



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный  
технический университет**

---

**Кафедра «Теоретическая механика и мехатроника»**

**А. В. Чигарев**

# **МЕХАТРОНИКА И ДИНАМИКА МИНИ-РОБОТОВ**

**Пособие для студентов специальности 1-55 01 03  
«Компьютерная мехатроника»**

**Минск  
БНТУ  
2017**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Теоретическая механика и мехатроника»

А. В. Чигарев

МЕХАТРОНИКА  
И ДИНАМИКА МИНИ-РОБОТОВ

Пособие для студентов специальности 1-55 01 03  
«Компьютерная мехатроника»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию  
в области машиностроительного оборудования и технологий*

Минск  
БНТУ  
2017

УДК 621(075.8)

ББК 31.261я73

Ч-59

Рецензенты:

кафедра «Теоретическая и прикладная механика» БГУ (зав. кафедрой – кандидат физико-математических наук, доцент *Д. Г. Медведев*);  
доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики БГУИР  
*С. Е. Карпович*

**Чигарев, А. В.**

Ч-59 Мехатроника и динамика мини-роботов: пособие для студентов специальности 1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника» / А. В. Чигарев. – Минск : БНТУ, 2017. – 500 с.

ISBN 978-985-583-140-3.

Пособие построено по принципу от общего к частному, что обуславливает его структуру. Первая часть дает общие представления о системах по структуре и основным свойствам: надежность, наблюдаемость, идентифицируемость, управляемость. Вторая часть содержит главы, посвященные подсистемам типичной мехатронной системы, в которых реализуются общие свойства, рассмотренные в первой части. Третья часть имеет более прикладной характер, использующий материал первых двух частей. Наиболее подробно рассмотрены модели самолетного и вертолетного типов, а также колесные и шагающие.

Пособие предназначено для студентов специальности «Компьютерная мехатроника» и других смежных специальностей.

УДК 621(075.8)

ББК 31.261я73

ISBN 978-985-583-140-3

© Чигарев А. В., 2017

© Белорусский национальный  
технический университет, 2017

## Оглавление

Часть 1. Мехатроника.....	7
Глава 1. Системный подход в мехатронике .....	7
1.1. Системы .....	7
1.2. Модели .....	8
1.3. Надежность .....	11
1.4. Надежность элементов системы .....	12
1.5. Понятие управляемости и наблюдаемости .....	28
1.6. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость в дискретных системах .....	37
Глава 2. Методы анализа и синтеза линейных динамических систем .....	43
2.1. Пространство состояний при анализе и синтезе систем ....	43
2.2. Операционный метод описания динамических систем .....	47
2.3. Схемы программирования для непрерывных систем .....	53
2.4. Схемы программирования для дискретных систем .....	58
2.5. Выбор переменных состояния в модели посадки летательного аппарата .....	62
2.6. Анализ устойчивости дискретных систем методом переходных состояний.....	66
Часть 2. Подсистемы мехатронных систем.....	80
Глава 3. Механика .....	80
3.1. Модели механических подсистем мехатронной системы .....	80
3.2. Модели механических подсистем и метод механических цепей.....	97
3.3. Передаточные функции пассивных двухполюсников механических цепей.....	110
Глава 4. Актуаторы.....	127
4.1. Модели и схемы преобразования энергии .....	129
4.2. Электромагнитные поступательные преобразователи энергии.....	132
4.3. Вращательные преобразователи энергии.....	137
4.4. Некоторые конструкции электродинамических преобразователей в двигателях постоянного тока .....	139

Глава 5. Сенсоры .....	157
5.1. Модели и схемы датчиков измерений в мехатронных системах.....	157
5.2. Некоторые модели подсистем измерений.....	169
Глава 6. Автоматы .....	179
6.1. Конечные автоматы подсистем управления для мехатронных систем .....	179
6.2. Анализ автоматов.....	182
6.3. Синтез автоматов .....	183
Глава 7. Двоичные и цифровые системы управления.....	191
7.1. Двоичные логические связи .....	191
7.2. Алгебра переключательных схем .....	197
7.3. Комбинационные системы управления.....	200
7.4. Цифровая электроника и цепи .....	203
7.5. Автоматические системы управления в системах с памятью.....	240
Часть 3. Динамика мобильных миниатюрных роботов .....	248
Глава 8. Масштаб, подобие и размерность в моделях динамических систем .....	248
8.1. Масштабный фактор. Критерии подобия .....	248
8.2. Формулы из теории размерности.....	250
Глава 9. Динамика свободного твердого тела.....	256
9.1. Кинематика абсолютно твердого тела .....	256
9.2. Основные законы динамики твердого тела (мини-робота).....	268
Глава 10. Динамика и управление беспилотными летательными аппаратами аэропланного и других типов .....	274
10.1. Основные уравнения динамики беспилотных летательных аппаратов.....	274
10.2. Задача управления летательными аппаратами с учетом различных факторов. Задачи управления.....	282
Глава 11. Динамика плоского продольного движения летательного аппарата аэропланного типа.....	291
11.1. Линеаризация уравнения динамики в двумерном случае.....	291

11.2. Частные случаи продольного движения. Передаточные функции и частотные характеристики .....	303
Глава 12. Управление движением центра масс беспилотного летательного аппарата.....	308
12.1. Линейная модель управления высотой полета .....	308
12.2. Управление высотой полета с учетом случайных возмущений со стороны воздушной среды .....	314
12.3. Управление высотой полета низколетающих дронов.....	321
12.4. Управление боковым движением центра масс беспилотного летательного аппарата .....	325
12.5. Управление скоростью полета центра масс дрона .....	330
Глава 13. Динамика боковых и угловых движений беспилотного летательного аппарата .....	335
13.1. Линеаризованная математическая модель боковых движений беспилотного летательного аппарата .....	335
13.2. Передаточные функции конкретных моделей бокового движения беспилотного летательного аппарата.....	342
13.3. Автоматическое управление угловыми движениями летательного аппарата.....	345
Глава 14. Динамика беспилотного летательного аппарата при учете упругости элементов конструкции.....	355
14.1. Балочные модели изгибных колебаний корпуса дрона .....	355
14.2. Влияние флуктуаций состояния атмосферы на динамику беспилотного летательного аппарата.....	363
Глава 15. Аэродинамические характеристики крыльев, деталей корпуса, винтов летательных аппаратов .....	368
15.1. Профили крыльев и их аэродинамические характеристики .....	368
15.2. Аэродинамические силы и момент .....	370
15.3. Аэродинамические коэффициенты и качество профиля .....	374
15.4. Геометрические и аэродинамические характеристики тел вращения.....	378
15.5. Подъемная сила тел вращения в аэродинамике.....	380

Глава 16. Динамика беспилотного летательного аппарата ракетного типа .....	387
16.1. Динамика беспилотного летательного аппарата с двумя плоскостями симметрии.....	387
16.2. Динамика осесимметричных беспилотных летательных аппаратов ракетного типа .....	390
Глава 17. Кинетика винтов и корпуса вертолетов.....	396
17.1. Кинематика лопасти винта и кинематика вертикального движения вверх .....	396
17.2. Кинематика сечения мультикоптера.....	400
17.3. Динамика корпуса мультикоптера .....	403
17.4. Сведение винтовой мультисхемы к эквивалентной моносхеме.....	411
17.5. Аэродинамика несущего винта вертолета.....	414
17.6. Автоматическое управление моновинтовым вертолетом.....	419
17.7. Схемы и устройства автопилота вертолета.....	428
Глава 18. Автоматическое управление группами дронов.....	433
18.1. Математическая модель строя как объекта управления.....	433
18.2. Синтез автоматических систем управления группой дронов .....	442
18.3. Динамика систем автоматического управления группой.....	450
Глава 19. Динамика колесных миниатюрных роботов .....	456
19.1. Динамика модели трехколесного миниатюрного робота.....	456
19.2. Динамика модели четырехколесного миниатюрного робота.....	464
19.3. Динамика модели двухколесного миниатюрного робота.....	469
Глава 20. Динамика шагающего миниатюрного робота.....	479
20.1. Основные уравнения математической модели динамики робота.....	479
20.2. Некоторые приближенные модели динамики шагающих мини-роботов.....	495

# Часть 1. МЕХАТРОНИКА

## ГЛАВА 1. СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД В МЕХАТРОНИКЕ

### 1.1. Системы

Интенсивное развитие микроэлектроники привело к миниатюризации систем датчиков информации в машинах, а также стимулировало появление микропроцессоров, мини-компьютеров, предназначенных для целей оптимизации управления и сервиса. Машины приобрели функции, которые можно назвать «умные», «интеллектуальные», при этом практически не увеличив материалоемкость. Встраивание в машины электронных систем позволило улучшить многие механические свойства, и современные машины представляют собой синтез механики и электроники, требующих для своего описания, проектирования, изготовления, эксплуатации системного подхода.

**Системой** называется структура, совокупность элементов с вполне определенными связями между ними.

Система отличается от просто множества, конгломерата элементов, в которых связи между элементами не определены.

Системы *гомогенные* состоят из подобных элементов, *гетерогенные* – из разных элементов.

*Мехатронные системы* относятся к гетерогенным, так как разные элементы функционируют на разных физических принципах.

Система представляет собой определенную *структуру* из элементов, предназначенную для выполнения определенных *функций*. Связь между структурой и функциями не взаимоднозначна: например, функция «летать» может быть реализована с помощью различных структур (самолет, вертолет, птицы и т. д.).

*Сложность системы* характеризуется разнообразием ее реакций на внешние воздействия.

Реальные системы в порядке возрастания их сложности классифицируются следующим образом:

1. *Автоматические системы* способны лишь детерминированно реагировать на внешние воздействия. Обычно их внутренняя структура элементов предназначена для возврата в равновесное состояние при выводе из него.



2. *Решающие системы* имеют постоянные стохастические критерии различения случайных воздействий и постоянные стохастические реакции на эти воздействия, т. е. им присущ акт решения. Постоянство структуры поддерживается своевременной заменой отказавших элементов.

3. *Самоорганизующиеся системы* имеют гибкие критерии различения воздействий и гибкие реакции на них в виде приспособления к заранее неизвестным воздействиям. Устойчивость существования таких систем обеспечивается постоянным **самовоспроизведением** (структурно-информационная устойчивость).

Самоорганизующиеся системы, сохраняя свою историю в памяти, могут постепенно научиться предвидеть воздействия внешнего мира и заранее готовиться к нейтрализации неблагоприятных и использованию благоприятных ситуаций.

4. *Трансформирующиеся (превращающиеся) системы* могут при необходимости менять свою структуру, что ведет к расширению или изменению функций.

**Простыми** считаются системы, не превосходящие по сложности автоматические, а превосходящие – **сложными**.

**Большими** называются сложные системы со сравнительно слабыми связями между их компонентами (человекомашинные системы).

В той или иной степени системы обладают свойствами:

- 1) *открытость* – взаимодействие с внешней средой;
- 2) *иерархия* структуры;
- 3) *стохастичность* поведения;
- 4) *изменчивость* во времени.

## 1.2. Модели

Для получения количественного описания какой-либо реальной системы создается **модель**, которая является упрощенным отражением реальной системы, учитывающей основные элементы структуры и соответственно функций.

Математически более точно это можно сформулировать следующим образом.

Пусть **реальная** система  $A_{(r)}^{(R)}$  описывается числом  $N^{(R)}$  параметров

$$\bar{x}(t) = \{x_i(t)\}, \quad i = 1, \overline{N^{(R)}},$$

между которыми существует некоторое число  $L^{(R)}$  зависимостей:

$$G_j^{(R)}(\bar{x}(t)) = C_j^{(R)}(t), \quad L^{(R)} < N^{(R)}, \quad j = 1, \overline{L^{(R)}}.$$

Реальная система имеет  $N^{(R)} - L^{(R)}$  степеней свободы (независимых параметров, через которые могут быть выражены остальные).

**Моделью**  $A_{(t)}^{(M)}$  реальной системы  $A_{(t)}^{(R)}$  в общем случае называется абстрактное образование, которое описывается числом  $N^{(M)} < N^{(R)}$  параметров

$$\tilde{x}(t) = \{\tilde{x}_i(t)\}, \quad i = 1, \overline{N^{(R)}},$$

связанных между собой зависимостью

$$G_i^{(M)}(\tilde{x}_i(t)) = C_i^{(M)}, \quad i = 1, \overline{L^{(M)}}.$$

Это означает, что модель имеет  $N^{(M)} - L^{(M)}$  степеней свободы.

Чем ближе  $N^{(R)}$  к  $N^{(M)}$ ,  $L^{(R)}$  к  $L^{(M)}$ , тем меньше рассогласование между поведением модели и реальной системы.

Имеются два подхода в выборе модели  $A_{(t)}^{(M)}$  для реальной системы  $A_{(t)}^{(R)}$ .

1. **Аналитический** подход состоит в анализе реальной системы и приближении  $N^{(R)}$  к  $N^{(M)}$  и  $L^{(R)}$  к  $L^{(M)}$ .

2. **Синтетический** подход состоит в синтезе оптимальной модели, лучшей в смысле экстремума критерия

$$V^{(M)} = F^{(M)}(\tilde{x}_i(t))$$

и приближении ее к реальной системе, оптимальной по критерию экстремума

$$V^{(R)} = F^{(R)}(\tilde{x}_i(t)).$$

Здесь  $F^{(R)}$  и  $F^{(M)}$  в общем случае представляют собой функционалы. Введение свойства оптимальности усложняет моделирование системы.

Аналитический подход к моделированию использует методы **математического программирования** (исследования операций). Синтетический подход используется при моделировании потенциально эффективных сложных систем.

### ***1.2.1. Оптимальные системы***

Пусть состояние системы характеризуется величинами  $U$  и  $V$ , целью системы является выгодный  $(U, V)$ -обмен, где  $U$  – **расходуемые ресурсы**,  $V$  – **потребляемые системой ресурсы**.

**Вещественно-энергетические**  $(U, V)$ -обмены описываются законами физики, химии, если внешняя среда индифферентна по отношению к системе. Если взаимодействие системы со средой конфликтное, то оно описывается теорией игр.

**Сигнальные**  $(U, V)$ -обмены в индифферентной ситуации описываются законами *теории информации*.

$(U, V)$ -обмены появляются на уровне решающих систем.

Под **целью** системы понимается получение максимума  $V$  за фиксированное количество  $U$  или отдача минимума  $U$  за фиксированное количество  $V$ .

### ***1.2.2. Законы сложных систем***

1. При возрастании сложности систем у последних появляются качества, которые сохраняются при дальнейшем их усложнении (**закон наследования**).

2. Устойчивость структуры связанных между собой элементов (**закон надежности**).

3. Помехоустойчивость системы характеризуется правильной ориентацией, поведением системы в окружающей среде, что предполагает правильную информированность (**закон наблюдаемости и идентифицируемости**).

4. Действия системы, направленные на достижение цели с учетом информации, называются *управляемостью системы* (**закон управляемости**).

**Самоорганизация** является накоплением опыта использования всех указанных качеств во времени, переработки и использования в деятельности системы.

### 1.3. Надежность

Главным качеством системы является ее **устойчивость**, без которой понятие системы теряет смысл.

Различаются два вида устойчивости:

- 1) **вещественно-энергетическая**;
- 2) **структурно-функциональная**.

Первый вид устойчивости связан с постоянством вещественного состава и энергетического баланса системы.

Второй вид устойчивости связан с постоянством ее реакций на одни и те же внешние воздействия.

В зависимости от типа сложности реализуется определенный вид устойчивости.

Устойчивость первого вида характерна для автоматических систем: например, машина обладает постоянством структуры при переменном вещественном составе.

Вторым видом устойчивости обладают решающие системы, в частности, простейшие живые клетки. **Клетка** по сравнению с **молекулой** более хрупкая (менее надежная) по отношению к внешним воздействиям.

Для более сложных (многоклеточных) биологических систем основным видом устойчивости является надежность. Клеточный состав организма является переменным, одни клетки отмирают и удаляются, другие возникают. Устойчивой остается лишь структура организма. С ростом сложности надежность биологических систем

(организмов) не имеет (если идет нормальный обмен клеток) тенденции уменьшаться, хотя отдельная клетка менее надежна, чем организм в целом.

В качестве искусственной сложной системы с зачатками «обмена веществ» может служить компьютер с частой заменой отдельных элементов. В противоположность биологическим системам у технических систем с ростом сложности надежность уменьшается. Это связано с несовершенством их организации.

**Целью** создания мехатронных систем является проектирование и производство систем, обладающих надежностью типа биологических систем, т. е. усложнение структуры должно сопровождаться не только усложнением функций, но и ростом надежности, что для традиционных технических систем (машин), как известно, было невозможно.

#### 1.4. Надежность элементов системы

Рассмотрим **взаимодействующие системы**  $A, B$  ( $B$  может быть внешней средой), которые всегда содержат элемент случайности.

Обозначим  $P(U, V)$  вероятность достижения системой  $A$  своей цели: выгодного  $(U, V)$ -обмена с системой  $B$ , которое представляет собой случайное событие  $C$  так, что

$$P(C) = P(U, V).$$

##### 1.4.1. Отказ элемента и отказ системы

Система  $A^{(R)} = (a_1, \dots, a_n)$  определяется набором  $n$  элементов  $a_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) и структурой их соединений (взаимодействий).

Выход элемента из режима нормального функционирования называется **отказом**. Отказ в модели происходит мгновенно в случайный или определенный момент времени. Отказы элементов системы – случайные события.

Элементы в системе могут иметь **последовательное** (рис. 1.1), **параллельное** (рис. 1.2) и **смешанное** (рис. 1.3) соединение.

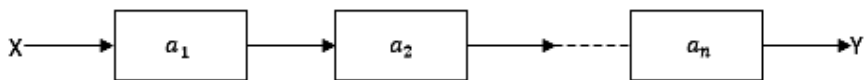


Рис. 1.1. Схема последовательного соединения

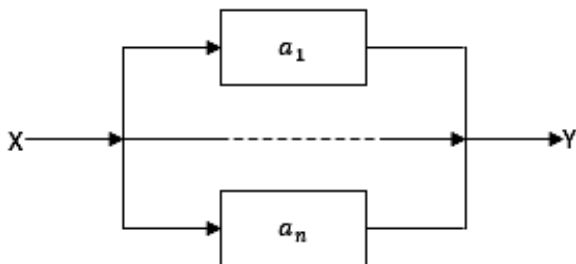


Рис. 1.2. Схема параллельного соединения

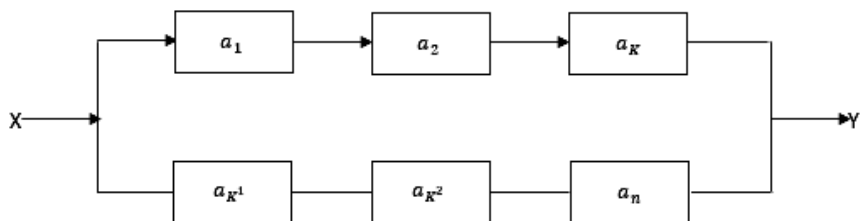


Рис. 1.3. Схема смешанного соединения

Отказ в системе последовательно соединенных элементов ведет к отказу всей системы, а в системе с параллельным соединением этого не происходит.

На рис. 1.1, 1.2, 1.3 через  $X$  обозначен вход через  $Y$  – выход. Через  $a_i$  обозначаются звенья (элементарные), каждое из которых имеет вход и выход. Связь между  $X$  и  $Y$  представляет собой цепь.

#### ***1.4.2. Надежность систем с последовательным соединением элементов***

Последовательное соединение элементов, по-видимому, является наиболее распространенной моделью и наиболее простой для анализа.

Чтобы система с последовательным соединением функционировала, все подсистемы должны работать безотказно. Блок-схема системы с последовательным соединением независимых элементов показана на рис. 1.4. В данном случае обозначим  $R_S = P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n)$  – вероятность события функционирования связи между входом  $X$  и выходом  $Y$ .

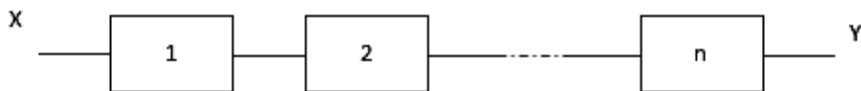


Рис. 1.4. Блок-схема системы с последовательным соединением элементов

Вследствие принятого допущения о независимости отказов

$$R_S = P(E_1)P(E_2) \cdot \dots \cdot P(E_n)$$

или, обозначая  $P(E_i) = R_i$ , получим

$$R_S = \prod_{i=1}^n R_i, \quad (1.1)$$

где правая часть представляет собой произведение вероятностей безотказной работы подсистем;

$R_i$  – вероятность безотказной работы  $i$ -го элемента.

Формула (1.1) выражает правило умножения вероятностей. Очень часто структура изделия требует применения именно этого правила для вычисления вероятности безотказной работы. Надежность системы быстро убывает при увеличении числа последовательно соединенных элементов, причем надежность системы не превышает надежности наименее надежного элемента. Таким образом, для системы с последовательным соединением элементов имеем

$$R_S \leq \min_i \{R_i\}.$$

Если требуется обеспечить заданную вероятность безотказной работы системы, то быстрое приближенное вычисление необходимой вероятности безотказной работы подсистем производится сле-

дующим образом. Пусть  $q$  – вероятность отказа подсистемы. Тогда, полагая, что для всех подсистем значения  $q$  одинаковы, имеем

$$R_S = (1 - q)^n; \quad (1.2)$$

разлагая (1.2) в бином Ньютона, находим

$$R_S = 1 + n(-q)^1 + \frac{n(n-1)}{2}(-q)^2 + \dots + (-q)^n.$$

Полагая, что значение  $q$  мало и отбрасывая члены высокого порядка, получаем

$$R_S \approx 1 - nq.$$

При использовании этой аппроксимации полезно знать, что если  $nq = 0,1$ , то получаем результат с точностью до двух десятичных знаков.

### Пример 1.1

Если требуемая вероятность безотказной работы системы, состоящей из 20 элементов, составляет  $R_S = 0,99999$ , то

$$0,99999 = 1 - 20q,$$

и

$$q = 0,0000005$$

или

$$R = 0,9999995.$$

Такое приближенное значение надежности элемента необходимо для того, чтобы обеспечивалась заданная надежность системы.

Приближенное выражение для надежности системы с последовательным соединением элементов при различных значениях  $q_i$  имеет вид

$$R_S \approx 1 - \sum_{i=1}^n q_i.$$



### 1.4.3. Надежность систем с параллельным соединением элементов

Система с параллельным соединением элементов не выходит из строя, пока не отказали все ее элементы. Блок-схема для анализа надежности системы с параллельным соединением элементов показана на рис. 1.5.

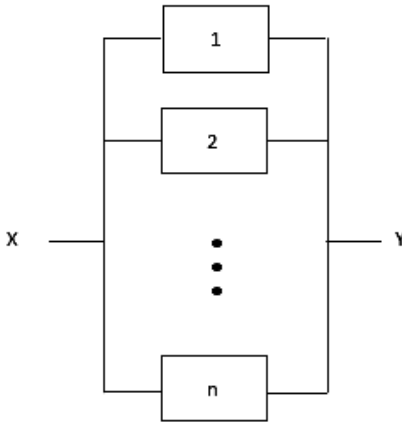


Рис. 1.5. Блок-схема системы с параллельным соединением элементов

Вероятность безотказной работы системы вычисляется следующим образом. Если  $Q_S$  – вероятность безотказной работы системы, то

$$Q_S = P[\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \dots \cap \bar{E}_n],$$

где  $E_n$  и  $\bar{E}_n$  – взаимно дополнительные события.

Полагая, что все эти события независимы, имеем

$$Q_S = P(\bar{E}_1)P(\bar{E}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{E}_n)$$

или

$$Q_S = \prod_{i=1}^n (1 - R_i).$$

Тогда вероятность безотказной работы системы определяется как дополнение вероятности до единицы и

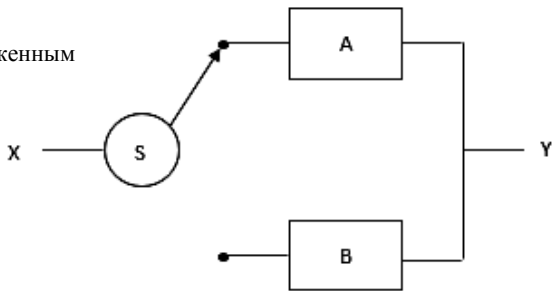
$$R_S = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i),$$

*При анализе системы с параллельным соединением элементов подразумевается, что при включении системы включаются все подсистемы и отказы не влияют на надежность подсистем, продолжающих работать.*

Рассмотренное параллельное соединение называется чисто параллельным включением, и, как уже говорилось, оно нетипично. Во многих случаях используются другие способы параллельного соединения. В действительности в системах с параллельным соединением элементов, особенно в механических, чаще используются включения по схеме ненагруженного резерва и параллельное соединение с распределением нагрузки.

В системе с ненагруженным резервом ненагруженный элемент не включается, пока не выйдет из строя нагруженный элемент. Этот случай показан на рис. 1.6.

Рис. 1.6. Система с ненагруженным резервом



Переключатель  $S$  может представлять собой автоматический датчик либо просто условно означать, что оператор заменяет элемент  $A$  элементом  $B$ . Простым примером ненагруженного резерва является запасное колесо автомобиля. Систему с ненагруженным резервом нужно анализировать как динамическую модель.

В системе с распределением нагрузки по параллельным элементам при появлении отказа увеличивается интенсивность отказов

элементов, продолжающих работать. Примером системы с распределением нагрузки по параллельным элементам является автомобильное колесо в сборе; если какая-либо стопорная гайка ослабляется, то остальные гайки должны выдерживать большую нагрузку. Следовательно, с каждым последовательным отказом увеличивается интенсивность отказов. Таким образом, система с распределением нагрузки при параллельном соединении элементов фактически не является статической моделью.

Еще одной формой резервирования является система « $r$  из  $n$ ». В такой системе имеется  $n$  параллельно соединенных элементов, однако для того чтобы система продолжала работать безотказно, работоспособность должны сохранять не менее  $r$  элементов. Примером такой формы резервирования являются канаты висячего моста, когда для того, чтобы держать сооружение, необходимо некоторое минимальное число таких элементов.

Вероятность безотказной работы системы « $r$  из  $n$ » имеет вид

$$R_S = \sum_{x=r}^n \binom{n}{x} R^x (1-R)^{n-x},$$
$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!},$$

где  $R$  – вероятность безотказной работы подсистемы, предполагаемая одинаковой для всех подсистем.

В случае подсистем с неодинаковой надежностью может использоваться простой перебор всех вариантов.

#### ***1.4.4. Надежность сочетания параллельного и последовательного соединений элементов***

Простые комбинации подсистемы с параллельным и последовательным соединениями элементов (рис. 1.7) можно легко проанализировать путем последовательного объединения подсистем в группы. Вначале объединим параллельно соединенные элементы подсистем и будем рассматривать последовательное соединение эквивалентных элементов.

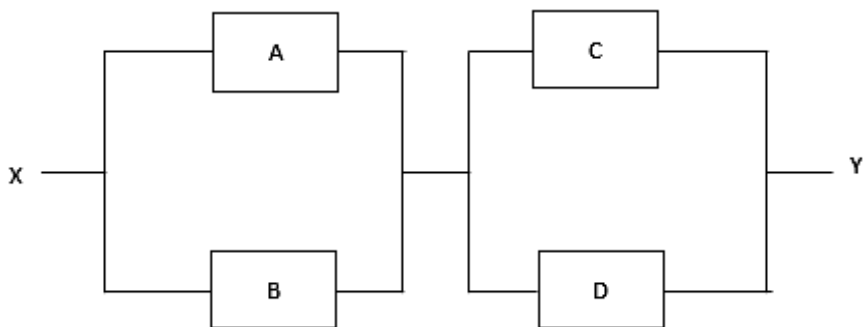


Рис. 1.7. Система с последовательно-параллельным соединением элементов

Допустим, что известны показатели надежности этих элементов:  $R_A = 0,9$ ,  $R_B = 0,8$ ,  $R_C = 0,7$  и  $R_D = 0,6$ . Тогда вероятность безотказной работы последовательно соединенных эквивалентных элементов

$$R_{AB} = 1 - 0,1 \cdot 0,2 = 0,98;$$

$$R_{CD} = 1 - 0,3 \cdot 0,4 = 0,88.$$

Таким образом, вероятность безотказной работы системы

$$R_S = 0,98 \cdot 0,88 = 0,8624.$$

Вторая система показана на рис. 1.8, где подсистемы с последовательным соединением элементов соединены параллельно. В данном случае методика преобразования состоит в том, что вначале объединяются последовательно соединенные элементы подсистем, а затем рассматриваются параллельно соединенные эквивалентные элементы.

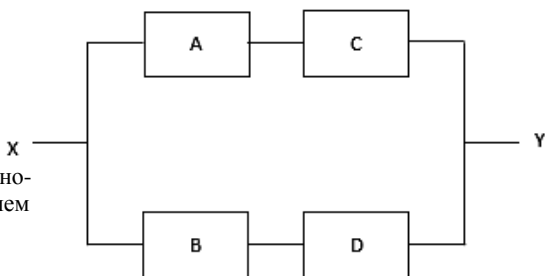


Рис. 1.8. Система с параллельно-последовательным соединением элементов

Предположим, что в данном случае элементы имеют такую же надежность, как и в предыдущем примере. Таким образом, вероятность безотказной работы параллельно соединенных эквивалентных элементов

$$R_{AC} = 0,9 \cdot 0,7 = 0,63$$

и

$$R_{BD} = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48.$$

Следовательно, вероятность безотказной работы системы

$$R_S = 1 - (1 - R_{AC})(1 - R_{BD}) = 1 - 0,37 \cdot 0,52 = 1 - 0,1924 = 0,8076.$$

Заметим, что различие в значениях показателя надежности систем обусловлено различным соединением подсистем.

При рассмотрении комбинаций последовательно и параллельно соединенных элементов применимы прямые методы вычислений, используемые в случае простых систем с последовательным и параллельным соединениями элементов. Таким образом, для анализа систем с комбинациями последовательных и параллельных соединений элементов основные формулы применяются последовательно.

#### ***1.4.5. Анализ надежности сложных систем***

Конфигурация некоторых изделий или характер сложных отказов могут привести к созданию систем, для описания которых параллельное или последовательное соединение элементов не годится. В качестве примера рассмотрим систему, изображенную на рис. 1.9.

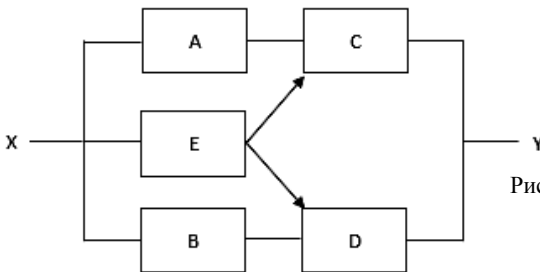


Рис. 1.9. Конфигурация сложной системы

В этой системе отказ подсистемы  $E$  сразу нарушает пути  $ED$  и  $EC$ . Таким образом, это соединение не является параллельным. Может быть предложено несколько способов описания такого случая. Рассматриваемый здесь метод не является простейшим для некоторых конкретных приложений. Однако его всегда можно применить, и он позволяет рассмотреть влияние различных видов отказов на работу системы.

Метод состоит в том, что рассматриваются все взаимоисключающие способы появления отказов в системе. Обозначим элементы  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Определим  $A$  как событие, состоящее в том, что элемент  $A$  работает безотказно. Введем аналогичные определения для  $B$  и  $C$ . Пусть  $P(A) = 0,95$ ,  $P(B) = 0,90$  и  $P(C) = 0,85$ .

Затем при допущении независимости отказов вычисляются вероятности для каждого способа появления отказов. Так, вероятность  $P(A \cap \bar{B} \cap C)$  равна  $P(A)P(\bar{B})P(C)$ . Эти вычисления показаны в таблице.

#### Вычисления вероятностей

Число отказавших элементов	События, характеризующие состояния системы	Вероятность
0	$A \cap B \cap C$	0,7268
1	$\bar{A} \cap B \cap C$	0,0382
	$A \cap \bar{B} \cap C$	0,0808
	$A \cap B \cap \bar{C}$	0,1282
2	$\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$	0,0042
	$\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$	0,0068
	$A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$	0,0142
3	$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$	0,0008
		$\Sigma = 1,0000$

Поскольку появления отказов являются взаимно несовместными событиями, эти вероятности можно суммировать. Например, если отказ вызывают только события  $A \cap \bar{B} \cap C$ ,  $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$  и  $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ ,

то вероятность появления отказа равна  $0,0808 + 0,0042 + 0,0008 = 0,0858$ . Этот метод позволяет анализировать и систематизировать влияние на систему каждого способа появления отказа.

Очевидным недостатком метода является то, что число способов появления отказов быстро возрастает при увеличении числа элементов. Число способов появления отказов можно легко вычислить. Так, если  $n$  – общее число подсистем, а  $x$  – число рассматриваемых отказов, то  $\binom{n}{x}$  – число способов появления  $x$  отказов.

Например, если  $n = 5$  и  $x = 2$ , то имеем  $\binom{5}{2} = 10$  способов появления отказов, когда выходят из строя два элемента, а общее число различных способов появления отказов

$$\sum_{x=0}^n \binom{n}{x} = 2^n.$$

Громоздкие вычисления, неизбежные для данного метода, можно упростить, используя машинные методы.

#### ***1.4.6. Преобразование надежности при проектировании***

Уровень надежности определяется в процессе проектирования, и на последующих этапах изготовления, сборки и поставки системы невозможно повысить этот заложенный уровень надежности. На этапе проектирования определяются также структура системы, а выбранная структура системы влияет на уровень надежности и определяет затраты, необходимые для достижения этого уровня. Таким образом, предварительный анализ надежности, а также определение многих других конструктивных параметров необходимо проводить на этапе проектирования.

Проектировщики, конструкторы, создавая систему, должны использовать основные методы теории надежности для оценки работоспособности конструкции. После завершения проектирования необходимо провести расчетную и экспериментальную оценку показателей надежности изделия. Поэтому важно, чтобы оценка уровня на-

дежности и стоимости различных проектов была выполнена прежде, чем сделан окончательный выбор. Рассмотрим некоторые компромиссные решения, принимаемые при расчете надежности, которые могут оказаться полезными при оценке различных вариантов.

#### ***1.4.7. Проектирование надежности систем с последовательным соединением элементов***

Вследствие характера системы с последовательным соединением элементов надежность зависит как от числа элементов, так и от их уровня надежности. Эта зависимость показана на рис. 1.10.

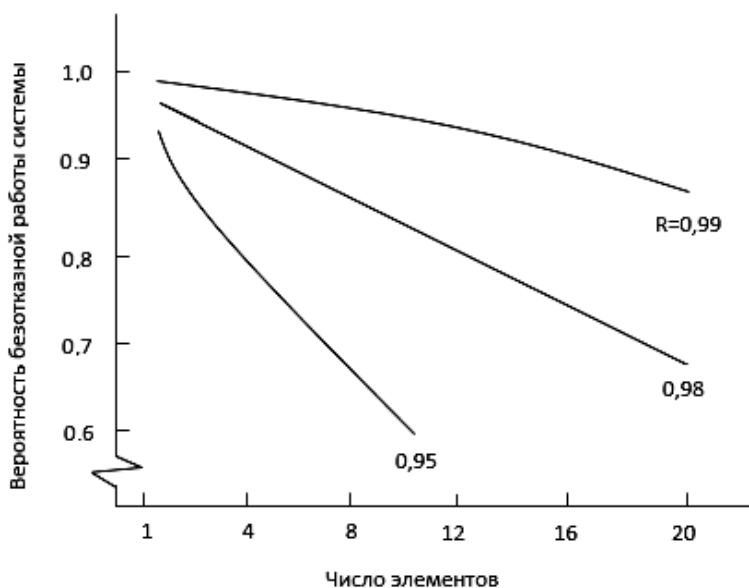


Рис. 1.10. Вероятность безотказной работы системы с последовательным соединением элементов, характеризующихся вероятностью безотказной работы  $R$

Как можно видеть, надежность системы с последовательным соединением элементов можно увеличить за счет уменьшения числа последовательно соединенных элементов и за счет повышения надежности каждого из них. При этом вероятность безотказной работы системы возрастает незначительно. Очевидно также, что с увеличением числа элементов вероятность безотказной работы системы уменьшается.



