

## 6. Особенности решения различных вариантов задачи 2

Вариант 0. Решение аналогично примеру 3. На I-й передаче при заторможенных от  $T_1$  и  $T_2$  колесах 2 и 4 получается последовательное соединение 2-х планетарных передач. Первая - центральные колеса 1 и 3 с сателлитами 2 и водилом  $H_1$ , являющимся одновременно колесом 4. Вторая планетарная передача - от центрального колеса 4 с сателлитом 5 и неподвижным колесом 6 к водилу  $H_2$ . На 2-й передаче колесо 5 и водило  $H_2$  заблокированы муфтой  $M_2$  в одно целое, поэтому здесь  $U_{H2} = 1$  (см. 2-ю скорость в примере 3), и общее передаточное отношение равно передаточному отношению первой планетарной передачи. На 3-й передаче муфтой  $M_1$  блокируется I-я планетарная передача и вращение преобразует только вторая планетарная передача (колеса 4, 5, 6, водило  $H_2$ ). На 4-й передаче заблокированы обе планетарные передачи, поэтому получается прямая передача с передаточным отношением, равным единице.

Варианты 1, 3, 4, 5, 6. Решение аналогично примеру 2. В составе замкнутого дифференциального механизма нужно выделить простой дифференциальный механизм и замыкающую цепь. В дифференциальном механизме все подвижные звенья: два центральных колеса, сателлиты (или блок сателлитов) и водило  $H$ . Водилом  $H$  являются: в схемах вариантов 1, 4 и 5 - барабан с колесом 5, в вариантах 3 и 6 - колесо 5. Замыкающая цепь - зубчатый ряд с неподвижными осями колес 3, 4, 5.

Вариант 2. Решение аналогично примеру 3. На I-й передаче (при заторможенном водиле  $H_1$ ) получается последовательное соединение зубчатого ряда 1, 2, 3 и планетарной передачи 4, 5, 6 с водилом  $H_2 = 3$  и неподвижным колесом 4:  $U_{16} = U_{12} \cdot U_{23} = U_{13} / U_{64}$ . На 2-й передаче (при заторможенном  $H_2 = 3$ ) последовательное соединение планетарной передачи 1, 2, 3 с водилом  $H_1$  и неподвижным колесом 3 и зубчатого ряда колес 4, 5, 6,  $U_{16} = U_{12} \cdot U_{23}$

Варианты 7 и 8. Простая планетарная коробка передач. При включении тормоза  $T$  получается планетарная передача с неподвижным колесом 3 на I-й скорости. На 2-й скорости при включении муфты  $M$  получается заблокированный дифференциальный механизм, у которого два звена вращаются как одно целое: в варианте 7 блокируются колеса 1 и 3 ( $\omega_1 = \omega_3$ ), а в варианте 8 блокируется колесо 3 и водило  $H$  ( $\omega_3 = \omega_H$ ). См. передачу 2 в примере 3.

Вариант 9. Сдвоенный планетарный механизм с общим водилом  $H$ . I-й планетарный механизм с колесами 1, 2, 3,  $H$  (колесо 3 неподвижно) передает вращение от колеса 1 к водилу  $H$ , 2-й планетарный механизм с колесами 4, 2 - 2', 3 и  $H$  передает вращение от  $H$  колесу 4. Поэтому  $U_{14} = U_{1H} \cdot U_{H4} = U_{1H} / U_{4H}$ .

### 1.3. Задача 3. Кинематический синтез рычажных механизмов

1. Здесь рассматривается задача кинематического синтеза (проектирования) четырехзвенного рычажного механизма по положениям его звеньев. Задачи: структурная схема рычажного механизма, положения одного или нескольких звеньев, некоторые кинематические параметры и условия работы. Необходимо определить недостающие размеры звеньев механизма.

2. Задача относится к "Синтезу механизмов" и соответствует темам 13 и 14 программы курса на с. 7 "Методических указаний"/17. Для ее решения необходимо изучить учебный материал по темам 4, 12, особенно 13 по страницам учебников и учебных пособий, указанных на страницах 124-127 "Методических указаний". В других учебных пособиях материал к данной задаче изложен на следующих страницах: 116-128 [5], 162-177 [6], 75-80, 140-145 [7], 95-109 [8], 225-248 [9], 148-159 [10], 106-137 [11], 307-321 [12], 72-84 [13], 54-68 [14]. После проработки указанного теоретического материала нужно разобраться в решении примеров 2.1-2.6 в [15]. Желательно решить рекомендуемые экзаменационные задачи 379, 381, 384 в [4].



3. Для освоения методики решения задачи 3 рассмотрим особенности вопросов синтеза механизмов. Синтез механизма состоит в проектировании схемы механизма по заданным его свойствам, т.е. в определении структурной схемы и параметров механизма. Различают следующие этапы синтеза механизмов. Первый этап - структурный синтез, т.е. выбор и определение элементов структурной схемы механизма (вида и числа звеньев и кинематических пар, их соединения, взаимное расположение). Второй этап - кинематический синтез механизма, т.е. определение параметров кинематической схемы (размеры звеньев, положения точек, углы поворота и др.), обеспечивающих выполнение требуемых движений звеньев без учета сил, вызывающих это движение. Третий этап - динамический синтез механизма, т.е. определение механических параметров механизма (массы звеньев, их моменты инерции, силы, нагрузки), обеспечивающих выполнение требуемых динамических условий работы механизма.

Независимые между собой постоянные параметры схемы механизма называются параметрами синтеза механизма (длины звеньев, углы, массы звеньев и координаты и др.). Параметры синтеза подразделяют на входные, задаваемые при синтезе, и выходные, определяемые в процессе синтеза. Вид и число параметров синтеза зависят от схемы механизма и поставленной задачи условия работы механизма. Например, при кинематическом синтезе механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 14) для вычерчивания точкой  $M$  шатуна 2 заданной траектории  $Y(x)$ , необходимо в общем случае определение девяти независимых параметров синтеза: 7 линейных  $l_1, l_2, l_3, l_4, a, \chi_A, \psi_A$  и два угловых  $\psi_0$  и  $\varphi_0$ . В кривошипно-ползунном механизме (рис. 15) при синтезе по выполнению заданного закона движения ползуна  $S = f(\varphi)$ , независимыми в общем случае являются 6 параметров синтеза: 5 линейных  $r, l, e, \chi_A, \psi_A$  и один угловой  $\psi_0$ . В частных случаях часть параметров может заранее задаваться или выбираться.

Для получения заданных свойств механизма нужно удовлетворить многим условиям. Основное условие синтеза, выраженное в виде функции, экстремум которой определяет выходные параметры синтеза, называется целевой функцией (или критерием оптимизации). Например, для механизма на рис. 14 целевая функция может быть представлена в виде отклонения  $\Delta$  шатунной кривой  $Y_M(x)$  точ-

ки  $M$  от заданной кривой

$$\Delta(x) = |y_M - y|.$$

Решением (оптимизацией) целевой функции при минимальном отклонении  $\Delta$  определяются возможные параметры синтеза.

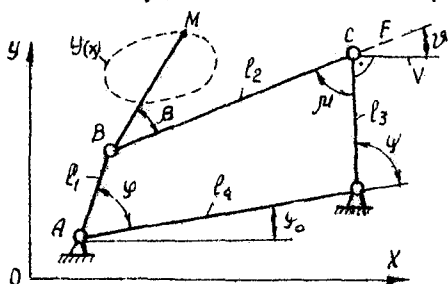


Рис. 14

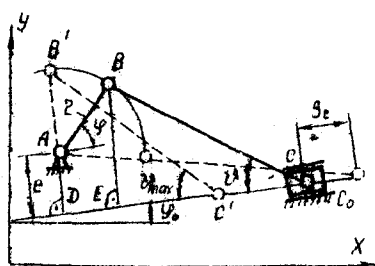


Рис. 15

Остальные (или дополнительные) условия синтеза выражаются обычно неравенствами и устанавливают ограничения на допустимые области существования параметров синтеза. Наиболее распространены в задаче 3 при синтезе рычажных механизмов следующие ограничения. Во-первых, ограничение длин звеньев на условие существования кривошипа. Кривошипом называется звено механизма, совершающее вращение вокруг неподвижной оси на полный оборот  $360^\circ$ . Согласно теореме Грасгофа, в механизме шарнирного четырехзвенника (рис. 14) с неравными звеньями  $l_1 < l_2 < l_3 < l_4$  наименьшее звено  $l_1$  будет кривошипом, если сумма длин наименьшего и наибольшего звеньев будет меньше суммы длин двух других звеньев, т.е. если

$$l_1 + l_4 < l_2 + l_3. \quad (17)$$

Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 15) звено 2 будет кривошипом при условии, если  $l_2 < l - e$ . (18)

Другое ограничение - на угол давления  $\psi$ , который не должен превосходить предельно допускаемого наибольшего значения  $[\psi^*]$ , или же на угол передачи  $\mu$ , который должен быть больше наименьшего допускаемого значения  $[\mu]$ .

$$\psi \leq [\psi^*] \text{ или } \mu \geq [\mu]. \quad (19)$$

Углы  $\psi$  (или  $\mu$ ) характеризуют передачу сил в механизмах. Угол давления  $\psi$  — это угол между направлением движущей силы  $F$  со стороны присоединенного звена и направлением скорости  $\vec{V}$  точки выходного звена. А угол передачи  $\mu$  — это угол между направлениями абсолютной  $\vec{V}$  и относительной скоростями точки выходного звена. Как видно,  $\psi + \mu = 90^\circ$ . (20)

При больших углах давления  $\psi$  (или при малых углах передачи  $\mu$ ) резко ухудшается передача сил в механизме и возможно заклинивание. Поэтому для исключения заклинивания и обеспечения лучшей передачи сил размеры механизма должны быть такими, чтобы в процессе работы в любом положении механизма выполнялось бы условие (19). В механизме шарнирного четырехзвенника (рис. 14) при входном кривошине АВ определяется угол давления  $\psi$  (или угол передачи  $\mu$ ) между шатуном ВС и выходным коромыслом в точке С. Из треугольника BCD по теореме косинусов можно выразить угол передачи

$$\cos \mu = \frac{l_2^2 + l_3^2 - e^2}{2l_2l_3} \quad (21)$$

Так как из  $\Delta ABD$   $e^2 = l_1^2 + l_4^2 - 2l_1l_4 \cos \varphi$ , то, подставляя в (21) и учитывая (20), получаем выражения для расчета  $\psi$  или  $\mu$ .

$$\psi = \arcsin \left( \frac{l_2^2 + l_3^2 - l_1^2 - l_4^2 + 2l_1l_4 \cos \varphi}{2l_2l_3} \right); \quad \mu = \arccos \left( \frac{l_2^2 + l_3^2 - l_1^2 - l_4^2 + 2l_1l_4 \cos \varphi}{2l_2l_3} \right) \quad (22)$$

Из формулы (22) видно, что экстремальные значения углов  $\psi$  (или  $\mu$ ) получаются при  $\varphi_0 = 0$  (или  $\varphi_0 = \pi$ ) и  $\varphi_0 = \pi/2$

$$\mu_{\min} = \arccos \left( \frac{l_2^2 + l_3^2 - l_1^2 - l_4^2 + 2l_1l_4}{2l_2l_3} \right); \quad \mu_{\max} = \arccos \left( \frac{l_2^2 + l_3^2 - l_1^2 - l_4^2}{2l_2l_3} \right) \quad (23)$$

В кривошипно-шатунном механизме (рис. 15) при входном кривошине АВ определяется угол давления  $\psi$  (или угол передачи  $\mu$ ) между шатуном ВС и ползуном в точке С. Из треугольника BCE получается

$$\psi = \arcsin \left( \frac{2s \sin \varphi + e}{l} \right); \quad \mu = \arccos \left( \frac{2s \sin \varphi + e}{l} \right) \quad (24)$$

Наибольшее значение угла  $\psi$  получается в положении механизма, когда  $AB \perp DC$ :

$$\sin \psi_{\max} = \frac{2 + e}{l} \quad (25)$$

В зависимости от требуемых условий работы различают: 1) с и н т е з направляющих механизмов по воспроизведению заданной траектории (например, воспроизведение точкой М механизма шарнирного четырехзвенника на рис.14 заданной траектории  $Y(x)$ ); 2) с и н т е з передаточных механизмов по воспроизведению заданного закона движения выходного звена (например, воспроизведение кривошипно-ползунным механизмом на рис.15 требуемого закона движения ползуна 3  $S_c = f(\varphi)$ ); 3) с и н т е з механизмов по положениям звеньев, когда механизм должен обеспечивать заданные фиксированные положения некоторых его звеньев.

Задача 3 относится к синтезу плоских рычажных механизмов по положениям звеньев и может быть решена или графически, или аналитически. При графическом решении в масштабе производится построение планов положений отдельных звеньев или механизмов, построение точек по координатам, определение центра окружности по трем ее точкам и др. При аналитическом решении используют формулы, описывающие графические построения, в частности, сведения из аналитической геометрии на плоскости. Покажем основные сведения из аналитической геометрии, необходимые для решения задачи. Прямоугольные координаты точки А (рис.16 а), являющиеся проекциями вектора  $\vec{l}_1$ , звена ОА:

$$x_A = l_1 \cos \varphi; \quad y_A = l_1 \sin \varphi. \quad (26)$$

Координаты конечной точки В суммы векторов  $(\vec{l}_1 + \vec{l}_2)$ , когда  $\vec{l}_2$  повернут относительно  $\vec{l}_1$  на угол  $\varphi_{21}$ :

$$\begin{aligned} x_B &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_{21}); \\ y_B &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_{21}). \end{aligned} \quad (27)$$

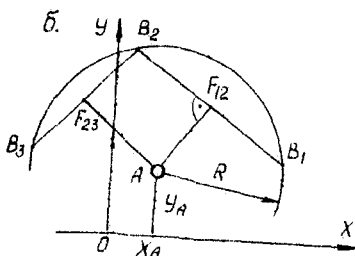
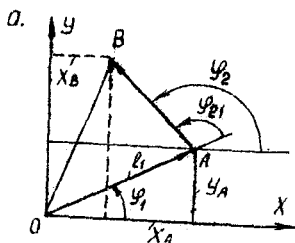


Рис. 16

Длина отрезка  $\ell$  между точками А ( $X_A, Y_A$ ) и В ( $X_B, Y_B$ ):

$$\ell = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \quad (28)$$

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку В ( $X_B, Y_B$ )

$$Y - Y_B = K(X - X_B),$$

где  $K = \operatorname{tg} \varphi_2$  угловой коэффициент прямой.

Рассмотрим по [II] аналитическое определение координат  $X_A, Y_A$  центра А окружности (рис. 10 б), проходящей через три точки с известными координатами  $B_1(X_1, Y_1), B_2(X_2, Y_2), B_3(X_3, Y_3)$ . При этом из средних точек  $F_{12}$  отрезка  $B_1 B_2$  и  $F_{23}$  отрезка  $B_2 B_3$  восстановлены перпендикуляры  $F_{12} A$  и  $F_{23} A$  до пересечения в центре А. Координаты точек  $F_{12}$  и  $F_{23}$ , находящихся посередине отрезков  $B_1 B_2$  и  $B_2 B_3$ :

$$X_{12} = \frac{X_1 + X_2}{2}; \quad Y_{12} = \frac{Y_1 + Y_2}{2}; \quad X_{23} = \frac{X_2 + X_3}{2}; \quad Y_{23} = \frac{Y_2 + Y_3}{2}. \quad (29)$$

Угловые коэффициенты прямых  $B_1 B_2$  и  $B_2 B_3$ :

$$K_{12} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}; \quad K_{23} = \frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2}$$

Угловые коэффициенты  $K'_{12}$  и  $K'_{23}$  прямых  $AF_{12}$  и  $AF_{23}$  находятся из условий перпендикулярности  $AF_{12} \perp B_1 B_2$  и  $AF_{23} \perp B_2 B_3$ , записываемых равенствами  $K'_{12} \cdot K_{12} = -1$  и  $K'_{23} \cdot K_{23} = -1$ . Тогда

$$K'_{12} = \frac{1}{K_{12}} = \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}; \quad K'_{23} = \frac{1}{K_{23}} = -\frac{X_3 - X_2}{Y_3 - Y_2} \quad (30)$$

Уравнения прямых  $AF_{12}$  и  $AF_{23}$ , проходящих через точки  $F_{12}$  и  $F_{23}$  с известными координатами  $X_{12}, Y_{12}$  и  $X_{23}, Y_{23}$  из (29)

$$Y - Y_{12} = K'_{12}(X - X_{12}); \quad Y - Y_{23} = K'_{23}(X - X_{23}). \quad (31)$$

Абсциссу  $X_A$  точки А находят путем приравнивания ординат двух прямых (31) в точке их пересечения

$$Y_{12} + K'_{12}(X_A - X_{12}) = Y_{23} + K'_{23}(X_A - X_{23}),$$

откуда  $X_A = \frac{Y_{12} - Y_{23} - K'_{12}X_{12} + K'_{23}X_{23}}{K'_{23} - K'_{12}}$  (32)

Ордината  $Y_A$  центра А определяется из (31)

$$Y_A = Y_{12} + K'_{12}(X_A - X_{12}) \quad (33)$$

Радиус R окружности согласно (28)

$$R = \sqrt{(X_1 - X_A)^2 + (Y_1 - Y_A)^2} \quad (34)$$

Среди задач синтеза механизмов по положениям звеньев, в свою очередь, можно выделить задачи синтеза по нескольким (двум, трем, четырем) произвольным положениям звеньев и задачи синтеза по двум крайним положениям. В задаче 3 часть схем механизмов должна проектироваться по трем положениям звеньев. В этом случае используются или графические построения, или аналитическое решение по выражениям (26) - (34). Иногда при этом используется метод обращенного движения, когда всему механизму сообщается вращение с угловой ско-

ростью одного из звеньев  $\omega_H$ , но в обратную сторону (рис.17). Тогда это звено получается неподвижным, а остальные звенья будут двигаться с измененными скоростями ( $\omega_i - \omega_H$ ), т.е. поворачиваться на углы ( $\varphi_i - \varphi_H$ ) в относительном движении. При этом задача сводится к нахождению центра окружности, как траектории одной из точек звена в относительном движении.