### 1.4.8. Проектирование надежности систем с параллельным соединением элементов

Параллельное соединение элементов обычно рассматривается как способ повышения надежности системы. Однако этот выигрыш не всегда может быть реализован. Прежде всего проектирование системы с параллельным соединением элементов механического типа обычно является исключительно трудным делом. По-видимому, более типичны такие формы резервирования, как обеспечение запасными частями (ненагруженный резерв) или использование конструкции с распределением нагрузки.

Вторая проблема, связанная с параллельным соединением элементов, заключается в следующем.

При заданной надежности элемента выигрыш в вероятности безотказной работы системы вследствие увеличения числа параллельно соединенных элементов растет все медленнее. На графике, рис. 1.11, показано, что после подключения четвертого параллельного элемента прирост надежности системы исключительно мал. Таким образом, увеличение числа параллельно соединенных элементов может оказаться менее выгодным по сравнению с установкой более надежного элемента.

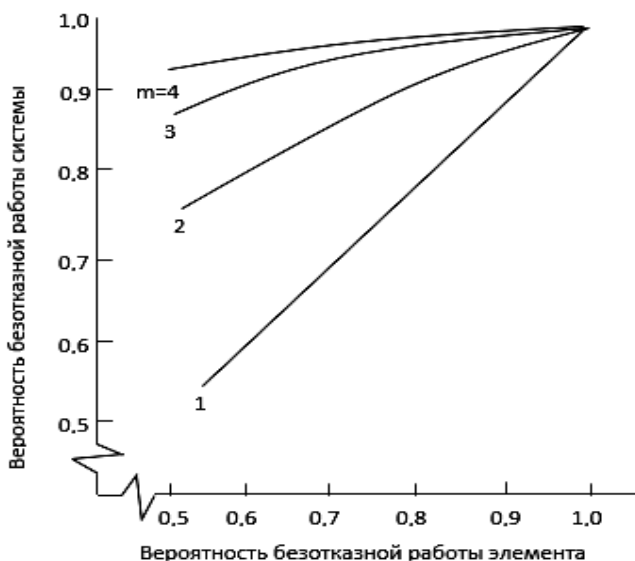


Рис. 1.11. Повышение надежности при параллельном соединении  $m$  элементов

### 1.4.9. Проектирование надежности систем с раздельным и общим резервированием элементов

Допустим, что имеется система, состоящая из  $n$  элементов. Можно либо ввести резервные элементы и получить блок-схему, изображенную на рис. 1.12, либо создать полностью резервированную систему, показанную на рис. 1.13.

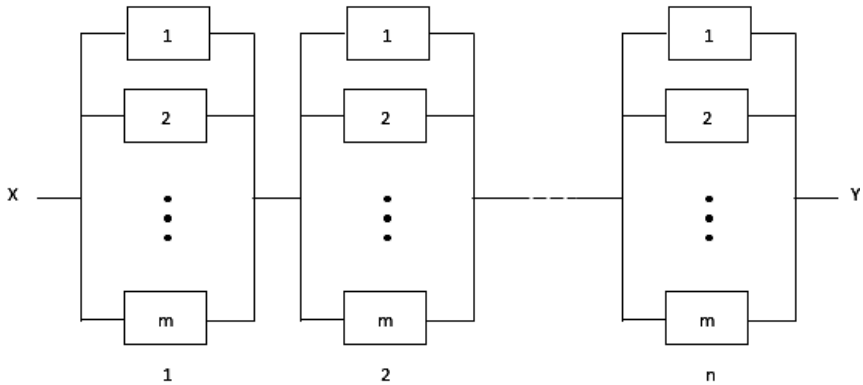


Рис. 1.12. Раздельное резервирование

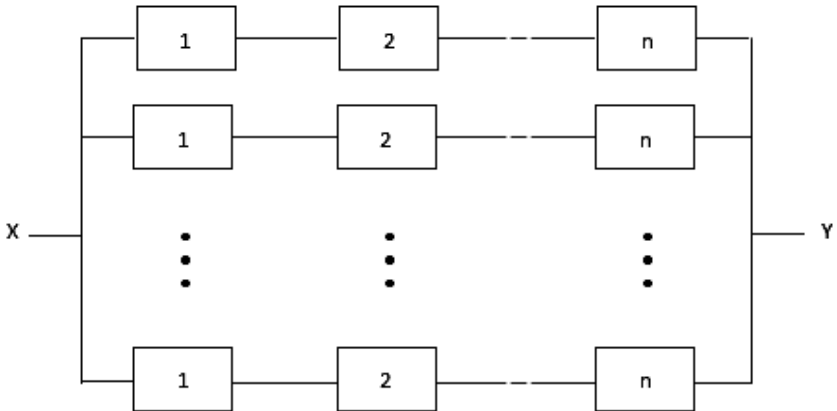


Рис. 1.13. Общее резервирование

Первый способ называется поэлементным или **р а з д е л ь н ы м** резервированием, а второй – **о б щ и м**. Задача проектирования

состоит в том, как сравнить эти два способа резервирования. При последующем анализе предполагается, что все элементы имеют одинаковую надежность.

В случае раздельного резервирования (см. рис. 1.12) вероятность безотказной работы группы параллельно соединенных элементов имеет вид

$$R_{EQ} = 1 - (1 - R)^m.$$

Затем, рассматривая вероятность безотказной работы  $R_{EQ}$  этих последовательно соединенных эквивалентных элементов, находим вероятность безотказной работы системы:

$$R_{S, \text{разд}} = \left(1 - (1 - R)^m\right)^n.$$

На рис. 1.14 приведен график, соответствующий этому уравнению для различных уровней надежности элементов. График показывает влияние надежности элементов, их числа, а также числа групп параллельно соединенных элементов на надежность системы.

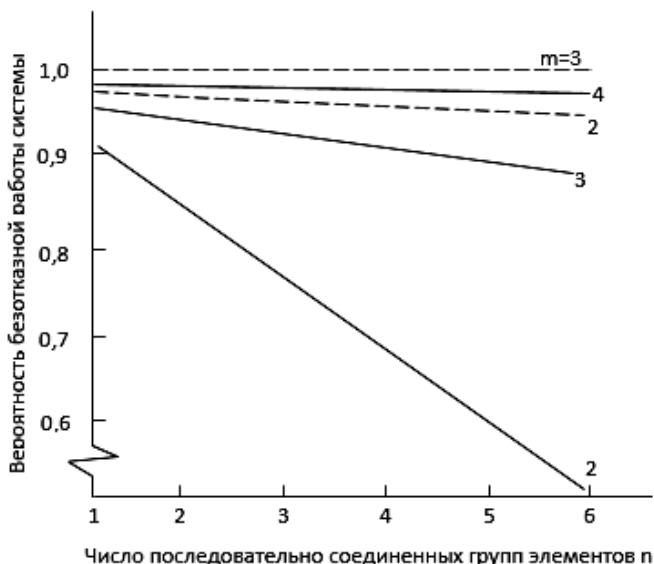


Рис. 1.14. Раздельное резервирование

В системе с общим резервированием, изображенной на рис. 1.13, вероятность безотказной работы эквивалентной цепочки элементов имеет вид

$$R_{EQ} = R^n$$

для каждой параллельной цепочки. Таким образом, вероятность безотказной работы выражается формулой

$$R_{S, \text{общ}} = 1 - (1 - R^n)^m.$$

График, соответствующий этому уравнению, показан на рис. 1.15. И в этом случае можно наблюдать влияние структуры системы и надежности элементов на надежность системы.

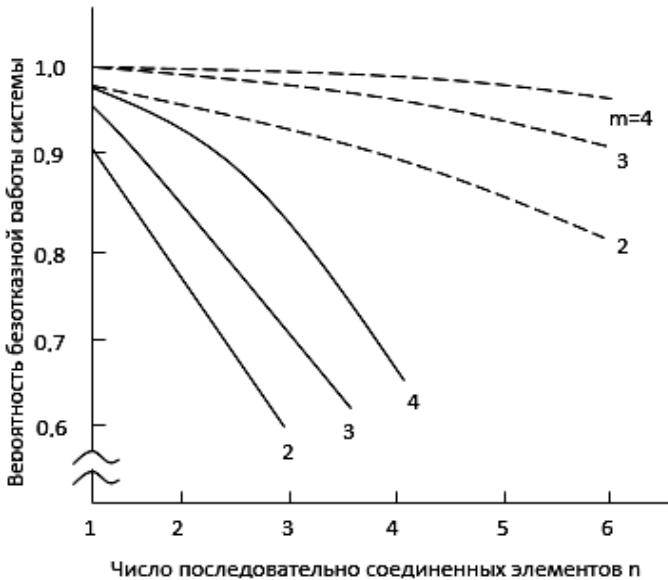


Рис. 1.15. Общее резервирование

Сравнение графиков на рис. 1.14 и рис. 1.15 показывает, что во всех случаях раздельное резервирование обеспечивает более высокую надежность. Однако это различие не является существенным, если элементы имеют высокую надежность. По существу, эти гра-

фики показывают, что введение резервных элементов обеспечивает более высокую надежность, чем введение резервных систем. Разумеется, это может относиться и к подсистемам различного уровня в зависимости от возможного разбиения системы, поскольку в некоторых случаях конструкция или особенности системы делают невозможным применение всех этих правил. Кроме того, необходимо рассматривать работу системы в целом. Например, если тормозная система автомобиля отказывает при скорости 80 км/ч в условиях интенсивного уличного движения, то мало проку от того, что в багажнике будет полный набор запасных частей. Поэтому эти общие рекомендации нужно применять конкретно.

### 1.5. Понятие управляемости и наблюдаемости

Понятию *управляемости* сначала дадим математическое описание, что будет способствовать лучшему его пониманию. Пусть линейный многомерный процесс описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dm(t), \quad (1.3)$$

где  $A$  – квадратная матрица коэффициентов  $n$ -го порядка;

$x$  –  $n$ -мерный вектор состояния;

$D$  – матрица управления размера  $n \times r$ .

$m$  –  $r$ -мерный вектор, представляющий управляющие воздействия.

Из алгебры известно, что матрица  $A$  может быть приведена к диагональной форме с помощью матрицы преобразований  $T$ :

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \lambda_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где  $\lambda_i$  – собственные значения матрицы  $A$  линейной системы (1.3), которые предполагаются различными.

Применяя подстановку

$$x = Tz,$$

уравнение (1.3) запишем в канонической форме:

$$\dot{z}(t) = \Lambda z(t) + \Delta m(t), \quad (1.4)$$

где

$$\Delta = T^{-1}D = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \cdots & \delta_{1r} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \cdots & \delta_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} \cdots & \delta_{nr} \end{bmatrix}.$$

Вектор  $z$  в формуле (1.4) будем называть каноническим вектором состояния системы. Будем считать, что в предыдущих матричных выражениях собственные значения  $\lambda_i$  расположены в порядке возрастания их модулей, комплексные  $\lambda_i$  – в порядке возрастания их аргументов, векторы-столбцы матрицы  $T$  – нормализованы, т. е. они выбраны так, что их евклидова длина равна единице.

Запишем выражение (1.4) в развернутой форме, т. е. в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{z}_1(t) = \lambda_1 z_1(t) + \sum_{k=1}^r \delta_{1k} m_k(t);$$

$$\dot{z}_2(t) = \lambda_2 z_2(t) + \sum_{k=1}^r \delta_{2k} m_k(t);$$

.....

$$\dot{z}_j(t) = \lambda_j z_j(t) + \sum_{k=1}^r \delta_{jk} m_k(t);$$

.....

$$\dot{z}_n(t) = \lambda_n z_n(t) + \sum_{k=1}^r \delta_{nk} m_k(t).$$

Эти уравнения показывают, что управляющее воздействие  $m_k$  не будет оказывать какого-либо влияния на движение по координате  $z_j$ , если

$$\sum_{k=1}^r \delta_{jk} m_k(t) = 0, \quad (1.5)$$

т. е. когда  $\delta_{jk} = 0$  для  $k = 1, 2, \dots, r$ .

Запись в форме (1.5) означает, что элементы  $j$ -й строки матрицы  $\Delta$  все равны нулю. Отсюда следует вывод, что неуправляемыми координатами системы являются все те канонические координаты, которые соответствуют нулевым строкам матрицы  $\Delta$ . Равенство нулю всех элементов этих строк матрицы  $\Delta$  делает невозможным управление по соответствующим им координатам. Это означает также, что изменение координат происходит независимо от управляющих воздействий и, следовательно, целиком определяется начальными условиями и внешними возмущениями. Можно сказать, что эти координаты полностью неуправляемые.

Приведенное рассмотрение позволяет дать следующее **определение управляемости**: процесс, описываемый уравнением (1.4), является **управляемым**, если матрица  $\Delta$  не содержит строк, все элементы которых равны нулю; **координаты**, соответствующие ненулевым строкам  $\Delta$ , считаются **управляемыми**.

На основе описанного выше подхода к определению управляемости были получены некоторые общие условия управляемости, касающиеся составных систем. Эти условия можно сформулировать следующим образом.

**1. Последовательное соединение двух систем.** На рис. 1.16 показана составная система, в которой за звеном  $P_a$  следует звено  $P_b$ . Пусть собственные значения матрицы звена  $P_a$  равны  $\lambda_{1a}, \lambda_{2a}, \dots, \lambda_{pa}$ , а звена  $P_b$  —  $\lambda_{1b}, \lambda_{2b}, \dots, \lambda_{qb}$ .

Тогда можно показать, что:

а) составная система является управляемой, если оба звена  $P_a$  и  $P_b$  являются управляемыми;

б) если  $P_a$  и  $P_b$  – управляемые звенья, то каждая из неуправляемых координат составной системы обязана своей неуправляемостью звену  $P_a$ .

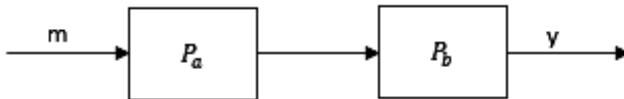


Рис. 1.16. Составная система при последовательном соединении двух звеньев

2. **Параллельное соединение двух звеньев.** На рис. 1.17 показана составная система, в которой параллельно соединены два звена  $P_a$  и  $P_b$ . Можно показать, что для полной управляемости составного звена необходимо и достаточно, чтобы оба звена  $P_a$  и  $P_b$  были управляемыми.

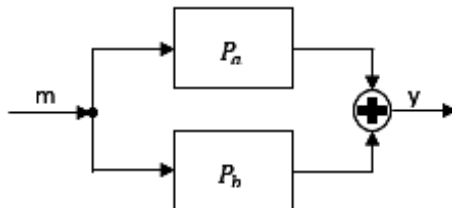


Рис. 1.17. Составная система при параллельном соединении двух звеньев

3. **Соединение двух звеньев с образованием цепи обратной связи.** Рассматриваемая составная цепь показана на рис. 1.18, на котором  $P_a$  – звено в прямой и  $P_b$  – звено в обратной цепи контура системы. Составное звено, в котором за звеном  $P_a$  следует звено  $P_b$ , обозначим  $P_1$ , и составное звено, в котором за звеном  $P_b$  следует звено  $P_a$ , обозначим  $P_2$ .

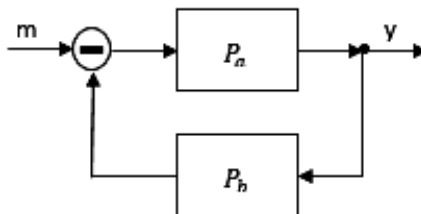


Рис. 1.18. Составная цепь соединения двух звеньев с образованием цепи обратной связи



Тогда можно показать, что:

а) для управляемости составной системы необходимо и достаточно, чтобы последовательная цепь  $P_1$  была управляемой;

б) составное звено является управляемым, если оба звена  $P_a$  и  $P_b$  являются управляемыми;

в) если  $P_a$  и  $P_b$  – управляемые звенья, то любая неуправляемая координата составной системы является также неуправляемой координатой цепи  $P_1$  и своей неуправляемостью обязана звену  $P_b$ .

### *1.5.1. Региональная управляемость*

**Систему или объект** принято называть **регионально управляемыми**, если они могут быть переведены из некоторого начального состояния  $x(t_0)$  в окрестность желаемого состояния равновесия  $x(t_1)$  за конечный интервал времени  $t_1 - t_0$ . Заметим, что когда на управляющие воздействия  $m$  наложены ограничения, то переход точно в состояние  $x(nT) = 0$  за  $n$  периодов прерывания возможен только из ограниченного множества начальных состояний  $x(0)$ , даже если система является полностью управляемой.

Понятие региональной управляемости оказывается полезным при синтезе некоторых нелинейных систем, когда ставится задача отыскания управления, переводящего систему в окрестность состояния равновесия, т. е. рассматривается приближенное решение задачи.

### *1.5.2. Полная управляемость*

Систему или объект принято называть полностью управляемыми, если они могут быть переведены из некоторого начального состояния  $x(t_0)$  в желаемое состояние равновесия  $x(t_1)$  за конечный интервал времени  $t_1 - t_0$ . Другими словами, система является полностью управляемой, если существует управляющее воздействие  $m(t)$ , определенное на конечном интервале времени  $t_0 \leq t \leq t_1$ , которое переводит систему из начального состояния  $x(t_0)$  в желаемое состояние равновесия  $x(t_1)$  за время  $t_1 - t_0$ .

**Необходимые и достаточные условия** полной управляемости для случая **дискретных систем** можно сформулировать следующим образом.

Линейный дискретный процесс  $n$ -го порядка является полностью управляемым тогда и только тогда, когда векторы

$$s_1 = \varphi(-T)\mathbf{h}(T);$$

$$s_2 = \varphi(-2T)\mathbf{h}(T);$$

.....

$$s_n = \varphi(-nT)\mathbf{h}(T)$$

линейно независимы.

Эти векторы возникают в связи со следующими преобразованиями от непрерывных систем к дискретным и от аналогового управления к цифровому. Рассмотрим процесс, описываемый уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + d m(t),$$

в котором  $m(t)$  – единственное (скалярное) управляющее воздействие.

Случай единственного управляющего воздействия рассматривается ради упрощения интерпретации получаемых выражений и может быть обобщен. Уравнение переходных состояний процесса в дискретной записи имеет вид

$$x(\overline{k+1T}) = \varphi(T)x(kT) + h(T)m(kT), \quad (1.6)$$

где  $\varphi(T)$  – матрица перехода процесса;

$$\mathbf{h}(T) = \int_0^T \boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau.$$

При  $k=0$  из формулы (1.6) находим, что

$$\mathbf{x}(T) = \varphi(T)\mathbf{x}(0) + h(T)m(0). \quad (1.7)$$

Предположим теперь, что  $\mathbf{x}(T) = 0$ . Тогда начальное состояние  $\mathbf{x}(0)$ , из которого переход в состояние равновесия можно совершить за один период  $T$ , найдем в виде

$$\mathbf{x}(0) = -\Phi(-T)\mathbf{h}(T)\mathbf{m}(0) = -\mathbf{m}(0)s_1.$$

Если сигнал  $m(0)$  свободен от ограничений, то система из всех своих начальных состояний  $\mathbf{x}(0)$ , лежащих на направлении вектора  $s_1$ , может быть переведена в состояние  $\mathbf{x}(T) = 0$  за один период  $T$ . Если на сигнал  $m(0)$  наложены ограничения, то область приводимых начальных состояний уже не будет содержать целиком линии, совпадающей с  $s_1$ .

При  $k = 1$  из формулы (1.6) находим

$$\mathbf{x}(2T) = \Phi(T)\mathbf{x}(T) + \mathbf{h}(T)\mathbf{m}(T).$$

Используя выражение (1.7) и свойства матрицы перехода, получаем

$$\mathbf{x}(2T) = \Phi(2T)\mathbf{x}(0) + \Phi(T)\mathbf{h}(T)\mathbf{m}(0) + \mathbf{h}(T)\mathbf{m}(T).$$

Предположим, что  $\mathbf{x}(2T) = 0$ . Тогда начальное состояние  $\mathbf{x}(0)$ , из которого можно достичь состояния равновесия за два периода, найдем в виде

$$\mathbf{x}(0) = -\mathbf{m}(0)s_1 - \mathbf{m}(T)s_2,$$

где  $s_1 = \Phi(-T)\mathbf{h}(T)$  и  $s_2 = \Phi(-2T)\mathbf{h}(T)$  — линейно независимые векторы.

Таким образом, находим, что если сигналы  $m(0)$  и  $m(T)$  свободны от ограничений, то система из своих начальных состояний, принадлежащих плоскости, содержащей векторы  $s_1$  и  $s_2$ , может быть переведена в состояние  $\mathbf{x}(2T) = 0$  за два периода. Однако если на один из сигналов  $m(0)$  или  $m(T)$  или одновременно на оба наложены ограничения, то область приводимых начальных состоя-

ний будет включать лишь часть этой плоскости, содержащей базисные векторы  $s_1$  и  $s_2$ .

По аналогии с предыдущим при  $k = n$  получаем

$$x(0) = -m(0)s_1 - m(T)s_1 - \dots - m(\overline{i-1T})s_i - \dots - m(\overline{n-1T})s_n,$$

где  $s_i = \Phi(-iT)h(T)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , – линейно независимые векторы.

Векторы  $s_i$  составляют базис в пространстве состояний процесса. Таким образом, заключаем, что если управления  $m(iT)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) свободны от ограничений, то любое начальное состояние  $x(0)$  можно представить в виде линейной комбинации векторов  $s_i$ , и поэтому из состояния  $x(0)$  в состояние равновесия  $x(nT) = 0$  система может быть переведена самое большее за  $n$  периодов, т. е. за время  $t_1 \leq nT$ . Однако если на управления  $m(iT)$  наложены ограничения, то некоторые начальные состояния  $x(0)$  уже нельзя будет представить в виде ограничения. Следовательно, в этом случае для перевода системы из начального состояния  $x(0)$  в состояние  $x(nT) = 0$  потребуется затратить больше времени.

Аналогичным образом можно получить условия управляемости непрерывных систем. Можно показать, что непрерывный во времени процесс  $n$ -го порядка, описываемый уравнением

$$\dot{x} = Ax + dm,$$

является полностью управляемым тогда и только тогда, когда векторы  $d, Ad, \dots, A^{n-1}d$  линейно независимы.

### 1.5.3. Наблюдаемость

Запишем выражение типа (1.3) для вектора  $y$  выхода линейного многомерного процесса:

$$\dot{y}(t) = Bx(t) + Gm(t), \quad (1.8)$$



**Координату состояния** принято называть **наблюдаемой**, если она может быть определена или для нее может быть получена оценка по измеримым выходным переменным. Анализ уравнений (1.9) показывает, что координата  $x_k$  может быть определена или для нее может быть найдена оценка по выходным переменным  $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_p$ , если коэффициенты  $b_{ik}$  для  $i = 1, 2, \dots, p$  не все равны нулю. Другими словами,  $x_k$  является **наблюдаемой** координатой, если элементы  $k$ -го столбца матрицы выхода не все равны нулю. Если это условие не соблюдается, то координату  $x_k$  называют ненаблюдаемой.

Таким образом, **линейный процесс** является **наблюдаемым**, если матрица выхода  $B$  **не содержит столбцов**, элементы которых **равны нулю**.

Частным случаем наблюдаемости является **идентифицируемость** системы, когда по известному входу и измеренному (наблюдаемому) выходу можно оценить компоненты матрицы  $B$  (параметры системы).

## 1.6. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость в дискретных системах

Расширим модель системы, добавив модель наблюдения, связывающую наблюдение  $y$  с состоянием  $x$ . Пусть объект описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k); \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \tag{1.10}$$

где  $x$  – вектор размерности  $n$ .

Дадим эквивалентные определения управляемости, наблюдаемости, идентифицируемости.

Объект называется **управляемым**, если можно найти такой (быть может, неограниченный) вектор управления, который из произвольного начального состояния переводит систему в произвольное конечное состояние за ограниченное время. Таким образом, необ-

ходимо найти условие, при котором можно определить уравнение, которое переводит систему из состояния  $\mathbf{x}(0)$  в заданное состояние  $\mathbf{x}(n)$  пошагово:

$$\mathbf{x}(1) = A\mathbf{x}(0) + B\mathbf{u}(0);$$

$$\mathbf{x}(2) = A\mathbf{x}(1) + B\mathbf{u}(1) = A^2\mathbf{x}(0) + AB\mathbf{u}(0) + B\mathbf{u}(1);$$

$$\mathbf{x}(n) = A^n\mathbf{x}(0) + A^{n-1}B\mathbf{u}(0) + \dots + B\mathbf{u}(n-1)$$

или

$$\mathbf{x}(n) - A^n\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} A^{n-1}B & A^{n-2}B & \dots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(n-1) \end{bmatrix}.$$

Поскольку  $A, \mathbf{x}(0)$  и  $\mathbf{x}(n)$  известны, левая часть уравнения (1.10) определена. Единственное решение  $\mathbf{u}$  существует только тогда, когда матрица

$$\begin{bmatrix} A^{n-1}B & A^{n-2}B & \dots & B \end{bmatrix}$$

имеет ранг  $n$ . В этом случае  $(A, B)$  называют управляемой парой.

Объект называется *наблюдаемым*, если по измерениям выходного сигнала объекта можно определить его состояние. Таким образом, необходимо найти условие, при котором по известным измерениям  $\mathbf{y}$  можно определить состояние  $\mathbf{x}(0)$ :

$$\mathbf{y}(0) = C\mathbf{x}(0);$$

$$\mathbf{y}(1) = C\mathbf{x}(1) = CA\mathbf{x}(0);$$

$$\mathbf{y}(n-1) = CA^{n-1}\mathbf{x}(0),$$

или, транспонируя, имеем

$$\left[ y'(0) | y'(1) | \dots | y'(n-1) \right] = x'(0) \left[ C' | A'C' | \dots | A^{n-1}C' \right].$$

Так как векторы  $y$  известны, единственное решение  $x(0)$  существует только тогда, когда матрица

$$\left[ C' | A'C' | \dots | A^{n-1}C' \right]$$

имеет ранг  $n$ . В этом случае  $(A, C)$  называется наблюдаемой парой. Введение обратной связи может отразиться на наблюдаемости объекта.

Объект называется **идентифицируемым**, если по измерениям координат состояния объекта можно определить матрицу системы  $A$ :

$$x(1) = Ax(0);$$

$$x(2) = A^2x(0);$$

$$x(n) = A^n x(0),$$

или

$$\left[ x(1) | x(2) | \dots | x(n) \right] = A \left[ x(0) | Ax(0) | \dots | A^{n-1}x(0) \right].$$

Так как векторы  $x$  известны, единственное решение для  $A$  существует только тогда, когда матрица

$$\left[ x(0) | Ax(0) | \dots | A^{n-1}x(0) \right]$$

имеет ранг  $n$ .



## Пример 1.2

Рассмотрим систему второго порядка

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),$$

$$y(k) = Cx(k)$$

(рис. 1.9), где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

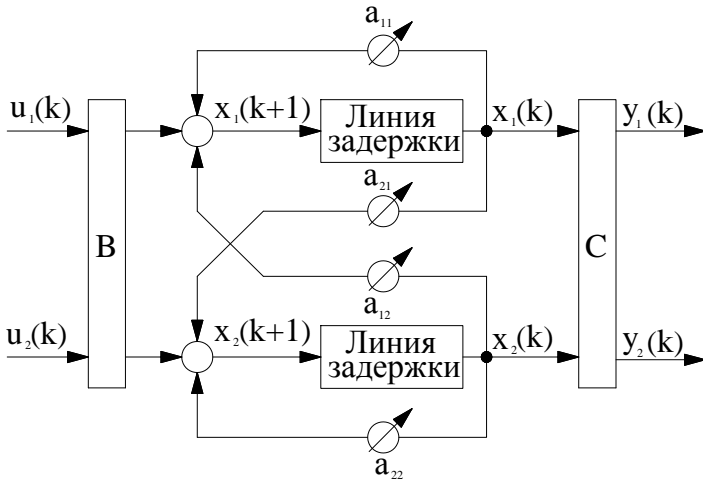


Рис. 1.19. Схема системы второго порядка

Рассмотрим управляемость системы. Имеем

$$[A, B | B] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Система управляема, если ранг равен 2, т. е. когда  $a_{21} \neq 0$ , и неуправляема, если  $a_{21} = 0$ . Из рис. 1.20 видно, что когда  $a_{21} = 0$ , отсутствует управление координатной  $x_2$ . Отметим, что все остальные параметры  $a_{ij}$  могут равняться нулю, но система останется управляемой.

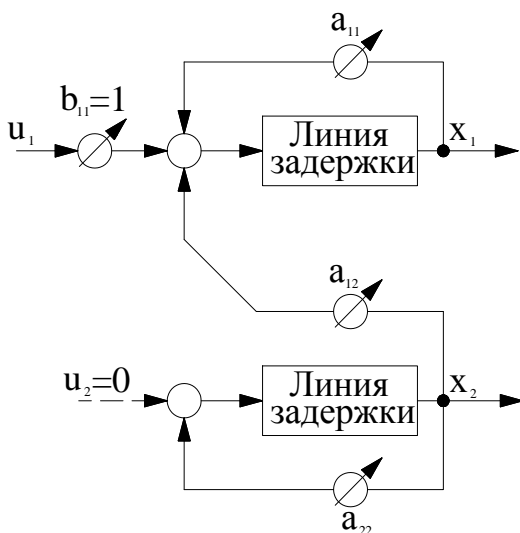


Рис. 1.20. Управляемая система

Рассмотрим наблюдаемость. Имеем

$$[C' | A' C'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & 0 \end{bmatrix}.$$

**Система наблюдаема, если ранг равен 2, т. е. когда  $a_{12} \neq 0$ , и ненаблюдаема, когда  $a_{12} = 0$ .** В этом случае выходная координата  $y$  не содержит информации о  $x_2$  (рис. 1.21). Снова отметим, что все остальные параметры могут равняться нулю, но система останется наблюдаемой.

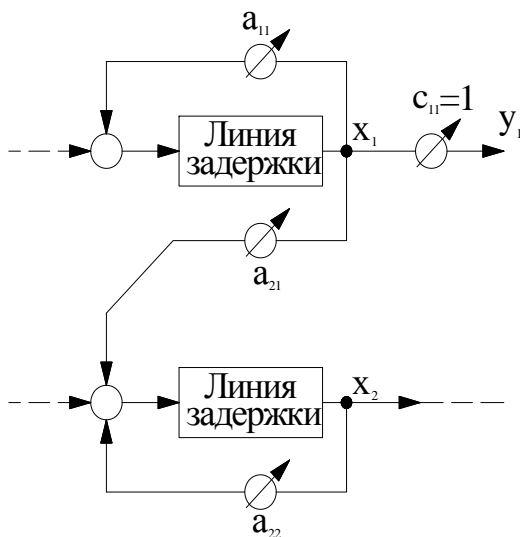


Рис. 1.21. Наблюдаемая система

Рассмотрим идентифицируемость

$$[x(0) | Ax(0)] = \begin{bmatrix} x_1(0) & a_{11}x_1(0) + a_{12}x_2(0) \\ x_2(0) & a_{21}x_1(0) + a_{22}x_2(0) \end{bmatrix}.$$

Система идентифицируема, если ранг матрицы равен 2, и не-идентифицируема, если определитель матрицы равен 0. Для этого оба столбца матрицы должны быть линейно зависимы. Различают простейший случай, когда  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ , т. е. **объект, который находится в состоянии покоя, не может быть идентифицирован**, и нетривиальный случай, когда

$$\lambda \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix},$$

или

$$[A - \lambda I] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = 0.$$

В этом случае нужно найти собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и соответствующие собственные векторы  $r_1$  и  $r_2$ . Если  $x(0) = \alpha r_1$ , то возбуждается только одна гармоника объекта  $\exp[\lambda_1 t]$ , а гармоника  $\exp[\lambda_2 t]$  не идентифицируется. Если  $x(0) = \beta r_2$ , то может быть идентифицирована одна только гармоника  $\exp[\lambda_2 t]$ . Таким образом, объект идентифицируем только тогда, когда начальное условие  $x = (0)$  возбуждает все гармоники объекта.

## ***Глава 2. МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ***

При исследовании систем приходится иметь дело с двумя типами задач. К первому типу относятся задачи **анализа**, когда требуется определить характеристики заранее заданной системы; ко второму – задачи **синтеза**, когда требуется спроектировать систему, обладающую заданными характеристиками. Существуют два основных подхода к анализу и синтезу линейных систем:

1. Схемотехнический подход, который сводится к составлению блок-схемы или структурной схемы и определению передаточных функций отдельных элементов и всей системы. Задача состоит в нахождении схемы регулятора, обеспечивающего получение требуемых статических и динамических характеристик системы.

2. Второй подход (символьный) основан на описании поведения системы некоторым количеством дифференциальных уравнений относительно переменных состояния с начальными условиями. Переменные состояния при таком описании системы аналогичны **обобщенным координатам** в классической механике. Решение задачи при использовании этого подхода обычно начинают с составления схемы системы в переменных состояния. Методы анализа и синтеза систем управления, использующие этот способ описания поведения системы, принято называть **методами пространства состояний**.

### **2.1. Пространство состояний при анализе и синтезе систем**

Методы анализа и синтеза систем, а также обработки информации, использующие теоретико-множественный подход к описанию

поведения динамических систем имеют широкое применение в классической механике, теории конечных автоматов, теории дифференциальных уравнений, теории управления.

Понятие *состояния*, лежащее в основе описания поведения динамических систем, было введено А. М. Тьюрингом в 1936 г. Позднее это понятие было использовано К. Э. Шенноном в теории информации.

С точки зрения анализа и синтеза систем все переменные, характеризующие систему или имеющие к ней отношение, целесообразно разделить на три группы:

1) **входные переменные или входные воздействия**  $m_i$ , представляющие сигналы, генерируемые системами, внешними по отношению к исследуемой, и влияющие на поведение системы;

2) **выходные переменные или переменные**, характеризующие реакцию системы  $y_i$ , позволяющие описать некоторые аспекты поведения системы;

3) **переменные (координаты) состояния или промежуточные переменные**  $x_h$ , характеризующие динамическое поведение системы.

Схематически система может быть изображена в виде «черного ящика» с некоторым числом входных и выходных каналов, как показано на рис. 2.1. Входные каналы на этом рисунке представляют совокупность входных переменных или входных воздействий  $m_i$ ; выходные каналы – совокупность выходных переменных или выходных координат  $y_i$  системы. Промежуточные переменные или координаты состояния  $x_h$  отнесены к содержимому «черного ящика» и, таким образом, скрыты от наблюдения (измерения). Величины  $m_i$ ,  $y_i$  и  $x_h$  предполагаются функциями времени.

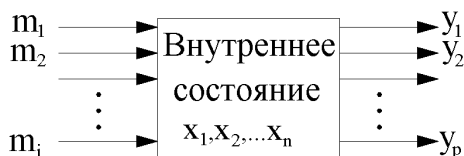


Рис. 2.1. Схема «черного ящика» к описанию системы переменными состояниями

Для удобства оперирования с многомерными величинами совокупность входных переменных представим в виде **вектора входа**

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_l \end{bmatrix},$$

совокупность выходных переменных – в виде **вектора выхода**

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

и совокупность переменных состояния – в виде **вектора состояния**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Согласно понятию векторного пространства в математике множество всех значений, которые может принять вектор входа  $\mathbf{m}$  в момент  $t$ , образует **пространство входа системы**. Аналогично множество всех значений, которые может принять вектор выхода  $\mathbf{y}$  в момент  $t$ , образует **пространство выхода системы**, и множество всех значений, которые может принять вектор состояния  $\mathbf{x}$  в момент  $t$ , образует **пространство состояний системы**.

В любой момент времени  $t$  состояние системы является функцией начального состояния  $\mathbf{x}(t_0)$  и вектора входа  $\mathbf{m}(t_0, t)$ :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{m}(t_0, t)], \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{F}$  – однозначная вектор-функция своих аргументов.

Вектор выхода в момент  $t$  является также функцией  $\mathbf{x}(t_0)$  и  $\mathbf{m}(t_0, t)$  и может быть записан в виде

$$\mathbf{y}(t) = \Psi[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{m}(t_0, t)]. \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1) и (2.2) называют *уравнениями состояния системы*. Для систем, описываемых дифференциальными уравнениями, уравнения (2.1) и (2.2) могут быть записаны в следующей общей форме:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t); \mathbf{m}(t)]; \quad (2.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \Psi[\mathbf{x}(t); \mathbf{m}(t)], \quad (2.4)$$

где (2.1) – модель состояния;

(2.7) – модель измерения системы.