При синтезе по крайним положениям входное звено является кривошипом, а выходное звено совершает возвратное движение. Если  $\mu$  и  $m$  (или мертвым) называются такие два положения механизма, в которых выходное звено может двигаться только в одном направлении (т.е. выходное звено в крайних положениях как бы мгновенно останавливается). В механизме шарнирного четырехзвенника (рис.18) и в кривошипно-ползуном механизме (рис.19) крайние положения характерны тем, что кривошип  $AB$  и шатун  $BC$  при этом располагаются по одной прямой. В дальнем крайнем положении  $AB_1C_1$  точка  $C$  выходного звена наиболее удалена от центра  $A$  кривошипа вследствие того, что  $AB$  и  $BC$  вытянуты по одной прямой:

$$AC_1 = l_2 + l_1 \quad (\text{рис.18}); \quad AC_1 = l + z \quad (\text{рис.19}). \quad (35)$$

В ближнем крайнем положении  $AB_2C_2$  точка выходного звена наиболее близка к центру  $A$  вследствие того, что  $BC$  и  $AB$  сложились по одной прямой:

$$AC_2 = l_2 - l_1 \quad (\text{рис.18}); \quad AC_2 = l - z \quad (\text{рис.19}). \quad (36)$$

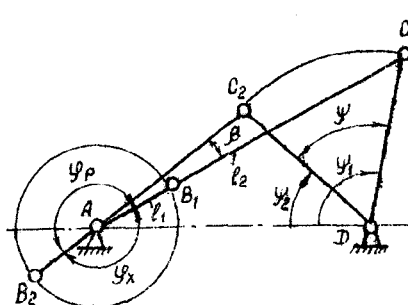


Рис. 18

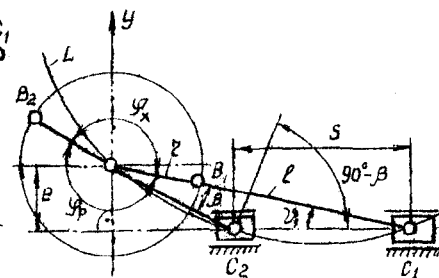


Рис. 19

При переходе из одного крайнего положения в другое выходное звено перемещается при этом на конечную величину хода, или углового  $\psi$  (рис.18), или линейного  $S$  (рис.19). Кривошип АВ при этом поворачивается на разные углы: угол прямого (или рабочего) хода  $\varphi_p$  и угол обратного (или холостого) хода  $\varphi_x$ . Угол  $\beta$  между совпадающими положениями шатуна и кривошипа при крайних положениях механизма называется углом перекрытия. Как видно из рис.18, 19, углы  $\varphi_p$  и  $\varphi_x$  выражаются через угол перекрытия  $\beta$ .

$$\varphi_p = 180^\circ - \beta, \quad \varphi_x = 180^\circ - \beta, \quad \varphi_p + \varphi_x = 360^\circ \quad (37)$$

Отношение средних скоростей выходного звена за время его движения в обратном (холостом) и прямом (рабочем) направлениях называют коэффициентом изменения средней скорости выходного звена

$$K = \frac{V_x}{V_p} = \frac{\omega_x}{\omega_p} = \frac{\varphi_p}{\varphi_x} = \frac{180^\circ + \beta}{180^\circ - \beta} \quad (38)$$

В большинстве случаев  $K > 1$ . Из выражения (38) можно определить угол перекрытия  $\beta$  через заданный коэффициент  $K$ :

$$\beta = 180^\circ \frac{K-1}{K+1} \quad (39)$$

4. Последовательность решения задачи: 1). Выбор положения системы координат  $XOY$ , начало которой следует помещать в один из неподвижных шарниров, а одну из осей следует направлять или по оси движения ползуна, или параллельно ей. 2). Построение в масштабе заданных положений звеньев механизма для графического решения. 3). Проведение геометрических построений для графического определения неизвестных размеров. 4). Измерение или определение недостающих размеров механизма из графических построений. 5). Аналитическое определение неизвестных размеров механизма и сопоставление с результатами при графическом решении. 6). Проверка найденных размеров на условие (17,18) существования кривошипа. 7). Определение экстремальных углов давления (или передачи) и проверка ограничений (19) на угол давления или передачи.

Пример 4. Спроектировать схему механизма шарнирного четырехзвенника (рис.17) по трем заданным положениям кривошипа АВ и трем положениям коромысла CD. Положения кривошипа заданы углами  $\varphi_1 = 150^\circ$ ,  $\varphi_2 = 110^\circ$ ,  $\varphi_3 = 70^\circ$ , а положения коромысла - углами  $\psi_1 = 115^\circ$ ,  $\psi_2 = 95^\circ$ ,  $\psi_3 = 80^\circ$ . Длина кривошипа равна  $l_{AB} = 0,05$  м, длина коромысла  $l_{CD} = 0,10$  м. Определить длину шатуна  $l_{BC}$  и длину стойки  $l_{AD}$ .

Решение: 1). Так как на заданной схеме углы  $\varphi$  и  $\psi$  отсчитываются от линии  $AD$ , то ось  $X$  располагаем по  $AD$ , а начало координат помещаем в неподвижный шарнир  $A$ . При заданных условиях, при известных  $l_1$  и  $l_3$ , если считать коромыслом один стержень  $DC$  с известными углами  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ , задача имеет неопределенное решение, поэтому рассматриваем более общий случай, когда коромыслом является треугольник  $DCE$ , для которого известны углы  $\psi$  стержня  $DE$ , а неизвестны длина  $DC$  и угол  $\alpha$  между  $DC$  и  $DE$  (или угол  $\psi_0$  стержня  $DC$  в начальном положении). Задаемся длиной стойки  $l_{AD} = l_4 = 0,15$  м, тогда при заданных осях отсчета  $\varphi$  и  $\psi$  (от оси  $AD$ ) необходимо определить три неизвестных:  $l_2 = l_{BC}$ ;  $l_3 = l_{CD}$  и  $\alpha$  (или  $\psi_0$ ). Тогда при трех заданных положениях звеньев  $l_1 = l_{AB}$  (углами  $\varphi$ ), и  $l_3' = l_{DE}$  (углами  $\psi$ ) задача имеет определенное решение. 2). Строятся графически в масштабе заданные положения звеньев кривошипа  $AB$  под углами  $\varphi_1 = 150^\circ$ ;  $\varphi_2 = 110^\circ$ ;  $\varphi_3 = 70^\circ$ , коромысла  $DE$  под углами  $\psi_1 = 115^\circ$ ;  $\psi_2 = 95^\circ$ ;  $\psi_3 = 80^\circ$  из точек  $A$  и  $D$ , построенных на расстоянии  $AD = 150$  мм. 3). Проводятся геометрические построения для определения неизвестных параметров. Методика построения изложена в [I] на с.560-561 или в [II] на с.110-112. Задача сводится к определению положения шарнира  $C_1$  по заданным условиям. Решение производится методом обращенного движения, путем сообщения всему механизму относительно центра  $D$  угловой скорости  $-\omega_3 = d\psi/dt$ , т.е. равной по величине, но противоположной по направлению угловой скорости  $\omega_3$  звена 3. В результате коромысло  $DCE$  в системе координат  $AXY$  станет неподвижным, занимая положение  $C_1E_1D$ , а вместо него в противоположном направлении будет вращаться стойка  $AD$  с другими звеньями  $AB$  и  $BC$ . Поэтому сначала проворачиваем стойку  $A$  на угол  $(\psi_2 - \psi_1)$  в положение  $A_2'D$  и из точки  $A_2'$  под углом  $\psi_2$  строим обращенное положение кривошипа  $A_2'B_2'$ . Затем поворачиваем стойку на угол  $(\psi_3 - \psi_1)$  в положение  $A_3'D$  и из точки  $A_3'$  под углом  $\psi_3$  строим обращенное положение кривошипа  $A_3'B_3'$ . Полученные точки  $B_1, B_2', B_3'$  удалены от точки  $C_1$  на одинаковое расстояние  $BC$ , поэтому ищем положение неизвестной точки  $C_1$ , как центра окружности проходящей через точки  $B_1, B_2', B_3'$ . Для этого соединяем их прямыми  $B_1B_2'$  и  $B_2'B_3'$  и из средних точек  $F_{12}$  и  $F_{23}$  этих прямых восстанавливаем перпендикуляры до пересечения в точке. 4). Измеряются из чертежа с учетом масштаба построения искомые параметры:  $l_2 = l_{BC} = 23$  мм;  $l_3 = l_{CD} = 113$  мм;  $\alpha = 39^\circ$ .



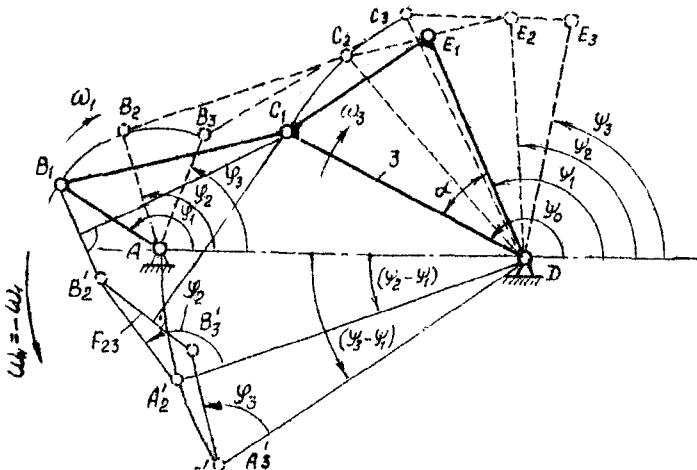


Рис. 17

5). Определяем неизвестные параметры аналитически, т.к. при графическом построении могут получиться значительные погрешности. Для этого методами аналитической геометрии (см. выражения 26-34 в данном пособии) рассчитываем координаты и параметры вышеприведенного графического построения. Координаты точки  $B_1$ :

$$X_1 = l_1 \cos \psi_1 = 50 \cdot \cos 150^\circ = -43,3 \text{ мм};$$

$$Y_1 = l_1 \sin \psi_1 = 50 \cdot \sin 150^\circ = 25,0 \text{ мм}.$$

Координаты точек  $B'_2$  и  $B'_3$  представляем как проекции цепи в виде суммы векторов  $\vec{e}_4 = \vec{e}_{AB}$ ,  $\vec{e}'_2 = \vec{e}_{DB'2}$  и  $\vec{e}'_3 = \vec{e}_{A'B'3}$  на координатные оси X и Y.

$$\begin{aligned} X_2 &= l_4 + l_4 \cos [180^\circ + (\psi_1 - \psi_2)] + l_1 \cos [\psi_2 + (\psi_1 - \psi_2)] = \\ &= 150 (1 + \cos 200^\circ) + 50 \cdot \cos 130^\circ = -23,09 \text{ мм}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= l_4 \sin [180^\circ + (\psi_1 - \psi_2)] + l_1 \sin [\psi_2 + (\psi_1 - \psi_2)] = \\ &= 150 \sin 200^\circ + 50 \sin 130^\circ = -13,0 \text{ мм}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3 &= l_4 + l_4 \cos [180^\circ + (\psi_1 - \psi_3)] + l_1 \cos [\psi_3 + (\psi_1 - \psi_3)] = \\ &= 150 (1 + \cos 215^\circ) + 50 \cdot \cos 105^\circ = 14,19 \text{ мм}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= l_4 \sin [180^\circ + (\psi_1 - \psi_3)] + l_1 \sin [\psi_3 + (\psi_1 - \psi_3)] = \\ &= 150 \sin 215^\circ + 50 \sin 105^\circ = -37,74 \text{ мм}. \end{aligned}$$

По формулам (29) определяем координаты средних точек  $F_{12}$  и  $F_{23}$  прямых  $B_1B_2'$  и  $B_2'B_3$

$$X_{12} = \frac{-43,3 - 23,09}{2} = -33,19 \text{ мм}; \quad Y_{12} = \frac{25,0 - 13,0}{2} = 6,0 \text{ мм};$$

$$X_{23} = \frac{-23,09 + 14,19}{2} = -4,45 \text{ мм}; \quad Y_{23} = \frac{-13,0 - 37,74}{2} = -25,37 \text{ мм}.$$

Угловые коэффициенты  $K_{12}$  и  $K_{23}$  прямых  $S_1F_{12}$  и  $S_1F_{23}$ , перпендикулярных к  $B_1'B_2'$  и  $B_2'B_3$  по формулам (30):

$$K_{12} = -\frac{-23,09 + 43,3}{-13,0 - 25,0} = 0,5318; \quad K_{23} = -\frac{14,19 - 23,09}{-37,74 + 13,0} = 1,5069$$

Абсцисса точки  $S_1$  пересечения прямых  $F_{12}S_1$  и  $F_{23}S_1$  по формуле (32)

$$X_{S_1} = \frac{6,0 - 25,37 - 0,5318(-33,19) + 1,5069 \cdot (-4,45)}{1,5069 - 0,5318} = 43,39 \text{ мм}.$$

Ордината точки  $S_1$  точки пересечения прямых по формуле (33)

$$Y_{S_1} = 6,0 + 0,5318(43,39 + 33,19) = 46,72 \text{ мм}.$$

Длина шатуна  $BC$  как радиуса окружности, проходящей через точки  $B_1$ ,  $B_2'$ ,  $B_3$  по формуле (34)

$$l_2 = l_{BC} = \sqrt{(X_1 - X_{S_1})^2 + (Y_1 - Y_{S_1})^2} = \sqrt{(-43,3 - 43,39)^2 + (25 - 46,72)^2} = 89,37 \text{ мм}.$$

Длина коромысла  $CD$  как отрезка, соединяющего точку  $C$  с шарниром  $D$  по формуле (28)

$$l_3 = l_{CD} = \sqrt{(X_D - X_{S_1})^2 + (Y_D - Y_{S_1})^2} = \sqrt{(150 - 43,39)^2 + (0 - 46,72)^2} = 116,40 \text{ мм}.$$

Угловая координата  $\psi_0$  коромысла  $S_1D$  в начальном I-м положении:

$$\psi_0 = \arctg \left( \frac{Y_D - Y_{S_1}}{X_D - X_{S_1}} \right) = \arctg \left( \frac{0 - 46,72}{150 - 43,39} \right) = 156,33.$$

Или постоянный угол  $\alpha$  между стержнями  $CD$  и  $ED$  коромысла 3.

$$\alpha = \psi_0 - \psi_1 = 156,33 - 115,0 = 41,33.$$

Сравнивая полученные результаты аналитического решения с полученными ранее результатами графического решения ( $l_2 = 93$  мм,  $l_3 = 113$  мм,  $\alpha = 39^\circ$ ), видим их достаточное расхождение. За окончательные следует принять результаты аналитического решения:

$$l_2 = 89,37 \text{ мм}, \quad l_3 = 116,4 \text{ мм}, \quad \alpha = 41,33.$$

6). Проверяем размеры четырехзвенного шарнирного механизма на условие (17) существования кривошипа. Располагаем длины звеньев в порядке их возрастания:

$$l_1 = 50 < l_2 = 89,37 < l_3 = 116,4 < l_4 = 150.$$

Сопоставляем суммы длин наименьшего  $l_1$  и наибольшего  $l_4$  звеньев с суммами длин двух других звеньев  $l_2$  и  $l_3$ :

$$l_1 + l_4 = 50 + 150 = 200 < l_2 + l_3 = 89,37 + 116,4 = 205,77.$$

Так как условие Грасгофа выполняется, то наименьшее звено сможет совершать вращение на полный оборот и будет являться кривошипом.

7). Определяем экстремальные углы передачи  $\mathcal{M}$ . Минимальные углы из формул (22), (23) при  $\varphi = 0$  или  $\varphi = 180^\circ$ :

$$\mu'_{\min} = \alpha \cos \alpha \left| \frac{\ell_2^2 + \ell_3^2 - \ell_1^2 - 2\ell_1\ell_4}{2\ell_2\ell_3} \right| = \alpha \cos \alpha \left| \frac{89,37^2 + 116,4^2 - 50^2 - 150^2 + 2 \cdot 50 \cdot 150}{2 \cdot 89,37 \cdot 116,4} \right| = 56^\circ, 3$$

при  $\varphi = 0$

$$\mu''_{\min} = \alpha \cos \alpha \left| \frac{\ell_2^2 + \ell_3^2 - \ell_1^2 - 2\ell_1\ell_4}{2\ell_2\ell_3} \right| = \alpha \cos \alpha \left| \frac{89,37^2 + 116,4^2 - 50^2 - 150^2 - 2 \cdot 50 \cdot 150}{2 \cdot 89,37 \cdot 116,4} \right| = 27^\circ, 4$$

при  $\varphi = 180^\circ$

Проверяем минимальный угол передачи на условие (19) заклинивания, взяв рекомендуемый в литературе [11] допустимый угол передачи для рычажных механизмов с вращательными кинематическими парами  $[\mu] = 30^\circ - 45^\circ$ . Сравнивая  $[\mu]$  с  $\mu_{\min}$ , можно заключить, что при  $\varphi = 180^\circ$  ( $\mu''_{\min} = 27^\circ, 4$ ) возможно заклинивание механизма. Для ликвидации этого нежелательного явления следовало бы или изменить выбираемую длину стойки  $\ell_{AB}$  и провести повторный синтез, добиваясь выполнения условия, чтобы  $\mu_{\min} \geq [\mu]$ , или изменить исходные данные.

Максимальный угол передачи по формуле (23) при  $\varphi = \pi/2 = 90^\circ$

$$\mu_{\max} = \alpha \cos \alpha \left| \frac{\ell_2^2 + \ell_3^2 - \ell_1^2 - \ell_4^2}{2\ell_2\ell_3} \right| = \alpha \cos \alpha \left| \frac{89,37^2 + 116,4^2 - 50^2 - 150^2}{2 \cdot 89,37 \cdot 116,4} \right| = 80^\circ, 4$$

При графическом решении нужно построить в масштабе положения механизма при  $\varphi = 0^\circ$ ;  $\varphi = 90^\circ$ ;  $\varphi = 180^\circ$ ;  $\varphi = 270^\circ$  и измерить из чертежа углы  $\mu_{\min}$  и  $\mu_{\max}$  (рис. 14).

**Пример 5.** Определить размеры  $z = \ell_{AB}$  и  $\ell = \ell_{BC}$  кривошипно-ползунного механизма (рис. 19) по заданному коэффициенту изменения средней скорости ползуна  $K = 1,15$ , ходу ползуна  $S = 75$  мм и смещению направляющей ползуна  $e = 28$  мм.

**Решение:** 1). Выбираем систему координат  $XOY$ , направляя ось  $X$  по оси направляющей ползуна. 2). Строим в масштабе по оси  $X$  точки  $C_1$  и  $C_2$  на заданном расстоянии  $S = 75$  мм. Вверху над осью  $X$  проводим горизонтальную прямую на расстоянии  $e = 28$  мм. Эта прямая является геометрическим местом возможных центров  $A$ . 3). Методика графического решения изложена в [1] на с. 565 или в [11] на с. 126 и основана на том, что ходу  $S$  соответствует угол  $\beta$ . По заданному коэффициенту  $K$  определяется угол перекрытия  $\beta$ , используя формулу (39)

$$\beta = 180^\circ \frac{K-1}{K+1} = 180^\circ \frac{1,15-1}{1,15+1} = 15^\circ, 1.$$

В точке  $C_1$  восстанавливается к  $C_1C_2$  перпендикуляр  $C_1N$ . Через точку  $C_2$  проводится прямая под углом  $90^\circ - \beta$ . Пересечение

этой прямой с перпендикуляром происходит в точке  $N$ , одной из точек окружности, вмещающей угол  $\beta$ . Через точки  $C_1, C_2, N$  проводим окружность  $L$  (центр ее находится посредине  $C_2N$ ). Центр вращения  $A$  кривошипа  $AB$  может располагаться в любой точке этой окружности. Точка пересечения окружности  $L$  с горизонтальной прямой, проведенной на расстоянии  $\rho$ , дает центр  $A$ . 4). Соединяем точку  $A$  с  $C_2$  и  $C_1$  и измеряем отрезки  $AC_1$  и  $AC_2$ . На основании выражений (35) и (36) определяем длины  $\rho$  кривошипа и  $l$  шатуна, складывая и вычитая  $AC_1$  и  $AC_2$

$$\rho = \rho_{AB} = \frac{AC_1 - AC_2}{2} = \frac{130 - 58}{2} = 36 \text{ мм};$$

$$l = \rho_{BC} = \frac{AC_1 + AC_2}{2} = \frac{130 + 58}{2} = 94 \text{ мм}.$$

5). Аналитическое решение можно вести методами аналитической геометрии, записывая аналитически проведенные графические построения с использованием выражений (26)-(34). В данном случае более простое решение получается из рассмотрения треугольников крайних положений. Из  $\Delta AC_2D$  (рис. 19) можно выразить синус угла

$$\sin \nu_2 = \frac{AD}{AC_2} = \frac{\rho}{l - \rho}$$

Из  $\Delta AC_2C_1$  по теореме синусов имеем:

$$\frac{C_2C_1}{AC_2} = \frac{\sin \beta}{\sin(180^\circ - \nu_2)} = \frac{\sin \beta}{\sin \nu_2}.$$

Так как  $C_2C_1 = S$ , а  $AC_2 = l - \rho$ , то, подставляя с учетом выражения  $\sin \nu_2$ , имеем:

$$\frac{S}{l - \rho} = \frac{\sin \beta (l - \rho)}{\rho}.$$

Откуда получим:

$$\rho^2 - \rho l = \frac{S \rho}{\sin \beta}. \quad (40)$$

По теореме косинусов из  $\Delta AC_2C_1$  имеем:

$$C_2C_1^2 = AC_1^2 + AC_2^2 - 2AC_1 AC_2 \cos \beta$$

Учитывая, что  $C_2C_1 = S$ ;  $AC_1 = l + \rho$ ;  $AC_2 = l - \rho$ , получим  $S^2 = (l + \rho)^2 + (l - \rho)^2 - 2(l + \rho)(l - \rho) \cos \beta$ .

Отсюда после преобразований получаем:

$$S^2 = 2(l + \rho)^2 - 2(l^2 - \rho^2) \cos \beta$$

Подставим вместо  $(l^2 - \rho^2)$  выражение (40) и, проведя преобразования, будем иметь:

$$\rho^2 + \rho l = \frac{S^2}{4} + S \rho \frac{\cos \beta}{\sin \beta}. \quad (41)$$

Решаем систему уравнений (40) и (41) с двумя неизвестными и складывая (40) и (41), получим:

$$2\ell^2 = \frac{S^2}{4} + \frac{Se}{\sin\beta} \cos\beta + \frac{Se}{\sin\beta}, \text{ откуда } \ell = \sqrt{\frac{S^2}{4} + \frac{Se(\cos\beta + 1)}{2\sin\beta}}. \quad (42)$$

Вычитая (40) и (41), получим:

$$z = \sqrt{\frac{S^2}{4} + \frac{Se(\cos\beta - 1)}{2\sin\beta}} \quad (43)$$

Подставляем цифровые данные в (43) и (42) и определяем  $z$  и  $\ell$ :

$$z = \sqrt{\frac{75^2}{4} + \frac{75 \cdot 28}{2} \cdot \frac{(\cos 15^\circ - 1)}{\sin 15^\circ}} = 35,6 \text{ мм},$$

$$\ell = \sqrt{\frac{75^2}{4} + \frac{75 \cdot 28}{2} \cdot \frac{(\cos 15^\circ + 1)}{\sin 15^\circ}} = 96,6 \text{ мм}.$$

Сравнивая полученные результаты с результатами графического решения ( $z = 36$  мм,  $\ell = 94$  мм), можно отметить их полное совпадение.

6). Проверяем полученные размеры механизма на условие (16) существование кривошипа:

$$z = 35,6 < \ell - e = 96,6 - 28 = 68,6.$$

Необходимое неравенство выполняется, следовательно звено  $z = \ell_{AB}$  может вращаться на полный оборот и будет кривошипом. 7). Определяем

максимальный угол давления  $\nu$  между шатуном и ползуном. Согласно (25), при  $AB \perp DC$  будет максимальный угол  $\nu_{max}$

$$\nu_{max} = \arcsin\left(\frac{z+e}{\ell}\right) = \arcsin\left(\frac{35,6+28}{96,6}\right) = 41^\circ.$$

Сравнивая полученное значение  $\nu_{max}$  с предельно допустимым  $[\nu] = 30^\circ + 45^\circ$ , можно заключить, что необходимое ограничение (19) на угол давления примерно выполняется, поэтому при таких размерах  $z$ ,  $\ell$  и  $e$  механизм будет работоспособен.

6. Особенности решения различных вариантов задач. В а р и - а н т 0. Методика решения изложена в примере 4. Длина стойки  $\ell_{AD}$  задана. В а р и а н т 1. Задача синтеза по двум крайним положениям. Так как  $K = I$ , то  $\beta = 0$ , точки  $C_1$  и  $C_2$  на одной прямой. При графическом решении после построения в масштабе коромысла  $CD$  под углом  $\psi'_3$  и  $\psi''_3$  нужно соединить  $C_2$  с  $C_1$  и продолжить прямую  $C_2C_1$  до пересечения с горизонтальной прямой  $DA$  в точке  $A$ . Замерить  $AC$  и  $AS$ , затем по выражениям (35,36) определить  $\ell_1 = \ell_{AB}$  и  $\ell_2 = \ell_{BC}$ . При аналитическом решении рассмотреть треугольники  $ADC_1$  и  $ADC_2$  крайних положений с общим углом  $CAD$ . В а р и а н т 2. Методика решения аналогична примеру 4. Нужно применять метод обращенного движения. Графическое решение показано в [I] на с.562-563, в [II] на с.123-125, в [I2] на с.316-317. При обращенном движении

определяется точка  $B_1$  стержня  $AB$  кривошипа, как центр окружности, проходящей через точки  $C_1, C'_2, C'_3$ . В а р и а н т 3. Задача синтеза по двум крайним положениям. Методика синтеза изложена в примере 5. В а р и а н т 4. При графическом решении задачи синтеза по крайним положениям строятся в масштабе положения коромысла  $CD$  и стойки  $AD$ . Соединяя  $A$  с  $C_1$  и  $C_2$ , измеряют  $AC_1$  и  $AC_2$ , а затем из выражений (35,36) определяют искомые  $l_1 = l_{AB}$  и  $l_2 = l_{BC}$ . При аналитическом решении нужно рассмотреть треугольники крайних положений  $AC_1D$  и  $AC_2D$ . В а р и а н т 5. Задача синтеза по двум крайним положениям. Из выражения (39) определяется угол перекрытия  $\beta$ . При графическом решении строятся в масштабе  $M_r$  стойка  $AD$  и коромысло  $DC_1$  под углом  $\varphi'_1$ . Соединив  $C_1$  с  $A$ , нужно от прямой  $AC_1$  провести прямую из точки  $A$  под углом  $\beta$  до пересечения в точке  $C_2$  с дугой окружности радиуса  $DC$  (рис. 18). При аналитическом решении рассматриваются два треугольника  $DC_2A, DC_1A$  крайних положений и вычисляются  $AC_1$  и  $AC_2$ , используя которые определяют из (35), (36) размеры  $l_{AB}$  и  $l_{BC}$ . В а р и а н т 6. Задача синтеза по двум крайним положениям. Методика решения изложена в [2] на с. 166-168. В а р и а н т 7. Задача синтеза по двум крайним положениям, которые в кулисной части механизма  $ABC$  соответствуют случаю, когда ось кулисы  $BC$  касается окружности радиуса  $AB$ , т.е.  $AB \perp BC$ . Рассчитав по заданному  $K$  угол  $\beta$  (см. выражение (39)), из треугольника  $AB_1C$  или  $AB_2C$  крайних положений выразить  $l_{AC}$  через  $l_{AB}$ . Далее из треугольников крайних положений  $CD_1E, CD_2E$  выразить угол  $\angle D_1ED_2$  и из выражения хода  $H = (l_{CD} + l_{DE}) - (l_{CD} \cos \frac{\beta}{2} + l_{DE} \cos \frac{\beta}{2})$  определить  $l_{CD}, l_{DE}$ . Затем из выражения габарита  $L = l_{AB} + l_{AC} + l_{CD} + l_{DE}$  подставив  $l_{AC}$  через  $l_{AB}$ , определить  $l_{AB}$ . В а р и а н т 8. Решение аналогично варианту 4. По найденным  $l_{AB}$  и  $l_{BC}$  из крайних положений (углы  $\varphi'_1$  и  $\varphi'_2$ ) рассчитать экстремальные углы  $M$  и сравнить с заданными. В а р и а н т 9. Задача синтеза по крайним положениям. При графическом решении построить в масштабе из выбранной точки  $A$  точку  $D$  по  $X, Y$ , затем коромысло  $DC$  под углом  $\varphi_0$ , отложить  $L$ . Соединив  $C_2$  и  $B_2$  в правом крайнем положении, измерить  $l_{C_2E}$ . Отложить  $H$  из точки  $E_1$  радиусом  $CE$  на дуге радиуса  $DC$  сделать засечку и получить точку  $C_1$ . Соединив  $C_2$  и  $C_1$  с  $A$  измерить  $AC_1$  и  $AC_2$ , определить по формулам (35) и (36) длины  $AB$  и  $BC$ . При аналитическом решении размеры определяются из треугольников крайних положений.

## 2. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2

Контрольная работа состоит из трех задач по вопросам динамического анализа и синтеза механизмов. Здесь изучение движения механизмов проводится с учетом сил, вызывающих это движение и возникающих при этом динамических нагрузок. Для решения задач необходимо изучение разделов динамики механизмов.

### 2.1. Задача I. Уравновешивание плоского механизма

1. Заданы схемы рычажных плоских механизмов, размеры звеньев, их массы и положения центров масс, отдельные параметры (массы или координаты центров масс) противовесов (корректирующих масс). Необходимо определить недостающие параметры противовесов или параметры массово-геометрических характеристик звеньев механизма из условия полного или частичного статического уравновешивания сил инерции плоского рычажного механизма.

2. Для решения этой задачи следует изучить вопросы темы II "Уравновешивание сил и масс в механизмах" раздела 2 рабочей программы курса "Теория механизмов и машин" на с.6 Всесоюзных "Методических указаний". Материал к изучению по этим вопросам указан по теме I6 "Уравновешивание механизмов" на страницах рекомендуемых [1, 2, 3] учебников и учебных пособий (с.125 "Методических указаний" /17/1

В других учебных пособиях наиболее близкие вопросы изложены на следующих страницах: 87-91 [4], 448-453, 477-483 [5], 563-571 [7], 399-415 [8], 344-356 [9], 450-460 [10], 422-436 в [11], 201-215 в [12], 331-344 в [13], 399-414 в [14], 199-202 [15]. Следует решить экзаменационные задачи 200, 201, 205 в [4].

3. Для освоения методики решения задачи покажем особенности вопросов уравновешивания механизмов. При движении механизма возникают силы инерции звеньев, переменные по величине и направлению, действующие через реакции в кинематических парах на корпус (стойку) машины. Эти динамические воздействия вызывают колебания корпуса, несущих конструкций здания, шум, снижают надежность машины.

Одним из путей снижения колебаний (вибраций) машин является уменьшение сил инерции звеньев, достигаемое уравновешиванием масс механизма. Известно, что любая система сил (сил инерции) приводится

к главному вектору  $\vec{F}_U = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i \vec{a}_{Si}$  и главному моменту  $\vec{M}_U$ . Для полного уравновешивания сил инерции плоского механизма (рис.20) необходимо, чтобы проекции векторов  $\vec{F}_U$  и  $\vec{M}_U$  относительно координатных осей  $OXYZ$  равнялись нулю. Из теории уравновешивания механизмов /1/ следует, что для полного уравновешивания масс плоского механизма необходимо: 1) общий центр масс подвижных звеньев должен быть неподвижным  $x_s = const$ ,  $y_s = const$ ; 2) центробежные моменты инерции всех звеньев механизма относительно плоскостей  $OXZ$ ,  $OYZ$  должны быть постоянными по величине  $J_{xz} = const$ ,  $J_{yz} = const$ .

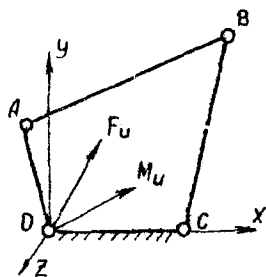


Рис.20

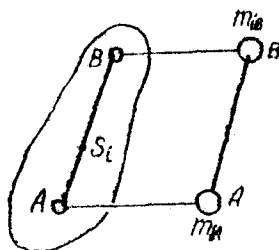


Рис.21

Выполнение первого условия  $\{x_s = const, y_s = const\}$  называется статическим уравновешиванием, выполнение только второго условия называется моментным уравновешиванием [12], а выполнение обоих условий – динамическим уравновешиванием. В практике машиностроения обычно ограничиваются статическим уравновешиванием, т.к. динамическое уравновешивание требует значительного усложнения схемы механизма. Решение задачи статического уравновешивания производится или методом заменяющих масс, или методом векторов главных точек. Рассмотрим метод заменяющих масс.