Для систем, которые являются **конечными автоматами**, уравнения состояния принимают вид

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(n-1); \mathbf{m}(n-1)];$$

$$\mathbf{y}(n) = \Psi[\mathbf{x}(n); \mathbf{m}(n)].$$

Если система описывается линейными дифференциальными уравнениями, то уравнения состояния системы сводятся к следующим:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{m}(t);$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{m}(t),$$

где  $\mathbf{A}(t)$  – матрица коэффициентов (параметров системы);

$\mathbf{D}(t)$  – матрица управления;

$B(t)$  – матрица выхода;

$G(t)$  – матрица обхода системы.

Для линейной системы со случайными параметрами уравнения состояния могут быть записаны в виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(\mathbf{r})\mathbf{x}(t) + D(\mathbf{r})\mathbf{m}(t),$$

где матрицы  $A$  и  $D$  являются функциями вектора случайных параметров  $\mathbf{r}$ .

Вывод уравнений состояния, полностью характеризующих систему, является начальным этапом анализа и синтеза систем в теории систем.

## 2.2. Операционный метод описания динамических систем

Линейная система может быть описана совокупностью линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, которую можно представить в следующей векторно-матричной канонической форме:

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = A\mathbf{v}(t), \quad (2.5)$$

где  $A$  – матрица коэффициентов;

$\mathbf{v}(t)$  – вектор-столбец, представляющий собой входные переменные  $m_i$  и координаты  $x_h$  системы:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}.$$

Если входные переменные рассматривать совместно с переменными состояниями системы, т. е. включить их в число координат системы, то вектор  $\mathbf{v}$  можно считать вектором состояния системы увеличенной размерности.



## Пример 2.1

Рассмотрим систему второго порядка, описываемую уравнением

$$\ddot{x}(t) + ax(t) + bx(t) = m(t).$$

Чтобы записать это уравнение в векторно-матричной форме, положим

$$x_1 = x \text{ и } x_2 = \dot{x}_1$$

и тогда получим

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = m - bx_1 - ax_2.$$

Вначале рассмотрим случай  $m = 0$ . Обозначая

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix},$$

записывая уравнения в векторном виде, получим

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}.$$

Пусть входное воздействие  $m$  имеет вид ступенчатой функции. Тогда

$$\dot{m} = 0;$$

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = m - bx_1 - ax_2.$$

Обозначим

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} m \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -b & -a \end{bmatrix}.$$

Запишем уравнения в векторно-матричном виде:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = A\mathbf{v},$$

где  $A$  – матрица коэффициентов системы увеличенной размерности.

В случае входного воздействия произвольной формы систему увеличенной размерности можно по-прежнему описать уравнением в векторном виде, введя в число ее переменных состояния дополнительные переменные, характеризующие входное воздействие.

Пусть теперь заданы начальные условия для уравнения (2.5), т. е. задан вектор  $\mathbf{v}(0^+)$ . Применяя к уравнению (2.5) преобразование Лапласа, находим

$$p\mathbf{V}(p) - \mathbf{v}(0^+) = A\mathbf{V}(p)$$

или

$$[pI - A]\mathbf{V}(p) = \mathbf{v}(0^+).$$

Получаем, что изображение по Лапласу  $\mathbf{V}(p)$  вектора состояния  $\mathbf{v}(t)$  имеет вид

$$\mathbf{V}(p) = [pI - A]^{-1} \mathbf{v}(0^+), \quad (2.6)$$

где  $I$  – единичная матрица.

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (2.6), получаем

$$\mathbf{v}(t) = L^{-1} [pI - A]^{-1} \mathbf{v}(0^+). \quad (2.7)$$

Обозначая

$$\Phi(t) = L^{-1} \left\{ [pI - A]^{-1} \right\},$$

уравнение (2.7) запишем в виде

$$\mathbf{v}(t) = \Phi(t) \mathbf{v}(0^+). \quad (2.8)$$

Матрица  $\Phi(t)$  называется расширенной матрицей перехода системы.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений было известно, что решение уравнения (2.5) имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = e^{At} \mathbf{v}(0^+). \quad (2.9)$$

Сравнивая формулы (2.8) и (2.9), находим

$$\Phi(t) = e^{At};$$

$$\Phi(t) = L^{-1} \left\{ [sI - A]^{-1} \right\},$$

что позволяет вычислить  $\Phi(t)$  двумя способами.

Обращаясь вновь к описанному выше примеру 1, находим

$$[pI - A] = \begin{bmatrix} p & -1 \\ b & p + a \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\Phi(p) = [pI - A]^{-1} = \frac{1}{p(p+a)+b} \begin{bmatrix} p+a & 1 \\ -b & p \end{bmatrix}.$$

Пусть матрица  $A$  имеет действительные и различные собственные значения

$$\lambda_1 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b};$$

$$\lambda_2 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b},$$

где  $a^2 > 4b$ .

Тогда

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4b}} \begin{bmatrix} (\lambda_1 - a)e^{-\lambda_1 t} - (\lambda_2 - a)e^{-\lambda_2 t} & e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t} \\ b(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) & \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

Если собственные значения матрицы  $A$  являются комплексными числами, то матрица перехода  $\Phi(t)$  принимает вид

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{at}{2}} \left( \cos \omega_0 t + \frac{a}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \right) & \frac{1}{\omega_0} e^{\frac{at}{2}} \sin \omega_0 t \\ -\frac{b}{\omega_0} e^{\frac{at}{2}} \sin \omega_0 t & e^{\frac{at}{2}} \left( \cos \omega_0 t - \frac{a}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \end{bmatrix},$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}.$$

Определение  $\Phi(t)$  при использовании теоремы разложения Сильвестра рассматривается в курсе математики.

Способ определения переменных состояния с использованием схемы системы в переменных состояния: схема составляется из интеграторов, усилителей, суммирующих устройств. Выходы интеграторов могут быть выбраны в качестве координат (переменных) состояния системы. Схема в переменных состояния дает наглядную физическую интерпретацию координат системы и описывает их взаимную связь. Схему в переменных состояния можно составить непосредственно по заданному дифференциальному уравнению или по изображению Лапласа. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям дифференциального уравнения примера 2.1, получим

$$(p^2 + ap + b)X(p) = M(p) + (p + a)x(0^+) + ax(0^+),$$

откуда

$$X(p) = \frac{p^{-2}M(p)}{1 + ap^{-1} + bp^{-2}} + \frac{p^{-1}(1 + ap^{-1})x(0^+)}{1 + ap^{-1} + bp^{-2}} + \frac{p^{-2}x(0^+)}{1 + ap^{-1} + bp^{-2}}.$$

Схема системы в переменных состояния, которая непосредственно следует из формулы, изображена на рис. 2.2.

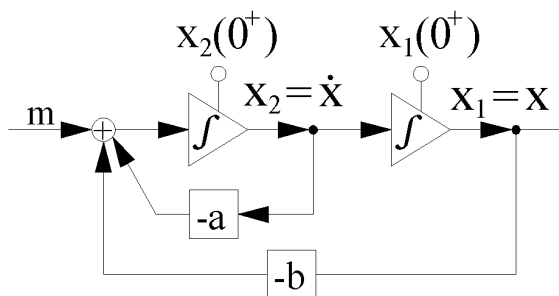


Рис. 2.2. Схема в переменных состояния для системы второго порядка для примера 2.1

Выход  $x = x_1$  является суммой трех составляющих, возникающих соответственно за счет  $m(t)$ ,  $x_1(0^+)$  и  $x_2(0^+)$ . Из схемы системы и формулы видно, что составляющая за счет  $x_1(0^+)$  равна

$$\frac{p^{-1}(1+ap^{-1})x_1(0^+)}{1+ap^{-1}+bp^{-2}}$$

и составляющая за счет  $x_2(0^+)$  равна

$$\frac{x_2(0^+)}{1+ap^{-1}+bp^{-2}}.$$

### 2.3. Схемы программирования для непрерывных систем

Схемы непрерывных систем в переменных состояния совпадают со схемами этих систем на аналоговых вычислительных машинах. Схема системы в переменных состояния может быть составлена по **передаточной функции** системы тремя различными способами:

- 1) прямого программирования;
- 2) параллельного программирования;
- 3) последовательного программирования.

Для иллюстрации различных методов составления схемы системы в переменных состояния рассмотрим систему с передаточной функцией  $W(p)$  вида

$$W(p) = \frac{Y(p)}{M(p)} = \frac{p^2 + 3p + 2}{p(p^2 + 7p + 12)}. \quad (2.10)$$

#### 2.3.1. Прямое программирование

Уравнение (2.10) можно записать в виде

$$W(p) = \frac{Y(p)}{M(p)} = \frac{p^{-1} + 3p^{-2} + 2p^{-3}}{1 + 7p^{-1} + 12p^{-1}}$$

или

$$Y(p) = (p^{-1} + 3p^{-2} + 2p^{-3})E(p), \quad (2.11)$$

где

$$E(p) = \frac{M(p)}{1 + 7p^{-1} + 12p^{-2}},$$

откуда

$$E(p) = M(p) - 7p^{-1}E(p) - 12p^{-2}E(p). \quad (2.12)$$

В схеме системы в переменных состояния, показанной на рис. 2.3, используются уравнения (2.11) и (2.12). Переменными состояниями являются  $x_1, x_2, x_3$ .

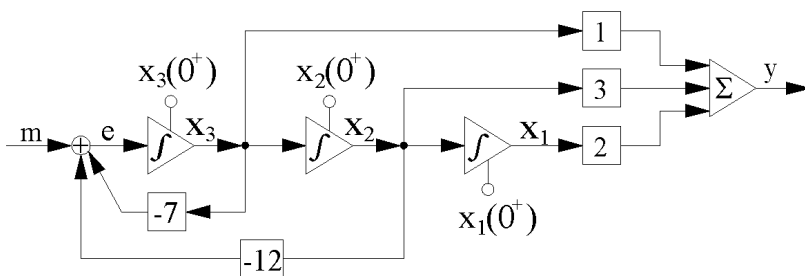


Рис. 2.3. Схема в переменных состояния для прямого программирования

Дифференциальные уравнения для переменных состояния могут быть найдены из рассмотрения схемы системы. Предполагая, что входное воздействие является ступенчатой функцией, получим

$$\dot{m} = 0;$$

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = x_3;$$

$$\dot{x}_3 = m - 12x_2 - 7x_3.$$

Отсюда

$$v = \begin{bmatrix} m \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -12 & -7 \end{bmatrix}.$$

Выход  $y(t)$  является линейной комбинацией переменных состояния

$$y(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) + x_3(t).$$

### 2.3.2. Параллельное программирование

Запишем равенство (2.10) в виде суммы дробно-рациональных функций:

$$\frac{Y(s)}{M(s)} = \frac{1}{6s} - \frac{2}{3(s+3)} + \frac{3}{2(s+4)}.$$

Схема системы в переменных состояния (рис. 2.4) следует из этого выражения непосредственно.

Система дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид

$$m = 0;$$

$$\dot{x}_1 = m;$$

$$\dot{x}_2 = m - 3x_2;$$

$$\dot{x}_3 = m - 4x_3,$$

где предполагается, что входное воздействие является ступенчатой функцией.



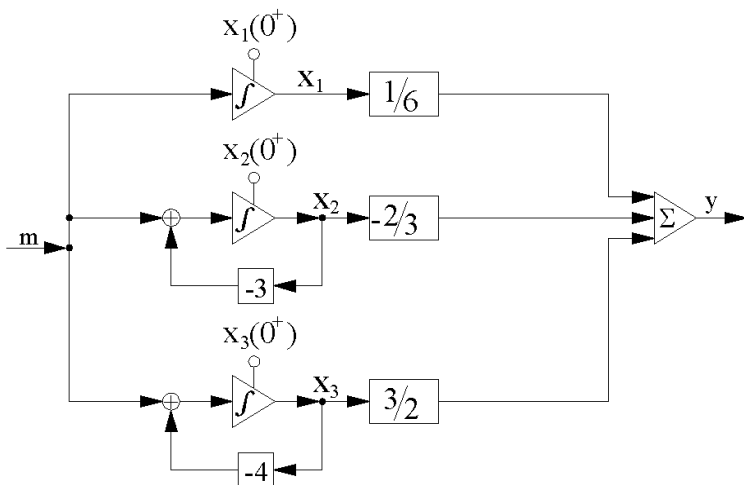


Рис. 2.4. Схема в переменных состояния для параллельного программирования

Матрица коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Так же, как и ранее, выход  $y(t)$  является линейной комбинацией координат:

$$y(t) = \frac{1}{6}x_1(t) - \frac{2}{3}x_2(t) + \frac{3}{2}x_3(t).$$

### 2.3.3. Последовательное программирование

Равенство (2.10) записываем в виде произведения дробно-рациональных функций, откуда непосредственно следует сумма системы в переменных состояния, показанная на рис. 2.5.

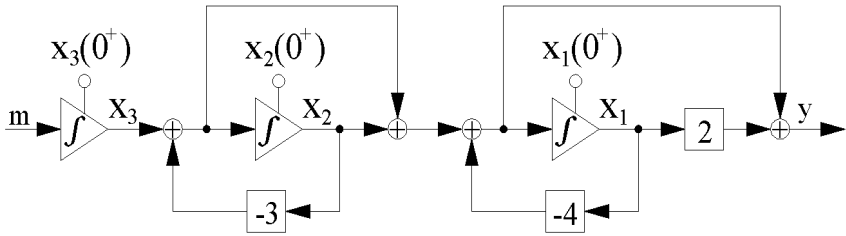


Рис. 2.5. Схема в переменных состояния для последовательного программирования

Система дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид

$$\dot{m} = 0;$$

$$\dot{x}_1 = -4x_1 + x_2 + x_3;$$

$$\dot{x}_2 = -3x_2 + x_3;$$

$$\dot{x}_3 = m.$$

Здесь также предполагается, что входное воздействие является ступенчатой функцией. Матрица коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выход  $y(t)$  дается линейной комбинацией координат:

$$y(t) = -2x_1(t) - 2x_2(t)x_3(t).$$

Предыдущее рассмотрение иллюстрирует также описание системы различными системами переменных состояния.

## 2.4. Схемы программирования для дискретных систем

Для дискретных систем схемы в переменных состояния имеют почти такой же вид, как и схемы моделирования этих систем. Последние могут быть составлены по передаточной функции дискретной системы тремя различными способами:

- 1) прямого программирования;
- 2) параллельного программирования;
- 3) последовательного программирования.

Схема системы в переменных состояния состоит из прерывателей, элементов фиксации и задержки, суммирующих устройств, усилителей или потенциометров.

Для иллюстрации различных способов составления схемы системы в переменных состояния рассмотрим дискретную систему, характеризуемую передаточной функцией

$$D(p) = \frac{1 + ap^{-1} + bp^{-2}}{1 + cp^{-1} + dp^{-2}}, \quad (2.13)$$

структурная схема которой показана на рис. 2.6.

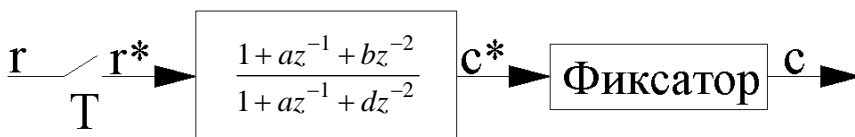


Рис. 2.6. Структурная схема простой дискретной системы

### 2.4.1. Прямое программирование

Схема системы в переменных состояния, составленная при использовании стандартной процедуры, показана на рис. 2.7. Переменные  $x_1$  и  $x_2$  характеризуют состояние объекта и представляют собой выходы соответствующих фиксаторов и элементов задержки.

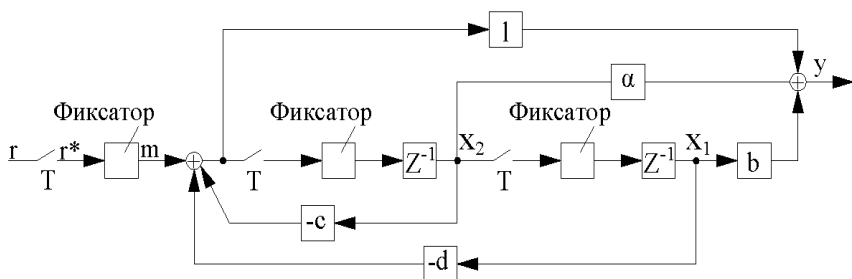


Рис. 2.7. Схема в переменных состояния для прямого программирования

Из рассмотрения схемы системы в переменных состояния получаем дифференциальные уравнения состояния

$$\dot{x}_1 = 0;$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

и уравнения переходных состояний

$$x_1(nT^+) = x_1(\overline{n+1T}) = x_2(nT);$$

$$x_2(nT^+) = -dx_1(nT) - cx_2(nT) + m(nT);$$

$$m(nT^+) = r(nT).$$

Уравнения переходных состояний описывают изменение координат системы в моменты квантования и определяют начальные условия для каждого перехода системы в другое состояние. Выходной сигнал  $y(t)$  является линейной комбинацией координат  $x_1$  и  $x_2$  и входного воздействия  $m$ :

$$y(t) = (b-d)x_1(t) + (a-c)x_2(t) + m(t).$$

### 2.4.2. Параллельное программирование

Для составления схемы системы в переменных состояния методом параллельного программирования запишем передаточную функцию в виде суммы дробно-рациональных функций:

$$D(p) = \frac{1 + \alpha_1 p^{-1}}{1 + \beta_1 p^{-1}} + \frac{1 + \alpha_2 p^{-1}}{1 + \beta_2 p^{-1}}, \quad (2.14)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  – известные функции от  $a, b, c, d$ .

Схема системы в переменных состояния, которая может быть составлена непосредственно по формуле (2.14), показана на рис. 2.8. Дифференциальные уравнения состояния имеют простой вид:

$$\dot{x}_1 = 0;$$

$$\dot{x}_2 = 0.$$

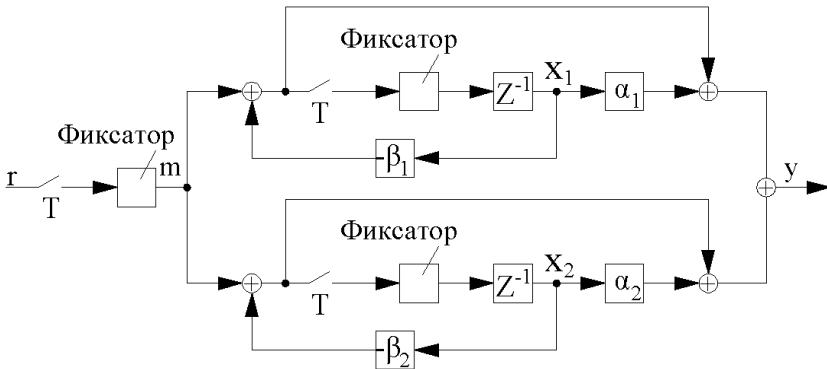


Рис. 2.8. Схема в переменных состояния для параллельного программирования

Уравнения переходных состояний находим в виде

$$x_1(nT^+) = -\beta_1 x_1(nT) + m(nT);$$

$$x_2(nT^+) = -\beta_2 x_2(nT) + m(nT);$$

$$m(nT^+) = r(nT).$$

Выход  $y(t)$  находим из рассмотрения схемы системы в переменных состояниях:

$$y(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + 2m(t),$$

т. е. в виде линейной комбинации координат и входного воздействия.

### 2.4.3. Последовательное программирование

Передаточную функцию (2.13) запишем в виде произведения дробно-рациональных функций:

$$D(p) = \frac{(1 + \alpha p^{-1})(1 + \beta p^{-1})}{(1 + \gamma p^{-1})(1 + \delta p^{-1})}.$$

Схема системы в переменных состояниях показана на рис. 2.9.

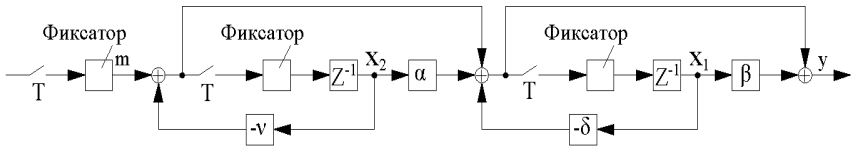


Рис. 2.9. Схема в переменных состояниях для последовательного программирования

Из рассмотрения этой схемы находим дифференциальные уравнения состояния

$$\dot{x}_1 = 0;$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

и уравнения переходных состояний

$$x_1(nT^+) = -\delta x_1(nT) + (\alpha - \delta)x_2(nT) + m(nT);$$

$$x_2(nT^+) = -\gamma x_2(nT) + m(nT);$$

$$m(nT^+) = r(nT).$$

Выход  $y(t)$ , как и ранее, находим в виде линейной комбинации координат и входного воздействия:

$$y(t) = (\beta - \delta)x_1(t) + (\alpha - \gamma)x_2(t) + 2m(t).$$

## 2.5. Выбор переменных состояния в модели посадки летательного аппарата

Представление системы ее схемой в переменных состояния не является единственным. Для одной и той же системы можно составить несколько схем, отличающихся природой переменных, выбранных в качестве переменных состояния. Различный выбор этих переменных обычно приводит к различным конфигурациям схем системы в переменных состояния.

Рассмотрим систему уравнений, описывающих посадку дрона. Линеаризованное уравнение короткопериодических колебаний в продольном движении дрона запишем в виде

$$\frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + 2\zeta\omega_0 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{d\theta(t)}{dt} = KT_0\omega_0^2 \frac{d\delta(t)}{dt} + K\omega_0^2\delta(t). \quad (2.15)$$

Угол тангажа  $\theta$  и высота  $h$  связаны дифференциальным уравнением

$$T_0 \frac{d^2h(t)}{dt^2} + \frac{dh(t)}{dt} = V\theta(t), \quad (2.16)$$

где  $h(t)$  – высота;

$\theta$  – угол тангажа;

$V$  – скорость.

Комбинируя уравнения (2.15) и (2.16) и применяя прямое преобразование Лапласа, находим передаточную функцию, связывающую отклонение руля высоты  $\delta$  и высоту  $h$ :

$$h(s) = \frac{KV}{p^2 \left( 1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2 \right)} \delta(p). \quad (2.17)$$

Схема системы в переменных состояния, составленная по формуле (2.17), показана на рис. 2.10. В качестве координат системы в этой схеме выбраны переменные

$$x_1 = h; \quad x_2 = \frac{dh}{dt}; \quad x_3 = \frac{d^2h}{dt^2}; \quad x_4 = \frac{d^3h}{dt^3}.$$

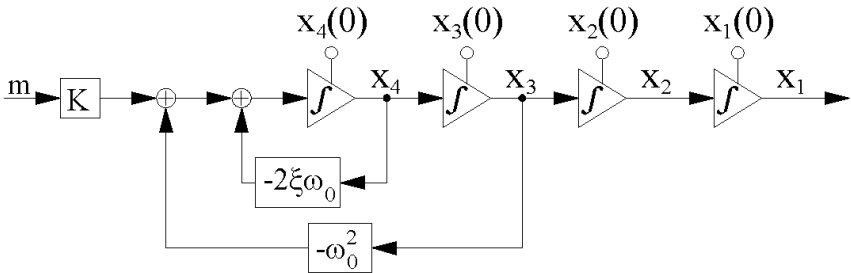


Рис. 2.10. Схема в переменных состояния, характеризующая динамику изменения высоты самолета от отклонения руля высоты

Дифференциальные уравнения посадки самолета при соответствующем выборе промежуточных переменных могут быть заменены следующей системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = x_3;$$

$$\dot{x}_3 = x_4;$$

$$\dot{x}_4 = -\omega_0^2 x_3 - 2\zeta\omega_0 x_4 + Km.$$



Схема системы в переменных состояния также может быть составлена при использовании этих дифференциальных уравнений. Однако при таком описании дрона в качестве координат системы будут выбраны **высота** и ее **три производные**, хотя две из них,  $d^2h/dt^2$  и  $d^3h/dt^3$ , не могут быть измерены непосредственно.

Возможен **другой вариант схемы системы в переменных состояния**. В качестве **переменных состояния** выберем **высоту, скорость изменения высоты, угол тангажа и угловую скорость тангажа**. Эти переменные могут быть измерены с помощью радиовысотомера и датчиков. Исключая  $\theta$  из уравнений (2.15) и (2.16), получаем

$$\frac{d^4h(t)}{dt^4} + 2\zeta\omega_0 \frac{d^3h(t)}{dt^3} + \omega_0^2 \frac{d^2h(t)}{dt^2} = KV\omega_0^2\delta(t). \quad (2.18)$$

Из уравнения (2.18) следует, что

$$T_0 \frac{d^2h(t)}{dt^2} = V\theta(t) - \frac{dh(t)}{dt}. \quad (2.19)$$

Дифференцируя уравнение (2.19) по  $t$ , получаем

$$T_0 \frac{d^3h(t)}{dt^3} = V \frac{d\theta(t)}{dt} - \frac{d^2h(t)}{dt^2}. \quad (2.20)$$

Дифференцируя выражение (2.20) по  $t$ , находим

$$T_0 \frac{d^4h(t)}{dt^4} = V \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - \frac{d^3h(t)}{dt^3}. \quad (2.21)$$

Комбинируя уравнения (2.20) и (2.21), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - \frac{1-2\zeta\omega_0T_0}{T_0} \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{1-2\zeta\omega_0T_0 + \omega_0^2T_0^2}{T_0^2} \theta(t) - \\ & - \frac{1-2\zeta\omega_0T_0 + \omega_0^2T_0^2}{VT_0^2} \frac{dh(t)}{dt} = K\omega_0^2T_0\delta(t). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Определим переменные состояния равенствами

$$x_1 = h; \quad x_2 = \frac{dh}{dt}; \quad x_3 = \theta; \quad x_4 = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.23)$$

и в нижеследующих уравнениях отклонение руля высоты  $\delta$  заменим на  $m$ . Тогда из формулы (2.23) имеем

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

из формул (2.19) и (2.23)

$$\dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

и из формул (2.22) и (2.23)

$$\dot{x}_4 = a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + K_0m, \quad (2.24)$$

где

$$K_0 = K\omega_0^2 T_0;$$

$$a_{22} = -\frac{1}{T_0}; \quad a_{23} = \frac{V}{T_0};$$

$$a_{42} = \frac{1}{VT_0^2} - \frac{2\zeta\omega_0}{VT_0} + \frac{\omega_0^2}{V};$$

$$a_{43} = \frac{1}{T_0^2} - \frac{2\zeta\omega_0}{T_0} - \omega_0^2;$$

$$a_{44} = \frac{1}{T_0} - 2\zeta\omega_0.$$

Схема в переменных состояния системы (рис. 2.11) может быть составлена по уравнению (2.24). Очевидно, что она существенно отличается от схемы, показанной на рис. 2.10.

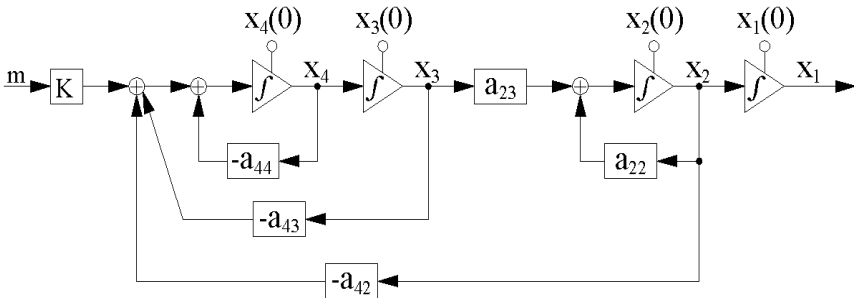


Рис. 2.11. Другой вариант схемы в переменных состояния, характеризующей динамику изменения высоты самолета

Схема рис. 2.11 обладает тем преимуществом, что в ней все переменные состояния допускают непосредственное измерение. При расчете оптимальных систем желательно, чтобы все координаты можно было непосредственно наблюдать и измерять. Поэтому при составлении схемы системы в переменных состояния очень важно в качестве переменных состояния выбирать измеримые (наблюдаемые) переменные.

## 2.6. Анализ устойчивости дискретных систем методом переходных состояний

Линейную стационарную дискретную систему можно описать совокупностью линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, которые могут быть записаны в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{v}(\lambda)}{d\lambda} = A\mathbf{v}(\lambda), \quad (2.25)$$

где  $\lambda = t - nT$  и  $0 < \lambda \leq T$ .

Вектор **состояния**  $\mathbf{v}$  в качестве своих компонент включает **вектор состояния входа**  $m$  и **вектор состояния**  $x$ . Уравнение (2.25),

характеризующее поведение дискретной системы на интервалах квантования, называется *дифференциальным уравнением состояния системы*. Начальные условия для дифференциального уравнения состояния могут быть записаны в векторной форме как

$$\mathbf{v}(nT^+) = B\mathbf{v}(nT). \quad (2.26)$$

Это уравнение, описывающее изменение переменных состояния системы в моменты квантования, называют **уравнением переходных состояний**. В этих уравнениях  $A$  и  $B$  обозначают квадратные матрицы, которые могут быть найдены из рассмотрения схемы системы в переменных состояния.

Применяя к уравнению (2.25) прямое преобразование Лапласа, получаем

$$p\mathbf{V}(p) = A\mathbf{V}(p) + \mathbf{v}(0^+).$$

Совершая элементарные преобразования, находим

$$\mathbf{V}(p) = [pI - A]^{-1}\mathbf{V}(p) + \mathbf{v}(0^+). \quad (2.27)$$

Применяя к уравнению (2.27) обратное преобразование Лапласа, получаем решение дифференциального уравнения состояния в виде

$$\mathbf{v}(\lambda) = \Phi(\lambda)\mathbf{v}(0^+), \quad (2.28)$$

где расширенная матрица перехода дается выражением

$$\Phi(\lambda) = L^{-1}[pI - A]^{-1}.$$

В терминах переменной  $t$  уравнение (2.28) принимает вид

$$\mathbf{v}(t) = \Phi(t - hT)\mathbf{v}(nT^+).$$

Это уравнение описывает поведение системы на интервале

$$nT < t \leq (n+1)T.$$

Следовательно, в момент  $t = (n+1)T$

$$\mathbf{v}(\overline{n+1T}) = \Phi(T)\mathbf{v}(nT^+).$$

Учитывая соотношение (2.26), вектор состояния  $\mathbf{v}$  можно записать в виде

$$\mathbf{v}(t) = \Phi(t - nT)B\mathbf{v}(nT) \quad (2.29)$$

и

$$\mathbf{v}(\overline{n+1T}) = \Phi(T)B\mathbf{v}(nT).$$

Это уравнение представляет собой рекуррентное соотношение, которое может быть использовано для вычисления последовательных значений переменных состояния системы в моменты квантования. Заметим, что в случае непрерывных систем  $B$  – единичная матрица и  $\lambda = t$ .

Обозначим

$$\Phi(t - nT)B = H(t - nT)$$

и уравнение (2.29) запишем в виде

$$\mathbf{v}(t) = H(t - nT)\mathbf{v}(nT). \quad (2.30)$$

Это уравнение определяет значения координат системы в любой момент времени на интервале

$$nT < t \leq (n+1)T.$$

Отсюда в момент  $t = (n+1)T$

$$\mathbf{v}(\overline{n+1T}) = H(T)\mathbf{v}(nT). \quad (2.31)$$

Придавая  $n$  в формуле (2.31) последовательные значения, получаем следующую систему уравнений:

$$n = 0, \mathbf{v}(T) = H(T)\mathbf{v}(0);$$

$$n = 1, \mathbf{v}(2T) = H(T)\mathbf{v}(T);$$

$$n = 2, \mathbf{v}(3T) = H(T)\mathbf{v}(2T);$$

.....

$$n = k - 1, \mathbf{v}(kT) = H(T)\mathbf{v}(\overline{k - 1T});$$

.....

$$n = n - 1, \mathbf{v}(nT) = H(T)\mathbf{v}(\overline{n - 1T}).$$

Комбинируя эти уравнения и производя упрощения, получаем

$$\mathbf{v}(nT) = H^n(T)\mathbf{v}(0). \quad (2.32)$$

**По определению Z-преобразования  $V(z)$  от функции времени  $\mathbf{v}(nT)$  имеем**

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}(nT) z^{-n}. \quad (2.33)$$

Комбинируя уравнения (2.32) и (2.33), получаем  $z$ -преобразование в виде

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ H(T) z^{-1} \right]^n \mathbf{v}(0).$$

Учитывая соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ H(T) z^{-1} \right]^n = \left[ I - z^{-1} H(T) \right]^{-1},$$

выражение  $z$ -преобразования для вектора состояния дискретной системы запишем в виде

$$\mathbf{V}(z) = \left[ I - z^{-1} H(T) \right]^{-1} \mathbf{v}(0). \quad (2.34)$$

Применяя **обратное  $z$ -преобразование** к уравнению (2.34), для вектора состояния получим

$$\mathbf{v}(nT) = Z^{-1} \left[ I - z^{-1} H(T) \right]^{-1} \mathbf{v}(0), \quad (2.35)$$

что является общим решением уравнения состояния, из которого могут быть определены переменные состояния системы в последовательные моменты квантования, если только известны расширенная матрица перехода и матрица  $B$  и заданы начальные условия. Уравнение (2.35) позволяет систематизировать и унифицировать анализ динамического поведения дискретных систем.

### *Анализ устойчивости системы*

Пусть матрица  $H(T)$  разделена на блоки согласно размерностям векторов  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{x}$ :

$$H(T) = \begin{bmatrix} \alpha(T) & 0 \\ \gamma(T) & \beta(T) \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

где  $\alpha(T)$  – квадратная матрица.

Тогда

$$\begin{aligned}
 I - z^{-1}H(T) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - z^{-1} \begin{bmatrix} \alpha(T) & 0 \\ \gamma(T) & \beta(T) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} I - z^{-1}\alpha(T) & 0 \\ -z^{-1}\gamma(T) & I - z^{-1}\beta(T) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Так как по определению

$$V(z) = \begin{bmatrix} M(z) \\ X(z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}(0) \\ \mathbf{x}(0) \end{bmatrix},$$

то уравнение (2.34) можно записать как

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} M(z) \\ X(z) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} |I - z^{-1}\alpha(T)|^{-1} \\ z^{-1}|I - z^{-1}\beta(T)|^{-1}\gamma(T)|I - z^{-1}\alpha(T)|^{-1}|I - z^{-1}\beta(T)|^{-1} \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} \mathbf{m}(0) \\ \mathbf{x}(0) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

При выводе этого уравнения было использовано равенство (2.37). Отсюда находим  $z$ -преобразования для векторов состояния входа и процесса соответственно:

$$M(z) = |I - z^{-1}\alpha(T)|^{-1} \mathbf{m}(0) \tag{2.39}$$

и

$$X(z) = z^{-1}|I - z^{-1}\beta(T)|^{-1}\gamma(T)M(z) + |I - z^{-1}\beta(T)|^{-1}\mathbf{x}(0). \tag{2.40}$$



Первое слагаемое в правой части  $z$ -преобразования (2.39) присутствует благодаря вектору  $\mathbf{M}$ , а второе слагаемое – благодаря ненулевым начальным условиям. Второе слагаемое равно нулю, если в начальный момент времени система находится в **состоянии покоя**. Последовательность дискретных значений переменных состояния и переменных состояния процесса можно получить по формулам (2.39) и (2.40), применяя к ним обратное  $z$ -преобразование.

Если система в начальный момент времени находится в состоянии покоя, то  $z$ -преобразование для вектора состояния процесса принимает вид

$$\mathbf{X}(z) = z^{-1} \left| I - z^{-1} \beta(T) \right|^{-1} \gamma(T) \mathbf{M}(z).$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\det \left| I - z^{-1} \beta(T) \right| = 0. \quad (2.41)$$

Для устойчивости системы необходимо, чтобы корни уравнения (2.40) находились в пределах единичной окружности на плоскости  $z$ .