Пусть тело АВ массой  $m_i$  совершает плоское движение (рис.21). Известно, что тело АВ обладает массой  $m_i$ , сосредоточенной в его центре масс  $S_i$ . Предположим, что масса  $m_i$  тела распределена по точкам А и В, при этом надо выполнить два условия:

- а)  $m_{iA} + m_{iB} = m_i$ ;
- б)  $m_{iA} \cdot \vec{r}_{Asi} = m_{iB} \cdot \vec{r}_{Bsi}$ .



Первое уравнение означает, что масса тела равна сумме заменяющих масс  $\{m_{iA}, m_{iB}\}$ , второе условие - что центр  $S'_i$  заменяющих масс находится в том же месте, что и центр масс  $S_i$  исходного тела. А отсюда следует, что главный вектор сил инерции заменяющих масс  $\{m_{iA}, m_{iB}\}$  будет равен главному вектору. Однако главный момент сил инерции заменяющих масс не равен главному моменту сил инерции данного тела АВ. При статическом уравнивании замена звена двумя сосредоточенными массами является вполне корректной.

Рассмотрим статическое уравнивание по методу заменяющих масс на примерах шарнирного четырехзвенника и кривошипно-ползунного механизмов.

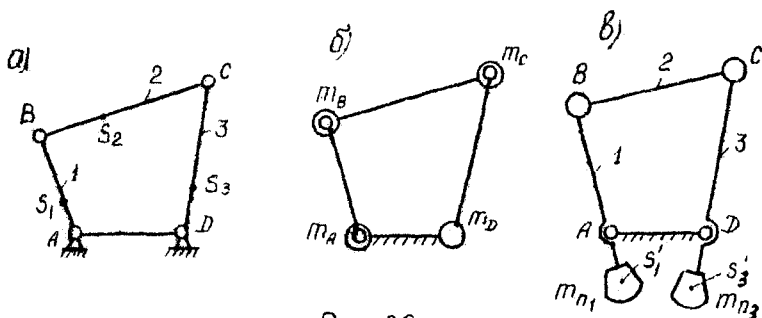


Рис. 22

На рис. 22 изображен механизм шарнирного четырехзвенника, массы звеньев которого сосредоточены в центрах масс  $S_1, S_2$  и  $S_3$ . Заменим каждое звено двумя сосредоточенными массами;

а) кривошипа в точках А и В  $\{m_{1A} = m_1 \frac{\rho_{AS_1}}{\rho_{AB}}, m_{1B} = m_1 \frac{\rho_{BS_1}}{\rho_{AB}}\}$ ;

б) шатуна в точках В и С  $\{m_{2B} = m_2 \frac{\rho_{CS_2}}{\rho_{BC}}, m_{2C} = m_2 \frac{\rho_{BS_2}}{\rho_{BC}}\}$ ;

в) коромысла по точкам С и D  $\{m_{3C} = m_3 \frac{\rho_{DS_3}}{\rho_{CD}}, m_{3D} = m_3 \frac{\rho_{CS_3}}{\rho_{CD}}\}$ .

Тогда массы сосредоточены: в точке А  $\rightarrow m_A = m_{1A}$ , в точке В  $\rightarrow m_B = m_{1B} + m_{2B}$ , в точке С  $\rightarrow m_C = m_{2C} + m_{3C}$  и в точке D  $\rightarrow m_D = m_{3D}$  (рис. 22, б). Массы  $m_A$  и  $m_D$  сил инерции не создают, поэтому уравнивание производится только масс  $m_B$  и  $m_C$ , которые совершают вращательное движение вокруг неподвижных точек А и D. Для уравнивания сил инерции этих масс достаточно на звеньях I и 3 расположить противовесы (корректирующие массы)  $m_{N1}, m_{N3}$  с таким расчетом, чтобы

центры масс кривошипа I и коромысло 3 были в точках A и D (рис. 22 в). Для этого необходимо выполнить условие

$$m_B \ell_{AB} = m_{n1} \ell_{AS'_1}; \quad m_3 \ell_{CD} = m_{n3} \ell_{DS'_3}. \quad (44)$$

Из условия (44), например, задавшись положением центров масс противовесов, определяем массы противовесов

$$m_{n1} = m_B \frac{\ell_{AB}}{\ell_{AS'_1}}; \quad m_{n3} = m_3 \frac{\ell_{DC}}{\ell_{DS'_3}}.$$

Возможны и другие варианты решения этой задачи [1]. На рис. 23 а изображена схема кривошипно-ползунного механизма с указанными центрами масс. Массы кривошипа и шатуна статически разнесем соответственно по точкам A, B и B, C, тогда

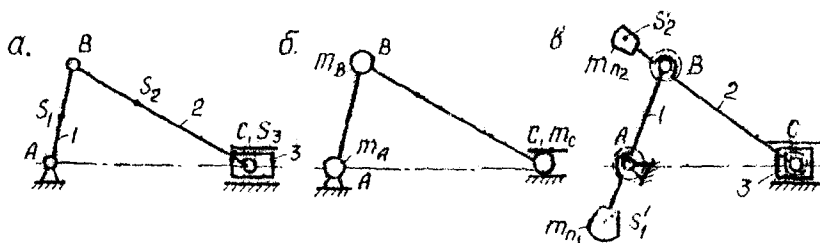


Рис. 23

$$m_{1A} = m_1 \frac{\ell_{BS_1}}{\ell_{AB}}; \quad m_{1B} = m_1 \frac{\ell_{AS_1}}{\ell_{AB}}, \quad m_{2B} = m_2 \frac{\ell_{CS_2}}{\ell_{BC}}, \quad m_{2C} = \frac{\ell_{BS_2}}{\ell_{BC}}.$$

На рис. 23 б указаны заменяющие массы в точке A  $\rightarrow m_A = m_{1A}$ , в точке B  $\rightarrow m_B = m_{1B} + m_{2B}$  и в точке C  $\rightarrow m_C = m_{2C} + m_3$ . Для полного статического уравновешивания необходимо, чтобы обций центр масс был неподвижен, а это возможно при совмещении его с центром вращения кривошипа A. Для этого на продолжении шатуна установим противовес  $m_{n2}$ , удовлетворяющий условию

$$m_{n2} \ell_{BS'_2} = m_C \ell_{BC}$$

из которого, например, задавшись массой  $m_{n2}$ , определяем положение его центра масс  $\ell_{BS'_2}$ . Установкой противовеса массой  $m_{n2}$  на шатуне осуществляется перенос центра масс звеньев 2 и 3 в точку B. Для уравновешивания массы  $m_B$  и масс  $m_{n2}, m_C$  достаточно на продолжении кривошипа установить противовес  $m_{n1}$ , удовлетворяющий условию

$$m_{n1} \ell_{AS'_1} = (m_B + m_{n2} + m_C) \ell_{AB}$$

из которого определяется при заданном, например, положении центра масс  $\ell_{AS_1}$  противовеса его масса  $m_{n_1}$ . Схема размещения противовесов изображена на рис.23 в. Установка противовеса  $m_{n_2}$  на шатуне 2 сильно удлинит его, а вместе с тем увеличивает и габариты всего механизма. Поэтому такое решение конструктивно неудачно и в инженерной практике редко применяется. Обычно уравнивание осуществляется одним противовесом, размещаемым на кривошипе I. Но в этом случае уравнивание будет не полным, а частичным, и в зависимости от массы противовеса будет уравновешена первая гармоника силы инерции в горизонтальном или вертикальном направлениях. Полной статической уравновешенности можно достичь и без размещения противовесов, если спроектировать так называемый самоуравновешенный многозвенный механизм, содержащий одинаковые структурные группы [ I ].

4. Последовательность решения задачи: 1) ознакомление с условием задачи и исходными данными; 2) для звеньев, совершающих вращательное и плоское движения (кривошип, коромысло, шатун), произвести разнесения масс по двум точкам; 3) ввести необходимые противовесы (корректирующие массы) и, объединяя их с заменяющими массами, добиться того, чтобы было достигнуто полное или частичное уравнивание сил инерции; 4) записать необходимые условия равенства нулю статических моментов и произвести вычисления требуемых условий задачи параметров противовесов; 5) дать оценку полученным результатам.

5. Пример 6. Определить массу противовеса  $m_{n_1}$ , который нужно установить на кривошипе I кривошипно-ползунного механизма (рис.24 а), чтобы уравновесить первую гармонику вертикальной составляющей главного вектора инерции. Размеры механизма:  $\ell_{AB} = 0,10$  м,  $\ell_{BC} = 0,45$  м, массы звеньев  $m_1 = 1$  кг,  $m_2 = 1,5$  кг,  $m_3 = 0,8$  кг, координаты центров масс  $S_1$  и  $S_2$  звеньев  $\ell_{AS_1} = 0,04$  м,  $\ell_{BS_2} = 0,15$  м, координата противовеса  $\ell_{AS'} = 0,20$  м.

Решение: 1). В данном случае требуется осуществить частичное уравнивание вертикальной составляющей сил инерции. 2). Массы звеньев  $m_1$  и  $m_2$  заменяем статически сосредоточенными массами в точках А, В и С:

$$m_{1A} = m_1 \frac{\ell_{BS_1}}{\ell_{AB}} = 1 \frac{0,1 - 0,04}{0,1} = 0,6 \text{ кг}; \quad m_{1B} = m_1 \frac{\ell_{AS_1}}{\ell_{AB}} = 1 \frac{0,04}{0,1} = 0,40 \text{ кг};$$

$$m_{2B} = m_2 \frac{l_{CS_2}}{l_{BC}} = 1,5 \cdot \frac{0,45 - 0,15}{0,45} = 1,0 \text{ кг}; \quad m_{2C} = m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} = 1,5 \cdot \frac{0,15}{0,45} = 0,5 \text{ кг}$$

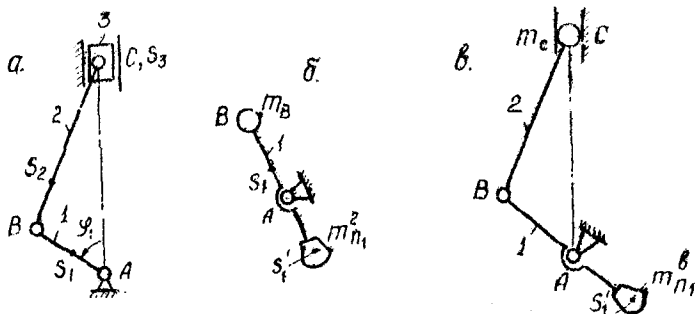


Рис. 24

Тогда в точке А будет сосредоточена масса  $m_A = m_{1A}$ , в точке В масса  $m_B = m_{1B} + m_{2B}$ , в точке С масса  $m_C = m_{2C} + m_3$ . Неподвижная масса  $m_A$  не создает сил инерции, масса  $m_B$  создает центробежную силу инерции и может быть полностью уравновешена противовесом  $m_{п1}^2$  на продолжении кривошипа (рис. 24 б). Масса  $m_C$  движется поступательно в вертикальном направлении и создает силу инерции  $\vec{F}_{uc} = -m_C \vec{a}_c$ . Первая гармоника этой силы инерции

$$F'_{uc} = m_C \omega_1^2 l_{AB} \cos \varphi_1,$$

где  $\varphi_1$  — угол поворота кривошипа.

3). Вводим противовес  $m_{п1}^в$  на кривошипе с центром в точке  $S_1'$  (рис. 24 в). Вертикальная составляющая силы инерции противовеса  $m_{п1}^в$

$$F_{u1}^в = m_{п1}^в \omega_1^2 l_{AS_1'} \cos \varphi_1.$$

Для уравновешивания первой гармоники вертикальной силы инерции нужно добиться равенства  $F'_{uc} \approx -F_{u1}^в$ , т.е.

$$m_C \omega_1^2 l_{AB} \cos \varphi_1 = -m_{п1}^в \omega_1^2 l_{AS_1'} \cos \varphi_1.$$

4). Из последнего равенства получаем необходимое равенство статических моментов масс

$$m_C l_{AB} = -m_{п1}^в l_{AS_1'}$$

Отсюда определяем массу противовеса  $m_{п1}^в$ , уравновешивающего вер-

тикальную составляющую силу инерции механизма

$$m_{n1}^B = -m_c \frac{l_{AB}}{l_{AS'}} = -(m_{2c} + m_3) \frac{l_{AB}}{l_{AS'}} = -(0,50 + 0,80) \frac{0,10}{-0,2} = 0,65 \text{ кг.}$$

Равенство статических моментов масс  $m_B$  и  $m_{n1}^2$ :

$$m_B l_{AB} = -m_{n1}^2 l_{AS'}$$

Отсюда определяем массу противовеса  $m_{n1}^1$ , уравновешивающего вращающиеся массы:

$$m_{n1}^2 = -m_B \frac{l_{AB}}{l_{AS'}} = -(m_{1B} + m_{2B}) \frac{l_{AB}}{l_{AS'}} = -(0,40 + 1,0) \frac{0,10}{(-0,20)} = 0,70 \text{ кг}$$

Масса противовеса на кривошипе

$$m_{n1} = m_{n1}^1 + m_{n1}^2 = 0,65 + 0,70 = 1,35 \text{ кг.}$$

5). Выводы: а). Противовесом  $m_{n1}$  на продолжении кривошипа АВ можно уравновесить силы инерции вращающейся массы  $m_B$  и первую гармонику силы инерции поступательной вертикальной массы  $m_c$ ; б). Горизонтальная составляющая силы инерции противовеса  $F_{un1}^2 = m_{n1}^2 \omega_1^2 l_{AS'} \sin \varphi_1$  остается неуравновешенной и будет воздействовать на корпус механизма; в). Гармоники 2-го и более высоких порядков силы инерции  $m_c$  остаются неуравновешенными.

Пример 7. Определить массы противовесов  $m_{n1}$ ,  $m_{n5}$  и положение центра масс коромысла 3 шестизвенного рычажного механизма при полном статическом уравновешивании (рис.25). Известны: размеры звеньев  $l_{AB} = 0,10$  м;  $l_{BC} = 0,30$  м;  $l_{CD} = 0,25$  м;  $l_{DE} = 0,2$  м;  $l_{EF} = 0,3$  м;  $l_{FG} = 0,3$  м, положения центров масс звеньев ( $l_{AS_1} = 0,05$  м;  $l_{FS_4} = 0,15$  м;  $l_{GS_5} = 0,10$  м) и противовесов ( $l_{AS'_1} = -0,10$  м;  $l_{GS'_5} = -0,2$  м), массы звеньев  $m_1 = 4$  кг;  $m_2 = 3$  кг;  $m_3 = 3$  кг;  $m_4 = 2$  кг;  $m_5 = 2$  кг.

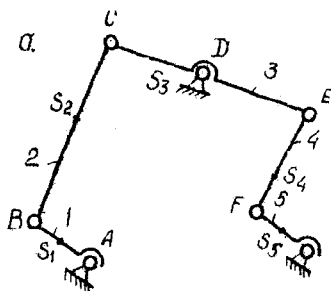


Рис. 25

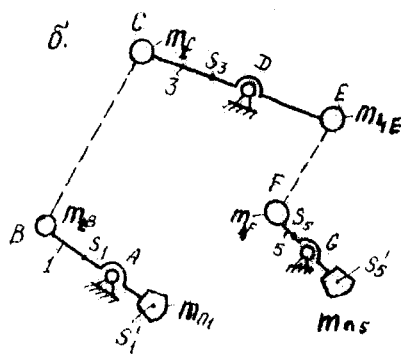


Рис. 26

Решение. 1). Это задача о полном статическом уравнивании главного вектора сил инерции механизма.

2). Используем метод заменяющих масс. Массы шатунов 2 и 4 заменим соответствующими массами в точках В, С и Е, F:

$$m_{2B} = m_2 \frac{\ell_{CS_2}}{\ell_{BC}} = 3 \frac{0,30 - 0,10}{0,3} = 2 \text{ кг}; \quad m_{2C} = m_2 \frac{\ell_{BS_2}}{\ell_{BC}} = 3 \frac{0,1}{0,3} = 1 \text{ кг};$$

$$m_{4E} = m_4 \frac{\ell_{FS_4}}{\ell_{EF}} = 2 \frac{0,15}{0,30} = 1 \text{ кг}; \quad m_{4F} = m_4 \frac{\ell_{ES_4}}{\ell_{EF}} = 2 \frac{0,30 - 0,15}{0,30} = 1 \text{ кг}.$$

Массы вращающихся звеньев I и 3 с целью упрощения задачи не будем заменять.

3). С учетом указанных противовесов  $m_{n1}$  и  $m_{n5}$  имеем систему вращающихся масс:  $m_{2B}$ ,  $m_1$ ,  $m_{n1}$  относительно неподвижной точки А (рис.26);  $m_{2C}$ ,  $m_3$ ,  $m_{4E}$  относительно точки D;  $m_{4E}$ ,  $m_5$ ,  $m_{n5}$  относительно точки G.

4). Составляем уравнение статических моментов вращающихся масс звена I относительно точки А:

$$m_{n1} \ell_{AS_1} + m_1 \ell_{AS_1} + m_{2B} \ell_{AB} = 0.$$

Отсюда определяем массу противовеса  $m_{n1}$ :

$$m_{n1} = \frac{m_1 \ell_{AS_1} + m_{2B} \ell_{AB}}{-\ell_{AS_1}} = \frac{40,05 + 20,10}{-(-0,10)} = 4 \text{ кг}.$$

Составляем уравнение статического равновесия вращающихся масс звена 3 относительно точки D:

$$m_{2C} \ell_{DS_3} + m_3 \ell_{DS_3} + m_{4E} \ell_{DE} = 0.$$

Отсюда определяем необходимое положение центра масс коромысла 3

$$\ell_{DS_3} = \frac{m_{4E} \ell_{DE} + m_{2C} \ell_{DC}}{m_3} = \frac{1(-0,2) + 10,25}{0,25} = 0,2 \text{ м}.$$

Равенство статических моментов масс коромысла 5 относительно точки G

$$m_{4E} \ell_{EG} + m_5 \ell_{GS_5} + m_{n5} \ell_{GS_5} = 0.$$

Масса противовеса

$$m_{n5} = \frac{m_{4E} \ell_{EG} + m_5 \ell_{GS_5}}{-\ell_{GS_5}} = \frac{10,3 + 20,1}{-(-0,2)} = 2,5 \text{ кг}.$$

б). Выводы: 1 - Установка противовесов  $m_{n1}$ ,  $m_{n5}$  и рассчитанное положение центра масс  $\ell_{DS3}$  коромысла 3 позволяет обеспечить полное статическое уравнивание механизма, т.е. главный вектор сил инерции  $\vec{F}_U = 0$ . 2 - Момент сил инерции  $\vec{M}_U$  остается неуравновешенным.

б. Особенности решения вариантов задачи 2. Вариант 0. Механизм шарнирного четырехзвенника. Массы звеньев 1, 2 и 3 разнести соответственно по точкам А и В, В и С, С и Д. Массу конуса  $m_K$  учитывать в точке  $S_2$  звена 2. Вариант 1. Заменить массы звеньев  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  соответствующими массами в точках А и В, В и С, С и Д. При решении методом замещающих масс обеспечивается неподвижность общего центра масс подвижных звеньев на линии  $AD$ . Вариант 2. Два одинаковых кривошипно-ползунных механизма, у которых равны размеры, массы и положения центров масс звеньев 1 и 1', 2 и 2', 3 и 3'. Решение для каждого механизма аналогично примеру 6. В условии задачи на с. 32-33 [17] имеются опечатки. Должно быть: 1) "Массу  $m$  следует найти из условия уравнивания горизонтальной составляющей главного вектора сил инерции". 2) "Первая гармоника силы инерции  $P_U^1$  от массы  $m_C$ , размещенной в точке С, определяется по формуле  $P_U^1 = m_C \ell_{AB} \omega^2 \cos \varphi$ ". Вариант 3. Массы звеньев  $m_1$  и  $m_2$  разнести соответственно по точкам А и В, В и С,  $m_3$  сосредоточена в точке С. Масса противовеса  $m_{n2}$  определится из равенства статических моментов масс звеньев 3 и 2 с  $m_{n2}$  относительно точки В, а  $m_{n1}$  - из равенства статических моментов масс звена 1 с  $m_{n1}$ , относительно А, причем  $m_B = m_2 + m_3 + m_{n2}$ . Частично можно использовать пример 7. Вариант 4. Решение аналогично примеру 7. Целесообразно использовать распределение масс только шатунов 2 и 4. Вариант 5. Сммотри пример 7. Для упрощения решения достаточно статически разнести по точкам В и С только массу шатуна 2. Вариант 6. В условии задачи в литературе [17] имеются опечатки на с. 42. Должно быть: Первая гармоника силы инерции  $P_U^1$  от массы  $m_C$ , размещенной в точке С, определяется по формуле  $P_U^1 = m_C \omega^2 \ell_{AB} \cos \varphi$ . Для решения можно частично использовать пример 6. Масса  $m_C = m_3 + m_{2C}$ . Из равенства моментов сил  $P_U^1$  на плече  $L_1$  и сил инерции противовесов  $P_{U1} = m_{n1} \omega^2 \ell_{DC} \cos \varphi$  на плече  $L_2$  можно определить массу противовеса  $m_{n1}$ . В данной схеме уравниваются частично вектор сил инерции и момент сил инерции (1-я гармоника) в вертикальной плоскости. Остаются неуравновешен-

ными 2-я и более высокие гармоники момента сил инерции в вертикальной плоскости. Вариант 7. Для полного статического уравновешивания ( $\bar{P}_U = 0$ ) нужно общий центр масс механизма совместить с неподвижной точкой А. Для этого массу звена 2 определить из равенства статических моментов масс  $m_2$  и  $m_3$  относительно точки В. Затем массу звена 1 определить из равенства статических моментов масс  $m_1$  и  $m_8 = m_2 + m_3$  относительно точки А. Вариант 6. На рис. 4.7 с. 26 [16] печатка: вместо кинематической пары А, соединяющей звенья 2 и 3, должна быть пара С. Решение аналогично примеру 7. Массы  $m_2$  и  $m_4$  шатунов 2 и 4 разнести соответственно по точкам В и С, С и Е. Вариант 9. Так как центр масс механизма должен совпадать с точкой А, то можно не производить размещения масс звеньев по точкам, а использовать равенства статических моментов масс звеньев. Сначала составить равенство статических моментов масс звена 3 относительно точки С:  $m_3 l_{CS3} = 0$ . Отсюда  $l_{CS3} = 0$ , т.е.  $m_3$  должна совпадать с точкой С. Далее решение аналогично варианту 7.

## 2.2. Задача 2. Исследование движения механизма или машины под действием приложенных сил

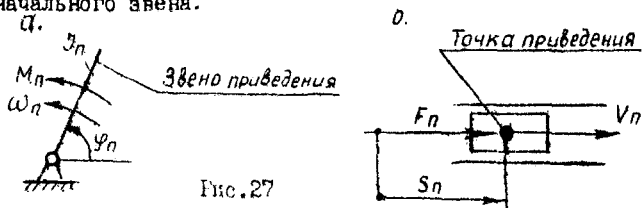
1. В данной задаче рассматривается определение закона движения звена приведения машины под действием заданных сил при известных размерах, массах и моментах инерции звеньев. При этом необходимо установить зависимости скорости или перемещения звена приведения от времени.

2. Для решения задачи необходимо изучить вопросы "Динамического анализа движения механизмов" по теме 3 на с. 6 "Методических указаний" [17]. Материал к этим вопросам указан по темам 8, 9 на страницах рекомендуемых учебников и учебных пособий [1, 2, 3], приведенных на с. 124 "Методических указаний". В других учебных пособиях наиболее близкий материал изложен на следующих страницах: 124-126, 131-153 в [4]; 386-416 в [5]; 334-359 в [6]; 224-235 в [7]; 450-459, 486-495 в [8]; 409-416 в [10]; 441-481 в [11]; 139-179 в [12]; 288-312 в [13]; 441-454, 458-468 в [14]. Необходимо разобраться в решении примера 69 в [13] на с. 311-312.

3. Рассмотрим некоторые теоретические положения, относящиеся к рассматриваемой задаче. Чтобы упростить решение задач динамики, машинный агрегат заменяется динамической моделью (расчетной схемой) рис. 27. При составлении такой модели все силы и моменты сил, при-



ложенныя к звеньям, приводят к одному звену (звену приведения) или к одной точке и заменяют приведенным моментом сил  $M_n$  или приведенной силой  $F_n$ . Массы всех звеньев также приводят к звену приведения и заменяют приведенным моментом инерции  $J_n$  или приведенной массой  $m_n$ . В качестве звена приведения обычно используется начальное звено исполнительного механизма. Приведение сил выполняется из условия равенства мощностей (или элементарных работ), а приведение масс — из условия равенства кинетических энергий. Это обеспечивает совпадение закона движения звена приведения с законом движения реального начального звена.



Дифференциальное уравнение движения звена приведения в общем случае имеет вид:

$$J_n \frac{d\omega_n}{dt} + \frac{\omega_n^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi_n} = M_n \quad (45)$$

или

$$m_n \frac{dv_n}{dt} + \frac{v_n^2}{2} \frac{dm_n}{ds_n} = F_n,$$

причем  $M_n = M_n^a - M_n^c$ ,  $F_n = F_n^a - F_n^c$ ,

где  $M_n^a$  и  $M_n^c$  — соответственно приведенный момент движущих сил и приведенный момент сил сопротивления (обычно эти две категории сил приводят раздельно). Аналогичный смысл имеют и приведенные силы  $F_n^a$  и  $F_n^c$ .

Во всех задачах  $J_n = const$  или  $m_n = const$ , так как передаточные функции (отношения) являются постоянными. Поэтому дифференциальные уравнения упрощаются:

$$J_n \cdot \frac{d\omega_n}{dt} = M_n^a - M_n^c; \quad m_n \cdot \frac{dv_n}{dt} = F_n^a - F_n^c. \quad (46)$$

В машинах обычно различают три режима (фазы) движения: 1) разбег (разгон); 2) установившееся движение; 3) выбег (торможение).

При разгоне, который характеризуется возрастанием скорости звена приведения,  $M_n^d > M_n^c$ . Установившееся движение характеризуется тем, что в общем случае скорость звена приведения является периодической функцией времени. При равномерном установившемся движении  $M_n^d = M_n^c$  (имеется в виду случай, когда  $J_n = \text{const}$  или  $m_n = \text{const}$ ). При торможении, которое характеризуется уменьшением скорости звена приведения,  $M_n^d = 0$  (движущие силы отключаются) или  $M_n^d < M_n^c$ .

Путем интегрирования составленного дифференциального уравнения определяются зависимости скорости и перемещения звена приведения от времени. Рекомендуется все необходимые уравнения решать сначала в буквенных выражениях, а затем в полученные формулы и уравнения общего вида подставить численные значения в соответствии с выполняемым вариантом.

4. Общая методика решения второй задачи включает в себя следующие этапы: 1) приведение сил и масс к звену приведения; 2) составление дифференциального уравнения движения звена приведения для заданного режима; 3) интегрирование дифференциального уравнения и получение необходимых зависимостей; 4) расчет искомых параметров движения машины; 5) построение графиков, характеризующих закон движения звена приведения (брать не менее 5-ти точек на каждый режим движения).

Все числовые расчеты следует выполнять только в системе единиц СИ. Необходимо обратить внимание на то, что в ряде заданий исходные данные следует привести к одинаковым единицам измерений, исходя из того, что

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}; \quad 1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}; \quad 1 \text{ кН}\cdot\text{м} = 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$1 \text{ МН}\cdot\text{м}/\text{с}^2 = 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{с}^2; \quad 1 \text{ МН} = 10^6 \text{ Н}; \quad 1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2.$$

5. Пример 8. Электродвигатель 1 через редуктор 2 приводит в движение технологическую машину 3 (рис. 28). Движущий момент электродвигателя определяется зависимостью  $M_d = a - b\omega_1$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные коэффициенты;  $\omega_1$  — угловая скорость ротора электродвигателя. Моменту сил сопротивления на валу технологической машины  $M_c = p + q\omega_3^2$ , где  $p$  и  $q$  — постоянные коэффициенты;  $\omega_3$  — угловая скорость вала технологической машины. Моменты инерции: ротора электродвигателя —  $J_1$ ; подвижных звеньев машины —  $J_3$  (приведенный к ее валу); зубчатых колес редуктора —

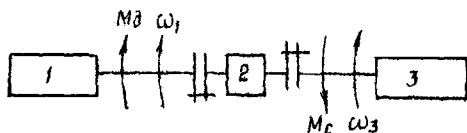


Рис. 28

$J_2$  (приведенный к его входному валу). Передаточное отношение между валом электродвигателя и валом технологической машины —  $U_{13}$  (передаточное отношение редуктора). Оп-

ределить зависимость угловой скорости вала электродвигателя от времени  $\omega_1(t)$  при разбеге и выбеге, а также угловую скорость установившегося движения и время выбега при исходных данных:

$$\alpha = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad \beta = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}; \quad \rho = 3 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad q = 0,0003 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2;$$

$$J_1 = 0,1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \quad J_2 = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \quad J_3 = 10 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \quad U_{13} = 5.$$

Решение. 1). Принимая в качестве звена приведения вал электродвигателя, определяем приведенные моменты сил. Приведенный движущий момент

$$M_n^d = M_d = \alpha - \beta\omega_1, \quad (47)$$

Приведенный момент сил сопротивления  $M_n^c$  находится из условия равенства мощностей  $M_n^c \omega_1 = M_c \omega_3$

$$M_n^c = M_c \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{M_c}{U_{13}} = \frac{\dot{\rho} + q \left(\frac{\omega_1}{U_{13}}\right)^2}{U_{13}} = \frac{\rho}{U_{13}} + \frac{q}{U_{13}^3} \omega_1^2.$$

Вводя обозначения  $m = \rho/U_{13}$  и  $n = q/U_{13}^3$ , имеем

$$M_n^c = m + n\omega_1^2. \quad (46)$$

Приведенный момент инерции  $J_n$  находим из условия равенства кинетических энергий

$$\frac{J_n \omega_1^2}{2} = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_2 \omega_1^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2},$$

откуда

$$J_n = J_1 + J_2 + \frac{J_3}{U_{13}^2}.$$

2). В соответствии с (46) составляем дифференциальное уравнение движения звена приведения при разбеге машинного агрегата:

$$M_n^d - M_n^c = J_n \frac{d\omega_1}{dt}.$$

$$\alpha - \beta\omega_1 - m - n\omega_1^2 = J_n \frac{d\omega_1}{dt},$$

откуда после разделения переменных

$$\int_0^t dt = -J_n \int_0^{\omega_1} \frac{d\omega_1}{n\omega_1^2 + \beta\omega_1 + (m-\alpha)}. \quad (49)$$

Если принять  $\eta = A$ ,  $\beta = B$ ;  $m-\alpha = C$ , то в случае, когда  $D = B^2 - 4AC > 0$ , интеграл в правой части уравнения (49) приводится к следующему табличному интегралу (без произвольной постоянной):

$$\int \frac{d\omega_1}{A\omega_1^2 + B\omega_1 + C} = \frac{1}{\sqrt{D}} \rho_n \left| \frac{2A\omega_1 + B - \sqrt{D}}{2A\omega_1 + B + \sqrt{D}} \right|.$$

Следовательно, после подстановки пределов интегрирования из выражения (49) получим:

$$t = -\frac{J_n}{\sqrt{D}} \rho_n \left| \frac{(2A\omega_1 + B - \sqrt{D})(B + \sqrt{D})}{(2A\omega_1 + B + \sqrt{D})(B - \sqrt{D})} \right|, \quad (50)$$

откуда получается зависимость  $\omega_1(t)$  в неявном виде:

$$\frac{(2A\omega_1 + B - \sqrt{D})(B + \sqrt{D})}{(2A\omega_1 + B + \sqrt{D})(B - \sqrt{D})} = e^{-\frac{t\sqrt{D}}{J_n}}. \quad (51)$$

Угловую скорость установившегося движения  $\omega_{1y}$  найдем из выражения (51) предельным переходом: при  $t \rightarrow \infty$  ( $\omega = \omega_{1y}$ ). В результате

$$\omega_{1y} = \frac{\sqrt{D} - B}{2A}. \quad (52)$$

Это же выражение для  $\omega_{1y}$  можно получить из условия, что  $M_n^y = M_n^c$ , т.е. приравняв правые части уравнений (47) и (48).

При выбеге (торможении)  $M_B = 0$ . Следовательно, дифференциальное уравнение движения принимает вид:  $-M_n^c = J_n \frac{d\omega_1}{dt}$ ;

$$-m - n\omega_1^2 = J_n \frac{d\omega_1}{dt}. \quad (53)$$

Интегрируя уравнение (53), получим:

$$\int_0^t dt = -J_n \int_{\omega_{1y}}^{\omega_1} \frac{d\omega_1}{m + n\omega_1^2}. \quad (54)$$

Интеграл в правой части выражения (54) приводится к табличному и имеет вид (без произвольной постоянной):

$$\int \frac{d\omega_1}{A^2 + \omega_1^2} = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{A},$$

где  $A = \sqrt{\frac{m}{n}}$ . Следовательно, после подстановки пределов

интегрирования из выражения (54) получим :

$$t = -\frac{J_n \cdot \Pi}{\sqrt{m \Pi}} \left( \operatorname{arctg} \frac{\Pi \omega_1}{\sqrt{m \Pi}} - \operatorname{arctg} \frac{\Pi \omega_{1y}}{\sqrt{m \Pi}} \right). \quad (55)$$

Подставляя числовые данные в формулу (52), получим величину угловой скорости установившегося движения  $\omega_{1y} = 198,9$  рад/с. Придавая  $\omega_1$  ряд последовательных значений от  $\omega_1 = 0$  до  $\omega_1 = \omega_{1y}$ , из выражения (50) находим соответствующие значения времени  $t$  при разбеге. Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1.