Учитывая равенство (2.36), выражение (2.30) для вектора состояния  $\mathbf{v}(t)$  можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(t-nT) & 0 \\ \gamma(t-nT) & \beta(t-nT) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}(nT) \\ \mathbf{x}(nT) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, в интервале

$$nT < t \leq (n+1)T$$

вектор состояния процесса определяется выражением

$$\mathbf{x}(t) = \gamma(t-nT) \mathbf{m}(nT) + \beta(t-nT) \mathbf{x}(nT), \quad (2.42)$$

где значения векторов  $\mathbf{m}(nT)$  и  $\mathbf{x}(nT)$  могут быть легко найдены при использовании выражений (2.39) и (2.40). Полагая  $n = 0, 1, 2, \dots$

в уравнении (2.42), находим функции времени для переменных состояния процесса.

### Пример 2.2

С целью иллюстрации описанного выше метода  $z$ -преобразования для анализа дискретных систем рассмотрим разомкнутую систему.

Схема простой импульсной системы показана на рис. 2.12. Предполагается, что входное воздействие имеет вид единичной ступенчатой функции и период прерывания равен  $T$ , с. Требуется определить реакцию на выходе системы.

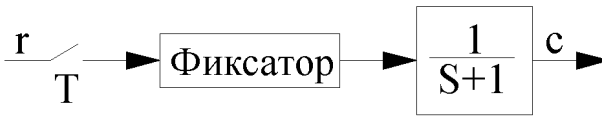


Рис. 2.12. Простая импульсная система

Из рассмотрения схемы системы в переменных состояния, показанной на рис. 2.13, следует, что дифференциальные уравнения состояния системы имеют вид

$$\dot{m}_1 = 0; \quad \dot{m}_2 = 0; \quad \dot{x}_1 = m_2 - x_1.$$

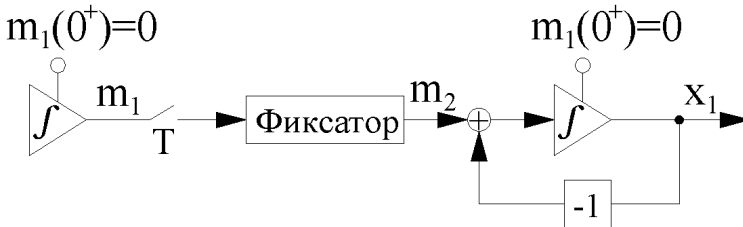


Рис. 2.13. Схема в переменных состояния для простой импульсной системы

Уравнения переходных состояний системы находим в виде

$$m_1(nT^+) = m_1(nT);$$

$$m_2(nT^+) = m_1(nT);$$

$$x_1(nT^+) = x_1(nT).$$

Матрицы  $A$  и  $B$  записываются следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрицу перехода находим в виде

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Отсюда находим матрицу  $H(T)$ :

$$H(T) = \Phi(T)B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-T} & 0 & e^{-T} \end{bmatrix}$$

и

$$\alpha(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\beta(t) = e^{-T};$$

$$\gamma(t) = [1 - e^{-T} \ 0];$$

$$1 - z^{-1}\alpha(T) = \begin{bmatrix} 1 - z^{-1} & 0 \\ -z^{-1} & 1 \end{bmatrix};$$

$$1 - z^{-1}\beta(T) = 1 - z^{-1}e^{-T}.$$

Так как

$$\mathbf{X}(z) = z^{-1} \left[ 1 - z^{-1} \beta(T) \right]^{-1} \gamma(T) \left[ 1 - z^{-1} \alpha(T) \right]^{-1} \mathbf{m}(0),$$

то окончательно имеем

$$\mathbf{X}(z) = \frac{z(1 - e^{-T})}{(z - 1)(z - e^{-T})}.$$

Отметим, что решение этой простой задачи можно получить классическим методом. В данном случае применение обобщенного подхода не дает каких-либо преимуществ. Заметим также, что данный пример был приведен с целью проиллюстрировать применение рассмотренного в настоящем параграфе метода анализа дискретных систем.

### Пример 2.3

#### *Замкнутая система*

Требуется найти выход импульсной системы, структурная схема которой приведена на рис. 2.14. Входное воздействие имеет вид единичной ступенчатой функции.



Рис. 2.14. Простая импульсная система с обратной связью

Схема системы в переменных состояния изображена на рис. 2.15. Из рассмотрения этой схемы находим, что дифференциальные уравнения состояния системы имеют вид

$$\dot{m}_1 = 0; \quad \dot{m}_2 = 0; \quad \dot{x}_1 = m_2 - x_1.$$

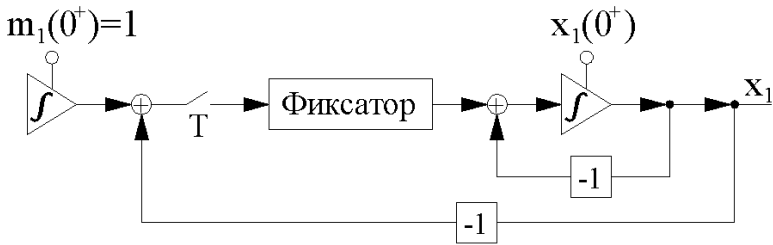


Рис. 2.15. Схема в переменных состояниях для импульсной системы с обратной связью

Уравнения переходных состояний находим в виде

$$m_1(nT^+) = m_1(nT);$$

$$m_2(nT^+) = m_1(nT);$$

$$x_1(nT^+) = x_1(nT).$$

Отсюда находим матрицу  $A$  и  $B$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим определение расширенной матрицы перехода другим методом. Обращаясь к схеме системы в переменных состояниях, запишем

$$m_1(\lambda) = 1 = m_1(0^+);$$

$$m_2(\lambda) = m_1(\lambda) - x_1(\lambda) = m_2(0^+);$$

$$\dot{x}_1(\lambda) = m_2(0^+) - x_1(\lambda).$$

Решение последнего дифференциального уравнения имеет вид

$$x_1(\lambda) = (1 - e^{-\lambda})m_2(0^+) + e^{-\lambda}x_1(0^+).$$

Отсюда находим расширенную матрицу перехода:

$$\Phi(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{bmatrix}.$$

Матрицу  $H(T)$  получаем в виде

$$H(T) = \Phi(T)B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 - e^{-T} & 0 & -1 + 2e^{-T} \end{bmatrix}.$$

Матрицу  $H(T)$  разобьем на блоки таким образом, что

$$\alpha(T) = 1;$$

$$\beta(T) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 + 2e^{-T} \end{bmatrix};$$

$$\gamma(T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\left[1 - z^{-1}\beta(T)\right]^{-1} = \frac{1}{1 - z^{-1}(2e^{-T} - 1)} \begin{bmatrix} 1 - z^{-1}(2e^{-T} - 1) & 1 + z^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\left[1 - z^{-1}\alpha(T)\right]^{-1} = \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

Если  $x_1(0^+)$ , то из формул (2.37) и (2.38) следует, что

$$\begin{bmatrix} M_2(z) \\ X_1(z) \end{bmatrix} = \frac{z}{(z-1)(z-2e^{-T}+1)} \begin{bmatrix} 1 - z^{-1}(2e^{-T} - 1) + (1 + z^{-1})(1 - e^{-T}) \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix},$$

откуда

$$X_1(z) = \frac{z(1 - e^{-T})}{(z-1)(z-2e^{-T}+1)}.$$

Используя классический метод, получаем

$$G(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s(s+1)} \right\} = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}};$$

$$R(z) = \frac{z}{z-1};$$

$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)};$$

$$R(z) = \frac{z(1 - e^{-T})}{(z-1)(z-2e^{-T}+1)},$$

что совпадает с результатом, полученным выше.

Если начальное условие задано в виде

$$x_1(0^+) = c_0,$$

то при соответствующей подстановке в формулы (2.39) и (2.40) будем иметь

$$\begin{bmatrix} M_2(z) \\ X_1(z) \end{bmatrix} = \frac{z}{(z-1)(z-2e^{-T}+1)} \times \\ \times \begin{bmatrix} 1 - z^{-1}(2e^{-T}-1) + (1+z^{-1})(1-e^{-T}) \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} + \frac{z}{z-2e^{-T}+1} \begin{bmatrix} c_0(1+z^{-1}) \\ c_0 \end{bmatrix},$$

откуда

$$X_1(z) = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-2e^{-T}+1)} + \frac{c_0 z}{z-2e^{-T}+1}.$$

Из изложенного видно, что по удобству и эффективности рассматриваемый общий подход превосходит классический в анализе сложных систем, а также в оптимальном синтезе.



## Часть 2. ПОДСИСТЕМЫ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ

### ГЛАВА 3. МЕХАНИКА

#### 3.1. Модели механических подсистем мехатронной системы

##### 3.1.1. Подсистема с жесткими звеньями

Механическая подсистема мехатронной системы (рис. 3.1) называется жесткой:

- если все звенья абсолютно твердые тела, имеющие массы (распределенные или точечные);
- стержни, соединяющие звенья  $m_i$  – масса  $i$ -го тела, – невесомые линейные, абсолютно жесткие,  $c_{ij} = \infty$  (где  $c_{ij}$  – жесткость стержня, соединяющего  $m_i$  и  $m_j$ );
- все гибкие звенья (ремни, цепи) считаются нерастяжимыми;
- все жидкие звенья (гидравлические) считаются несжимаемыми;
- кинематические пары идеальные (в шарнирах и поступательных парах пренебрегают люфтами, деформациями).

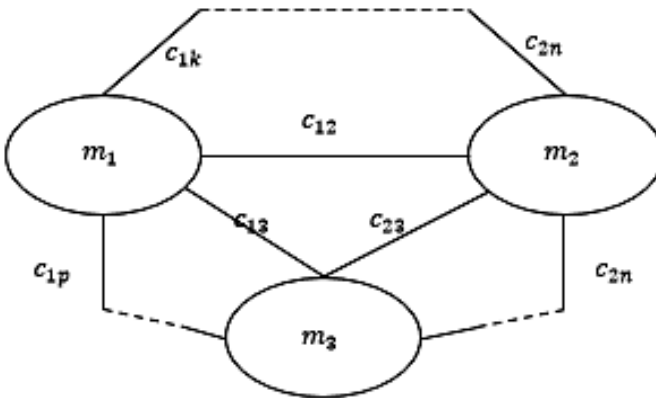


Рис. 3.1. Жесткая механическая подсистема

##### **Подсистема с упругими связями:**

- все звенья абсолютно твердые тела, имеющие массы  $m_i$  (распределенные или точечные);

– звенья соединяются невесомыми стержнями, обладающими упругими, вязкими  $\mu_{ij}$ , пластическими и другими физико-механическими свойствами, моделируемыми пружинами, вязкими демпферами, элементами сухого трения.

Указанные свойства позволяют учитывать влияние на динамику системы не только геометрии масс, но и геометрии жесткости, деформации звеньев и кинематических пар, люфт в шарнирах и т. д., рис. 3.2.

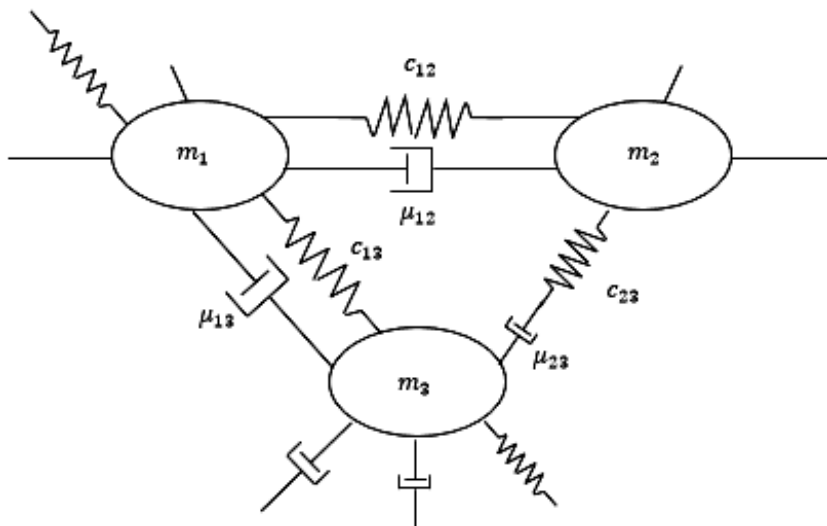


Рис. 3.2. Подсистема с вязкоупругими связями

**Подсистема с распределенными физико-механическими свойствами и деформируемыми звеньями:** массовые и физико-механические свойства распределены по всей механической подсистеме, причем любой элементарный объем обладает деформирующей массой, непрерывно распределенной по объему тела (звена).

Как следует из рис. 3.3, каждое звено и соединяющие их стержни обладают массой  $m_i$  и физико-механическими свойствами (упругость  $c_i$ , вязкость, пластичность).

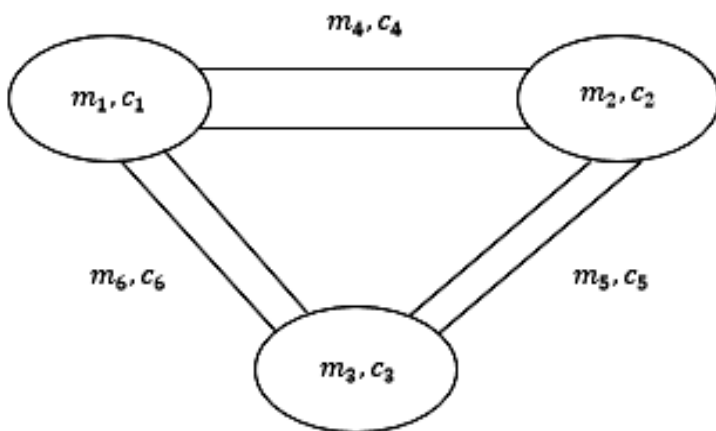


Рис. 3.3. Подсистема с распределенными физико-химическими свойствами

В механической подсистеме происходит преобразование простейших движений актуаторов (выходных звеньев двигателей) в движения исполнительных органов, требующиеся для реализации рабочего процесса (движения). Механическая подсистема иерархически может включать уровень механизмов, рассматриваемых как модули.

Число входов механической подсистемы (актуаторов) равно числу степеней подвижности подсистемы. Выходными величинами механической подсистемы являются координаты точек рабочих органов  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .

Механизмы при функционировании преобразуют координаты по функциям положения (конфигураций)  $\pi$ :

$$\bar{x} = \bar{\pi}(\bar{q}, \bar{e}), \quad \bar{q} = (q_1, \dots, q_n), \quad \bar{e} = (e_1, \dots, e_n), \quad (3.1)$$

где  $\bar{e}$  – деформации звеньев.

Механизмы соединяются между собой последовательно или параллельно.

На рис. 3.4 изображены структурные схемы последовательного и параллельного соединений.

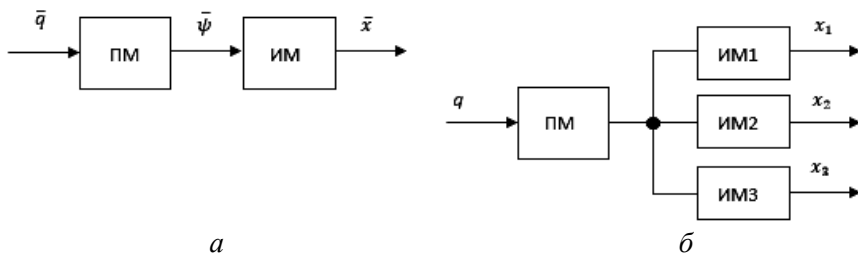


Рис. 3.4 Структурные схемы:  
*a* – последовательное, *б* – параллельное соединение:  
 ПМ – передаточный механизм; ИМ – исполнительный механизм;  
 $\bar{q}$  – выходная величина (координата) актуатора (двигателя)

На рис. 3.5 изображена функциональная схема механической подсистемы.

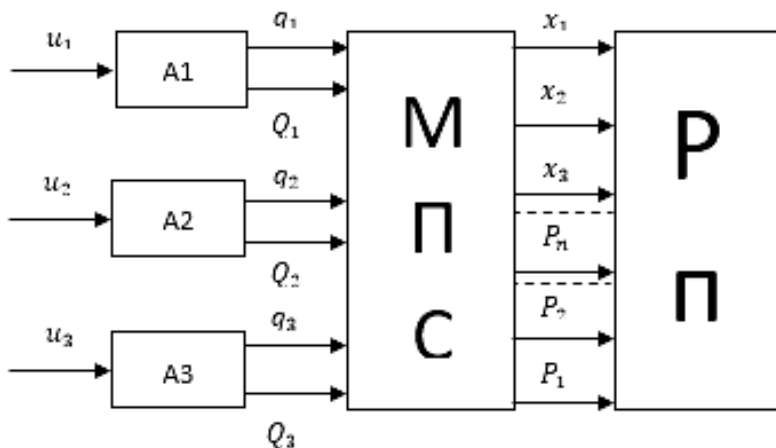


Рис. 3.5. Функциональная схема механической подсистемы

На рис. 3.5:

$A_i$  – *i*-й актуатор;

МПС – механическая подсистема;

РП – рабочий процесс;

$u_i$  – *i*-е входное (управляющие) воздействие;

$\bar{q}_i$  – выходные координаты актуаторов;

$\bar{Q}$  – обобщенные движущие силы;  
 $\bar{x}$  – координаты рабочих органов;  
 $\bar{P}$  – активные силы, возникающие при реализации рабочего процесса.

### ***3.1.2. Математические модели структурно-функциональных частей механической подсистемы***

Проектирование механической части мехатронной системы (механики) наиболее точно осуществляется на основе моделей механики сплошных сред, однако аналитически это приводит к необходимости решать начальные и краевые задачи для уравнений в частных производных, описывающих системы с распределенными параметрами, имеющими бесконечное число степеней свободы. И хотя современные CAD/FEM-системы автоматизированного проектирования упростили решение таких задач, тем не менее методы аппроксимации систем с непрерывно распределенными параметрами, системами с сосредоточенными параметрами остаются актуальны, особенно на начальных стадиях проектирования. Переход от модели системы с распределенными параметрами к модели с сосредоточенными параметрами позволяет существенно сократить число степеней свободы и таким образом построить достаточно простую математическую модель и на ее основе провести аналитическое исследование. Например, для большинства машин упругие деформации малы, тогда вместо (3.1) используется приближение вида

$$\bar{x} = \bar{\pi}(\bar{q}, 0) + \sum \frac{\partial \bar{\pi}[\bar{q}, 0]}{\partial \bar{\theta}} \bar{e}.$$

Соответственно в первом приближении можно записать

$$\dot{\bar{q}} = \bar{f}\left(\bar{u}, \bar{Q} + \tau \dot{\bar{Q}}, q\right), \quad (3.2)$$

где  $\tau$  – постоянная времени, характеризующая время реакции подсистемы на воздействие.

В формуле (3.2)

$$\tau \dot{\bar{Q}} + \bar{Q} = Q_s(\bar{u}, \dot{\bar{q}}, \bar{q}).$$

В случае когда  $\bar{q}$  – угловая координата, обобщенная сила  $\bar{Q} = \bar{M}$ , где  $\bar{M}$  – момент.

Особенностью моделирования механической подсистемы является многоступенчатость (иерархичность) этого процесса. На начальной ступени (эскизной) допустимо использование жесткой модели, что позволяет сделать выбор двигателя, оценить величины реакций в кинематических парах механизмов. При исследовании процессов, связанных с вибрацией, диссипацией, деформацией, необходимо учитывать упругость, вязкость и пластичность звеньев.

На стадии конструирования узлов механической подсистемы требуется получить законы движения ее звеньев такие, чтобы рабочий процесс выполнялся в соответствии с проектируемыми (идеальными) законами движения, которые называются *программными*.

Реализация программного (идеального) управления поведением (функцией) подсистемы может быть получена за счет точного конструирования, изготовления, эксплуатации структурных элементов механической системы, а также за счет управляющих воздействий.

На практике действительный закон движения отличается от идеального программного за счет неучтенных факторов конструирования, управления, измерения внутренних и внешних параметров. Отклонение (вариация) законов движения реальных систем от программных характеризуется динамическими ошибками. Как правило, действительные значения динамических нагрузок, действующих на звенья машины, существенно отличаются от расчетных.

Оценивание величин динамических ошибок и корректировка значений динамических нагрузок являются задачей динамического анализа, решаемой в ходе расчетов на стадии проектирования и после разработки конструкций функциональных частей системы. Это ведет, как правило, к использованию все более сложных и адекватных моделей.

Решение задач синтеза машин базируется на результатах анализа и достигается за счет изменения параметров механической системы двигателей, актуаторов. Электроника позволила достигать улучшения динамики машины, расширения диапазона ее возможностей за счет адекватного управления с обратными связями.

### 3.1.3. Влияние геометрии масс твердого тела на его динамику

Сопротивление масс системы движению проще всего изучать на основе уравнений Ньютона–Лагранжа при идеальных связях.

Поступательное движение центра масс описывается уравнением

$$m \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \bar{F}^{(e)},$$

а вращательное в главных осях инерции символически можно записать в виде

$$I(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} I'(q) \dot{q}^2 = \bar{M}_g + \bar{M}_c, \quad I'(q) = \frac{\partial I}{\partial q},$$

где  $I(q)$  – моменты инерции системы, приведенные к выходному звену двигателя или актуатора;

$q$  – обобщенные координаты;

$\bar{M}_g$  – приведенные моменты движущих сил;

$\bar{M}_c$  – приведенные моменты сил сопротивления.

Отметим, что в общем случае для мобильных роботов  $I'(q) \neq 0$ . Когда функции положения механических частей машины линейные,

$$I(q) = I_0 = \text{const.}$$

В общем случае нелинейности можем записать

$$I(q) = I_q(q) + I_M(q),$$

где  $I_q(q)$  – приведенный момент инерции движущихся звеньев двигателя;

$I_M$  – приведенный момент инерции звеньев передаточного и исполнительного механизмов.

Момент сил сопротивления  $\bar{M}_c$  – обобщенная сила, соответствующая всем активным силам, действующим на звенья механизмов:

$$M_c = \sum_{s=1}^k \bar{P}_s \frac{d\bar{r}_s}{d\bar{q}}, \quad (3.3)$$

где  $\bar{P}_s$  – векторы активных сил;

$\bar{r}_s$  – радиусы-векторы точек их приложения.

Обычно соотношение (3.3) записывается в виде

$$\bar{M}_c = \bar{M}_c(\bar{q}, \dot{\bar{q}}),$$

а  $M_g$  – в виде

$$\bar{M}_g = \bar{M}_g(\bar{u}, \bar{q}, \dot{\bar{q}}),$$

где управление (регулирование)  $\bar{u}(t)$  задается или находится на основе каких-либо критериев.

### ***3.1.4. Влияние учета упругости на динамику механической подсистемы***

На следующей ступени проектирования на основе динамической модели механической части машины учитывается упругость звеньев передаточных механизмов. Как правило, массы передаточных звеньев значительно меньше массы двигателей и исполнительных звеньев, что позволяет использовать простейшую двухмассовую модель упругой системы. На рис. 3.5 изображена простейшая модель механического агрегата, учитывающая упругость передаточного механизма. Звенья считаются жесткими, имеющими одну степень подвижности, а передаточный механизм считается безынерционным, вязкоупругим. В качестве обобщенных координат выбираются угол поворота выходного звена двигателя актуатора  $q_0$  и угол по-



ворота  $q$  входного звена исполнительного механизма, приведенный к валу двигателя, т. е. умноженный на передаточное отношение  $i$ .

Приведенная к валу двигателя деформация передаточного звена определяется по формуле

$$e = q_0 - q_1.$$

Обозначим момент, возникающий в передаточном звене и приложенный к исполнительному звену:

$$M_\pi = ce + b\dot{e} = c(q_0 - q_1) + b(\dot{q}_0 - \dot{q}_1), \quad (3.4)$$

где  $c$  – коэффициент жесткости,

$b$  – коэффициент вязкости.

Уравнения движения с учетом вязкоупругости звеньев запишутся в виде

$$I_g(q_0)\ddot{q}_0 + \frac{1}{2} \frac{dI_g}{dq_0}(q_0)\dot{q}_0^2 = M_g - b(\dot{q}_0 - \dot{q}_1) - c(q_0 - q_1); \quad (3.5)$$

$$I_M(\bar{q}_1)\ddot{q}_1 + \frac{1}{2} \frac{dI_M}{dq_q}(q_1)\dot{q}_1^2 = M_c(q_1, \dot{q}_1) - b(\dot{q}_0 - \dot{q}_1) - c(q_0 - q_1),$$

где  $I_g(q_0)$ ,  $I_M(q_1)$  – приведенные моменты инерции;

$M_c(q_1, \dot{q}_1)$  – приведенный момент сил сопротивления.

Рассмотрим более сложную динамическую модель, учитывающую упругость звеньев.

Широко распространенной одномерной моделью является цепная модель, все звенья которой совершают вращательное движение.

Пусть цепная система содержит  $n + 1$  вращающихся масс, последовательно соединенных между собой упруговязкими элементами. Система имеет  $n + 1$  степеней свободы, определяемых обобщенными координатами – углами поворота  $q_0, q_1, \dots, q_n$  масс вокруг их собственных осей вращения.

Перейдем к новым координатам:

$$\varphi_s = i_{os} q_s, \quad s = 0, 1, \dots, n,$$

где  $i_{os}$  – передаточное отношение звена, связывающего ротор (нулевая масса) с массой  $s$ -го звена.

Деформация определяется координатами, характеризующими смещения масс относительно ротора:

$$\bar{\varphi} = (\varphi_0, e_1, \dots, e_n);$$

$$e_s = \varphi_s - \varphi_0 \quad (s = 1, \dots, n).$$

В частности, для жестких звеньев

$$\varphi_s = \varphi_0;$$

$$e_s = 0 \quad (s = 1, \dots, n).$$

Уравнения Лагранжа относительно  $\bar{\varphi}$  имеют вид

$$A\ddot{\bar{\varphi}} + B\dot{\bar{\varphi}} + c\bar{\varphi} = M^*, \quad (3.6)$$

где звездочкой обозначается приведение системы к нулевой массе.

Расписывая уравнения (3.6), получим

$$I_c \ddot{\bar{\varphi}}_0 + a^T \ddot{\bar{e}} = M_g + M_n^*; \quad \bar{a}^T = (I_1^*, \dots, I_n^*); \quad (3.7)$$

$$a \ddot{\bar{\varphi}}_0 + \tilde{A} \ddot{\bar{e}} + \tilde{B} \dot{\bar{e}} + \tilde{c} \bar{e} = \tilde{M}^*.$$

### ***3.1.5. Частотный анализ динамики линеаризованных уравнений Ньютона–Лагранжа***

Работа любой функционирующей машины (робота) сопровождается вибрацией и шумом, которые наиболее точно можно модели-

ровать на основе механики деформируемого твердого тела. Уравнения, описывающие распространение волн в сплошной деформируемой среде, являются уравнениями в частных производных.

Приближенное описание динамики сплошного деформируемого твердого тела на основе многомассовой системы может быть проведено с помощью лагранжевого формализма. Так как упругие деформации обычно малы, то линеаризованные уравнения движения представляются в виде (3.7), что для частотного анализа позволяет применять метод интегральных преобразований Лапласа. Это позволяет использовать методы анализа и синтеза систем, основанные на теории цепей и передаточных функций.

Применяя к уравнениям (3.7) преобразование Лапласа

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt,$$

получим

$$(Ap^2 + Bp + c)\bar{\varphi}_{(p)} = \bar{M}(p), \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Передаточная функция

$$W(p) = (Ap^2 + Bp + c)^{-1} \quad (3.8)$$

представляет собой матрицу операторов динамической податливости свободной системы, элементы которой обладают свойствами передаточных функций линейных систем и связывают преобразования Лапласа  $r$ -го входа и  $s$ -го выхода так, что решение (3.4) с учетом (3.5) в покомпонентном виде можно записать так:

$$\varphi_s(p) = \sum_{r=1}^n W_{rs}(p) M_r(p), \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

Так как матрицы  $A, B, C$  симметричны, то и матрица  $W(p)$  также симметричная. Компоненты матрицы  $W_{rs}(p)$  вычисляются по формуле

$$W_{rs}(p) = \frac{\Delta_{rs}(p)}{\Delta(p)}, \quad (3.10)$$

где  $\Delta_{rs}(p)$  – алгебраическое дополнение элемента  $r$ -й строки и  $s$ -го столбца этого определителя;

$\Delta(p) = \det(Ap^2 + Bp + c)$  – характеристический определитель системы (3.10).

Обычно в машинах диссипация пренебрежимо мала, что позволяет в (3.8) положить  $B = 0$ . Собственные формы и частоты системы удовлетворяют системе (3.8) при  $\bar{B} = 0, \bar{M} = 0$ .

Кинетическая и потенциальная энергии линеаризованной системы имеют вид

$$T = \frac{1}{2}(A\dot{\bar{\varphi}}, \dot{\bar{\varphi}}), \quad \Pi = \frac{1}{2}(c\bar{\varphi}, \bar{\varphi}), \quad (3.11)$$

$$(A\dot{\bar{\varphi}}, \dot{\bar{\varphi}}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_k; \quad (c\bar{\varphi}, \bar{\varphi}) = \sum_{i,k=1}^n c_{ik} \varphi_i \varphi_k.$$

Так как квадратичные формы определенно-положительные, то существует вещественная неособенная замена переменных

$$\bar{\varphi} = U\bar{\theta}, \quad \det U \neq 0, \quad \bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n), \quad (3.12)$$

приводящая к сумме квадратов сразу обе квадратичные формы (3.11):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\theta}_j^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_j^2.$$

Обобщенные координаты  $\theta_j$  называются главными или нормальными. Уравнения движения (3.6) в главных координатах запишутся в виде несвязанных  $n$ -уравнений второго порядка:

$$\ddot{\theta}_j + \lambda_j \theta_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.13)$$

Так как все  $\lambda_j$  положительны, то решения (3.13) имеют вид

$$\theta_j = c_j \sin(\omega_j t + \alpha_j), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$  – частоты колебаний;

$c_j, \alpha_j$  – произвольные постоянные.

Тогда  $\bar{\theta}$  представляется в виде

$$\bar{\theta} = \sum_{j=1}^n c_j u_j \sin(\omega_j t + \alpha_j).$$

Здесь  $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$  – вектор амплитуд.

Подставляя (3.10) в (3.7) и затем в (3.6), получим

$$(c - \lambda A) \bar{u} = 0.$$

Условие  $\bar{u} \neq 0$  приводит к уравнению

$$\det(c - \lambda A) = 0. \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) определяет собственные частоты  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Уравнение (3.6) в главных координатах имеет вид

$$(A_\Gamma p^2 + C_\Gamma) \bar{\theta} = M_\Gamma,$$

где  $A_\Gamma, C_\Gamma$  – диагональные матрицы размера  $(n+1) \times (n+1)$ .

Запишем  $A_\Gamma$  в виде

$$A_\Gamma = \text{diag} \{ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \};$$

$$\alpha_s = a_s^{-T} A u_s, \quad s = 0, \dots, n;$$

$$\alpha_0 = \sum_{r=0}^n I_r = I_c,$$

$$\varepsilon_r = \text{diag} \{ \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n \},$$

$$\gamma_s = u_s^{-T} c \bar{u}, \quad s = 0, \dots, n.$$

Представим компоненты вектора  $M_\Gamma$  в виде

$$M_{\Gamma s} = u_s^{-T} M_\Gamma = u_{s0} \bar{M}_g + u_{sn} \bar{M}_n.$$

Тогда (3.6) записывается в виде  $n+1$  независимых уравнений:

$$I_c p^2 \theta_0 = M_g + M_n;$$

(3.15)

$$(a_r p^2 + \gamma_r) \theta_r = M_g + \theta_{rn} M_n, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Решение системы (3.15) запишем в виде

$$\theta_0 = \frac{1}{I_c p^2} (M_g + M_n),$$

$$\theta_r = \frac{1}{a_r p^2 + \gamma_r} (M_g + \theta_{rn} M_n), \quad r = 1, \dots, n.$$

Подставляя (3.12) в (3.6), получим выражения для  $\bar{\varphi}$ -решения неоднородных уравнений (3.6), (3.7), описывающих динамику сис-

темы под действием внутренних сил. Покомпонентное выражение имеет вид

$$\varphi_s = \left( \frac{1}{I_c p^2} + \sum_{r=1}^n \frac{u_{rs}}{a_r p^2 + \gamma_r} \right) M_g + \\ + \sum_{m=1}^n \left( \frac{1}{I_c p^2} + \sum_{r=1}^n \frac{u_r u_{rm}}{a_r p^2 + \gamma_r} \right) M_m, \quad s = 0, 1, \dots, n.$$

Выражения для компонентов передаточной матрицы запишутся в безразмерном виде:

$$W_{rs}(p) = \frac{1}{I_c p^2} + \sum_{m=1}^n \frac{\varkappa_{rs}^{(m)}}{\tau_m^2 p^2 + 1}, \quad r, s = 0, 1, \dots, n; \\ \tau_m \left( \sqrt{\lambda_m} \right)^{-1}; \quad \varkappa_{rs} = u_{mr} u_{ms} \gamma_m^{-1}.$$

Для установившегося процесса  $p = j\omega$ , тогда динамические податливости  $W_{rs}(j\omega)$  имеют вид

$$W_{rs}(j\omega) = -\frac{1}{I_c \omega^2} + \sum_{m=1}^n \frac{\varkappa_{rs}^{(m)}}{m+1 - \tau_m^2 \omega^2}, \quad r, s = 0, 1, \dots, n.$$

Векторы  $\bar{h}_s$  ортогональны в матрицах  $A$ ,  $C$ , причем при любых  $s \neq m$  выполняются условия

$$\bar{u}_s^T A \bar{u}_m = 0, \quad \bar{u}_s^T C \bar{u}_m = 0.$$

Собственные частоты  $k$  находятся из уравнения

$$\det(C - Ak^2) = 0. \quad (3.16)$$

Выражение (3.16) является условием существования ненулевых амплитуд  $\bar{u}_s$ , удовлетворяющих системе

$$(C - Ak^2)\bar{u}_s = 0, \quad s = 0, 1, \dots, n.$$

Собственные частоты выражаются через собственные формы (формула Рэлея):

$$k_s^2 = \frac{\bar{u}_s^T C \bar{u}_s}{\bar{u}_s^T \bar{u}_s},$$

причем считается, что  $u_{s0} = 1$ ,  $h_0^{-T} = (1, 1, \dots, 1)$ .

Применим к (3.9) обратное преобразование Лапласа

$$\varphi_s(t) = \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \varphi_s(p) M_r(p) e^{pt} dp,$$

получим выражение для  $\varphi_s(t)$  в виде

$$\varphi_s(t) = \sum_{r=10}^t \int W_{rs}(t-\tau) M_r(\tau) d\tau.$$

В случае резонанса, что соответствует в (3.16)

$$\omega = \tau_m^{-1} = k_m$$

совпадению  $\omega$  с одной из собственных частот системы в знаменателе  $W_{rs}(j\omega)$ , он становится бесконечным. Это происходит, когда период (частота) действия на систему, совпадает с собственной частотой.

В этом случае нормальная форма колебаний находится из уравнения типа

$$\ddot{\theta} + \lambda\theta = a \sin \omega t,$$



общее решение которого имеет вид

$$\theta(t) = c \sin(\omega t + \alpha) + \theta^*(t); \quad (3.17)$$

$$\theta^*(t) = -\frac{a}{2\omega} t \cos \omega t. \quad (3.18)$$

Как следует из (3.18) функция  $\theta^*(t)$  растет, а потому линеаризованные уравнения вибрации должны заменяться более точными нелинейными.

Учет вязкости (диссипации) в системе также позволяет получать более реалистичные конечные режимы движения.

### 3.1.6. Антирезонансные частоты

Из анализа выражения (3.17) видно, что если закрепить массы в  $r$ -й и  $s$ -й материальных точках системы, величина  $|W_{rs}(j\omega)|$  обращается в 0 при совпадении  $\omega$  с одной из собственных частот системы. Эти частоты называются антирезонансными. В отличие от резонансных частот, общих для всех  $W_{rs}$ , антирезонансные частоты для каждой динамической податливости свои. Антирезонансные частоты диагональных элементов матрицы динамических податливостей  $W_{rr}(j\omega)$  располагаются между их резонансными частотами:

$$0 < \tilde{k}_1 < k_1 < \tilde{k}_2 \dots < \tilde{k}_n < k_n,$$

где  $\tilde{k}_i$  – антирезонансные, а  $k_i$  – резонансные частоты.

При  $r \neq s$  расположение антирезонансных частот зависит от перемен знака в ряду чисел

$$u_{or}u_{os}, u_{1r}u_{1s}, u_{2r}u_{2s}, \dots \quad (3.19)$$

Если знаки  $u_{mr}u_{ms}$  и  $u_{m+1,r}u_{m+1,s}$  совпадают, то между  $k_m$  и  $k_{m+1}$  имеется антирезонансная частота  $\tilde{k}_{m+1}$ . Если знаки различные, то соответствующая антирезонансная частота отсутствует.

Число перемен знака в ряду (3.19) всегда равно  $s - r$ .

Метод передаточных функций позволяет решать задачи синтеза динамических систем с помощью параллельно и последовательно соединяемых звеньев.

### 3.2. Модели механических подсистем и метод механических цепей

Механическую систему можно представить в виде соединения элементов, причем одни элементы можно представить имеющими только инерционные свойства, другие — **безынерционными упругими элементами, третьи — устройствами с трением**. Отдельно представляют элементы, поставляющие энергию в механическую систему и возбуждающие ее движение: **активные элементы** или **источники**. Элементы, не имеющие независимых источников сил или кинематических величин, называют **пассивными**.

Механическую систему, представленную в виде активных и пассивных элементов, называют **механической цепью**. Механическая цепь отражает динамические свойства исходной механической системы. Места соединения элементов называют **узлами**. Соединение двух и более пассивных элементов называют **звеном**. Место, в котором к системе прикладывается воздействие, называют **входом**. **Выходом** называют место, в котором оценивают реакцию системы. Вход (или выход) системы, характеризующийся обобщенными координатой и силой, называют **полюсом**. В общем случае вход и выход системы могут быть многополюсными. Любой элемент механической цепи имеет по крайней мере два полюса. Элемент, имеющий два полюса, называют **двухполюсником**. Возможны механические цепи, составленные из  $n$ -полюсников, однако на практике наиболее распространены цепи из двухполюсников.

Для рассмотрения связанных колебаний пространственно-многомерных механических цепей наиболее удобны общие методы исследования линейных систем с конечным числом степеней свободы. Однако при исследовании довольно распространенных пространственно-одномерных механических цепей для инженерных целей более удобными оказываются методы, в которых уравнения движения системы находят непосредственно из топологии рассматриваемой механической цепи на основе законов Кирхгофа. Это позволяет

для описания, анализа и синтеза механических цепей применить аппарат теории графов и дать систематический и формализованный подход к исследованию механических цепей.

### 3.2.1. Двухполюсные элементы и звенья механических цепей

**Переменные двухполюсника.** Двухполюсник можно характеризовать силами  $F_1$  и  $F_2$ , приложенными к его полюсам 1 и 2, и параметрами движения полюсов (рис. 3.6).

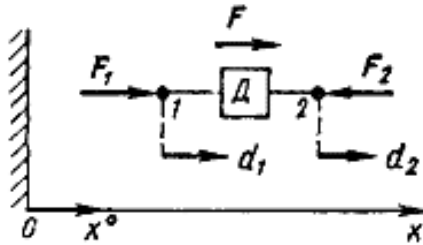


Рис. 3.6. Двухполюсник Д с полюсами 1 и 2

Для перемещений полюсов  $d_1$  и  $d_2$  имеем

$$d_1 = d_1 x^0 = (x_1 - x_{10}) x^0;$$

$$d_2 = d_2 x^0 = (x_2 - x_{20}) x^0,$$

где  $x^0$  – единичный вектор оси  $Ox$ ;

$x_{10}, x_{20}, x_1, x_2$  – исходные и текущие координаты точек 1 и 2.

Скорости  $v_i$  и ускорения  $a_i$  полюсов определяют из выражений

$$v_i = v_i x^0 = \dot{d}_i = \dot{d}_i x^0; \quad a_i = a_i x^0 = \ddot{v}_i = \ddot{v}_i x^0, \quad i = 1, 2.$$

Относительное движение полюсов удобно характеризовать с помощью **кинематических векторов двухполюсника**  $d, v$  и  $a$  ( $d$  –

относительное перемещение,  $\mathbf{v}$  – относительная скорость;  $\mathbf{a}$  – относительное ускорение полюсов; ниже эти векторы обобщенно обозначаются буквой  $\mathbf{k}$  ):

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= dx^0 = |d_i - d_j| e_d; \\ \mathbf{v} &= vx^0 = |v_i - v_j| e_v; \\ \mathbf{a} &= ax^0 = |a_i - a_j| e_a, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{a}$  – кинематические переменные двухполюсника, обобщенно обозначаемые буквой  $\mathbf{k}$ ;

$\mathbf{e}_k(\mathbf{k} = \mathbf{d}, \mathbf{v}, \mathbf{a})$  – единичные векторы, направленные от полюса с большим алгебраическим значением кинематической переменной к полюсу с ее меньшим алгебраическим значением.

Положительно направленным векторам  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{v}$  отвечает сближение полюсов двухполюсника, поэтому при условии, что координата  $x_i$  полюса  $i$  меньше координаты  $j$  полюса  $j(x_i < x_j)$ :

$$k = k_i - k_j;$$

$$k = d, v, a.$$

Так, для указанных на рис. 3.7 индексации полюсов и направления оси  $Ox$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2;$$

$$F_1 = F_1 x^0 = F x^0 = F; \quad (3.21)$$

$$F_2 = F_2 x^0 = -F x^0 = -F,$$

где  $F$  – воспринимаемая двухполюсником сила;  
 $F$  – силовая переменная двухполюсника.

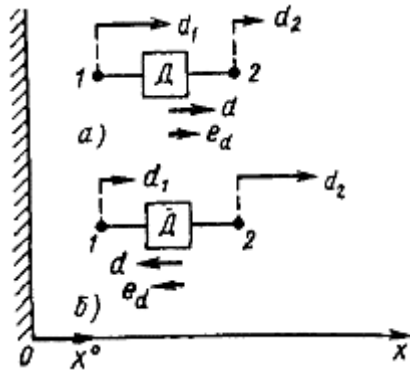


Рис. 3.7. Двухполюсники Д с векторами  $\mathbf{d}$  относительного перемещения полюсов:  
 $a - d_1 > d_2$ ;  $b - d_1 < d_2$

Для однозначного толкования уравнений (3.21) примем следующее правило задания направлений сил, приложенных к полюсам извне: если эти направления совпадают, то к двухполюснику приложены сжимающие силы, если они не совпадают, то приложены растягивающие силы (рис. 3.8).

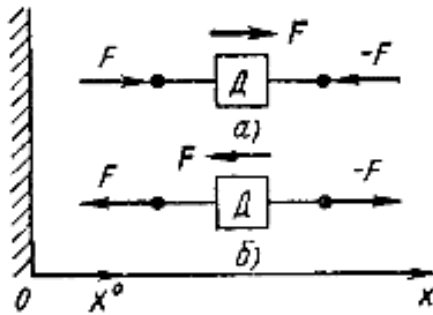


Рис. 3.8. График связи направлений сил, приложенных к полюсам извне, с направлениями воспринимаемой двухполюсником силы  $F$  и оси  $Ox$ :  
 $a$  – сжимающие силы;  $b$  – растягивающие силы

Величины  $F$  и  $k$  ( $k = d, v, a$ ) – временные двухполюсника;  
 $F_i$  и  $k_i$  ( $k_i = d_i, v_i, a_i$ ;  $i = 1, 2$ ) – полюсные переменные.

Характер движения полюсов (сближение или удаление) и приложенных сил (сжимающие или растягивающие) не зависит от принятого положительного направления оси  $Ox$ , поэтому при изменении направления оси  $Ox$  на обратное аналогично изменяются направления векторов  $d, v, a, F$ .

### 3.2.2. Графы механических цепей

Анализ сложных линейных механических цепей удобно проводить с помощью линейных графов. **Линейный граф** представляет собой схематический рисунок в виде сетки, элементами которой являются отрезки линий и места их соединений. Отрезки линий вместе с концевыми точками называют **ребрами** графа, а концевые точки ребра – **вершинами**. Строго линейным графом называют множество ребер, не имеющих никаких других общих точек, кроме вершин. При анализе механических цепей используют **линейные графы цепей (графы цепей)** и **линейные графы сигналов (графы сигналов, графы потока сигналов)** цепей. И те и другие графы являются **направленными**, так как каждое ребро в них ориентировано. Граф цепи несет информацию о соединении элементов цепи и всю информацию о связи переменных этой цепи.

### 3.2.3. Элементарные пассивные двухполюсники

К основным элементарным пассивным двухполюсникам относятся: **упругий элемент (УЭ) – упругость, диссипативный элемент (ДЭ) – демпфер** и **инерционный элемент (ИЭ) – масса**. Отличительной чертой этих элементов является простота математических соотношений, связывающих переменные двухполюсника.

**Упругий элемент (упругость).** Упругость – это идеальный механический элемент, относительное перемещение  $d$  полюсов которого пропорционально приложенной (воспринимаемой) силе  $F$  (рис. 3.9).

Для сил  $F_1$  и  $F_2$ , приложенных к полюсам 1 и 2, имеем (см. уравнение (3.21))

$$\left. \begin{aligned} F_1 = F_1 x^0 = F x^0 = c(d_1 - d_2) x^0 = c d x^0 = c d = F, \\ F_2 = F_2 x^0 = -F x^0 = -F, \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

где  $F$  и  $D$  – переменные двухполюсника;

$c$  – коэффициент жесткости упругого элемента.

Положительному значению переменной  $d$  отвечает деформация сжатия УЭ, а отрицательному – деформация растяжения.

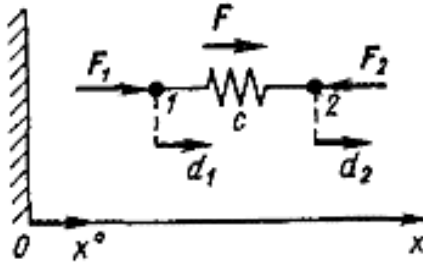


Рис. 3.9. Схема упругого элемента

Из уравнения (3.22) следует, что

$$F = cd = c(d_1 - d_2). \quad (3.23)$$

**Диссипативный элемент (демпфер).** Демпфер (рис. 3.10) – это идеальный механический элемент, у которого относительная скорость  $v$  полюсов пропорциональна приложенной (воспринимаемой) силе  $F$  (рис. 3.11).

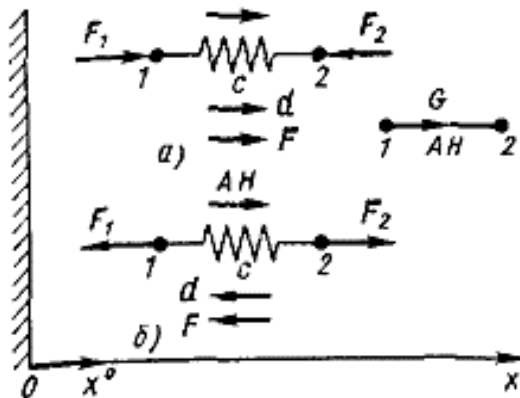


Рис. 10. Упругий элемент с выбранным ассоциированным направлением (АН) и его граф  $G$ : а –  $d$ ,  $F > 0$ ; б –  $d$ ,  $F < 0$

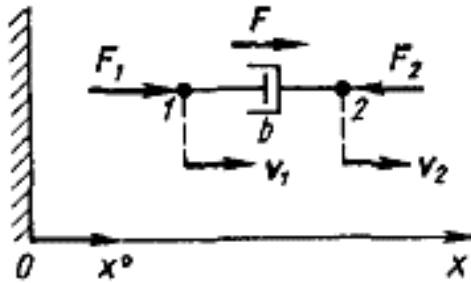


Рис. 3.11. Схема демпфера

Для сил  $F_1$  и  $F_2$  приложенных к полюсам 1 и 2, с учетом равенств (3.52) и (3.53) можно записать:

$$\left. \begin{aligned} F_1 = F_1 x^0 = F x^0 = b(v_1 - v_2)x^0 = b v x^0 = b v = F; \\ F_2 = F_2 x^0 = -F x^0 = -F, \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

где  $b$  – коэффициент сопротивления диссипативного элемента.

Положительному значению переменной двухполюсника  $v$  отвечает сближение полюсов. По аналогии с упругим элементом демпферу можно придавать ассоциированное направление, так как векторы  $v$  и  $F$  одинаково направлены, рис. 3.12.

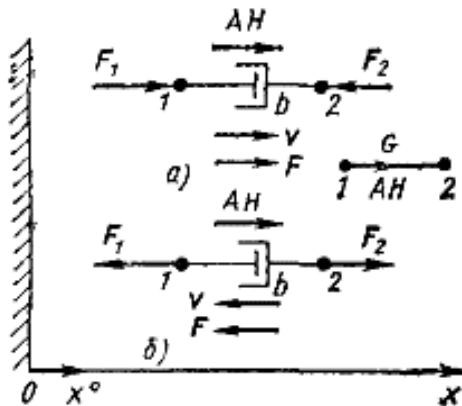


Рис. 3.12. Демпфер с выбранным ассоциированным направлением  $AH$  и его граф  $G$ :  $a - v, F > 0$ ;  $b - v, F < 0$



Из уравнения (3.24) следует, что

$$F = b v = b(v_1 - v_2). \quad (3.25)$$

**Инерционный элемент (масса).** Масса – это идеальный механический элемент, у которого относительное ускорение полюсов  $a$  пропорционально приложенной (воспринимаемой) силе  $F$  в принятой системе отсчета. Один полюс массы как двухполюсника жестко связан с принятой системой отсчета (в общем случае неинерциальной) и имеет ее ускорение (рис. 3.13).

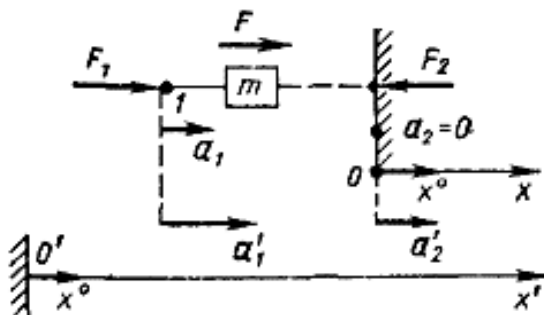


Рис. 3.13. Схема инерционного элемента как двухполюсника

С принятой системой отсчета связана ось  $Ox$ , ось  $O'x'$  связана с инерциальной системой отсчета. Для ускорений полюсов можно записать

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 x^0; & a_2 &= 0; \\ a &= a x^0 = a_1 - a_2 = a'_1 - a'_2 = (a'_1 - a'_2) x^0, \end{aligned}$$

где  $a$  – относительное ускорение полюсов двухполюсника;

$x^0$  – единичный вектор осей  $x$  и  $x'$ ;

$a_1, a_2$  – ускорения полюсов в принятой системе отсчета;

$a'_1, a'_2$  – абсолютные ускорения полюсов (в инерциальной системе отсчета).

В принятой системе отсчета в полюсах приложены силы  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 3.14):

$$\begin{aligned} F_1 = F_1 x^0 = F x^0 = \max^0 = ma = m(a'_1 - a'_2) x^0 = F; \\ F_2 = F_2 x^0 = -F x^0 = -F, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где  $m$  – масса инерционного элемента.

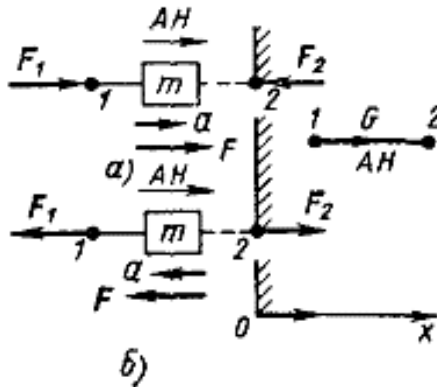


Рис. 3.14. Инерционный элемент с выбранным ассоциированным направлением  $AH$  и его граф  $G$ :  $a - a$ ,  $F > 0$ ;  $b - a$ ,  $F < 0$

Из уравнения (3.26) следует

$$F = ma = m(a'_1 - a'_2). \quad (3.27)$$

### 3.2.4. Элементарные активные двухполюсники

Активные двухполюсники являются идеализированными механическими элементами — источниками механической энергии. Их условно делят на *источники (возбудители) силы* и *источники (возбудители) кинематических величин* — перемещений, скоростей, ускорений.

**Источник силы.** Источник силы есть идеальный механический элемент с нулевым внутренним сопротивлением, который создает

в полюсах силы известного вида при произвольных, определяемых свойствами возбуждаемой системы, перемещениях полюсов (рис. 3.15).

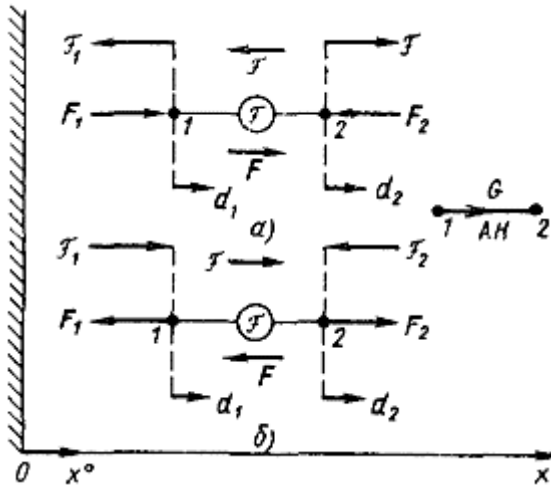


Рис. 3.15. Источник силы и его граф  $G$  с выбранным ассоциированным направлением (АН):  $a$  – воспринимаемая источником сила  $F > 0$ ;  $b$  –  $F < 0$

Для источника силы в полюсах 1 и 2 имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \mathcal{F} = \mathcal{F}x^0; \quad \mathcal{F}_2 = -\mathcal{F} = -\mathcal{F}x^0; \\ F_1 &= F = -\mathcal{F}_1 = -\mathcal{F}x^0; \quad F_3 = -F = -\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}x^0, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  – силы, создаваемые источником силы в полюсах 1 и 2;

$F_1, F_2$  – силы, воспринимаемые источником силы в полюсах 1 и 2 при взаимодействии с механической системой.

Таким образом, источник силы можно характеризовать создаваемой силой  $\mathcal{F}$  и воспринимаемой силой  $F$  (см. рис. 3.15),  $F = -\mathcal{F}$ . Воспринимаемая сила положительна ( $F > 0$ ) при сжимающих воспринимаемых силах полюсов (рис. 3.15,  $a$ ) и отрицательна ( $F < 0$ ) при растягивающих силах (рис. 3.15,  $b$ ). Знаки создаваемых сил противоположны.

При изображении механической цепи можно пользоваться создаваемыми силами. При составлении графа цепи и написании динамических уравнений во избежание ошибок следует использовать воспринимаемые силы. Таким образом, силовой переменной двух-полюсника является воспринимаемая сила  $F = -\mathcal{F}$ .

На рис. 3.15 показан граф  $G$  источника силы с выбранным ассоциированным направлением АН.

**Источники кинематических величин.** Источник кинематической величины (перемещения, скорости, ускорения) есть идеальный механический элемент с бесконечным внутренним сопротивлением, который задает определенное относительное движение полюсов при произвольных, определяемых свойствами возбуждаемой системы силах в полюсах (рис. 3.16).

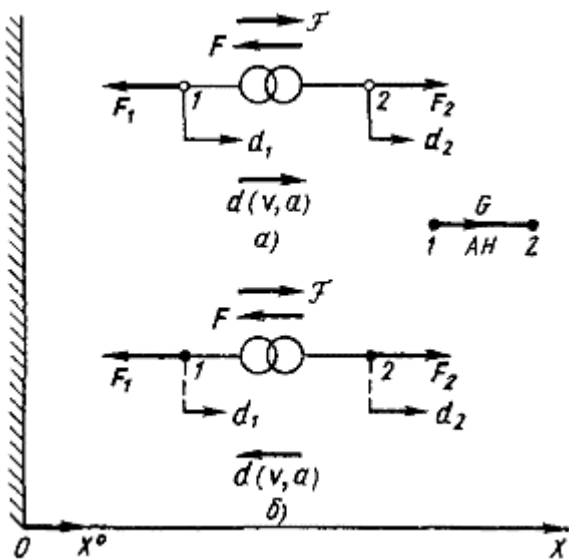


Рис. 3.16. Источник кинематической величины и его граф  $G$  с выбранным ассоциированным направлением (АН):

$$a - d, (v, a) > 0; \bar{b} - d, (v, a) < 0$$

Для источника кинематической величины известен вектор относительного перемещения полюсов  $d$ . В зависимости от вида кинема-

тической величины, используемой в конкретной решаемой задаче, различают источники перемещения  $d$ , скорости  $v$  или ускорения  $a$ .

Для сил в полюсах 1 и 2 имеем

$$F_1 = F = Fx^0 = \mathcal{F}; \quad F_2 = -F = -Fx^0 = \mathcal{F},$$

где  $F_1, F_2$  – силы, воспринимаемые источником перемещения в полюсах 1 и 2;

$F$  – сила, воспринимаемая источником перемещения;

$\mathcal{F}$  – сила, создаваемая источником перемещения:  $\mathcal{F} = -F$ .

Относительное перемещение полюсов

$$d = d_1 - d_2 = dx^0,$$

где  $d_1, d_2$  – перемещение полюсов в принятой системе отсчета;

$x^0$  – единичный вектор оси  $Ox$ .

В качестве переменных двухполюсника берем силу  $F$  и относительное перемещение  $d$ , скорость  $v$  или ускорение  $a$ , в зависимости от решаемой задачи.

**Соединения двухполюсников.** При применении цепей требуется рассматривать взаимные соединения элементов, при которых полюсы двухполюсников соединяются в узлы. Особенно это важно при решении задач, в которых рассматривается движение только нескольких точек или элементов. В этом случае целесообразно упрощать систему, вводя эквивалентные двухполюсные элементы, внутри которых «спрятаны» полюса, не представляющие интереса при исследовании. Существуют два типа соединения элементов: *параллельное* и *последовательное*. Двухполюсник, получающийся в результате соединения элементов, называют *результатирующим* или *эквивалентным*.

**При параллельном соединении двухполюсников** их полюсы объединяются в два узла (рис. 3.17) и у результирующего двухполюсника воспринимаемая сила  $F$  равна сумме воспринимаемых сил  $F_i$  отдельных двухполюсников:

$$F = \sum_i F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

а относительные перемещение  $d$ , скорость  $v$  и ускорение  $a$  полюсов такие же, как и у всех двухполюсников:

$$d = d_i, \quad v = v_i, \quad a = a_i, \quad k = k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

На рис. 3.17 показан граф  $G$  параллельного соединения двухполюсников.

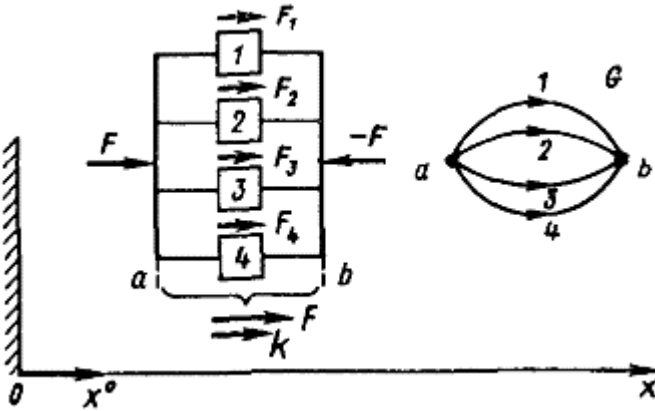


Рис. 3.17. Параллельное соединение двухполюсников 1, 2, 3, 4 и его граф  $G$

**При последовательном соединении двухполюсников** их полюсы соединяются так, что каждый узел принадлежит только двум двухполюсникам (рис. 3.18). У результирующего двухполюсника воспринимаемая сила  $F$  равна воспринимаемым силам  $F_i$  отдельных двухполюсников:

$$F = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n),$$

а кинематические векторы  $d$ ,  $v$  и  $a$  равны сумме кинематических векторов отдельных двухполюсников:

$$d = \sum_i d_i; \quad v = \sum_i v_i; \quad a = \sum_i a_i; \quad k = \sum_i k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

На рис. 3.18 показан граф последовательного соединения двухполюсников с выбранными ассоциированными направлениями.

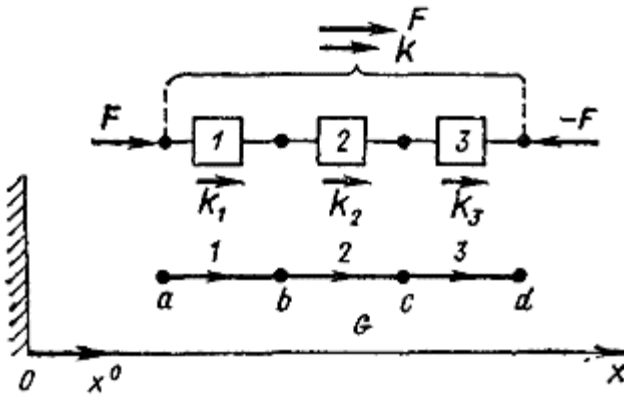


Рис. 3.18. Последовательное соединение двухполюсников 1, 2, 3 и его граф  $G$

**Звенья механических цепей.** Соединения пассивных двухполюсников, в том числе последовательно-параллельные и не последовательно-параллельные (мостовые), образуют пассивные звенья механических цепей. **В пассивных звеньях возможны произвольные соединения элементов.** Соединения активных двухполюсников образуют активные звенья цепи. **При соединении активных двухполюсников в звенья необходимо помнить, что источники сил не должны включаться параллельно с источниками кинематических величин; источники произвольных сил можно соединять параллельно, но нельзя соединять последовательно, источники произвольно заданных кинематических величин можно соединять последовательно, но нельзя соединять параллельно.**

### 3.3. Передаточные функции пассивных двухполюсников механических цепей

Применим преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях к уравнениям (3.23), (3.25) и (3.27) и получим для упругости, демпфера и массы следующие уравнения, связывающие трансформанты Лапласа силовой и кинематических переменных:

$$\bar{F}(p) = c\bar{d} = \frac{c}{p}\bar{v}(p) = \frac{c}{p^2}\bar{a}(p); \quad (3.28)$$

$$\bar{F}(p) = pb\bar{d}(p) = b\bar{v}(p) = \frac{b}{p}\bar{a}(p); \quad (3.29)$$

$$\bar{F}(p) = p^2m\bar{d}(p) = pm\bar{v}(p) = m\bar{a}(p); \quad (3.30)$$

$$\bar{a}(p) = p\bar{v}(p) = p^2d(p).$$

Основными динамическими характеристиками являются следующие передаточные функции (ПФ) двухполюсника, выражаемые через отношение изображений его переменных: **масса**  $M(p)$ , **механический импеданс**  $Z(p)$ , **жесткость**  $R(p)$ , **восприимчивость**  $G(p)$ , **подвижность**  $Y(p)$  и **податливость**  $A(p)$ :

$$M(p) = \frac{F(p)}{\bar{a}(p)} = \frac{Z(p)}{p} = \frac{1}{pY(p)} = G^{-1}(p); \quad (3.31)$$

$$Z(p) = \frac{F(p)}{\bar{v}(p)} = Y^{-1}(p); \quad (3.32)$$

$$R(p) = \frac{F(p)}{d(p)} = pZ(p) = \frac{p}{Y(p)} = A^{-1}(p); \quad (3.33)$$

$$G(p) = \frac{\bar{a}(p)}{F(p)} = \frac{p}{Z(p)} = pY(p) = M^{-1}(p); \quad (3.34)$$

$$Y(p) = \frac{\bar{v}(p)}{F(p)} = Z^1(p); \quad (3.35)$$

$$A(p) = \frac{d(p)}{F(p)} = \frac{1}{pZ(p)} = \frac{Y(p)}{p} = R^{-1}(p). \quad (3.36)$$



Динамические характеристики в функции от переменной  $p$  называют **операторными**, например операторный импеданс  $Z(p)$ , а в функции от переменной  $j\omega$  – **комплексными**. Так, комплексная (динамическая) жесткость демпфера  $R(j\omega) = j\omega b$ . Наиболее употребительны импеданс, подвижность, жесткость и восприимчивость двухполосников. В табл. 3.1 представлены операторные передаточные функции элементарных двухполосников – упругости, демпфера и массы в соответствии с уравнениями (3.28)–(3.30).

Таблица 3.1

Операторные передаточные функции элементарных двухполосников

Динамическая характеристика		Упругость $c$	Демпфер $b$	Масса $m$
$D(p)$	$M(p)$	$\frac{c}{p^2}$	$\frac{b}{p}$	$m$
	$Z(p)$	$\frac{c}{p}$	$b$	$pm$
	$R(p)$	$c$	$pb$	$p^2m$
$D^{-1}(p)$	$G(p)$	$\frac{p^2}{c}$	$\frac{p}{b}$	$\frac{1}{m}$
	$Y(p)$	$\frac{p}{c}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{pm}$
	$A(p)$	$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{pb}$	$\frac{1}{p^2m}$

Зависимость между силовой переменной  $F(p)$  и обобщенной кинематической переменной  $\bar{k}(p) [\bar{k}(p) = \bar{a}(p), \bar{v}(p), \bar{d}(p)]$  двухполосника в соответствии с уравнениями (3.31)–(3.36) имеет вид

$$\bar{F}(p) = D(p)\bar{k}(p); \quad (3.37)$$

$$\bar{k}(p) = D^{-1}(p)F(p), \quad (3.38)$$

где  $D(p)$  – **прямая динамическая характеристика** (или **прямой динамический параметр** при конкретном значении  $p$ ) двухполосника  $[D(p) = M(p), Z(p), R(p)]$ ;

$D^{-1}(p)$  – **обратная динамическая характеристика** (или **обратный динамический параметр**) двухполосника  $[D^{-1}(p) = G(p), Y(p), A(p)]$ .

Поскольку упругость, демпфер и масса имеют **ассоциированные переменные** двухполосника, приведение сложных двухполосников к одному из указанных типов путем использования кинематической переменной одного вида оставляет переменные  $\bar{F}(p)$  и  $\bar{k}(p)$  ассоциированными. Поэтому при анализе цепей можно использовать не оригиналы переменных, а их изображения и общую кинематическую переменную  $\bar{k}(p)$ , выбираемую из условий конкретной задачи.

Как следует из уравнений (3.37) и (3.38), у результирующего двухполосника, составленного из **параллельно соединенных** пассивных двухполосников, прямой динамический параметр равен сумме прямых динамических параметров отдельных двухполосников:

$$D(p) = \frac{F(p)}{\bar{k}(p)} = \frac{\sum F_i(p)}{\bar{k}(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i(p)}{k_i(p)} = \sum_{i=1}^n D_i(p), \quad (3.39)$$

а обратный динамический параметр равен произведению обратных динамических параметров, деленному на сумму их частных произведений:

$$D^{-1}(p) = \frac{\bar{k}(p)}{F(p)} = \frac{1}{D(p)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n D_i(p)} = \frac{\prod_{i=1}^n D^{-1}_i(p)}{\sum_{i=1}^n \left[ D_i(p) \prod_{i=1}^n D^{-1}_i(p) \right]}, \quad (3.40)$$

где  $\prod_{i=1}^n$  – символ произведения;

$D_i(p) \prod_{i=1}^n D^{-1}i(p)$  –  $i$ -е частичное произведение обратных пара-

метров.

Из уравнений (3.39) и (3.40) следует, что у результирующего двухполюсника, составленного из **последовательно соединенных** пассивных двухполюсников, обратный динамический параметр равен сумме обратных динамических параметров отдельных двухполюсников:

$$D^{-1}(p) = \frac{\bar{k}(p)}{F(p)} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{k}_i(p)}{F(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{k}_i(p)}{F_i(p)} = \sum_{i=1}^n D_i^{-1}(p),$$

а прямой динамический параметр равен произведению прямых динамических параметров, деленному на сумму их частичных произведений:

$$D(p) = \frac{F(p)}{\bar{k}(p)} = \frac{1}{D^{-1}(p)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n D^{-1}i(p)} = \frac{\prod_{i=1}^n D_i(p)}{\sum_{i=1}^n \left[ D_i^{-1}(p) \prod_{i=1}^n D_i(p) \right]},$$

где  $D^{-1}(p) \prod_{i=1}^n D_i(p)$  –  $i$ -е частичное произведение прямых параметров.

### 3.3.1. Законы Кирхгофа для линейных механических цепей

Изложенные законы являются основными из применяемых к линейным механическим цепям, состоящим из активных и пассивных двухполюсников с постоянными сосредоточенными параметрами, т. е. двухполюсников, параметры которых не зависят от силовых и кинематических переменных.

**1. Закон сил (правило узлов).** Сумма всех сил, действующих на любой узел цепи, равна нулю. В терминах воспринимаемых сил двухполюсников этот закон читается так: для любого узла сумма воспринимаемых сил по одну сторону от узла равна сумме воспринимаемых сил по другую сторону от узла. Поэтому для любого узла сумма воспринимаемых сил  $F_r$ , принадлежащих ему двухполюсников, взятая с учетом расположения последних относительно узла, равна нулю (рис. 3.19):

$$\sum_r a_r F_r = 0; \quad \sum_r a_r F_r = 0.$$

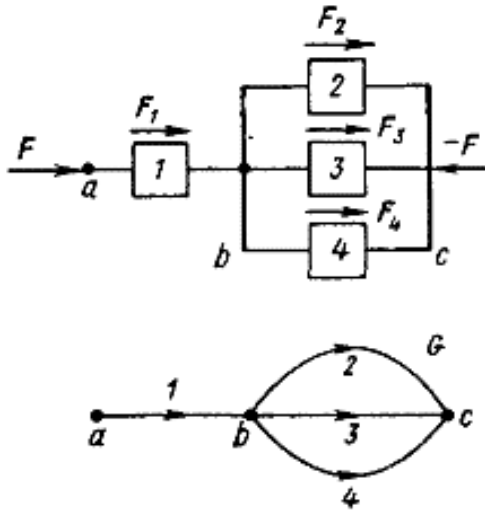


Рис. 3.19. Цепь из четырех двухполюсников с общим узлом  $b$  и ее граф  $G$

Причем  $a_r = 1$ , если  $F_r$  находится по одну сторону от узла, и  $a_r = -1$ , если  $F_r$  находится по другую сторону узла. Так, для узла  $b$  цепи, показанной на рис. 3.19, имеем

$$-F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0.$$

Такой же результат получаем из графа  $G$  цепи, если двухполюсникам слева и справа от узла задавать одинаковые ассоциированные направления, а коэффициенты  $a_r$  находить из условия:  $a_r = 1$ , если

стрелка направлена от узла, и  $a_r = -1$ , если стрелка направлена к узлу. Отсюда следует правило: для получения непротиворечивой системы уравнений из графа цепи ассоциированные направления двухполюсников должны быть выбраны одинаковыми.

Закон сил является следствием третьего закона Ньютона о равенстве действия и противодействия и аналогом закона Кирхгофа для электрических цепей.

**2. Закон относительного движения (правило контуров).** Сумма относительных перемещений узлов цепи на любом замкнутом контуре, образованном соединением двухполюсников, равна нулю. Сумма кинематических векторов  $k_r$  ( $k_r = d_r, v_r, a_r$ ), следовательно, и кинематических переменных  $k_r$  двухполюсников на любом замкнутом контуре цепи, взятая с учетом расположения двухполюсников в контуре, равна нулю (рис. 3.20):

$$\sum_r b_r k_r = 0; \quad \sum_r b_r k_r = 0, \quad (3.41)$$

причем  $b_r = 1$ , если при обходе по контуру  $r$ -й двухполюсник проходит в направлении (против) оси  $Ox$ , и  $b_r = -1$ , если двухполюсник проходит против (в направлении) оси  $Ox$ .