$\omega_1$ , рад/с	0	30	60	90	120	150	180	198,9
$t$ , с	0	0,16	0,36	0,60	0,92	1,40	2,34	$\infty$

Время выбега  $t_s$  определяется из выражения (55) при  $\omega_1 = 0$ , в результате получим  $t_s = 271$  с. Придавая  $\omega_1$  ряд последовательных значений от  $\omega_1 = \omega_{1y}$  до  $\omega_1 = 0$ , по формуле (55) рассчитываем соответствующие значения времени  $t$  при выбеге. Результаты расчетов представлены в табл. 2. На основании табл. 1 и 2 построены графики  $\omega_1(t)$  при разбеге (рис. 29 а) и при выбеге (рис. 29 б).

Т а б л и ц а 2

$\omega_1$ , рад/с	198,9	180	150	120	90	60	30	0
$t$ , с	0	18,4	50,8	87,4	128,3	173,3	221,3	271

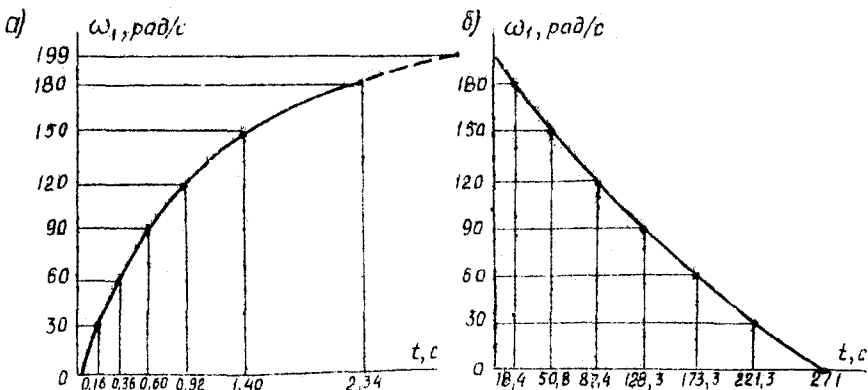


Рис. 29

## 6. Указания к решению вариантов задачи 2

**Вариант 0.** Изменение кинетической энергии равно разности работ движущих сил и сил сопротивления:  $T - T_0 = A_D - A_c$

Так как движение начинается из состояния покоя и силами сопротивления можно пренебречь, то начальная кинетическая энергия

$T_0 = 0$  и работа сил сопротивления  $A_c = 0$ . Учитывая, что

$$T = \frac{mV^2}{2}, \quad A_D = \int_0^s F ds,$$

уравнение движения ползуна в форме уравнения кинетической энергии можно записать в виде

$$\frac{mV^2}{2} = \int_0^s F_0 \left(1 - \frac{s}{S_{max}}\right) ds. \quad (56)$$

Решая уравнение (56), получим зависимость  $V(s)$ . Далее, полагая  $V = ds/dt$  и интегрируя это выражение в пределах от 0 до  $t_c$  и от 0 до  $S_{max}$ , получим начальную величину силы сжатия пружины  $F_0$ , обеспечивающую заданное время срабатывания механизма  $t_c$

**Вариант 1.** При разгоне дифференциальное уравнение (46) движения поршня имеет вид

$$S_n P_n - (S_n - S_w) P_a - F_c = m \frac{dv}{dt}, \quad (57)$$

где  $S_n$  - площадь сечения поршня;  $S_w$  - площадь сечения штока. Так как левая часть уравнения (57) является постоянной величиной, то получим линейную зависимость  $V(t)$ , что соответствует движению с постоянным ускорением.

Интегрируя уравнение  $V = ds/dt$ , получим зависимость  $S(t)$ . Полагая  $S = S_p$ , найдем время разгона  $t_p$ .  
При  $t = t_p$   $V = V_{max}$ .

На участке торможения дифференциальное уравнение движения поршня примет вид

$$S_n P_a - (S_n - S_w) P_M - F_c = m \frac{dv}{dt},$$

откуда получается линейная зависимость  $V(t)$ , при этом  $V$  изменится от  $V_{max}$  до  $V$ , а  $t$  изменится от 0 до  $t_T$ . Далее, интегрируя уравнение  $V = ds/dt$ , получим выражение  $S(t)$  при торможении, причем пределы интегрирования для  $S$  - от  $S_p$  до  $S$ , для  $t$  - от 0 до  $t$ .

Время торможения  $t_T$  получим из выражения  $V(t)$ , полагив  $V = 0$ , а путь торможения  $S_T$  соответствует времени  $t_T$ .

Вариант 2. Приведенный к валу электродвигателя момент инерции  $J_n$  находится из условия равенства кинетических энергий:

$$\frac{J_n \omega^2}{2} = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_M \omega^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2},$$

причем  $\frac{\omega}{\omega_2} = U_{12}$ .

Приведенные моменты сил сопротивления на рабочем ходу ( $M_{np}^e$ ) и холостом ходу ( $M_{nx}^e$ ) определяются из условия равенства мощностей:

$$M_{np}^e \omega = M_p \omega_2; \quad M_{nx}^e \omega = M_x \omega_2.$$

Для рабочего хода дифференциальное уравнение движения (46) вала электродвигателя принимает вид

$$a - b\omega - M_{np}^e = J_n \frac{d\omega}{dt},$$

тогда

$$\int_0^t dt = -J_n \int_{\omega_{max}}^{\omega} \frac{d\omega}{b\omega + M_{np}^e - a},$$

откуда после интегрирования получим в неявном виде зависимость  $\omega(t)$ . Полагая затем  $t = t_p$  и  $\omega = \omega_{min}$ , найдем момент инерции маховика  $J_M$ , обеспечивающий колебания угловой скорости вала двигателя в заданных пределах.

Для холостого хода аналогично имеем

$$a - b\omega - M_{nx}^e = J_n \frac{d\omega}{dt} \quad \text{и} \quad \int_0^t dt = -J_n \int_{\omega_{min}}^{\omega} \frac{d\omega}{b\omega + M_{nx}^e - a},$$

откуда после интегрирования получим в неявном виде зависимость  $\omega(t)$ . Полагая затем  $\omega = \omega_{max}$ , можно найти продолжительность холостого хода  $t_x$ .

Вариант 3. На ведущий вал фрикционной муфты со стороны двигателя действует движущий момент  $M_d$ , а со стороны ведомой части муфты - момент сил сопротивления в виде момента трения  $M_{TP}$ . Поэтому дифференциальное уравнение движения

(45) ведущего вала имеет вид:

$$a - b\omega_1 - M_{TP} = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} \quad \text{или} \quad \int_0^t dt = -J_1 \int_{\omega_{10}}^{\omega_1} \frac{d\omega_1}{b\omega_1 + M_{TP} - a},$$

откуда после интегрирования получим в неявном виде зависимость  $\omega_1(t)$ .

Для ведомого вала муфты момент трения  $M_{TP}$  является движущим, так как он ускоряет его движение. Кроме того, со стороны рабочей машины действует момент сопротивления  $M_c$ . Поэтому дифференциальное уравнение движения ведомого вала записыва-

ются в виде

$$M_{TP} - M_c = J_2 \frac{d\omega_2}{dt} \quad \text{или} \quad \int_0^t dt = \frac{J_2}{M_{TP} - M_c} \int_0^{\omega_2} d\omega_2,$$

откуда определяется линейная зависимость  $\omega_2(t)$ .

Время  $t_c$  полного сцепления ведущего и ведомого валов и общую их скорость  $\omega_{120}$  в момент полного сцепления можно найти графически, построив в одной системе координат графики  $\omega_1(t)$  и  $\omega_2(t)$  и определив точку пересечения этих графиков, или аналитически, приравняв полученные выражения  $\omega_1(t)$  и  $\omega_2(t)$

После полного сцепления валов  $M_{TP} = 0$  и оба вала вращаются как одно целое под действием моментов  $M_D$  и  $M_c$ . Поэтому дифференциальное уравнение движения для этого случая записывается в виде

$$a - b\omega_{12} - M_c = (J_1 + J_2) \frac{d\omega_{12}}{dt} \quad \text{или} \quad \int_{t_c}^t dt = - \frac{\omega_{12}}{\omega_{120} b\omega_{12} + M_c - a},$$

откуда находится зависимость  $\omega_{12}(t)$ .

Скорость установившегося движения  $\omega_{12y}$  найдем, полагая  $M_D = M_c$  или  $t \rightarrow \infty$ .

Вариант 4. Приведенные к валу двигателя момент инерции  $J_D$  и момент сил сопротивления  $M_c$  (от силы тяжести груза  $Q$ ) находятся из соотношений:

$$\frac{J_D \omega_1}{2} = \frac{J_0 \omega_1^2}{2} + \frac{J_0 \omega_1^2}{2} + \frac{m V_{TP}^2}{2}; \quad M_c \omega_1 = Q V_{TP},$$

где  $m = Q/g$  - масса поднимаемого груза;  $V_{TP}$  - скорость подъема груза. Учитывая наличие подвижного блока, следует иметь в виду, что  $V_{TP} = \frac{1}{2} V_D$ , где  $V_D$  - окружная скорость на барабане. Тогда

$$V_{TP} = \frac{\omega_1 D}{4}. \quad (57)$$

Кроме того, необходимо учесть, что  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = U_{12}$

Дифференциальное уравнение движения (46) вала двигателя во время разгона имеет вид

$$I_2 M_c - M_c = J_D \frac{d\omega_1}{dt}.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от 0 до  $t$  и от 0 до  $\omega_1$ , получим зависимость  $\omega_1(t)$ , из которой, полагая  $\omega_1 = \omega_H$ , можно найти время  $t = t_p$  разгона до достижения двигателем номинальной скорости  $\omega_H$ . Учитывая



соотношение (57), на основании зависимости  $\omega_1(t)$  получим линейную зависимость  $V_{гр}(t)$  при разгоне.

Так как при разгоне движение груза является равноускоренным с ускорением  $a_{гр}$ , то зависимость его перемещения  $S$  от времени  $t$  определяется известным выражением

$$S = \frac{a_{гр} t^2}{2}, \quad (58)$$

причем

$$a_{гр} = \frac{V_{гр \max}}{t_p} = \frac{\omega_n D}{4U_{12} t_p}.$$

Полагая в формуле (58)  $t = t_p$ , найдем высоту подъема груза  $S_p$  за время разгона. Тогда, учитывая, что после разгона подъем груза происходит с постоянной скоростью  $V_{гр \max}$ , находим полное время подъема груза на высоту  $h$ :

$$t_n = t_p + \frac{h - S_p}{V_{гр \max}}.$$

Вариант 5. На первом участке ( $0 \leq \omega \leq \omega_{опр}$ ) дифференциальное уравнение движения (46) вала двигателя записывается в виде

$$a_1 + b_1 \omega - M_c = J \frac{d\omega}{dt} \quad \text{или} \quad \int_0^t dt = J \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{b_1 \omega + a_1 - M_c},$$

откуда находится зависимость  $\omega(t)$ . Значения  $\omega_{опр}$ , соответствующее опрокидывающему (максимальному) моменту двигателя, определяется из условия, что  $M_{d1} = M_{d2}$ . Тогда, полагая  $\omega = \omega_{опр}$ , из полученного соотношения  $\omega(t)$  находим время  $t = t_{опр}$ .

Для второго участка ( $\omega > \omega_{опр}$ ) дифференциальное уравнение движения вала имеет вид

$$a_2 - b_2 \omega - M_c = J \frac{d\omega}{dt} \quad \text{или} \quad \int_{t_{опр}}^t dt = J \int_{\omega_{опр}}^{\omega} \frac{d\omega}{-b_2 \omega + a_2 - M_c},$$

откуда после интегрирования находится зависимость  $\omega(t)$ .

Скорость установившегося движения  $\omega_y$  получим, полагая  $M_{d1} = M_c$  или  $t \rightarrow \infty$ .

Вариант 6. Для составления дифференциального уравнения движения груза в форме (46) приводим к нему силы и массы. Из условия равенства мощностей  $F_n^3 V_{гр} = M_g \omega_1$  находим приведенную движущую силу  $F_n^d$ , причем скорость подъема груза

$$V_{гр} = \frac{\omega_2 D}{2} = \frac{\omega_1 D}{2U_{12}}. \quad (59)$$

Приведенная сила сопротивления  $F_n^c = Q$ .

Приведенная масса определяется из условия равенства кине-

тических энергий

$$\frac{m_n V_{rp}^2}{2} = \frac{Q}{g} \frac{V_{rp}^2}{2} + \frac{J_p \omega_1^2}{2} + \frac{J_5 \omega_2^2}{2},$$

в котором следует учесть соотношение (59), а также  $\omega_2 = \frac{\omega_1}{u_p}$ .

В результате дифференциальное уравнение движения груза запишется в виде

$$-AV_{rp} + B = m_n \frac{dV_{rp}}{dt} \quad \text{или} \quad \int_0^t dt = m_n \int_0^{V_{rp}} \frac{dV_{rp}}{B - AV_{rp}}, \quad (60)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные величины. После интегрирования уравнения (60) получим зависимость  $V_{rp}(t)$ .

Учитывая, что  $V_{rp} = ds_{rp}/dt$ , после интегрирования этого выражения найдем зависимость  $s_{rp}(t)$ , из которой, полагая

$s_{rp} = h$ , можно определить время  $t_n$  подъема груза на высоту  $h$ .

Вариант 7. Учитывая, что при выборе  $M_B = 0$ , дифференциальное уравнение движения (46) вала рабочей машины принимает вид

$$-M_T = J \frac{d\omega}{dt} \quad \text{или} \quad -\int_0^t dt = J \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega}, \quad (61)$$

откуда получается зависимость  $\omega(t)$ , из которой при  $\omega = 0$  находим время выбега  $t_g$ . Имея в виду, что  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , путем интегрирования этого уравнения получим зависимость угла поворота вала  $\varphi(t)$ . Полагая  $t = t_g$ , можно определить полный угол поворота вала  $\varphi_g$  за время выбега и соответствующее число оборотов вала  $N = \varphi_g / 2\pi$ .

Зависимость  $\varepsilon(t)$  углового ускорения  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$  от времени определяется из исходного дифференциального уравнения (61). Схема машинц на рис.28.

Вариант 8. Приводим силы и массы к валу исполнительного органа. Из условия равенства мощностей  $M_n^0 \omega_5 = M_B \omega_1$ , находим приведенный движущий момент  $M_n^0$ , при этом следует учесть, что

$$M_B = a_1 - b_1 \omega; \quad \text{и} \quad \omega_1 = \omega_5 u_p,$$

где  $u_p$  — передаточное отношение планетарного редуктора от центрального колеса 2 к водилу  $H$ , которое определяется по формуле Виллиса при заданных числах зубьев колес.

Приведенный момент сил сопротивления

$$M_n^c = M_c = a_2 + b_2 \omega_5^2.$$

При приведении масс необходимо учесть кинетическую энергию четырех спутников, совершающих сложное движение. Исходное условие для определения приведенного момента инерции  $J_n$  имеет вид:

$$\frac{J_n \omega_s^2}{2} = \frac{J_p \omega_1^2}{2} + \frac{J_k \omega_1^2}{2} + \frac{4J_s \omega_1^2}{2} + \frac{4m_c V^2}{2} + \frac{J_{c0} \omega_s^2}{2}, \quad (62)$$

где  $m_c$  - заданная масса спутника;  $V$  - окружная скорость оси спутника относительно стойки

$$V = \frac{m(\bar{z}_2 + \bar{z}_3)}{2} \omega_s,$$

где  $m$  - модуль зубьев зубчатых колес  $\bar{z}_2$  и  $\bar{z}_3$ . Поскольку величина  $m$  не задана, рекомендуется принять ее самостоятельно (например,  $m = 5 \text{ мм} = 0,005 \text{ м}$ ). При определении

$J_n$  из соотношения (62) необходимо учесть, что

$$\frac{\omega_1}{\omega_s} = U_p \text{ и } \frac{\omega_3}{\omega_s} = U_{35} = 1 - U_{34} = 1 - \frac{z_4}{z_3}; \quad U_p = U_{2H} = 1 - U_{24}.$$

После приведения сил и масс дифференциальное уравнение движения (46) вала исполнительного органа может быть представлено в виде:

$$\int_0^t dt = -J_n \int_0^{\omega} \frac{d\omega_s}{A\omega_s^3 + B\omega_s + C}, \quad (63)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  - постоянные величины.

При  $D = B^2 - 4AC > 0$  решение уравнения (63) имеет вид, аналогичный выражению (50) из рассмотренного выше примера. Полученное соотношение в неявном виде выражает зависимость  $\omega_s(t)$ .