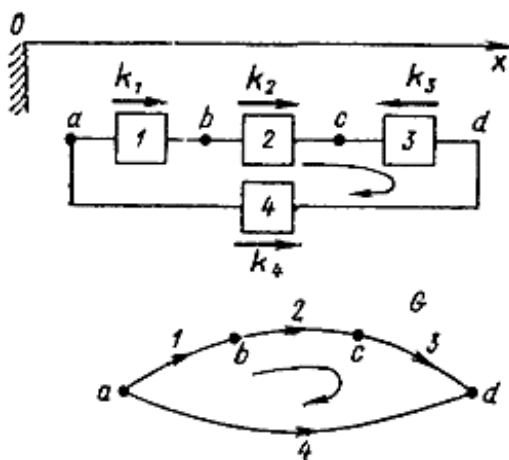


Рис. 3.20. Цепь из четырех двухполюсников, образующих контур, и ее граф  $G$

Так, для контура, изображенного на рис. 3.20, имеем

$$k_1 + k_2 + k_3 - k_4 = 0; \tag{3.42}$$

$$k_1 = k_a - k_b; \quad k_2 = k_b - k_c; \quad k_a = k_c - k_d; \quad k_4 = k_a - k_d,$$

что следует и из графа  $G$  цепи, если ассоциированные направления элементов заданы **одинаковыми**, т. е. в соответствии с указанным выше правилом. Сформулированные выше два закона называют также **законами Кирхгофа**. (Эти законы справедливы как для линейных, так и для нелинейных систем). Уравнение (3.41) называют **узловым**, а (3.42) – **контурным**.

**Принцип суперпозиции.** Для механической цепи, состоящей из линейных двухполюсников и имеющей несколько источников сил или кинематических величин, результат воздействия всех источников может быть получен как сумма результатов воздействия каждого из источников в отдельности, при этом остальные источники должны быть заменены двухполюсниками, имеющими динамические параметры заменяемых источников. Прямые динамические параметры идеального источника силы равны нулю, а обратные – бесконечности. У идеального источника кинематической величины прямые динамические параметры равны бесконечности, а обратные – нулю. В силу конечной отдаваемой мощности реальных источников значения динамических параметров лежат между указанными предельными. Реальный источник силы при отсутствии создаваемой им силы может оказывать сопротивление движению, поэтому его изображают в виде параллельного соединения идеального источника силы и некоторого пассивного двухполюсника (рис. 3.21, *а*). Реальный источник кинематической величины при отсутствии создаваемого им движения может допускать относительное перемещение полюсов, поэтому его изображают в виде последовательного соединения идеального источника и некоторого пассивного двухполюсника с конечными динамическими параметрами (рис. 3.21, *б*).

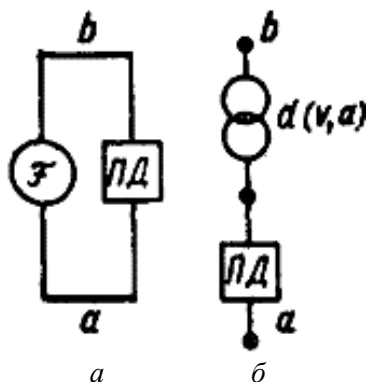


Рис. 3.21. Эквивалентные схемы неидеальных источников:  
 $a$  – источник силы;  $b$  – источник кинематической величины  
 $(a, b$  – полюсы источника; ПД – пассивный двухполюсник)

**Принцип взаимности.** Если в линейной механической цепи, состоящей из взаимных элементов, между узлами  $a$  и  $b$  действует источник силы  $\mathcal{F}(t)$ , при этом кинематическая величина между узлами  $c$  и  $d$  равна  $k(t)$ , то при приложении того же источника силы между узлами  $c$  и  $d$  та же кинематическая величина  $k(t)$  будет между узлами  $a$  и  $b$ . Принцип взаимности может быть аналогично сформулирован для источника кинематической величины и создаваемых им сил.

Принцип взаимности формулируется для линейных систем, состоящих из взаимных элементов, которые одинаково передают воздействия в обоих направлениях.

### 3.3.2. Обобщения метода передаточных функций цепей для сложных систем

Многие технические объекты, например космические аппараты, не удается моделировать одномерными механическими цепями.

Матрица передаточных функций (МПФ) является естественным обобщением понятия ПФ. Она связывает два многомерных вектора – вектор возбуждения (например, силу  $F(p)$ ) и вектор реакции сис-

темы (например, скорость  $V(p)$ ), которые принято называть обобщенными входом и выходом. Так:

$$V(p) = Y(p)F(p),$$

где  $Y(p)$  – матрица операторных подвижностей.

Элементы МПФ являются обычными ПФ и могут быть размерными или безразмерными величинами.

**МПФ при силовом возбуждении.** В механической системе при силовом возбуждении входной вектор состоит из обобщенных сил (сил и моментов), выходной – из обобщенных перемещений, скоростей или ускорений (включая угловые), а также из сил взаимодействия с присоединенными системами или жесткими опорами. Соответствующие передаточные функции называются *операторной податливостью, операторной подвижностью, операторной восприимчивостью, передаточной функцией сил*. В многомерном случае получается *матрица операторных податливостей* и т. д.

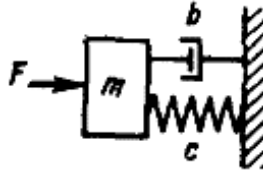
**МПФ при кинематическом возбуждении.** В этом случае входной вектор состоит из обобщенных перемещений, скоростей или ускорений, выходной вектор – из сил взаимодействия с присоединенными системами или с жесткими опорами, а также из кинематических величин, аналогичных входным. Соответствующие передаточные функции называются *операторной жесткостью, операторным импедансом, операторной массой, передаточной функцией перемещений (скоростей, ускорений)*. В многомерной системе получается *матрица операторных жесткостей* и т. д. При замене параметра  $p$  на  $j\omega$  получают *матрицу комплексных жесткостей* и т. п.

### Пример

Передаточные функции колебательной системы с одной степенью свободы представлены в табл. 3.2.



## Передаточные функции механических систем



Передаточная функция	Выражение
Операторная жесткость $R(p)$	$mp^2 + bp + c$
Операторная податливость $A(p)$	$\frac{1}{mp^2 + bp + c}$
Операторный импеданс $Z(p)$	$mp + b + \frac{c}{p}$
Операторная подвижность $Y(p)$	$\frac{1}{mp + b + \frac{c}{p}}$
Операторная масса $M(p)$	$m + \frac{b}{p} + \frac{c}{p^2}$
Операторная восприимчивость $G(p)$	$\frac{1}{m + \frac{b}{p} + \frac{c}{p^2}}$

**Выбор точек возбуждения и измерения. Передаточная матрица.** МПФ отличаются не только размерностью, но и выбором точек возбуждения и измерения. Можно указать два основных варианта.

1. В каждой из выбранных точек задаются вынуждающие силы и измеряется вибрация (отклик). Выходы и входы здесь совмещены.

В табл. 3.2 приведены передаточные функции колебательной системы с одной степенью свободы.

В общем случае в каждой из  $n$  точек (мест) может быть приложено до шести обобщенных сил и измерено до шести обобщенных параметров вибрации. Таким образом, матрица передаточных функций может иметь до  $6n$  строк и столбцов. Ее удобно записывать в виде блочной матрицы  $n$ -го порядка. Отдельные блоки или клетки могут иметь порядок от одного до шести, в зависимости от учета тех или иных координат:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix},$$

$$Y_{ik} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{16} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{26} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{61} & Y_{62} & \cdots & Y_{66} \end{pmatrix}_{ik};$$

$$F_k = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_6 \end{pmatrix}; V_i = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_6 \end{pmatrix}_i,$$

$$j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Ввиду того что по принципу взаимности матрица в целом симметрична, клетки  $Y_{ii}$ , расположенные на главной диагонали, должны быть симметричными, а недиагональные должны удовлетворять условию  $Y_{ik} = Y_{ki}^T$ .

Во избежание ошибок необходимо строго придерживаться единообразия в выборе положительных направлений сил и перемещений. Оси местной системы координат должны быть согласованы с направлением внешней нормали в данной точке.

2. Все выбранные точки системы делят на две группы – входные и выходные. Оба вектора содержат как силовые, так и кинематические величины. Такая система обычно является передаточным звеном между двумя другими системами, одна из которых является источником колебаний, другая – нагрузкой, воспринимающей вибрационную энергию. Например, однородный стержень, совершающий изгибные колебания в одной плоскости, имеет на каждом из двух концевых сечений перерезывающую силу, момент, линейное и угловое перемещения – вектор из четырех компонентов.

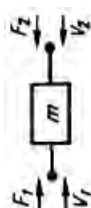
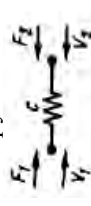

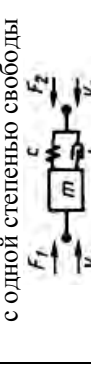
Наиболее распространены модели систем для анализа однонаправленных колебаний. У этих моделей на входе и выходе имеется по одной обобщенной силе и один кинематический параметр. Иногда эти модели называют механическими четырехполюсниками по аналогии с электрическими.

Матрицу передаточных функций, связывающую входной и выходной векторы передаточного звена, называют **передаточной матрицей**. В табл. 3.3 приведены комплексные передаточные матрицы, а также матрицы импедансов и подвижностей простейших механических систем – массы, пружины, колебательной системы с одной степенью свободы.

Все положительные направления  $F$  и  $V$  выбраны внутрь системы. При использовании матрицы  $T$  для вектора скорости  $V_2$  часто выбирают направление, совпадающее с  $V_1$ . Для этого случая необходимо изменить знаки элементов  $T_{12}$  и  $T_{22}$  матриц  $T$  в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Матрицы импедансов, подвижностей и передаточные матрицы простейших однонаправленных передаточных звеньев

Матрица	Передаточное звено			
	Масса	Пружина	Демпфер	Колесательная система с одной степенью свободы
Матрица импедансов $Z$				
Матрица подвижностей $Y$	$-\frac{1}{m\omega} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$j \frac{c}{\omega} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} j\omega m + \frac{c}{j\omega} + b & \frac{c}{j\omega} \\ \frac{c}{j\omega} + b & \frac{c}{j\omega} \end{pmatrix}$
Передаточная матрица $T$	$\begin{pmatrix} 1 & -j\omega m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j \frac{\omega}{c} & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{b} & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\det Z} \begin{pmatrix} \frac{c}{j\omega} + b & -\left(\frac{c}{j\omega} + b\right) \\ -\left(\frac{c}{j\omega} + b\right) & j\omega m + \frac{c}{j\omega} + b \end{pmatrix}$
				$\begin{pmatrix} j\omega m + \frac{c}{j\omega} + b & -j\omega m \\ \frac{(c/j\omega) + b}{1} & \frac{1}{(c/j\omega) + b} & -1 \end{pmatrix}$

### 3.3.3. Вычисление МПФ при синтезе модулей (звеньев) механических подсистем

**Согласование координатных осей.** Одно из основных применений МПФ – это расчет вибрационных режимов или собственных колебаний сложной подсистемы, исходя из передаточных функций отдельных механических модулей.

При этом входы (выходы) разных модулей различным образом соединяются между собой, и для расчетов необходимо согласовать положительные направления координатных осей. В точках последовательного соединения различных модулей (рис. 3.22, а) оси двух местных систем координат должны быть противоположны. Тогда соответствующие силы и перемещения (скорости ускорения) при соединении модулей 1 и 2 удовлетворяют условиям

$$F_1 = F_2, \quad V_1 = -V_2.$$

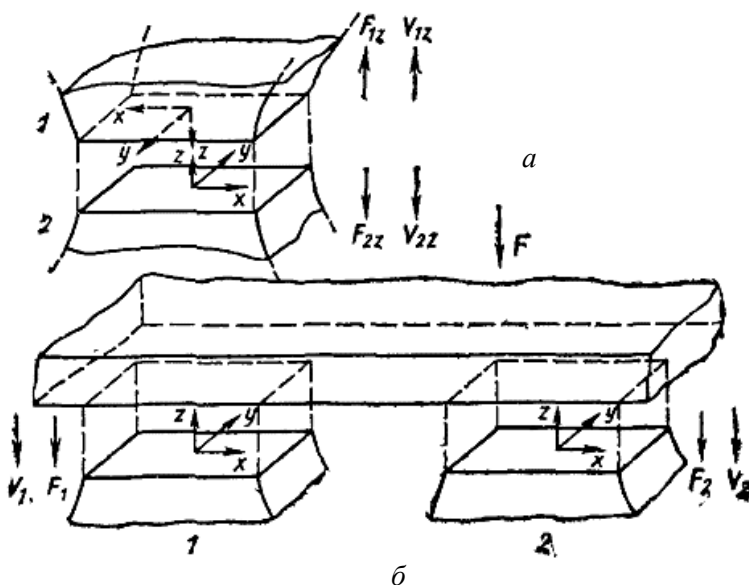


Рис. 3.22. Согласование местных систем координат сочленяемых участков:

а – при последовательном (встречном) соединении;

б – при подключении к третьему участку

В точках параллельного подсоединения различных модулей к одному источнику (рис. 3.22, б) оси должны быть одинаково направлены. Тогда общая сила  $F$  и скорость  $V$  связаны с  $F_1, F_2$  и  $V_1, V_2$  следующим образом:

$$F = F_1 + F_2; \quad V = V_1 + V_2.$$

**Параллельное соединение модулей.** Пусть имеются две системы с матрицами импедансов  $Z'$  и  $Z''$  одного порядка, параллельно подключаемые, например, к некоторому многомерному источнику сил (рис. 3.23).

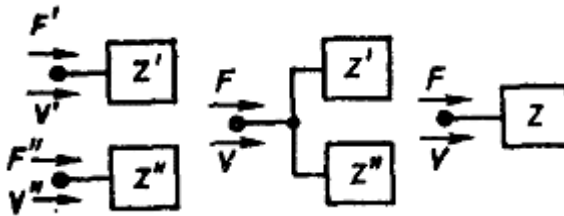


Рис. 3.23. Системы с параллельным соединением входов

Имеют место следующие равенства:

$$F' = Z'V'; \quad F = F' + F'';$$

$$F'' = Z''V''; \quad V = V' = V''; \quad F = (Z' + Z'')V.$$

Для  $n$  систем

$$F = (Z' + Z'' + \dots + Z^{(n)})V.$$

Таким образом, при параллельном соединении модулей импеданс (жесткость, масса) новой системы равен сумме импедансов (жесткостей, масс) отдельных модулей.

В частности, при параллельном соединении входов и выходов передаточных звеньев (рис. 3.24) вместо передаточных матриц удобно рассматривать матрицы импедансов

$$\begin{pmatrix} F_1' \\ F_2' \end{pmatrix} = Z' \begin{pmatrix} V_1'' \\ -V_2'' \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} F_1'' \\ F_2'' \end{pmatrix} = Z'' \begin{pmatrix} V_1'' \\ -V_2'' \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = (Z' + Z'') \begin{pmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{pmatrix}.$$

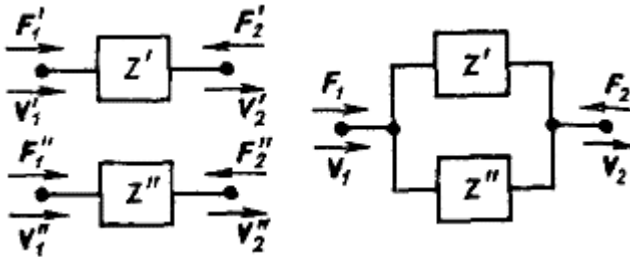


Рис. 3.24. Системы с параллельным соединением входов и выходов

**Последовательное соединение передаточных модулей.** Если соединяются последовательно два звена с передаточными матрицами  $T'$  и  $T''$  одного порядка (рис. 3.25), справедливы следующие равенства:

$$\begin{pmatrix} F_1' \\ V_1' \end{pmatrix} = T' \begin{pmatrix} F_2' \\ V_2' \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} F_1'' \\ V_1'' \end{pmatrix} = T'' \begin{pmatrix} F_2'' \\ V_2'' \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} F_1' \\ V_1' \end{pmatrix} = T'T'' \begin{pmatrix} F_2'' \\ V_2'' \end{pmatrix},$$

и, вообще, для  $n$  звеньев

$$\begin{pmatrix} F_1' \\ V_1' \end{pmatrix} = T'T'' \dots T^{(n)} \begin{pmatrix} F_2^{(n)} \\ V_2^{(n)} \end{pmatrix}.$$

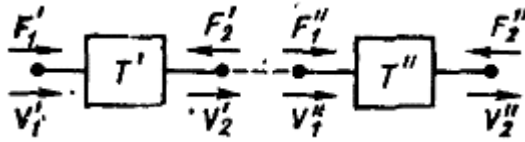


Рис. 3.25. Последовательное соединение систем

Таким образом, при последовательном соединении передаточных звеньев передаточные матрицы перемножаются.

## Глава 4. АКТУАТОРЫ

### 4.1. Модели и схемы преобразования энергии

Актуаторы как компоненты мехатронных систем выполняют функции передаточных звеньев, которые в цепи функционирования системы находятся между системами регулирования (управления) и рабочей механической частью системы, рис. 4.1.

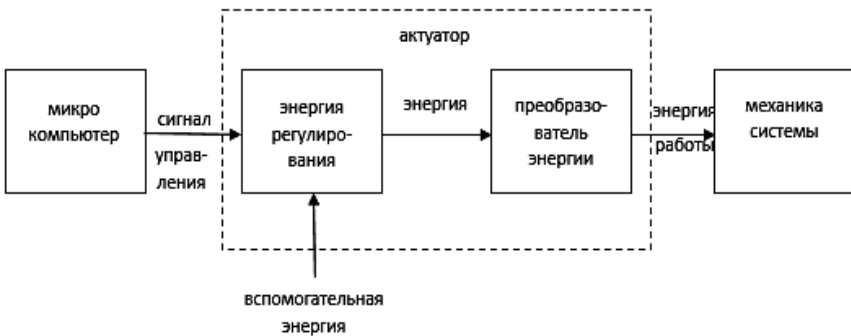


Рис. 4.1. Схема актуатора

**Микроактуатор** – устройство, которое преобразует энергию в управляемое движение. Микроактуаторы имеют размеры от нескольких квадратных микрометров до одного квадратного сантиметра.



Основные используемые методы активации в таких устройствах могут быть сведены к следующим: **электростатический, магнитный, пьезоэлектрический, гидравлический** и **тепловой**. Наиболее перспективными методами считаются пьезоэлектрический и гидравлический.

Привод состоит из двигателя, управляющего органа (распределителя) и системы управления, где пунктиром обозначены элементы актуатора.

На выходе актуатора электрическая энергия или мощность преобразуется в механическую.

Более подробная схема имеет вид рис. 4.2.

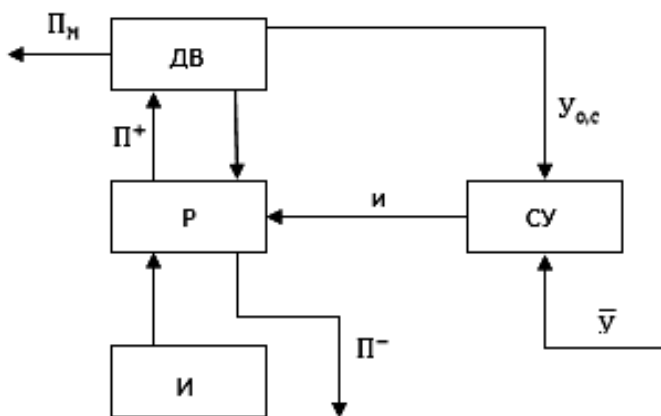


Рис. 4.2. Подробная схема актуатора:

ДВ – двигатель; Р – распределитель; СУ – система управления, И – источник первичной энергии;  $\Pi^+$  и  $\Pi^-$  – энергия, подводимая к двигателю и отводимая от него;  $\Pi_m$  – механическая энергия, получаемая от двигателя;  $\bar{y}$  – задающий сигнал;  $U_{o,c}$  – сигнал обратной связи; И – управляющий сигнал (входное воздействие)

Согласно рис. 4.2 привод состоит из двигателя, управляющего органа (распределителя) и системы управления. В двигателе (ДВ) первичная (гидравлическая, электрическая, пневматика, электромагнитная) энергия преобразуется в механическую энергию движения рабочего органа.

В управляющем органе Р (распределителе) определяется интенсивность подвода и отвода первичной энергии к двигателю и вы-

полняются функции регулирования потоков первичной энергии с помощью различных устройств, например в электроприводе потоками поступающей к двигателю электрической энергии управляют с помощью тиристорных, транзисторных преобразователей, усилителей и т. д. В гидropневмоприводах регулирование осуществляют золотниковые, клапанные и другие устройства. В системе управления в соответствии с управляющими программами генерируются входные воздействия И (управляющие сигналы), которые подводятся по входу распределительного устройства с целью обеспечения заданного закона динамики двигателя.

На вход системы управления подаются:

задающие сигналы  $\bar{Y}$  согласно требуемому программному закону динамики двигателя;

сигналы  $Y_{o,c}$  – обратной связи, характеризующие изменение во времени реальных параметров двигателя.

Рассогласование  $\Pi_y = \bar{Y} - \bar{Y}_{o,c}$  является основой формирования в системе управления входных воздействий И (управляющих сигналов), подаваемых на вход распределителя.

Рассмотрим основные типы преобразователей энергии рис. 4.3, а термодинамических (пневмогидропреобразователи) и электромагнитных (электрических), рис. 4.3, б.

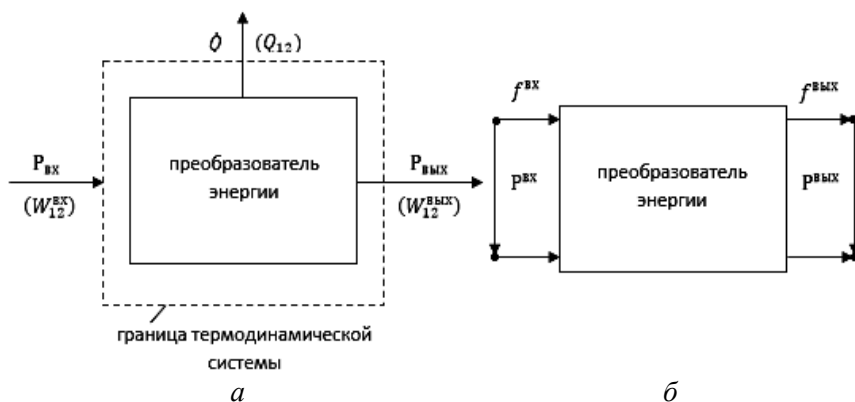


Рис. 4.3. Преобразователи энергии

Здесь  $W$  – работа, тогда мощность

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

Работа за время  $t_1 \leq t \leq t_2$  вычисляется по формуле

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt.$$

Кроме работы на границе термодинамической системы может быть передача тепла  $Q_{12}$ , тогда закон баланса (сохранения) энергии записывается в виде

$$E_2 - E_1 = W_{12} + Q_{12}$$

или

$$\frac{dE}{dt} = P + \dot{Q},$$

где  $\dot{Q}$  – поток тепла через границу системы.

Исходя из условия сохранения энергии  $E = \text{const}$  можем записать

$$W_{12}^{\text{ВХ}} = W_{12}^{\text{ВЫХ}} + Q_{12}$$

или

$$P^{\text{ВХ}} = P^{\text{ВЫХ}} + \dot{Q}.$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{P^{\text{ВЫХ}}}{P^{\text{ВХ}}} = \frac{P^{\text{ВХ}} - \dot{Q}}{P^{\text{ВХ}}} = 1 - \frac{\dot{Q}}{P^{\text{ВХ}}}.$$

Основными видами мощностей являются:  
механическая;  
электрическая;  
гидропневматическая;  
тепловая.

В табл. 4.1 даны обозначения перечисленных видов мощностей, которые могут быть преобразованы одна в другую.

Таблица 4.1

Обозначения видов мощностей

Вид мощности	Общие обозначения потенциала $P$	Общие обозначения притока $f$	Мощность $P = pf$
Механическая Поступательная Вращательная	Линейная скорость $v$ Угловая скорость $\omega$	Сила $F$ Момент $M$	$P_{tr} = vF$ $P_{rot} = \omega M$
Электрическая	Напряжение $U$	Ток $I$	$P_{el} = UI$
Гидропневмотечение	Давление $p$	Объемная скорость $\dot{V}$	$P_n = p\dot{V}$
Тепловая	Разница температур $\Delta T$	Приток тепла $kA$	$P_{th} = \Delta T kA$



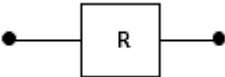
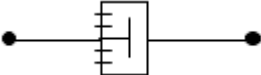

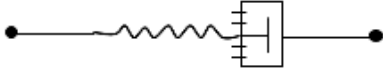

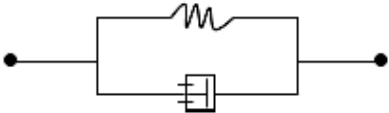
*Электрическая мощность* – это мощность на полюсах, выступающая как величина напряжения  $U$  между точками зажимов и тока  $I$  в проводнике. Идеальный преобразователь электричества описывается через зажимы входные и выходные как четырехполюсные.

С математической точки зрения механические, электрические системы могут быть записаны одинаково для инерционных, запаасающих и безынерционных звеньев, табл. 4.2.

Таблица 4.2

Характеристики цепей

Электрическая цепь	Механическая цепь
1	2
Количество электричества	Деформация
ЭДС $E$	Напряжение $\sigma_{ij}$
Сила тока $I$	Скорость деформации $2\dot{\epsilon}_{ij}$

1	2
Емкость $C$ 	Податливость $S_{ijke}$ 
Сопротивление $R$ 	Вязкость $\eta$ 
Параллельное соединение 	Последовательное соединение 
Последовательное соединение 	Параллельное соединение 

#### 4.2. Электромагнитные поступательные преобразователи энергии

Все электродинамические преобразователи используют силу Лоренца, которая возникает, когда провод с протекающим током находится в магнитном поле, а ток и магнитное поле могут перемещаться друг относительно друга.

В **элементарной машине**, рис. 4.4, принимается, что в постоянном во времени и однородном магнитном поле с плотностью потока

$$\bar{B} = Vs / m^2, \text{ тесла,}$$

в котором перпендикулярно направлению течения провод  $l$  может проводить ток  $I$ . Независимо от движения провода (скорость  $\bar{v}$ ) в нем возникают в результате движущие заряды  $Q$  (скорость  $\bar{w}$ ), сила Лоренца

$$\bar{F} = Q\bar{w}\bar{B}. \quad (4.1)$$

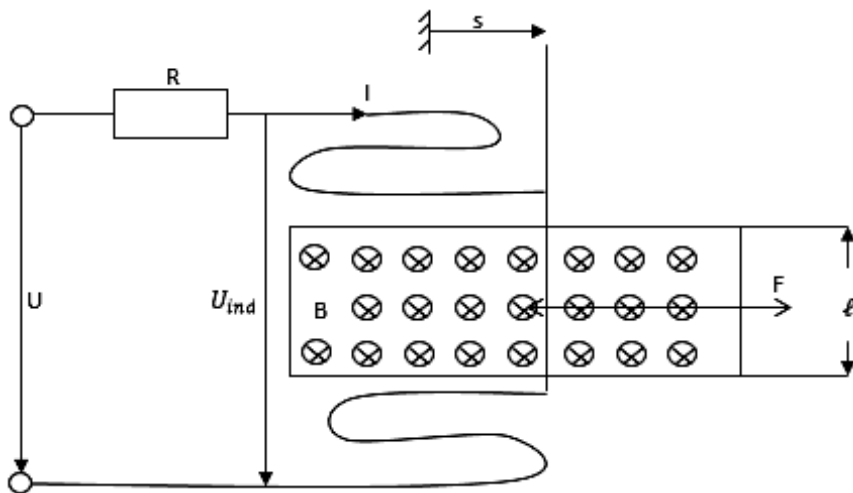


Рис. 4.4. Элементарный электродинамический преобразователь

Из определения тока  $I$  следует

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{dQ}{dl} W$$

или

$$dQ \bar{w} = \bar{I} dl .$$

Тогда из (4.1) следует

$$d\bar{F} = dQ (\bar{w}\bar{B}) = I (d\bar{l}\bar{B}) .$$

Для значения силы Лоренца получим

$$F = IlB .$$

Магнитный поток  $\Phi$  ( $\upsilon$ ,  $s$ ) определяется **поверхностью**  $S$ :

$$\Phi = \int_S \bar{B} d\bar{A} .$$

В этом случае  $S = ls$ , следовательно,  $\Phi = BA = Bls$ .

В результате движения проводника со скоростью  $\dot{s} = v$  возникает смена потока и в соответствии с принципом индукции индуцированное напряжение  $U_{\text{ind}}$  в петле проводника имеет вид

$$U_{\text{ind}} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(Bls)}{dt} = Blv. \quad (4.2)$$

Баланс напряжения для петли проводника запишем в виде

$$U = RI + U_{\text{ind}}. \quad (4.3)$$

Из (4.3) вытекает баланс мощности на зажимах  $P^{\text{BX}} = UI$ , мощность потерь  $P_{\text{проп}} = RI^2$  и внутренняя эффективная электрическая мощность  $P_{\text{el}} = U_{\text{ind}}I$ , которая должна быть равна мощности механической:

$$P_{\text{el}} = P^{\text{BX}} - P_{\text{проп}} = P^{\text{ВЫХ}};$$

$$U_{\text{ind}}I = UI - RI^2 = BlvI = Fv. \quad (4.4)$$

Если проводник без тока движется в магнитном поле, то индуцированное напряжение равно внешнему напряжению и устанавливается скорость  $v_0$ , которая вычисляется по формуле

$$v_0 = \frac{U}{Be}.$$

Если проводник испытывает торможение, то  $v < v_0$  и  $U_{\text{ind}} < U$ . Проводник отдает механическую мощность  $P^{\text{BX}}$ , которая добывает до потерянной мощности  $P_{\text{потер}}$  на входной стороне преобразователя  $P^{\text{BX}}$ .

Концепция элементарной машины находит непосредственное применение в качестве линейного или динамического напряжения.

Вместо петли проводника катушка с  $n$  витками обычно движется в магнитном поле. В этом случае индуцированное напряжение

$$U_{\text{ind}} = \frac{d\Phi}{dt} = nBlv. \quad (4.5)$$

Баланс напряжения в уравнении (4.2) должен быть расширен за счет учета падения напряжения на катушке, обусловленного индуктивностью катушки  $L$ :

$$U = RI + L \frac{dI}{dt} + U_{\text{ind}}. \quad (4.6)$$

На рис. 4.5 изображена схема соединений электродинамического преобразователя.

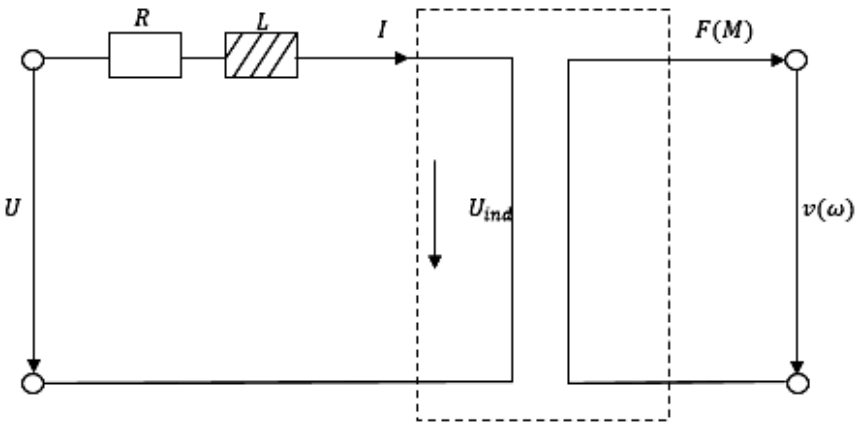


Рис. 4.5. Соединение электродинамического преобразователя

Математическая модель четырехполюсника, см. рис. 4.5, предполагает, что

$$F = kl,$$

где  $k$  – постоянная актуатора.



Из условия  $P_{el} = P^{Bx}$  или  $U_{ind}I = Fv$  следует, что

$$v = \frac{1}{k}U_{ind}. \quad (4.7)$$

Сравнивая (4.7) с (4.5), находим постоянную актуатора  $k = nBl$ .  
Для движущейся массы  $m$  актуатора по закону Ньютона следует

$$F = m\dot{v}. \quad (4.8)$$

Сравнивая (4.7) и (4.8), получаем математическую модель

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{k}{m}I; \\ \frac{dI}{dt} &= -\frac{R}{L}I - \frac{k}{L}v + \frac{1}{L}U. \end{aligned}$$

Вводя для вектора состояния обозначение  $\bar{z} = [v, I]^T$ , получим уравнение в пространстве состояния системы

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{m} \\ -\frac{k}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} U$$

или

$$\dot{\bar{z}} = A\bar{z} + \bar{b}U, \quad (4.9)$$

где  $A$  – матрица системы;

$\bar{b}$  – вектор (матрица) управления системы.

Вместо переменных состояний  $v, I$  можно взять другие, например  $v$  и  $F$ , тогда математическая модель имеет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{m} F; \quad (4.10)$$

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{R}{L} F - \frac{k^2}{L} \psi + \frac{k}{L} U. \quad (4.11)$$

Уравнения (4.10), (4.11) имеют вид (4.9) в пространстве состояний  $(\psi, F)$ .

### 4.3. Вращательные преобразователи энергии

Вращательный преобразователь, в принципе, состоит из цилиндрического статора, в котором находится ротор, отделенный от статора воздушным промежуток.

Пусть статор является постоянным магнитом и диаметрально направленным магнитным полем с плотностью потока  $B$ , рис. 4.6.

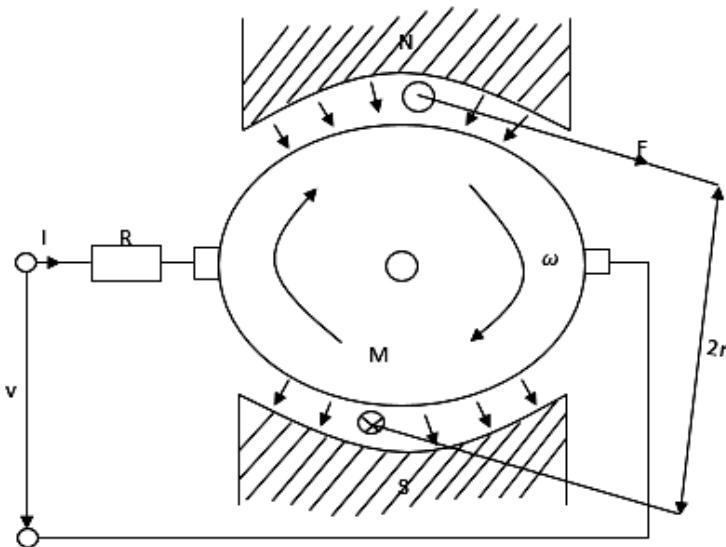


Рис. 4.6. Схема статора и ротора

На рис. 4.6 прямоугольная петля (рамка) проводника, длина  $l$ , ток  $I$ , вращается в статоре.

В положении, изображенном на рис. 4.6, на каждый проводник действует сила  $F = IlB$ . Две силы образуют пару сил с плечом  $2r$ . Отсюда момент

$$M = 2Fr = 2rlBI = ABI; \quad A = 2rl.$$

Индукированное напряжение в обоих проводниках

$$U_{\text{ind}} = 2Blv = 2rlB\omega = AB\omega,$$

где  $\omega$  – угловая скорость, рад/с.

$$n = 60\omega/2\pi.$$

Баланс напряжения вычисляется по формуле (4.3), а мощность – аналогично (4.4):

$$U_{\text{ind}}I = UI - RI^2 = ABI\omega = M\omega.$$

Зависимость между моментом  $M$  и током  $I$  имеет вид

$$M = k_{\varphi}I,$$

где  $k_{\varphi}$  – постоянная актуатора.

С учетом  $M\omega = U_{\text{ind}}I$  получим

$$\omega = \frac{1}{k_{\varphi}}U_{\text{ind}}.$$

Для вращения ротора с моментом инерции  $I_t$  получаем

$$M = I_t\dot{\omega}.$$

Математическая модель имеет вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_{\varphi}}{I}I;$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I - \frac{k_{\varphi}}{L}\omega + \frac{1}{L}U.$$

В пространстве состояний  $\upsilon$ ,  $k$ ,  $t$  выражаются через  $\omega$ ,  $k_\varphi$ ,  $I$ . Альтернативное представление получается из уравнений (4.10), (4.11), когда  $F$ ,  $\upsilon$ ,  $k$ ,  $t$  выражаются через  $M$ ,  $\omega$ ,  $k_\varphi$ ,  $I$ .

#### 4.4. Некоторые конструкции электродинамических преобразователей в двигателях постоянного тока

Рассмотрим двигатели постоянного тока, возбуждаемые электрическим полем через щетки, тогда в статоре течет ток  $I_F$ , создающий магнитный поток  $\Phi$ , который через воздушный просвет проникает в ротор. Одновременно через витки в роторе течет ток  $I_A$  и вследствие силы Лоренца вызывает вращающий момент двигателя.