Скорость установившегося движения  $\omega_{sy}$  найдем, полагая  $M_n^a = M_n^c$  или  $t \rightarrow \infty$ .

**Вариант 9.** Чтобы учесть массу жидкости  $m_f$  в трубопроводах, приводим ее к поршню. Тогда общая приведенная масса находится из условия равенства кинетических энергий

$$\frac{m_n V^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{\pi V_{TP}^2}{2}, \quad \text{т.е. } m_n = m + m_f \left( \frac{V_{TP}}{V} \right)^2,$$

где  $V$  - скорость поршня;  $V_{TP}$  - скорость жидкости в трубопроводах. Отношение  $V_{TP}/V$  определяется из условия равенства расходов жидкости в гидродвигателе и трубопроводах

$$SV = V_{TP} \cdot f.$$

Дифференциальное уравнение движения (46) поршня может быть представлено в виде

$$F_1 S - p_2 S - F_T = m_n \frac{dv}{dt}. \quad (64)$$

После подстановки заданных зависимостей  $P_1(V)$ ,  $P_2(V)$ ,  $F_T(V)$  в уравнение (64) оно принимает вид:

$$-m_n \frac{dV}{dt} = AV^2 + BV + C, \quad (65)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — постоянные величины. После интегрирования уравнения (65) в пределах от 0 до  $t$  и от 0 до  $V$  при  $D = B^2 - 4AC > 0$ , получим

$$t = -\frac{m_n}{\sqrt{D}} \ln \left| \frac{2AV + B - \sqrt{D}}{2AV + B + \sqrt{D}} \right|_0^V,$$

откуда в неявном виде находится зависимость  $V(t)$ .

Скорость установившегося движения  $V_y$  можно определить, если принять  $F_d = F_c$ , т.е.  $P_1 S = P_2 S + F_T$ , или  $t \rightarrow \infty$ .

Для определения времени разгона поршня  $t_p$  в полученной зависимости  $V(t)$  рекомендуется принять  $V = 0,95 V_y$ , после чего найти  $t = t_p$ .

### 2.3. Задача 3. Анализ колебаний в механизмах и виброзащиты машин

1. Рассматривается динамический анализ колебательного движения в механизмах и машинах с упругими звеньями или связями. Необходимо получить зависимость перемещения исследуемого звена от времени при колебательном движении, а в некоторых случаях рассчитать параметры колебательного движения (амплитуды, силы, коэффициент динамичности) или параметры виброзащитной системы.

2. Для решения задачи необходимо изучить вопросы "Колебания в механизмах", "Защита от вибраций" по темам 9 и 12 на с. 6, 7 Всесоюзных "Методических указаний". Материал к этим вопросам указан по темам 6, 7 на страницах рекомендуемых учебников и учебных пособий /1,2,3/, приведенных на с. 125-126 "Методических указаний". В других учебных пособиях наиболее близкий материал изложен на следующих страницах: - 53 в /17/; 103-124 в /2/; 137-145, 204-205, 211-213 в /3/; 254-255, 261-266, 274-277, 301-307 в /6/; 252-305 в /12/; 149-173, 203-212, 271-281, 303-308 /16/.

3. Для анализа колебательного движения исследуемого звена составляется его динамическая модель в виде твердого тела массой  $m$  (или в виде диска с осевым моментом инерции  $J$ ), соединенной упругой или упругодиссипативной связью со стойкой (или другим звеном) - рис.30.

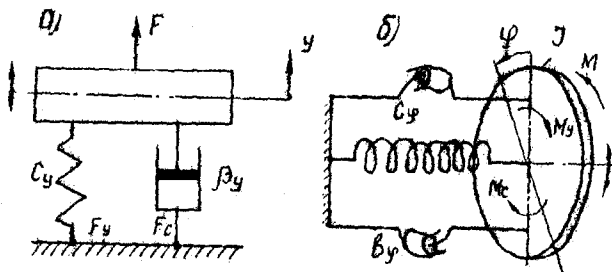


Рис.30

В общем случае дифференциальное уравнение колебательного движения исследуемой массы  $m$  (или диска с  $J$ ) записывается так: при прямолинейном движении

$$m\ddot{y} = \sum F_i = F_{(t)} + F_y + F_c; \quad (66)$$

при вращательном движении (крутильные колебания)

$$J\ddot{\varphi} = \sum M_i = M_{(t)} + M_y + M_c, \quad (67)$$

где  $F_{(t)}$  (или  $M_{(t)}$ ) - внешняя (возбуждающая) сила (или момент);

$F_y$  (или  $M_y$ ) - сила упругости связи (или момент упругости);

$F_c$  (или  $M_c$ ) - сила диссипативного сопротивления (или диссипативный момент).

Сила (или момент) упругого сопротивления пропорциональна линейному перемещению  $y$  (или угловому  $\varphi$ ):

$$F_y = -C_y y; \quad M_y = C_\varphi \varphi, \quad (68)$$

где  $C_y$  - коэффициент линейной жесткости, Н/м;

$C_\varphi$  - коэффициент угловой жесткости, Нм/рад.

Сила (или момент) диссипативного сопротивления пропорциональна скорости перемещения  $\dot{y}$  (или  $\dot{\varphi}$ ) и проявляется чаще всего в механизмах в виде трения в кинематических парах, или силой со-

противления поршня в гидравлическом амортизаторе (демпфере), или силой внутреннего трения в материале упругого звена:

$$F_c = -b_v \dot{y}; \quad M_c = -b_\varphi \dot{\varphi}, \quad (69)$$

где  $b_y$  - коэффициент линейного сопротивления, Н.с/м;  
 $b_\varphi$  - коэффициент углового сопротивления, Н.м.с/рад.

С учетом выражений (68) и (69) уравнение (66) вынужденных колебаний принимает вид:

$$m\ddot{y} + b_v \dot{y} + c_y x = F(t). \quad (70)$$

Разделив все члены уравнения (70) на  $m$ , запишем его в следующем виде:

$$\ddot{y} + 2\nu \dot{y} + \lambda^2 y = f(t), \quad (71)$$

где  $2\nu = \frac{b_v}{m}$ ;  $\lambda^2 = \frac{c_y}{m}$ ;  $f(t) = \frac{F(t)}{m}$ ;

$\nu$  - коэффициент демпфирования;

$\lambda$  - круговая частота собственных колебаний (при  $\nu = 0$ ).

$$\lambda = \sqrt{\frac{c_y}{m}}. \quad (72)$$

Общее решение уравнения (71)  $y = y_1 + y_2$ , где  $y_1$  - решение уравнения без правой части;  $y_2$  - частное решение уравнения, зависящее от  $f(t)$ . Аналитические выражения решений  $y_1$  и  $y_2$  приведены в литературе /2/, /3/, /16/ и в указаниях к задачам 3 Двухтомных "Методических указаний" /17/.

В случае отсутствия внешних сил  $F(t) = 0$ , уравнение (71) превращается в уравнение свободных колебаний (при наличии диссипативного сопротивления)

$$\ddot{y} + 2\nu \dot{y} + \lambda^2 y = 0, \quad (73)$$

решение которого имеет вид:

$$y = e^{-\nu t} (C_1 \sin \kappa t + C_2 \cos \kappa t) + C_3, \quad (74)$$

где  $C_1, C_2, C_3$  - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий при  $t = 0$ ;  $K$  - собственная частота колебаний с учетом демпфирования.

$$K = \sqrt{|\gamma^2 - \lambda^2|} \quad (75)$$

При отсутствии диссипативного сопротивления ( $\beta_y = 0, \gamma = 0$ ) уравнения (71) и (73) получают более простой вид:

$$\ddot{y} + \lambda^2 y = f(t) \quad (76)$$

$$\ddot{y} + \lambda^2 y = Q \quad (77)$$

Для уменьшения вибраций, передаваемых работающей машиной на стойку, между машиной и стойкой (или другим защищаемым объектом) устанавливаются упругие элементы - виброизоляторы специально рассчитанной жесткости. Такой вид виброзащиты, т.е. уменьшения колебаний (вибраций) защищаемого объекта, называется виброизоляцией. Методы расчета и оценки эффективности виброизоляции приведены в следующем примере.

4. Подобная задача задания задачи: 1). Привести технический объект по условию задачи к одномерной динамической модели (рис.30 а или б) с учетом наличия или отсутствия диссипативного сопротивления. 2). Записать дифференциальное уравнение колебаний исследуемого звена 3). Привести уравнение колебаний к безразмерному виду с коэффициентом при старшей производной  $\ddot{y}$ , равным единице. 4). Решить уравнение вынужденных или свободных колебаний с учетом указаний на с.53 в /17/ или указаний к данной задаче. 5). Подставить цифровые данные, рассчитать частоты, амплитуды колебаний, исследуемые перемещения  $y$ , скорости  $\dot{y}$  или ускорения  $\ddot{y}$ , по результатам которых построить необходимые графики (брать не менее 6-ти точек на период  $T = 2\pi/\omega$  (или  $T_k = 2\pi/K$ )) 6). Рассчитать (при необходимости) параметры виброизоляции или колебательного процесса (коэффициент динамичности, декремент затухания, максимальную реакцию и др.).

5. Пример 8. Источником колебаний является машина массой  $M =$

$\approx 400$  кг. Возбуждающая сила направлена вертикально и изменяется по закону  $F = F_0 \sin \omega t$ , где  $F_0 = 5600$  Н;  $\omega = 40$  рад/с, — круговая частота вынужденных колебаний. Для виброзащиты фундамента между ним и машиной установлен виброизолятор, который состоит из упругого элемента с коэффициентом жесткости  $C = 40$  кН/м и амортизатор с коэффициентом вязкого трения  $\delta = 4,8$  кНс/м. В начальном положении система находится в состоянии статического равновесия. Составить и решить дифференциальное уравнение колебательного движения машины, показав графики вибросмещений  $y(t)$ . Определить амплитуду вынужденных колебаний, коэффициент виброизоляции и коэффициент динамичности по перемещениям.

Решение. 1). Динамическая модель, соответствующая поставленной задаче, представляет собой прямолинейно колеблющуюся массу  $m$  и приведена на рис.30 а. 2). Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний массы  $m$  с учетом силы упругости виброизолятора  $F_y = -c \cdot y$ , силы линейного сопротивления амортизатора  $F_c = -\delta \cdot \dot{y}$  и внешней, гармонической изменяющейся силы  $F$  запишется так:

$$m\ddot{y} = F_y + F_c + F$$

или

$$m\ddot{y} = -cy - \delta\dot{y} + F_0 \sin \omega t. \quad (78)$$

3). Приводим уравнение (78) к виду (70) с коэффициентом при старшей производной, равным единице:

$$\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \lambda^2 y = f_0 \sin \omega t, \quad (79)$$

где

$$2\lambda = \frac{\delta}{m}; \quad \lambda^2 = \frac{c}{m}; \quad f_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Рассчитываем: круговую частоту собственных колебаний (при  $\nu = 0$ )

$$\lambda = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{40 \cdot 10^3}{400}} = 10 \text{ рад/с};$$

коэффициент демпфирования

$$\nu = \frac{\delta}{2m} = \frac{4,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 400} = 6 \text{ рад/с};$$



коэффициент силы

$$f_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{5 \cdot 600}{400} = 14 \text{ Н/кг}.$$

4). Общее решение уравнения (79) находим в виде  $y = y_1 + y_2$ .  
При  $\nu < \lambda$  (случай малого сопротивления) решение  $y_1$ , определяющее соответствующие затухающие свободные колебания, имеет вид:

$$y_1 = e^{-\nu t} (C_1 \cos \lambda_* t + C_2 \sin \lambda_* t), \quad (80)$$

где  $\lambda_* = \sqrt{\lambda^2 - \nu^2}$  - круговая частота собственных колебаний с учетом демпфирования;  $C_1$  и  $C_2$ .

Частное решение  $y_2$ , определяющее вынужденные колебания, имеет вид:

$$y_2 = A \sin(\omega t - \mu),$$

где  $A$  - амплитуда вынужденных колебаний;  $\mu$  - сдвиг фаз,

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\nu^2 \omega^2}}; \quad \text{tg } \mu = \frac{2\nu\omega}{\lambda^2 - \omega^2} \quad (0 < \mu < \pi). \quad (81)$$

Тогда зависимость перемещения массы  $m$  от времени получается в виде:

$$y = e^{-\nu t} (C_1 \cos \lambda_* t + C_2 \sin \lambda_* t) + A \sin(\omega t - \mu). \quad (82)$$

5). Подставляем цифровые данные и рассчитываем:

- круговая частота собственных колебаний с учетом демпфирования

$$\lambda_* = \sqrt{\lambda^2 - \nu^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ рад/с};$$

- амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\nu^2 \omega^2}} = \frac{14}{\sqrt{(10^2 - 40^2)^2 + 4 \cdot 6^2 \cdot 40^2}} = 0,00889 \text{ м};$$

- сдвиг фаз

$$\mu = \text{arctg} \left( \frac{2\nu\omega}{\lambda^2 - \omega^2} \right) = \text{arctg} \left( \frac{2 \cdot 6 \cdot 40}{10^2 - 40^2} \right) = 2,83 \text{ рад}.$$

Тогда выражение (82) приобретает вид:

$$y = e^{-6t} (C_1 \cos 8t + C_2 \sin 8t) + 0,00889 \sin(40t - 2,83). \quad (83)$$

Для нахождения  $C_1$  и  $C_2$ , используем начальные условия: при  $t = 0$   $y = 0$  и  $\dot{y} = 0$ . Дифференцируя (83) получим:

$$y = -6e^{-6t}(C_1 \cos 8t + C_2 \sin 8t) + 8e^{-6t}(C_1 \sin 8t + C_2 \cos 8t) + 0,356 \cos(40t - 2,83). \quad (84)$$

Подставляя  $t = 0$  и  $y = 0$  в выражение (83) и  $\dot{y} = 0$ ,  $y = 0$  в выражение (84), получаем систему уравнений для нахождения  $C_1$  и  $C_2$ :

$$0 = C_1 - 0,00889 \sin 2,83.$$

$$0 = -6 C_1 + 8 C_2 + 0,356 \cos 2,83.$$

Отсюда имеем  $C_1 = 0,00273$ ,  $C_2 = 0,0444$ . Тогда уравнение колебаний запишется в следующем виде:

$$y = e^{-6t}(0,00273 \cos 8t + 0,0444 \sin 8t + 0,00889 \sin(40t - 2,83)). \quad (85)$$

Первое слагаемое в правой части выражения (85) представим в виде

$$y_1 = B e^{-\nu t}(\sin \lambda_1 t + \alpha) = 0,0445 e^{-6t}(\sin 8t + 0,0614), \quad (86)$$

где  $B$  и  $\alpha$  - новые постоянные,

$$B = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{(0,00273)^2 + (0,0444)^2} = 0,0445;$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{C_1}{B}\right) = \arcsin\left(\frac{0,00273}{0,0445}\right) = 0,0614.$$

Тогда уравнение колебаний машины окончательно получает вид:

$$y = 0,0445 e^{-6t} \sin(8t + 0,0614) + 0,00889 \sin(40t - 2,83) \text{ [м]} = 44,5 e^{-6t} \sin(8t + 0,0614) + 8,89 \sin(40t - 2,83) \text{ [мм]}. \quad (87)$$

Придавая  $t$  значения от 0 до  $T = 1с$  ( $T > T_1 = 2\pi/\lambda_1 = 2 \cdot 3,1416/8 = 0,785$ ), рассчитываем по формулам (80), (86), (87) значения  $y_2$ ,  $y_1$ ,  $y = y_1 + y_2$ ,  $A_1 = B e^{-6t}$  (табл.3) и строим графики зависимостей  $A(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y(t)$  от времени  $t$  (рис.3I).

Т а б л и ц а 3

$t, с$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$e^{-6t}$	1	0,549	0,301	0,165	0,091	0,050	0,027	0,014	0,0082	0,0045	0,0025
$A_1, мм$	44,5	24,4	13,4	7,4	4,0	2,2	1,2	0,67	0,37	0,20	0,11
$y_1, мм$	2,73	18,5	13,4	4,6	0,48	-1,8	-1,2	-0,4	0,07	0,17	0,10

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$y_2, \text{мм}$	-2,73	8,2	-8,0	2,2	5,0	-8,8	6,5	0,33	-6,9	8,8	-4,5
$y_1, \text{мм}$	0	26,7	5,4	6,8	4,5	-10,6	5,3	-0,07	-6,8	9,0	-4,4

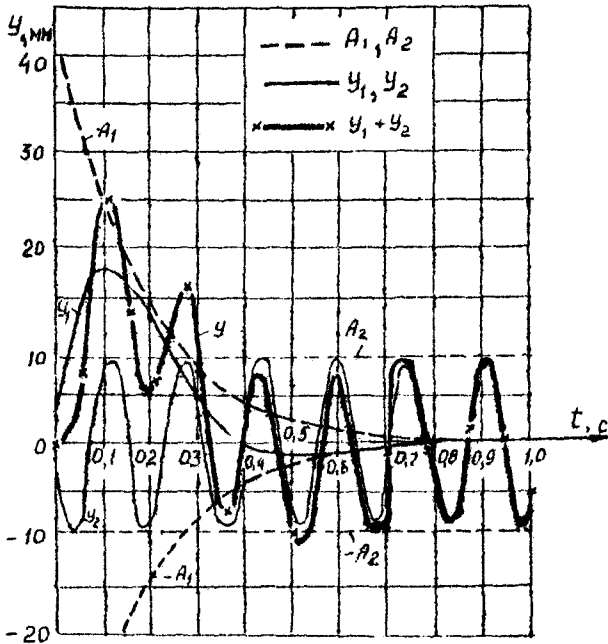


Рис.31

Из рис.31 видно, что амплитуда  $A_1$  собственных колебаний  $y_1$  уменьшается по экспоненте, становясь при  $t \geq t_0$  практически равной нулю. И после  $t > t_0$  суммарные колебания  $y$  машины определяются практически только вынужденными колебаниями  $y_2$ .

б). Качество виброзащитной системы оценивается коэффициентом виброизоляции  $K_B$ , который представляет собой отношение амплитуды силы  $R$ , передаваемой на фундамент, и возмущающей силы  $F_0$ :

$$K_B = \frac{R}{F_0} = \frac{\sqrt{\lambda^4 + 4\nu^2\omega^2}}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\nu^2\omega^2} = \frac{\sqrt{10^4 + 4 \cdot 6^2 \cdot 40^2}}{(10^2 + 40^2)^2 + 46^2 \cdot 40^2} = 0,31. \quad (88)$$

где  $R = -CA_2 - B \cdot \dot{y}_2 \max$ .

Коэффициент динамичности по перемещению  $K_d$  представляет отношение амплитуды  $A_2$  вынужденных колебаний к статическому перемещению  $y_0$  под действием силы  $F_0$  амплитуды силового гармонического возбуждения:

$$K_d = \frac{A_2}{y_0} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega_2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} = \frac{10^2}{\sqrt{(10^2 - 40^2)^2 + 4 \cdot 6^2 \cdot 40^2}} = 0,06, \quad (89)$$

где  $y_0 = F_0/c$

6. Указания к решению вариантов задачи 3.

**Вариант 0.** Динамическая модель - в виде поступательной массы верхнего конца толкателя. Уравнение движения массы  $m$  с учетом си. и упругости  $F_y = -CX$  запишется так:  $m\ddot{y} + CX = 0$ . Используя обобщенную координату  $X = y - s$  ( $\dot{X} = \dot{y} - \dot{s}$ ,  $\ddot{X} = \ddot{y} - \ddot{s}$ ), получим после подстановки уравнение  $m\ddot{X} + CX = -m\ddot{s}$ , которое приводится к виду  $\ddot{X} + \lambda^2 X = -\ddot{s}$ . Решение приведено в пособии /17/ на с.29, причем постоянные  $C$  находится из начальных условий: - на участке разгона при  $t=0$   $X_0=0$ ,  $\dot{X}_0=0$ ,  $\ddot{X}_0=-a$ , и на участке замедления при  $t = \frac{t_n}{2}$   $X_{0s} = X_t$ ,  $\dot{X}_{0s} = \dot{X}_t$ ,  $\ddot{X}_{0s} = -a$ , а величины  $X_t$  и  $\dot{X}_t$  получить подстановкой в выражения  $X$  и  $\dot{X}$  разгона значения  $t = t_n/2$ . Для закона постоянного ускорения (нижнего конца толкателя): на участке разгона при  $0 \leq t \leq t_n/2$ :

$$\ddot{s} = a, \quad \dot{s} = at, \quad s = dt^2/2$$

на участке замедления при  $t_n/2 < t \leq t_n$

$$\ddot{s} = -a, \quad \dot{s} = \frac{at_n}{2} - a(t - \frac{t_n}{2}); \quad s = \frac{at_n^2}{2} - \frac{at^2}{2} + dt \frac{t_n}{2},$$

где  $t_n$  - время подъема на величину  $y_{max}$ , определяемое из условия, что при  $t = t_n/2$  будет  $s_{max}/2 \approx y_{max}/2 = a(\frac{t_n^2}{2})/2$ . Построить графики  $s(t)$ ,  $\dot{s}(t)$ ,  $\ddot{s}(t)$  нижнего конца толкателя, а для получения графика  $y(t) = X + s$  на график  $s(t)$  наложить гармонику колебаний  $X(t)$  с периодом  $T = 2\pi/\lambda$ . Решение приведено в /16/ на с.208-211.

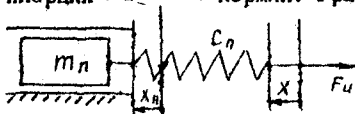
**Вариант 1.** Динамическая модель - в виде поступательной массы  $m$  грохота. По указаниям на с.32 в пособии /17/ привести уравнение колебаний грохота к виду  $\ddot{y}_1 + 2\gamma\dot{y}_1 + \lambda^2 y_1 = K_1 \sin \omega t$ . Решение этого уравнения см. в примере 8 данного пособия. Коэффициент динамичности по перемещению см. на с.66 или в /2/ на с.139. При резонансе, когда  $\omega = \lambda$ , нужно поределить максимальную амплитуду колебаний  $A_2 \max$  по формуле (61), а затем максимальное усилие пружины  $F_{max} = CA_2 \max$

**Примечание.** В исходных данных читать:  $C$ ,  $мн/м$ , где

$$1 \text{ мн/м} = 10^6 \text{ н/м}.$$

**Вариант 2.** Динамическая модель - в виде поступательной массы  $m_B = G/g$ . Центробежная сила неуравновешенного ротора  $F_c = ma = m\epsilon\omega^2$ , а ее проекция на ось  $y$  ( $F_y = F_c \sin \varphi$ ) - возбуждающая сила вынужденных колебаний балки. Начало решения см. на с.35 в /17/, пример решения - на с.64-66 данного пособия. Критическую угловую скорость  $\omega_k$  ротора определить из равенства частот вынужденных и свободных колебаний при резонансе, т.е.  $\omega_k = \lambda \sqrt{c/m}$ . Подставив  $\omega_k$  в формулу (81), найти  $A_{max}$  при резонансе и определить наибольшую реакцию пружины  $F_{max} \approx C \cdot A_{max}$

**Вариант 3.** Агрегат сводится к двухмассовой динамической модели - вращающиеся диски 3 и 4, соединенные упругим валом с угловой жесткостью  $C$  (рис.47 на с.112-113 в /2/). Но т.к. по условию рекомендуется привести массы и жесткости к поршню, и закон изменения  $X$  поршня оговорен (торможение по закону постоянного ускорения), то убираем массу  $m$  поршня и сводим задачу к одностепенной модели (рис.32) поступательной приведенной массе  $m_n$  рейки 2, на которую через условную пружину с приведенной жесткостью  $C_n$  действует сила инерции  $F_u = -m\ddot{x}$  поршня. Уравнение движения массы  $m_n$ :



$$m_n \ddot{x}_n = \sum F = F_n + F_u - C_n(x - x_n) - m \ddot{x} \quad (90)$$

Приведенная масса  $m_n$  рейки определяется из равенства кинетических энергий:  $T_n = \sum T_i = T_4$ ,

$\frac{m_n v_n^2}{2} = \frac{J \omega^2}{2}$ , где скорость рейки  $v_n = \omega \frac{d}{2}$ . Приведенная жесткость  $C_n$  определяется из равенства потенциальных энергий (см. в /2/ с. III-112):  $\Pi_n = \sum \Pi_i = \Pi_4$ ,  $\frac{C_n \Delta x_n^2}{2} = \frac{C \Delta \varphi^2}{2}$ , где  $\Delta x = \Delta \varphi \frac{d}{2}$ . Для закона постоянного ускорения  $\ddot{x} = -a$ ,  $\dot{x} = v_0 - at$ ,  $x = v_0 t - at^2/2$ . Подставив в (90), получим:  $m_n \ddot{x}_n - C_n(x_n - v_0 t - at^2/2) = ma$ , откуда

$$\ddot{x}_n + \lambda^2 x_n = \frac{ma}{m_n} - \frac{C_n}{m_n} v_0 t + \frac{C_n}{m_n} \frac{a}{2} t^2 = A + Bt + Ct^2.$$

Решение этого уравнения дано на с.37 в /17/. Постоянные  $C_i$  определяются из начальных условий: при  $t=0$   $\dot{x}_{n0} = -a$ ,  $x_{n0} = v_0$ ,  $x_{n0} = 0$ , а при  $t=t_T$   $\dot{x}_T = 0$ , где время  $t_T$  торможения определяется из условия  $v_0 \approx at_T$ . Диаграмму движения  $\varphi(t) = \varphi_1 + \Delta \varphi$  построить путем сложения графика  $\varphi_1(t) = 2x/d$  (без учета жесткости) и графика  $\Delta \varphi(t) = 2(x_n - x)/d$  колебаний с периодом  $t_n = 2\pi/\lambda$ .

**Вариант 4.** Схема перфоратора с виброгасителем сводится к двухмассовой динамической модели, в которой поступательная масса  $m_1$  основания 3 соединяется упругой связью  $C_1$  с корпусом машины, а мас-

са  $m = m_2$  виброгасителя 4 соединяется с основанием пружиной с жесткостью  $C_2$ . На основании  $m_1$  действует тяговое усилие  $F = F_0 \sin \lambda t$ . Решение задачи приведено в /2/ на с.136-138, рис.62. Чтобы основание не вибрировало, амплитуда колебаний его должна равняться нулю, т.е.  $A_1 = 0$ . Тогда система уравнений (17.3) в /2/ получит вид:  $-C_2 A_2 = F_0$ ,  $C_2 - m_2 \lambda^2 = 0$ . Отсюда находится искомая жесткость пружины виброгасителя на антирезонансном режиме виброгашения:  $C_2 = m_2 \lambda^2$ . Приняв  $m_1 = 5m_2$  и  $F_0 = 2m_1 g$ , рассчитать из (17.3) амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  колебаний и построить график колебаний виброгасителя  $y_2(t)$  за период  $T = 2\pi/\lambda$

Вариант 5. Динамическая модель - в виде поступательной массы (рис.30 а). Составление и решение уравнения колебательного движения приведено в литературе /2/ на с.105-107. График перемещения  $Z_1(t)$  построить за время, большее одного периода колебаний  $T = 2\pi/\lambda$

Вариант 6. Динамическая модель - в виде вращающегося диска, соединенного упругой и диссипативной связью со стойкой (рис.30 б). Момент упругого сопротивления  $M_y = -C\varphi$ , момент вязкого сопротивления демпфера  $M_d = -\beta\dot{\varphi}$ . Уравнение движения  $J\ddot{\varphi} = M_y + M_d$  после преобразований приводится к однородному виду свободных колебаний  $\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \lambda^2\varphi = 0$ . Решение этого уравнения см. в /2/ на с.81, 104-105. Постоянные  $C$  и  $\beta$  находятся из начальных условий при  $t=0$   $\varphi = \varphi_0 = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ . Время  $t_g$  закрывания двери определить из уравнения  $\varphi(t_g) = \psi(t_g) = 0$ . Критический коэффициент демпфирования  $\gamma_k$ , при котором не возникают колебания, т.е. движение аperiодическое, будет при условии  $\gamma_k \geq \lambda = \sqrt{C/J}$  (см. в /16/ на с.79). Построить два графика  $\varphi(t) = \psi(t)$  при расчетном  $\gamma$  и при  $\gamma_k$  за время  $t > T$

Вариант 7. Динамическая модель - в виде поступательной массы  $m$  поршня 4, на которую действует сила давления жидкости  $F_1 = \rho_1 S$  в напорной плоскости слева;  $F_2 = \rho_2 S$  в сливной полости справа и сила вязкого трения  $F_T = A\dot{x}$ . Уравнение движения:  $m\ddot{x} = F_1 - F_2 - F_T = \rho_1 S - \rho_2 S - A\dot{x}$  (9I). Из заданной зависимости расхода  $S\dot{x} = S\dot{x} = S \cdot dx/dt$  после интегрирования с учетом начальных условий получится:  $\rho_2 = \frac{ES \cdot x}{V} + \rho_{20}$ . Подставляя  $\rho_2$  в (9I) и проведя преобразования, получим уравнение движения:  $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \lambda^2 x = Q$ . В решение на с.45 в /17/ постоянные  $C_i$  находятся из начальных условий: при  $t=0$   $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = v_k$ ,  $C_3 = Q/\lambda^2$ . Для построения графиков  $x$  и  $v = \dot{x}$  расчеты

провести для экспоненциальной зависимости амплитуд  $A_x = A e^{-\gamma t}$  и  $A_y = -\gamma A e^{-\gamma t} + B k \nu^{-\gamma t}$

**Вариант 8.** Динамическая модель – в виде поступательной массы  $m_n$  поршня 2, на которую действуют упругая сила пружины  $F_y = F_0 - Cx$  справа и сила  $F_x = P S$  давления жидкости слева. Уравнение движения:  $m_n \ddot{x} = F_y - F_x = (F_0 - Cx) - PS$ . Приведенная к поршню масса жидкости  $m_{лж}$  (для зависимости  $P$  от  $x$  и  $\dot{x}$ ) определяется из равенства кинетических энергий  $T: \frac{m_{лж} v^2}{2} = \frac{m_x v_x^2}{2}$ , а отношение скоростей  $(v_x/v)$  определяется из условия равенства расхода жидкости в трубопроводе с сечением  $f$  и в цилиндре 3 с сечением  $S$ , т.е.  $v \cdot S = v_x f$ . Подставив полученное выражение  $m_{лж}$  через  $m_x, S$  и  $f$  в выражение  $P$ , и далее в уравнение колебаний:  $\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \lambda^2 x = Q$ , где  $2\gamma = BS/(m_n + m_{лж}S)$ ,  $\lambda^2 = C/(m_n + m_{лж}S)$ ,  $Q = \frac{(F_0 - P_0 S)}{(m_n + m_{лж}S)}$ . Решение этого уравнения приведено в /17/ на с. 45. Постоянные  $C_i$  определить из начальных условий при  $t=0$   $x_0=0, \dot{x}_0=0, C_3 = Q/\lambda^2$ . Предварительно нужно определить коэффициент  $\gamma$  (и искомый  $B$ ), при котором перемещение поршня 2 происходит без колебаний. При увеличении коэффициента демпфирования  $\gamma \geq \lambda$  уравнение движения переходит в уравнение аperiодического типа (см. в /15/ с.79). Поэтому нужно определить критический коэффициент  $\gamma_k$ , при котором не возникает колебаний:  $\gamma_k = \lambda = \sqrt{C/(m_n + m_{лж})}$ . Принять  $\gamma > \gamma_k$  и затем найти постоянные  $C_i$ , получить зависимость  $x(t)$ , построить график  $x(t)$  за  $t > T = 2\pi/\lambda$ . **П р и м е ч а н и е:** читать в условии  $m_x$ , кг/м<sup>2</sup>.

**Вариант 9.** Привод указателя для исследования движения его относительно заторможенного вала двигателя сводим к одностепенной модели с приведенным моментом инерции  $J_n$ , соединенным упругодемпфирующей связью со стойкой (рис.30 б). Приведение масс производится из равенства кинетических энергий:  $\frac{J_n \omega^2}{2} = \frac{J_y \omega_y^2}{2}$ , где  $\omega = \omega_y \cdot U_{12}$ . Приведение жесткостей производится из равенства потенциальных энергий:  $\frac{C_n \Delta \varphi_n^2}{2} = \frac{C_1 \Delta \varphi_1^2}{2} + \frac{C_2 \Delta \varphi_2^2}{2}$ , где  $\Delta \varphi_n = \Delta \varphi_y \cdot U_{12}$ . Уравнение движения звена приведения с  $J_n$  под действием упругого момента  $M_n = -C_n \varphi$  и момента сопротивления  $M_c = -\beta \varphi$ ;  $J_n \ddot{\varphi} = M_n + M_c$ , которое после преобразования приводится к виду  $\ddot{\varphi} + 2\gamma \dot{\varphi} + \lambda^2 \varphi = 0$ . Решение этого уравнения дано в /17/ на с.50. График  $\varphi(t)$  строить за время  $t = \sqrt{T}$ , показав экспоненту  $A(t) = A e^{-\gamma t}$  уменьшения амплитуд.

## С о д е р ж а н и е

В в е д е н и е.....	3
1. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1.....	4
1.1. Задача 1. Структурный анализ механизма.....	4
1.2. Задача 2. Кинематический анализ зубчатых механизмов.....	12
1.3. Задача 3. Кинематический синтез рычажных механизмов.....	24
2. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2.....	39
2.1. Задача 1 Уравновешивание плоского механизма.....	39
2.2. Задача 2. Исследование движения механизма или машины под действием приложенных сил.....	48
2.3. Задача 3. Анализ колебаний в механизмах и виброзащиты машин.....	60
Л и т е р а т у р а.....	72