На рис. 4.7, *а* изображена схема двигателя постоянного тока, 4.7, *б* – схема соединений.

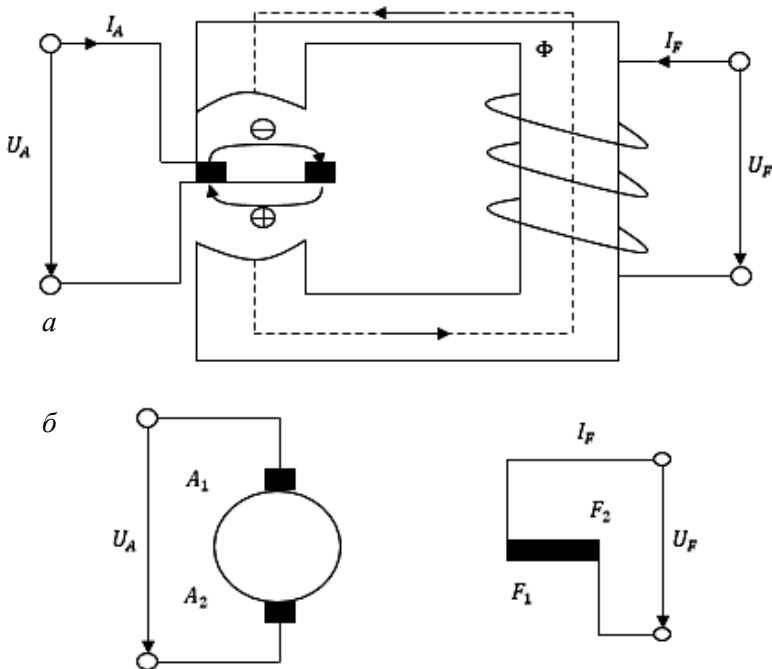


Рис. 4.7. Схема двигателя постоянного тока

Двум типам двигателей соответствуют зависимости между угловыми скоростями и вращательным моментом, различающиеся принципиально. Для обоих видов машин имеет место соотношение

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n = \frac{U - I_A R}{c\Phi}. \quad (4.12)$$

Из (4.12) следуют три возможности регулирования оборотов:

1. Регулирование поля: через изменение тока в статоре  $I_F$  можно влиять на моментный поток  $\Phi$  и через него – на число оборотов.
2. Регулирование сопротивления: через изменение сопротивления  $R$  изменять количество оборотов, что связано с потерями.
3. Регулирование напряжения: через изменение напряжения  $U$  на зажимах количество оборотов удастся изменить без потерь.

На рис. 4.8 изображены схемы двигателей постоянного тока (рис. 4.8, а, б) и их характеристики  $M, \omega$  (рис. 4.8, з, д).

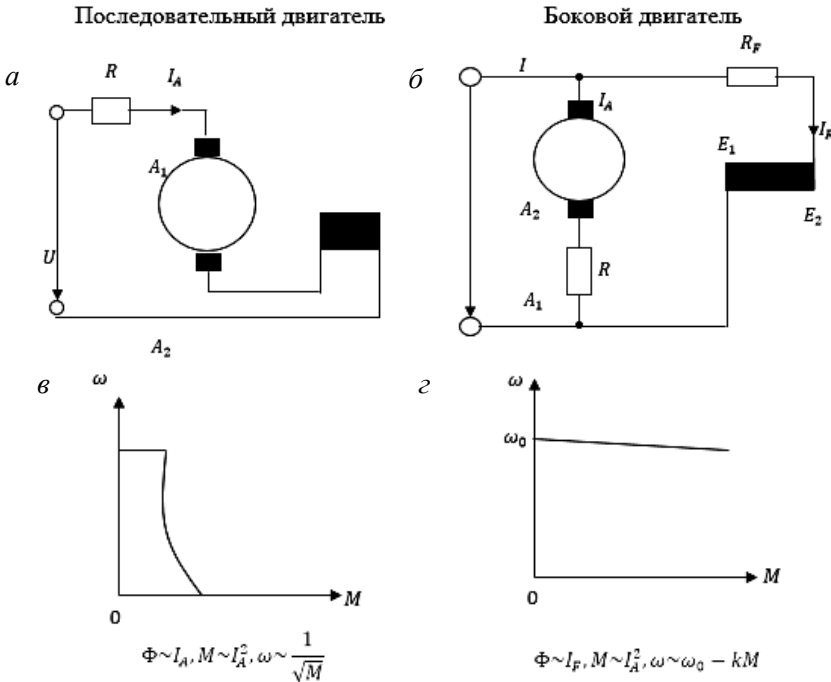


Рис. 4.8. Последовательный (а) и боковой (б) двигатели постоянного тока

### 4.4.1. Электродвигатели с вращающимся полем

Двигатели с вращающимся полем подразделяют на двигатели синхронные и асинхронные. В двигателях обоих типов статор содержит одну или несколько катушек переменного или постоянного тока с количеством  $p$  пар полюсов, создающих вращающееся поле. Переменное поле существует уже вследствие запитывания. Противоположностью этому является двигатель постоянного тока, ротором которого может быть магнит с постоянным направлением поля. На рис. 4.9 изображена схема синхронного двигателя с одним постоянным магнитом в качестве ротора.

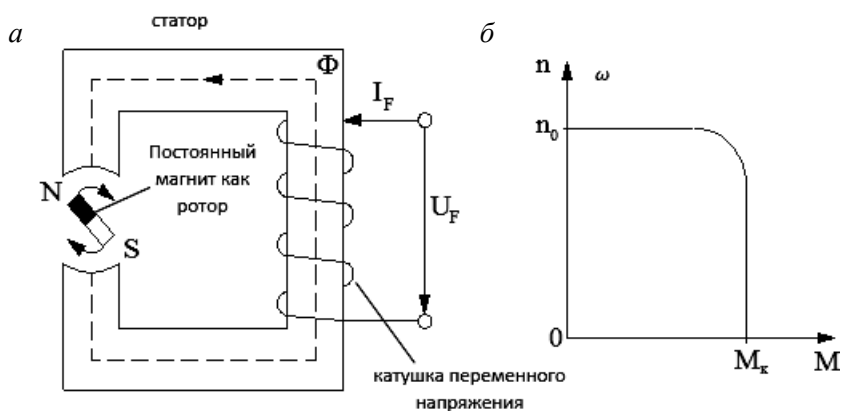


Рис. 4.9. Схема синхронного двигателя:  
а – конструкция; б – характеристика

При запитывании синхронного двигателя число оборотов  $n_0$  вычисляется по формуле

$$n_0 = \frac{60f}{p}, \text{ мин}^{-1}, \quad (4.13)$$

где  $f$  – частота,  $\text{с}^{-1}$ ;

$p$  – количество пар полюсов.

При  $p=1$ ,  $f=50$ ,  $\text{с}^{-1}$   $n_0 = 3000 \text{ мин}^{-1}$ .

Из формулы (4.13) следует, что количество оборотов за счет увеличения пар полюсов может быть изменено большими скачками.

Синхронный двигатель с постоянным направлением может развить момент только при числе оборотов, вычисляемых по формуле (4.13), и потому не может начать движение из состояния покоя. Он должен быть запущен с помощью вспомогательного двигателя или асинхронной катушки.

Если момент больше  $M_k$  (критический момент), то, как видно на рис. 4.9, б, двигатель останавливается.

Асинхронный двигатель подобно синхронному имеет статор, который под действием переменного или трехфазного тока создает вращающееся магнитное поле. Если в этом поле находится ротор, который на своих основаниях имеет провода, соединенные взаимно по одному, то в них индуцируется напряжение  $U_{ind}$ . Величина  $U_{ind}$  зависит от разницы числа оборотов  $n_0 = 60f/p$  вращающегося поля статора и числа оборотов  $n$  ротора.

Скольжение

$$s = \frac{n_0 - n}{n_0}; \tag{4.14}$$

$$n_0 = \frac{60f}{p},$$

характеризует эту разницу.

В клеточном роторе провода находятся в состоянии короткого замыкания, что в результате дает трехфазный ток, который, взаимодействуя с магнитным полем статора, дает момент ротора.

Количество оборотов двигателя следует из формулы (4.14)

$$n = n_0(1 - s) = \frac{60f}{p}(1 - s). \tag{4.15}$$

Из формулы (4.15) следуют три возможности регулирования числа оборотов:

1. Присоединение пар полюсов  $p$  в статоре дает возможность изменять число оборотов скачками.

2. Частотное регулирование – дает возможность за счет постепенного изменения частоты изменять количество оборотов.

3. Регулирование скольжением – в двигателях с кольцами можно влиять на скольжение за счет последовательно подключенных сопротивлений, что однако ведет к потерям.

На рис. 4.10, *a* изображена конструкция асинхронного двигателя с клеточным ротором, а на рис. 4.10, *б* – характеристики такого двигателя.

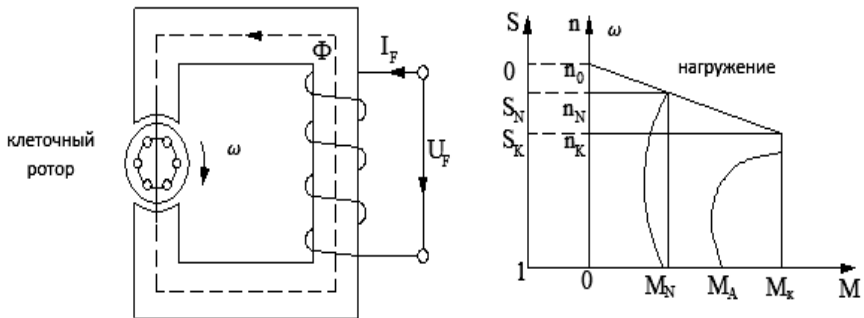


Рис. 4.10. Асинхронный двигатель с клеточным ротором:  
*a* – конструкция; *б* – характеристика

На рис. 4.10  $M_n n_n$  – номинальные моменты количества оборотов,  $S_N = 3-5\%$  – номинальное скольжение.

#### 4.4.2. Математические модели электромагнитных преобразователей. Линейные преобразователи

Все электромагнитные преобразователи (магниты протяженные, магниты переносные, шаговые двигатели) одинаково используют эффект магнитного сопротивления, в результате сила релуктации действует на тело, которое из-за своих свойств материала изменяет магнитное поле.

Свойства материала описываются магнитной проницаемостью  $\mu = \mu_r \mu_0$ , которая складывается из магнитной проницаемости вакуума  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Vs/Am}$  и относительной магнитной проницаемости



$\mu_r$  – безразмерной характеристики материала изменения плотности магнитного потока  $B(Vs/m^2)$  в соотношении с напряженностью магнитного поля в вакууме  $H(A/m)$ :

$$\bar{B} = \mu_r \mu_0 \bar{H}.$$

Железо имеет  $\mu_r \gg 1$ .

Рассмотрим идеальный элементарный магнит как простейший электромагнитный преобразователь, рис. 4.11.

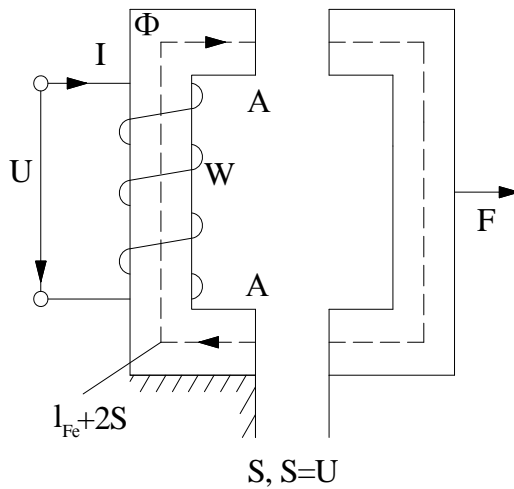


Рис. 4.11. Элементарный магнит с воздушным зазором

В воздушном зазоре шириной  $s$  однородное магнитное поле с плотностью магнитного потока  $\bar{B}$ , количество витков катушки равно  $W$ , площади полюсов  $A$ , длина магнитного поля в железе  $l_{Fe}$ .

Релуктанция или магнитное сопротивление  $R_m(A/(V\Delta s))$  аналогична электрическому сопротивлению  $R(V/A)$ . В табл. 4.4 приведена аналогия между магнитными и электрическими цепями.

## Аналогия между магнитными и электрическими цепями

Магнитная цепь	Электрическая цепь
<b>Закон Ома</b>	
$V = R_m \Phi$	$U = RI$
$V(A)$ – магнитная напряженность	$U(V)$ – напряжение
$\Phi(Vs)$ – магнитный поток	$I(A)$ – сила тока
$R_m(A/(Vs))$ – магнитное сопротивление	$R(V/A)$ – сопротивление
$R_{mi} = \frac{l_i}{\mu_i A_i} (A/(Vs))$ – сопротивление для материалов с магнитной проницаемостью $\mu_i = \mu_{ir} \mu_0$	$R_i = \frac{l_i}{\kappa_i A_i} (V/A)$ – сопротивление проводника с проводимостью $\kappa_i$ , длиной $l_i$ , сечением $A_i$

**Виды соединений****Последовательное соединение элементов**

$$R_m = \sum_i R_{mi}$$

$$R = \sum_i R_i$$

**Параллельное соединение элементов**

$$\frac{1}{R_m} = \sum_i \frac{1}{R_{mi}}$$

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

**Законы Кирхгофа****Второй закон – правило петли (замкнутый контур)**

$$V_{\text{общ}} = \sum_i V_i = \theta$$

$$\theta = \oint H ds(A) \text{ – приток}$$

$$\sum_i V_i = 0$$

**Первый закон – правило узлов**

$$\Phi_{\text{общ}} = \sum_i \Phi_i = \int_A \bar{B} d\bar{A} = 0$$

$$\sum_i I_i = 0$$

На рис. 4.12 представлены схемы: *a* – цепи магнитной; *б* – цепи электрической.

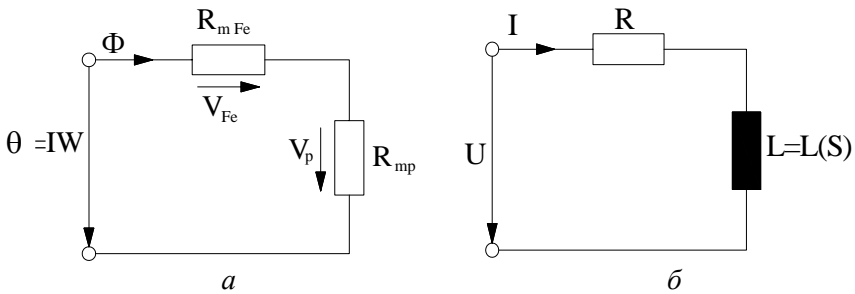


Рис. 4.12. Магнитная (*a*) и электрическая (*б*) цепь

В соответствии с табл. 4.4

$$R_{m \text{ общ}} = R_{m \text{ Fe}} + R_{mp} = \frac{I_{\text{Fe}}}{\mu_{\text{Fe}} A} + \frac{2S}{\mu_p A},$$

где  $\mu_p$  – магнитная проницаемость воздуха, причем  $\mu_p \approx \mu_0$ .

Так как  $\mu_r \text{ Fe} \gg \mu_0$ ,  $R_{m \text{ Fe}}$  пренебрежимо мало. Магнитный приток  $\theta = Iw = V_{\text{общ}}$ . Из закона Ома следует

$$\theta = Iw = V_{\text{общ}} = R_{m \text{ общ}} \Phi = R_{m \text{ общ}} \Phi A.$$

Приближенно  $R_{m \text{ общ}} = \frac{2s}{\mu_0 A}$ , тогда

$$B = \frac{Iw}{R_{m \text{ общ}} A} = \frac{\mu_0 Iw}{2s}.$$

Магнитная энергия в зазоре

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \bar{B} \bar{H} dV = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV = \frac{\mu_0 A w^2}{4} \frac{I^2}{s}.$$

Из сравнения энергии катушки  $W_c$  с  $W_m$  следует, что индуктивность  $L$

$$L = \frac{2k}{s};$$

$$k = \frac{\mu_0 A w^2}{4}.$$

Сила притяжения магнита  $F$  потенциальная и вычисляется по формуле

$$F = -\frac{\partial W(s)}{\partial s} = k \frac{I^2}{s^2} = \frac{A}{\mu_0} B^2;$$

$$W(s) = W_m = W_c.$$

Магнитная мощность подсчитывается из баланса входной мощности на зажимах  $P_{\text{вх}} = UI$ , потерянной мощности  $P_{\text{пот}} = RI^2$  и внутренней эффективной мощности  $P_m = dw/dt$ , которая равна механической мощности  $P_{\text{вых}} = Fv$ .

$$P_m = \dot{W} = P_{\text{вх}} - P_{\text{пот}} = P_{\text{вых}}; \quad (4.16)$$

$$\dot{W} = UI - RI^2 = Fv = k \frac{I^2}{s} v. \quad (4.17)$$

Для движущейся массы  $m$  по закону Ньютона

$$F = m\dot{v}. \quad (4.18)$$

Из формулы (4.16)–(4.18) получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{I^2}{s} \right) = \frac{2I\dot{I}s - \dot{s}I^2}{s^2} = \frac{I^2}{s^2} \dot{s};$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I}{s} \dot{s}, \quad \dot{s} = v.$$

Для переменных состояния  $s, v, I$  получается нелинейная математическая модель электромагнитного преобразователя

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{k}{m} \frac{I^2}{s^2 k};$$

$$\frac{1}{s} \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{k} I + \frac{1}{k} U.$$

Линеаризованная модель, описывающая электромагнитный преобразователь, записывается в виде

$$\frac{d\tilde{s}}{dt} = \tilde{v}; \quad \frac{d\tilde{v}}{dt} = \frac{K_l}{m} \tilde{I} - \frac{K_s}{m} \tilde{s}; \tag{4.19}$$

$$\frac{d\tilde{I}}{dt} = -\frac{2R}{L_0} \tilde{I} + \frac{2}{L_0} \tilde{U}.$$

$$\tilde{I} = I - I_0; \quad \tilde{v} = v - v_0;$$

$$\tilde{s} = s - s_0; \quad \tilde{U} = U - U_0.$$

Для вектора состояния  $\tilde{z} = [\tilde{s}, \tilde{v}, \tilde{I}]^T$  уравнение (4.19) записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{v} \\ \tilde{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_s}{m} & 0 & \frac{K_l}{m} \\ 0 & 0 & -\frac{2R}{L_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{v} \\ \tilde{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{L_0} \end{bmatrix} \tilde{U}$$

или

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{z}} &= A\tilde{z} + b\tilde{U}; \\ L_0 &= \frac{2k}{s_0} = \frac{\mu_0 A w^2}{2s_0}; \\ K_l &= L_0 \frac{I_0}{s_0}; \\ K_s &= L_0 \left( \frac{l}{s_0} \right)^2.\end{aligned}\tag{4.20}$$

Если в качестве переменных состояния взять  $\tilde{s}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{F}$ , то получим

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{s}}{dt} &= \tilde{v}; & \frac{d\tilde{v}}{dt} &= \frac{I}{m} \tilde{F}; \\ \frac{d\tilde{F}}{dt} &= -\frac{2R}{L_0} \tilde{F} - K_s \tilde{v} - \frac{2RK_s}{L_0} \tilde{s} + \frac{2K_l}{L_0} \tilde{U}.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Уравнения (4.20), (4.21) могут быть использованы для решения задач стабилизации и управления мехатронной системой.

#### **4.4.3. Электростатические актуаторы**

Для плоского конденсатора накопленная энергия  $U$  может быть рассчитана по формуле

$$U = \frac{CV^2}{2},$$

где  $C$  – емкость;

$V$  – напряжение между обкладками конденсатора.

Когда пластины конденсатора перемещаются навстречу друг другу, работа, совершаемая силой взаимодействия между ними,

может быть рассчитана как изменение  $U$  в зависимости от изменения расстояния  $x$ . Сила рассчитывается по формуле

$$F_k = \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}.$$

Существует несколько вариантов реализации электростатических актуаторов на основе плоскопараллельных конденсаторов.

Однако для генерации больших сил в такого рода устройства, которые будут совершать полезную работу, необходимо, чтобы при изменении расстояния сильно изменялись емкости. Это и есть руководство к действию для получения электростатических гребневых микродвигателей.

**Гребневые микродвигатели** состоят из большого количества встречностержневых штырей. При приложении напряжения появляется сила взаимодействия между штырями, и они начинают двигаться. Увеличение емкости пропорционально количеству штырей, таким образом, для генерации больших сил требуется большое количество штырей. Одной из потенциальных проблем такого устройства будет то, что если поперечное расстояние между штырями неодинаково с обеих сторон (или если устройство поломано), то возможно движение штырей под прямым углом к правильному направлению и соединение их друг с другом. Гребневые двигатели особенно распространены среди устройств, полученных микрообработкой поверхностей.

**Двигатели качения** названы так по действию раскачивания, положенному в основу их принципа работы. Ротор – это круглый диск. Во время работы расположенные снизу последовательно, друг за другом электроды включают и выключают. Диск последовательно притягивается к каждому электроду; край диска контактирует с диэлектриком, расположенным над электродами. В такой манере он медленно вращается по кругу, делая один оборот вокруг своей оси по совокупности нескольких изменений напряжения на статоре.

Другая конструкция двигателя качения: ротор, находящийся внутри статора, формирует ось двигателя. Электрическое поле раскачивает ротор внутри статора, и трение вращает ротор. Проблемы могут возникнуть, если быстро износится изоляция на электродах

статора, произойдет сцепление или слипание с ротором, или ротор и подшипник не круглые.

#### 4.4.4. Магнитные актуаторы

Основным компонентом большинства актуаторов этого типа является тонкопленочная структура пластины, которая поддерживает электролитический пермаллоевый участок, генерирующий механическую силу и вращающий момент при условии помещения его в магнитное поле. Как структурные пластины, так и поддерживающие балки сделаны из поликристаллических тонких пленок. Когда внешнее магнитное поле равно нулю, структурная пластина параллельна плоскости подложки. Когда внешнее магнитное поле  $H_{\text{внеш}}$  приложено нормально к плоскости структурной пластины, внутри пермаллового участка возникает вектор намагниченности  $M$ , и он впоследствии взаимодействует с  $H_{\text{внеш}}$ . Взаимодействие создает вращающий момент  $M_{\text{маг}}$  и небольшую силу, воздействующую на свободный конец консольной балки, при этом заставляя ее изгибаться.

При приложении внешнего подмагничивания пермаллоевый материал рассматривается как материал, имеющий постоянный плоскопараллельный вектор намагниченности с величиной равной намагниченности насыщения  $M_{\text{нас}}$ . При помещении во внешнее магнитное поле генерируются две компоненты силы. Величина обеих, как  $F_1$  (которая действует на верхнюю грань), так и  $F_2$  (которая действует на нижнюю грань), рассчитывается следующим образом:

$$F_1 = M_{\text{нас}} WTH_1;$$

$$F_2 = M_{\text{нас}} WTH_2,$$

где  $H_1$  и  $H_2$  – напряженность магнитного поля на верхней и нижней грани пластины (в текущей конфигурации  $H_1 < H_2$ ).

Величины  $H_1$  и  $H_2$  линейно зависят от соответствующего расстояния до поверхности электромагнитного источника. Пластина вместе с пермаллоевым участком рассматривается как твердое тело,



так как она существенно толще консольной балки. Основываясь на этом предположении, систему сил упрощают, перемещая  $F_1$  до совмещения с  $F_2$ . Результатом является вращающий момент, действующий против часовой стрелки, и сосредоточенная сила, действующая на нижнюю грань структурной пластины. Этот результат можно представить как

$$M_{\text{маг}} = F_1 L \cos \theta;$$

$$F = F_2 - F_1.$$

Вращающий момент всегда стремится уменьшить полную энергию в системе актуатора выравниванием вектора намагниченности с силовыми линиями внешнего магнитного поля.

#### ***4.4.5. Гидравлические актуаторы***

Гидравлические микроактуаторы имеют значительный потенциал, так как они могут передавать довольно много энергии от внешнего источника по очень узким трубкам. Этот факт можно использовать в таких местах, как наконечник катетера смонтированного микрохирургического инструмента. Гидравлические и пневматические приводы имеют во многих применениях преимущество над актуаторами электромагнитными, в первую очередь как преобразователи линейные, имеющие высокую мощность по отношению к их весу.

К особенностям гидравлического микроактуатора можно отнести то, что он имеет довольно большие размеры, высокий уровень выходных сил и может иметь крайне низкое трение.

#### ***4.4.6. Тепловые актуаторы***

Тепловые актуаторы используют как линейное или объемное расширение жидкости или газа, так и деформацию формы вследствие биметаллического эффекта, которые имеют место благодаря изменению температуры. Рассмотрим биметаллический актуатор. При нагревании один материал расширяется быстрее, чем другой, и балка изгибается. Нагревание можно производить пропусканием через это устройство электрического тока.

#### 4.4.7. Пьезоэлектрические актуаторы

В основе теории пьезоэлектрических актуаторов лежит прямой пьезоэлектрический эффект – появление электрических зарядов разного знака на противоположных гранях некоторых кристаллов при их механических деформациях: сжатии, растяжении и т. п., и обратный пьезоэлектрический эффект, состоящий в деформации этих же кристаллов под действием внешнего электрического поля.

Определяющие уравнения пьезоэлектрических материалов имеют вид

$$S_{jk} = s_{jklm}^E T_{em} + d_{ijk} E_i; \quad (4.22)$$

$$D_i = d_{ijk} T_{jk} + \varepsilon_{ij}^T E_j, \quad (4.23)$$

где  $S_{jk}$  – тензор механических деформаций;

$s_{jklm}^E$  – упругие постоянные (податливости) при  $E = \text{const}$ ;

$T_{jk}$  – тензор механических напряжений;

$d$  – тензор пьезоэлектрических постоянных;

$D_i$  – вектор электростатической индукции;

$\varepsilon_{ij}^T$  – проницаемость при  $T = \text{const}$ .

В одномерном случае выражения (4.22) и (4.23) имеют вид

$$S = s^E T + dE; \quad (4.24)$$

$$D = dT + \varepsilon^T E. \quad (4.25)$$

В случае  $d = 0$  пьезоэлектричность отсутствует. Обычно пьезоэлектрическим материалам можно приписать декартову систему координат, так что оси координат соответствуют направлениям поляризации. В большинстве случаев применяется управляющее напряжение в направлении поляризации. В пьезоэлектрических актуаторах различают два эффекта – доминирующий эффект продольный, для которого направление действия совпадает с направлением поляриза-

ции, а также эффект поперечный (трансверсальный) с направлением действия, перпендикулярным направлению поляризации. На рис. 4.13 изображены: *a* – продольная; *б* – поперечная схема.

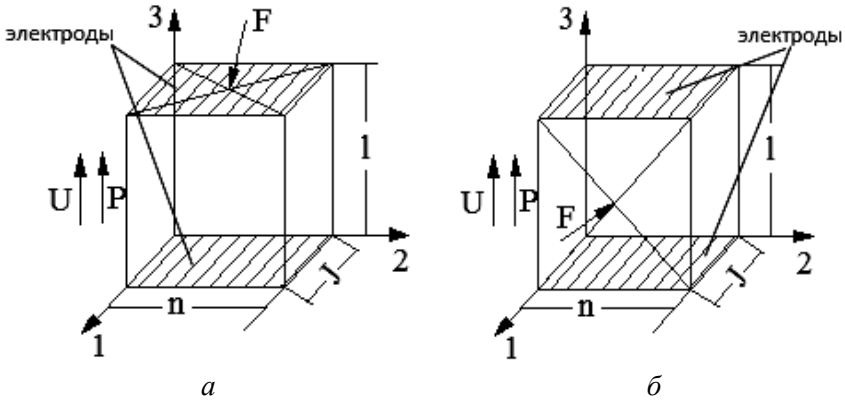


Рис. 4.13. Пьезоэлектрические актуаторы

Если в (4.24) положить  $T = 0$ , то получим

$$S = dE.$$

Тогда при уменьшающемся внешнем нагружении и напряжении  $U = EI$  получим для продольного эффекта, рис. 4.13, *a*:

$$\frac{\Delta l}{l} = d_{33}E \quad \text{или} \quad \Delta l = d_{33}U,$$

а для поперечного эффекта, рис. 4.13, *б*:

$$\frac{\Delta s}{s} = d_{31}E \quad \text{или} \quad \Delta s = d_{31}U.$$

Если сила  $F$  действует в заданном направлении, то из (4.24) для случая рис. 4.13, *a* получим

$$\Delta l = -\frac{l}{E_{33}as}F + d_{33}U, \quad (4.26)$$

а для случая рис. 4.13, б имеем

$$\Delta s = -\frac{s}{E_{11}al} F + \frac{s}{l} d_{31}U, \quad (4.27)$$

причем модули упругости  $E_{11}$ ,  $E_{33}$  могут быть определены из (4.23) при  $d^T = 0$ . Коэффициенты при  $F$  в (4.26), (4.27) можно интерпретировать как обратные значения жесткости пьезоэлектрического материала при исчезающем электрическом поле  $E = 0$ :

$$c_{11} = \frac{E_{11}al}{s}; \quad (4.28)$$

$$c_{33} = \frac{E_{33}as}{s}.$$

Из уравнения (4.26) получаем

$$F = -c_{33}\Delta l + c_{33}d_{33}U.$$

С помощью (4.24), (4.25) можно показать, что идеальный пьезоэлектрический преобразователь может быть представлен как сложное устройство из конденсатора емкостью  $C$  как вход и упругий механизм с жесткостью  $C$  как выход.

На рис. 4.14 показан пример зависимости пьезоэлектрического преобразователя, реализующего продольный эффект.

Реально пьезоэлектрические преобразователи всегда имеют потери. Кроме того, механическая пружина нагружена массой

$$m_{eff} = \frac{m}{2}.$$

Круговая частота вычисляется по формуле

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_{eff}}},$$

где  $c$  определяется по формуле (4.28).

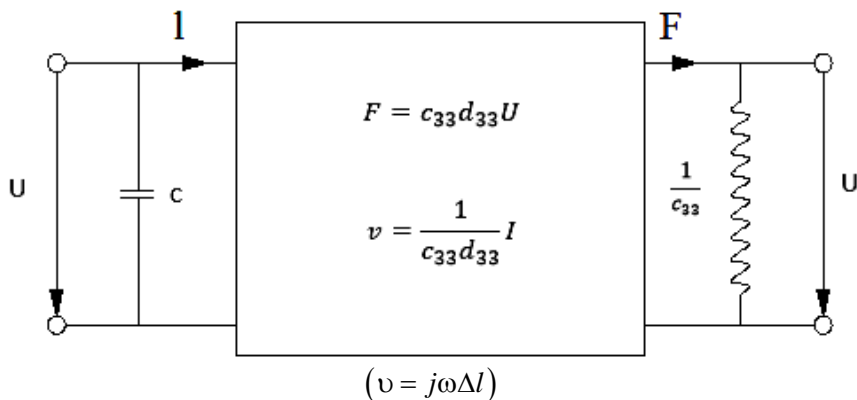


Рис. 4.14. Пьезоэлектрический преобразователь

Амплитуда механической мощности  $\hat{P}_{\text{mech}}$  выражаются через мощность электромеханическую  $\hat{P}_{el}$  с коэффициентом  $k$ :

$$\hat{P}_{\text{mech}} = k^2 \hat{P}_{el},$$

где

$$\hat{P}_{el} = \omega C \hat{u}^2;$$

$$\hat{i} = \omega C \hat{u};$$

$$i = C \frac{du}{dt}.$$

Современные пьезоэлектрические материалы имеют  $k = 0,7$ .

Из выражения для силы и скорости

$$\hat{P}_{\text{mech}} = \hat{F} \dot{\hat{s}} = \omega \hat{F} \hat{s} = \omega c \hat{s}^2,$$

где  $\hat{s} = (\Delta l)_{\text{max}}$  является амплитудой перемещения, получаем  $P_{\text{mech}}$ .

## Глава 5. СЕНСОРЫ

### 5.1. Модели и схемы датчиков измерений в мехатронных системах

**Сенсоры** (датчиками) называются элементы мехатронных систем, которые получая входные сигналы о состоянии системы и окружающей среды, в общем случае неэлектрической природы, преобразуют их, как правило, в электрические сигналы – выходные.

На рис. 5.1 изображена принципиальная схема прохождения сигнала в сенсоре с максимальной степенью расширения структуры.

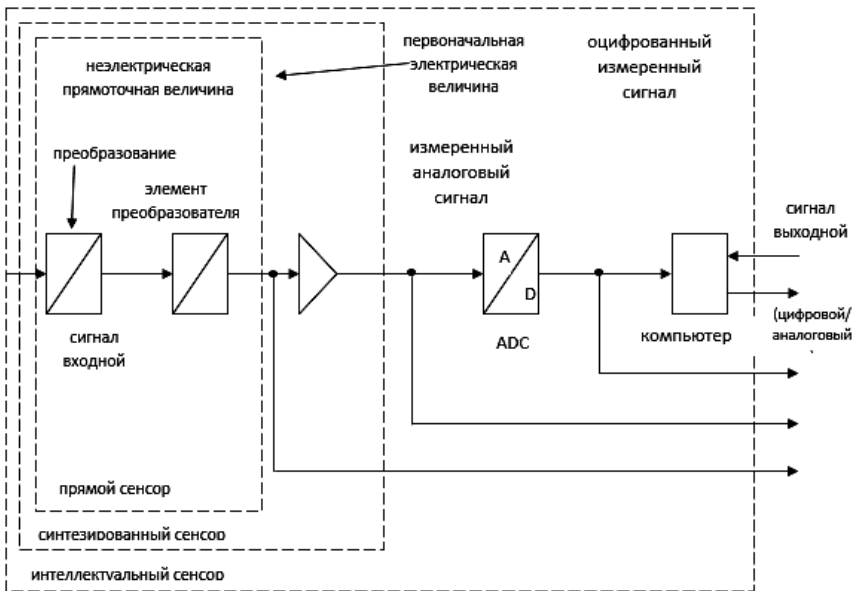


Рис. 5.1. Принципиальная схема прохождения сигнала в сенсоре

Рассмотрим сенсор силы, схема которого представлена на рис. 5.1. Сигнал проходит следующие этапы преобразования.

1. Преобразование величины, которую нужно измерить, в одну или несколько промежуточных неэлектрических величин.
2. Преобразование входной или промежуточной величины в первоначальную электрическую величину с помощью преобразующих элементов (преобразователей).

3. Следующий этап обработки электрического сигнала происходит в элементах обрабатывающей электроники (синтезированный сенсор).

4. Так как измеряемая величина дальше должна быть обработана компьютером, выходной аналоговый сигнал должен быть преобразован в цифровой. Это происходит в ADC (аналогово-цифровой преобразователь Analogue-Digital-Convergence).

Сенсоры с синтезированной цифровой частью называются *интеллектуальными* (smartsensor).

### 5.1.1. Принципы измерения кинематических и динамических величин

Основными кинематическими величинами являются:

- расстояние  $s$ , угол  $\varphi$ ;
- скорость  $v = \dot{s}$ , угловая скорость  $\omega = \dot{\varphi}$  ( $n$  – число оборотов);
- ускорение  $a = \ddot{s} = \dot{v}$ , угловое ускорение  $\dot{\omega}$ .

Основными динамическими величинами являются:

- сила  $F$ ;
- вращающий момент  $M$ ;
- давление  $p = \frac{F}{A}$ , где  $A$  – площадь, на которой действует сила  $F$ .

В табл. 5.1 представлены измеряемые величины и физические принципы их измерения

Таблица 5.1

#### Изменяемые физические величины

Изменяемые величины	$s, \varphi$	$v, \omega$	$a, \dot{\omega}$	$F, M, P$
Потенциометрические $R$	+			+
Индуктивные $L$	+			+
Емкостные $C$	+			+
Ультразвуковые $t$	+			
Магнитные $B$	+	+		+
Магнитострикционные $B, t$	+			
Оптические $l$	+	+		
Пьезоэлектрические $Q$		+	+	
Пьезорезистивные $R$	+		+	+

На рис. 5.2, а изображена электрическая схема, замещающая потенциометр с присоединенным измерительным устройством, где  $R_m$  – внутреннее сопротивление измерительного устройства.

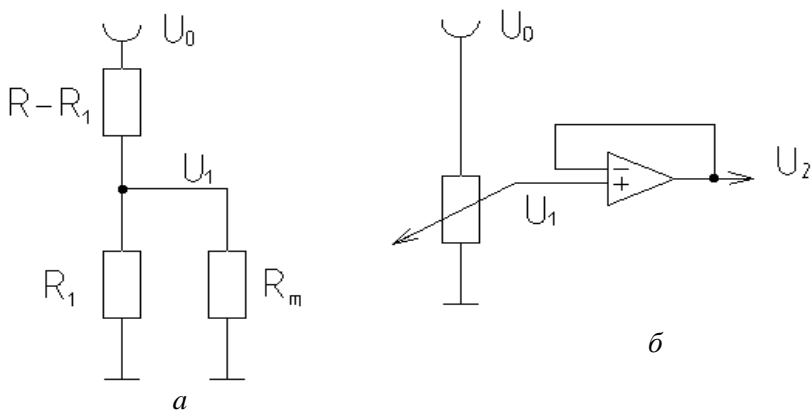


Рис. 5.2. Схема замещения потенциометра

Измеряемый сигнал (напряжение  $U_1$ ) получается из закона деления напряжения:

$$U_1 = U_0 \frac{R_1 \parallel R_m}{R - R_1 + R_1 \parallel R_m}, \quad (5.1)$$

где  $\parallel$  обозначает параллельное соединение.

$$R_1 \parallel R_m = \frac{R_1 R_m}{R_1 + R_m}.$$

Из (5.1) следуют выводы:

а) ток, текущий через  $R_m$ , должен оставаться пренебрежимо малым, это означает, что  $R_m$  должно быть очень большим.

При  $R_m \rightarrow \infty$  следует  $R_1 \parallel R_m = \frac{R_1 R_m}{R_1 + R_m} \rightarrow R_1$ ;



б) рекомендуется применение операционного усилителя согласно рис. 5.2, б;

в) напряжение запитывания  $U_0$  входит полностью до результата измерения.

Температурный дрейф: для сопротивления материала с коэффициентом теплоемкости  $\alpha$  имеем

$$R = R_0 (1 + \alpha \Delta\theta).$$

Тогда

$$U_1(\theta) = \frac{R_1 (1 + \alpha \Delta\theta)}{(R - R_1)(1 + \alpha \Delta\theta)} = U_1.$$

### 5.1.2. Индуктивные методы

Для сердечника с зазором имеет место зависимость

$$L(x) = L_0 \frac{1}{1 + \mu_r \frac{x}{x_m}}, \quad (5.2)$$

где  $L_0$  – индуктивность при  $x = 0$  (без зазора);

$\mu_r$  – относительная магнитная проницаемость;

$x_m$  – величина зазора, при которой величина  $L$  находится в центре возможных значений, что означает

$$L(x_m) = \frac{1}{2}(L_0 + L_m).$$

На рис. 5.3, а изображена катушка.

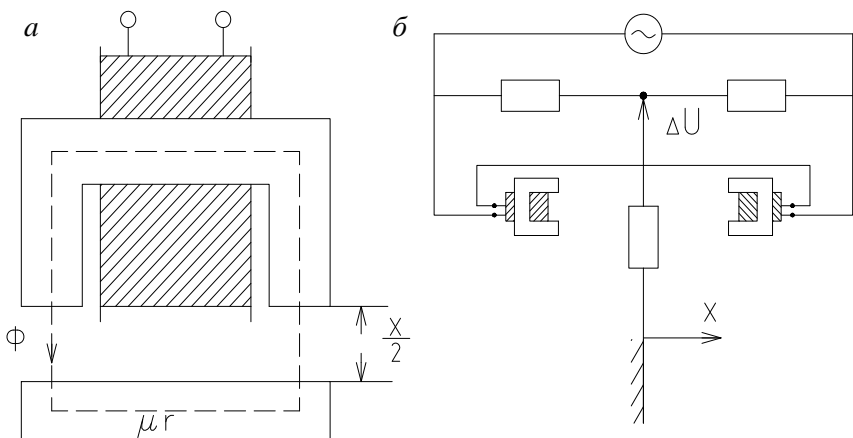


Рис. 5.3. Схема разделения катушки

Соотношение (5.2) для  $L(x)$  нелинейное, поэтому линейризация соответствует разделению катушки на две взаимно противорасположенные, рис. 5.3, б.

На рис. 5.4 изображен пример линейризации. Для  $\mu_r = 1$  и  $L_0 = 1$ , а также при подстановке  $+x_m$  или  $-x_m$  в (5.2) ( $x_m = 0,11$ ).

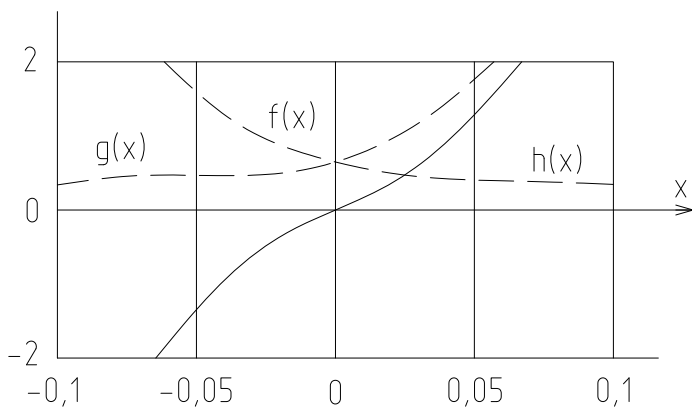


Рис. 5.4. Пример линейризации

Выражения для  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  имеют вид

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{x_m}};$$

$$g(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{x_m}};$$

$$h(x) = g(x) - f(x) = 2 \frac{x}{x_m}.$$

### 5.1.3. Трансформаторные устройства

Трансформаторные устройства используют изменение взаимной индуктивности между катушками. Наибольшее применение в практике нашли устройства, нагруженные дифференцирующим трансформатором.

На рис. 5.5 изображена конструкционная схема сенсора расстояния (пути).

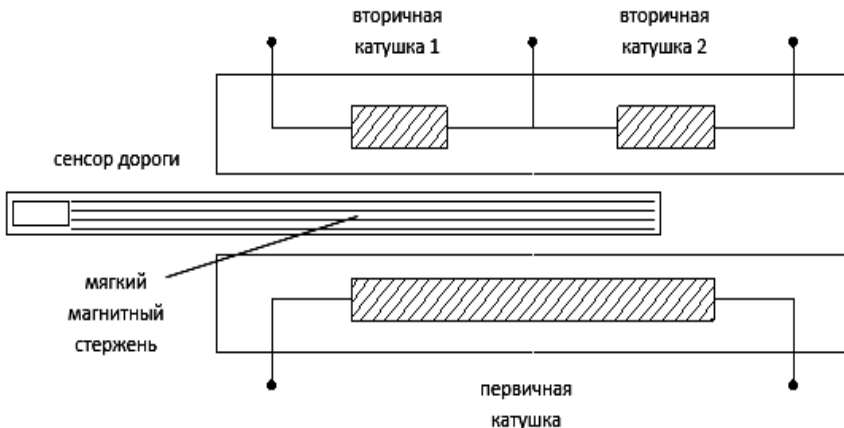


Рис. 5.5. Схема сенсора расстояния

На рис. 5.6 изображен датчик на основе линейного переменного дифференциального трансформатора с возвратной пружиной.

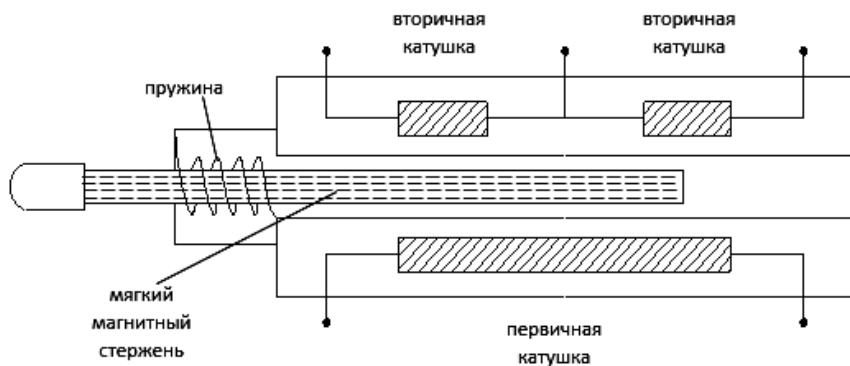


Рис. 5.6. Схема датчика пути

В комбинации с пружиной или пневматическим возвратным элементом существует много разных конструкций сенсоров пути и измерительных датчиков.

Для обработки сигнала наиболее часто применяются колебательные цепи  $LC$ , в которых сенсорные элементы представляют индуктивные части.

Согласно закону Томсона

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Измеренная величина пути преобразуется сначала в промежуточную величину – частоту. Измерение частоты может преобразоваться в напряжение.

#### 5.1.4. Методы измерений с помощью сенсоров магнитного поля

Сенсоры магнитного поля используют отклонение зарядов, перемещающихся в магнитном поле. На электроны действует сила Лоренца  $F$ :

$$\vec{F} = Q\vec{w}\vec{B},$$

где  $Q$  – электрический заряд;

$\vec{w}$  – вектор скорости перемещения заряда;

$\bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{H}$  – плотность магнитного потока;

$\bar{H}$  – напряжение магнитного поля;

$\mu_0, \mu_r$  – магнитные постоянные в вакууме и относительная магнитная проницаемость.

Пусть в плоскости  $Oxy$  через плоскую пластину полупроводника проходит регулирующий ток  $I_0$ , тогда линии тока отклоняются составляющими магнитного поля  $B_z$  перпендикулярно пластине.

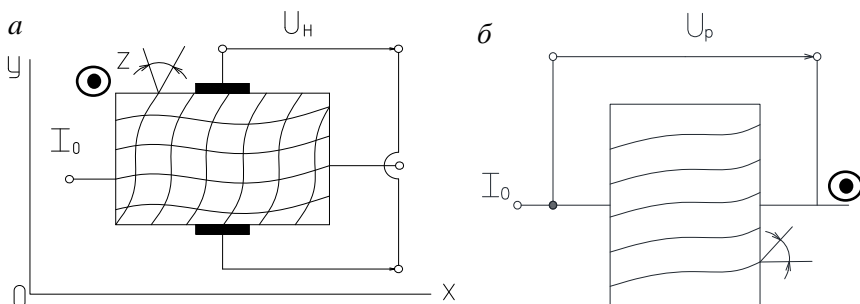


Рис. 5.7. Прохождение тока через плоскую пластину:  
 а – изгибание эквипотенциальных линий элемента Холла;  
 б – схема плоских пластин полупроводника

На рис. 5.7, а изображена конструкция элемента Холла, на рис. 5.7, б конструкция полевой пластины.

С точки зрения техники измерений отметим два явления.

1. Изгибание эквипотенциальных линий на угол Холла  $\theta$ , причем имеет место зависимость

$$\operatorname{tg} \theta = \mu B_z.$$

На противоположных сторонах пластины создается разница потенциалов, которая регистрируется как напряжение Холла  $U_H$ , а сенсор с такой структурой называется сенсором Холла, причем

$$U_H = I_0 B_z \frac{R_H}{d}, \quad (5.3)$$

где  $R_H$  – материальный коэффициент Холла;

$d$  – толщина пластины.

2. Отклонение линии тока носителя заряда в полупроводнике, что приводит к видимому изменению сопротивления.

Имеет место формула

$$R_B = R_0 (1 + kB_z^2), \quad (5.4)$$

где  $R_0$  – величина сопротивления для  $B_z = 0$ ;

$k$  – конструкционная постоянная, величина которой зависит от материала и конструкции.

Сенсоры, использующие этот эффект, называются полевыми пластинами.

На рис. 5.8, *a* изображена зависимость (5.3) для сенсора Холла, а на рис. 5.8, *б* – зависимость (5.4) для полевой пластины.

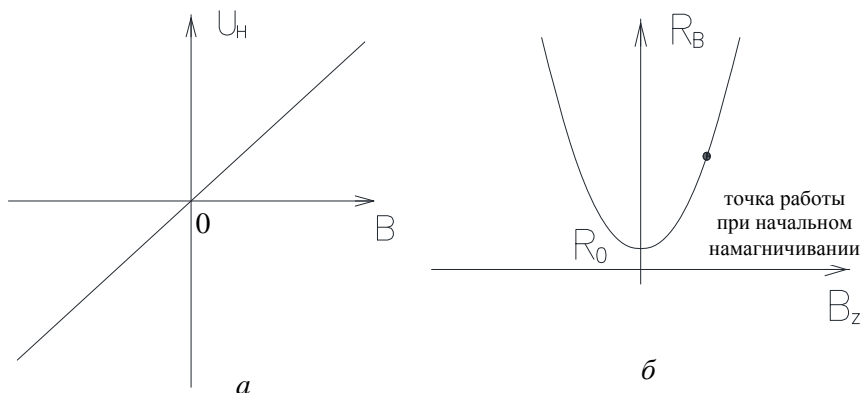


Рис. 5.8. Зависимости напряжения (*a*) и сопротивления (*б*) от величины магнитного поля

Решающим достоинством сенсора Холла является возможность изготовления элементов с помощью стандартной полупроводниковой технологии. Практическое значение для измерения пути или угла имеют потенциометры с полевыми пластинами. Функционируют они бесконечно долго и практически без износа.

### 5.1.5. Емкостные измерительные методы

Емкостные путевые сенсоры подобны индуктивным сенсорам. Эффект измерения основан на изменении емкости  $C$  пластинчатого конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d},$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная;

$\epsilon_r$  – относительная электрическая проницаемость;

$A$  – эффективная площадь пластины;

$d$  – расстояние до пластины.

На рис. 5.9 приведена классификация возможных конфигураций емкостных сенсоров. Отметим, что емкостные сенсоры практически не реагируют на колебания температуры, что позволяет использовать их при высоких температурах.

Вид изменения	Относительное движение	Одна пластина		Многopластинчатая структура
		Одна емкость	Дифференциальная структура	
Изменение площади $A$	Поступательные			
	Вращательные			
Изменения расстояния	Поступательные			
	Вращательные			
Изменение электрической проницаемости	Поступательные			

Рис. 5.9. Классификация конфигураций емкостных сенсоров

### 5.1.6. Ультразвуковые методы измерений

Измерение пути с помощью ультразвука опирается на измерение времени прохождения ультразвукового импульса. В качестве преобразователя ультразвука применяются пьезоэлектрические элементы, которые при приложении напряжения меняют форму (обратный эффект). Так как пьезоэлектрический эффект обратимый, то один и тот же элемент используется как для получения, так и для посылки сигнала.

В качестве материалов обычно используются пьезоэлектрическая керамика, а также пьезоэлектрические полимеры. На рис. 5.10, *а* изображены этапы прохождения импульсов ультразвука во времени.

На рис. 5.10, *б* представлена диаграмма интенсивности излучения звукового поля, из которой видно, что непосредственно перед сенсором возникает область с осциллирующей величиной интенсивности в зависимости от направления. Расстояние  $r_0$  характеризует ближнее поле Френеля:

$$r_0 = \frac{D^2}{4\lambda},$$

где  $D$  – диаметр вибрирующего элемента;

$\lambda$  – длина волны.

В области  $r \gg r_0$  (дальнее поле–зона Фраунгофера) интенсивность уменьшается как  $1/r^2$ . В этой области излученная энергия сконцентрирована в конусе с половиной угла  $\alpha$ :

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{0,51\lambda}{D}\right).$$



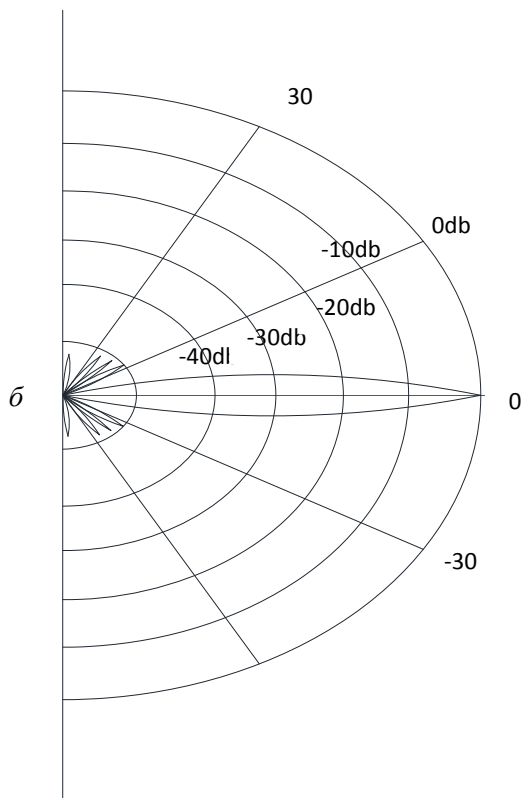
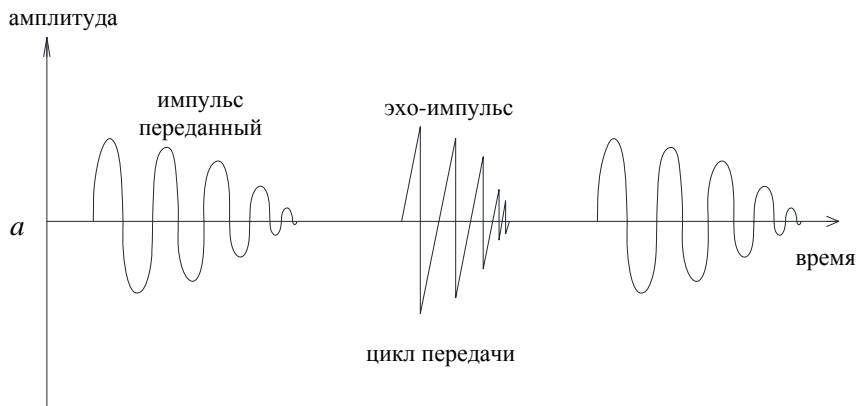


Рис. 5.10. Этапы прохождения импульсов

На рис. 5.11 изображена схема ультразвукового сенсора. Управляющее устройство на короткое время включает излучение и одновременно измерение времени. По излучении последовательности колебаний сенсор переходит на прием. Принятый эхо-сигнал проходит через усилительное устройство обработки сигнала.

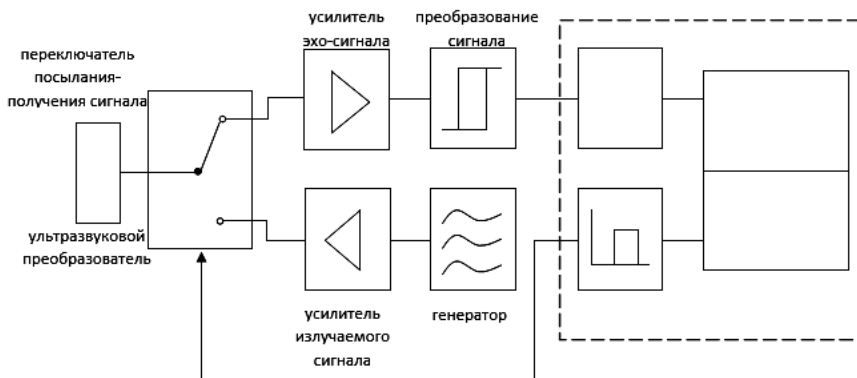


Рис. 5.11. Схема ультразвукового сенсора

На способы преобразования сигнала и процессы измерения следует обращать внимание при применении ультразвуковых сенсоров. На точность измерения оказывают влияние параметры среды: температура воздуха, скорость ветра, влажность. Важное значение играют выбор частот, используемых сигналов, материалов и геометрии рефлектора.

## 5.2. Некоторые модели подсистем измерений

### 5.2.1. Магнитострикционные датчики пути

Специальные мягкие магнитные материалы изменяют форму под действием внешнего магнитного поля. Этот эффект называется *магнитострикция*.

Принцип измерения расстояния на основе магнитострикционного эффекта представлен на рис. 5.12.

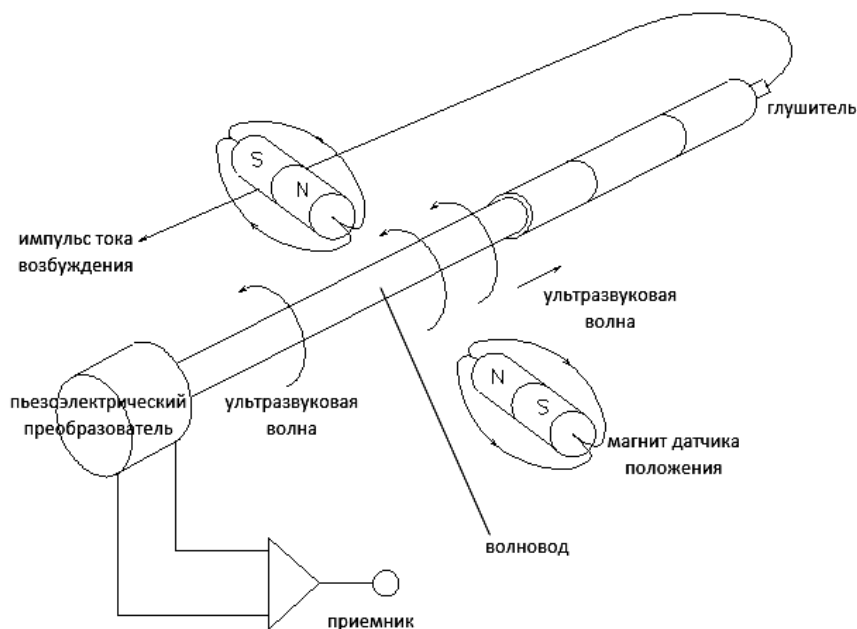


Рис. 5.12. Схема прибора для измерения расстояния на основе магнитострикционного эффекта

Измерительный элемент (волновод) состоит из трубки, изготовленной из магнитострикционного материала и внутри которой находится электрический проводник.

Кроме простоты и хорошей конструкции достоинством ультразвуковых сенсоров является возможность применения их в экстремальных условиях, например взрывных воздействий.

### *Передачики абсолютных значений*

В производстве машин в большом количестве применяются передатчики абсолютных величин (рездольверы) двух типов:

- оптические;
- индуктивные.

Оптические передатчики складываются из стеклянного щита с несколькими соосно размещенными кольцами. Прозрачные приемные кольца кодируют угол поворота, рис. 5.13.

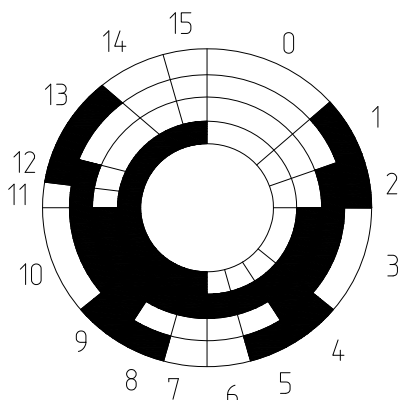


Рис. 5.13. Схема приемных колец

#	код	#	код
0	0000	8	1100
1	0001	9	1101
2	0011	10	1111
3	0010	11	1110
4	0110	12	1010
5	0111	13	1011
6	0101	14	1001
7	0100	15	1000

Кольца читаются с помощью излучения света через расположение (конфигурацию) световых колец. Количество колец определяет точность передатчика. С помощью  $n$  колец можно закодировать  $2^n$  состояний.

**Индуктивный передатчик** применяется для определения угла между статором и ротором, а также анализа фазовой разницы между полем возбуждения (статор) и одним или несколькими индуцированными полями (витки катушек ротора). Подключение электроники позволяет проводить интерполяцию фазового угла.

### *Инкрементальные методы измерений*

Все вышерассмотренные методы измерения пути имеют один общий признак. На выходе выдается абсолютное значение, которое является мерой измеряемого пути. В момент измерения сенсор и объект измерения не могут взаимно перемещаться.

Инкрементальные методы измерений действуют иначе. По своей сущности они не регистрируют путь или угол между измерительной системой и измеряемым объектом, а измерения проводят по вычислению отдельных отсчетов (в общем случае – электрических импульсов).

Наиболее широко используется оптический декодер, конструктивная схема которого изображена на рис. 5.14.

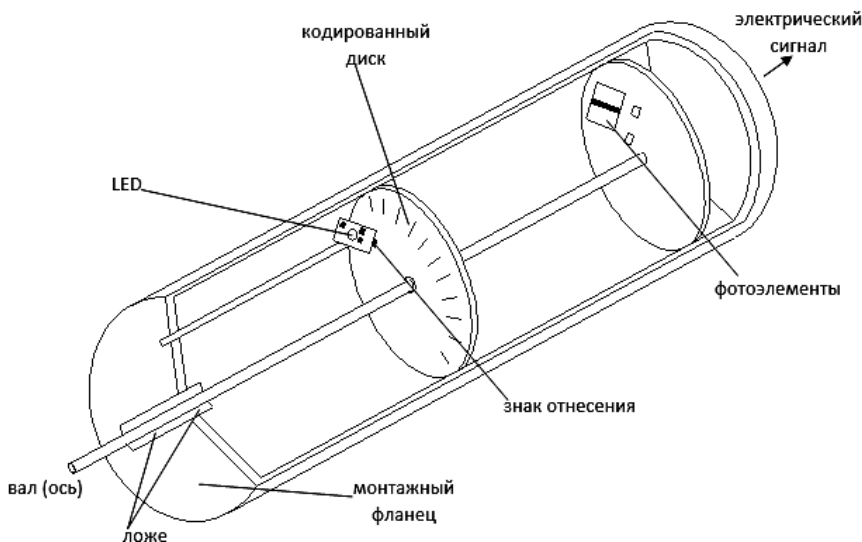


Рис. 5.14. Схема оптического декодера

Конструкция оптического декодера подобна конструкции оптического передатчика, описанного выше, однако вместо  $n$  колец используется только одно кольцо с равноотстоящими прозрачными\темными проходами для света.

Инкрементальные измерительные системы могут быть не только вращательными (круговыми), но и линейными (поступательными).

Перечисленные сенсоры далеко не исчерпывают всех измерительных систем пути.

### 5.2.2. Системы измерения скорости

Сенсоры скорости используют физическую зависимость между выходной электрической величиной и производной по времени измеряемой величины

$$U_{\text{ind}} = \frac{d\Phi}{dt} = nBlv. \quad (5.5)$$

Соотношение (5.5) используется в тахогенераторах, которые, в принципе, сконструированы как электродвигатели, но используют

противоположные принципы функционирования: если вал вращается с угловой скоростью  $\omega$ , то индуцированное напряжение

$$U_T = k\omega,$$

где  $k$  – постоянная, зависящая от характера конструкции.

Конструкция, состоящая из двигателя, датчика угла, тахогенератора называется *сервомотором*.

Для бесконтактного измерения скорости применяются оптические системы измерения корреляции. Принцип их действия показан на рис. 5.15, где  $I$  – интенсивность света, ФКК – функция круговой корреляции.

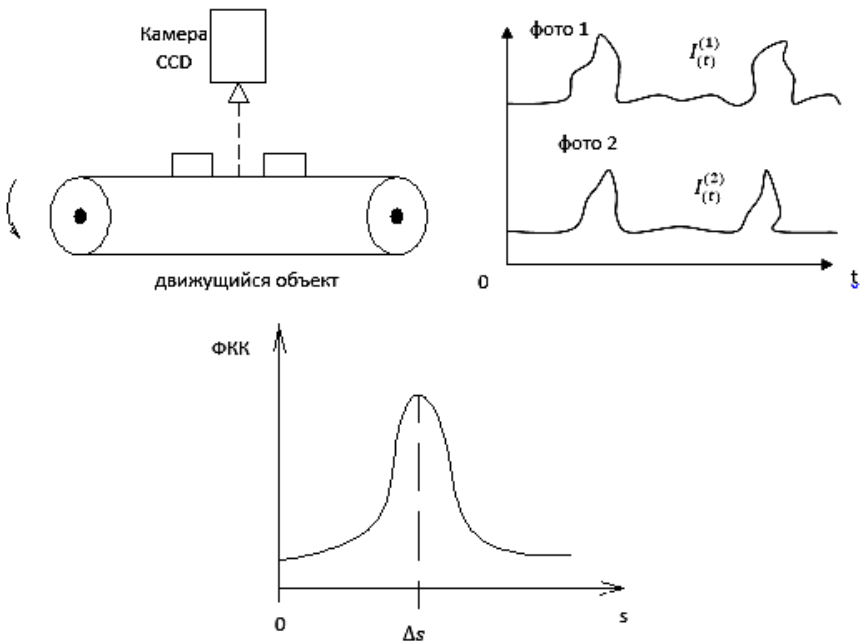


Рис. 5.15. Схема оптической системы измерения корреляции

Согласно рис. 5.15

$$\text{ФКК} = R(\Delta s) = \frac{1}{T} \int_0^T I_1(t) I_2(t + s) dt.$$

### 5.2.3. Системы измерения ускорения механическими датчиками

Измерение ускорения основано на том, что если на массу  $m$ , подвешенную на пружине жесткости  $c$ , действует ускорение  $a$ , колебания устройства описываются соотношением

$$w = \frac{m}{c} a,$$

где  $w$  – амплитуда колебаний массы.

### 5.2.4. Пьезоэлектрические сенсоры ускорения

На рис. 5.16 изображена модель возникновения сжимающих напряжений (пьезонапряжений).

В ненагруженном состоянии пьезокристалл, рассматриваемый макроскопически, является электрически нейтральным, рис. 5.16, *а*.

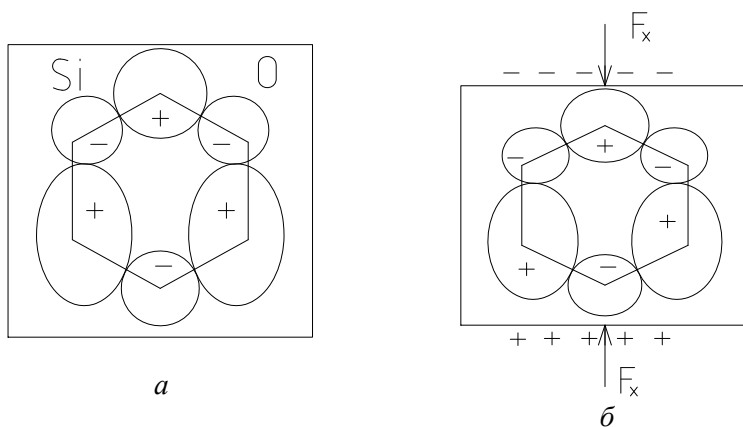


Рис. 5.16. Схема возникновения пьезонапряжений

Во время нагружения элементы кристаллической решетки нагружены дополнительно и отрицательно и перемещены соответственно так, что на внешних поверхностях обнаруживается разница потенциалов.

Для измерений необходимо использовать усилитель, который позволяет на выходе усиливать сигнал согласно формуле

$$U_{\text{вых}} = \frac{1}{c} \int i(t) dt = \frac{Q}{c};$$

$$\frac{dQ}{dt} = i(t).$$

Схема усилителя изображена на рис. 5.17.

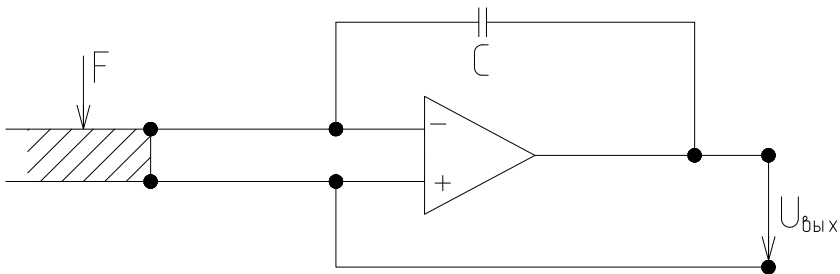


Рис. 5.17. Схема усилителя

### 5.2.5. Микромеханические сенсоры ускорения

Для регистрации деформации используются два способа. На рис. 18, *а* изображена схема конструкции тензометра пьезосопротивления (рассмотренного дальше). На рис. 5.18, *б* изображена конструктивная схема на основе конденсаторов, когда колеблющаяся масса расположена между двумя неподвижными электродами.

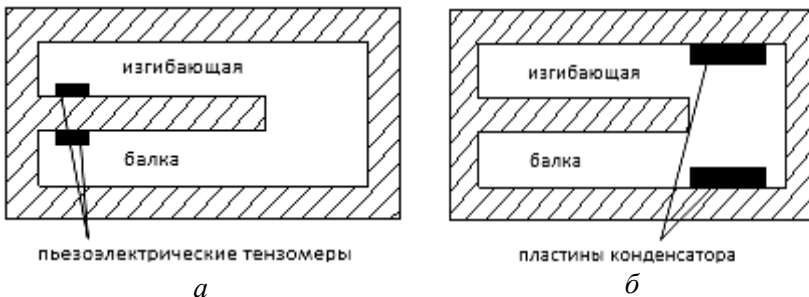


Рис. 5.18. Схемы регистрации деформации



**Одноосное измерение силы и момента** основано на законе Гука, который в простой форме имеет вид

$$\frac{F}{A} = E\varepsilon,$$

где  $F$  – сила;  
 $A$  – площадь сечения;  
 $E$  – модуль Юнга;  
 $\varepsilon$  – деформация удлинения.

### 5.2.6. Тензометрические датчики силы и момента

Функционирование тензометров основано на физическом явлении, когда электрический проводник вследствие изменения длины изменяет свое сопротивление. Имеет место зависимость

$$R = \frac{\rho l}{A},$$

где  $\rho$  – собственное сопротивление;  
 $l$  – длина проводника;  
 $A$  – площадь сечения.

На рис. 5.19 изображены схемы тензометров: *а* – волнового; *б* – полупроводникового кристалла кремния.

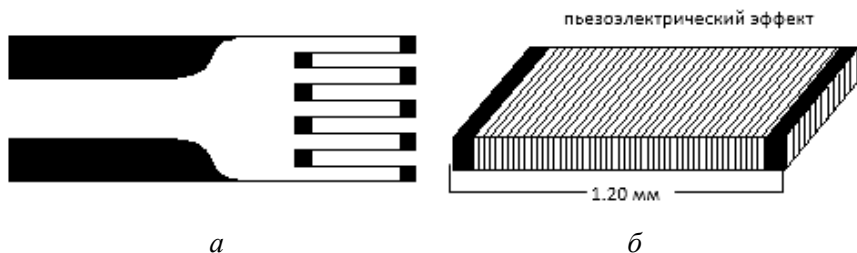


Рис. 5.19. Схемы тензометров

Зависимость между измерением  $\varepsilon$  и относительным изменением сопротивления записывается через коэффициент  $k$ , причем для единичного тензометра имеет место связь

$$\frac{\Delta R}{R} = k\varepsilon, \quad k \approx 2.$$

В обоих устройствах реализуются технологии, основанные на применении кремния.

Одностороннее удлинение заделанной балки на расстояние  $l$  от точки приложения силы определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{6Fl}{Ebh^2}.$$

Для измерения моментов применяются датчики изогнутые. Состоят они из стержня, рис. 5.20, или трубки, рис. 5.21, на которой прикреплены два или четыре тензометра под углом  $45^\circ$  к оси тензометра.

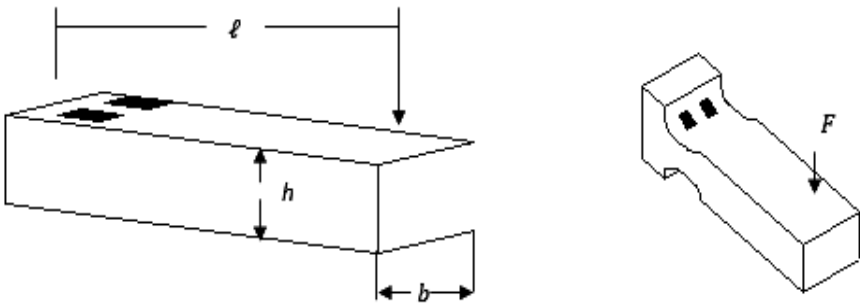


Рис. 5.20. Схемы стержневых датчиков

Удлинение стержня, рис. 5.21,  $a$ , под действием момента  $M_t$

$$\varepsilon = \frac{M_t}{\pi Gr^3},$$

где  $G$  – модуль изгиба;

$r$  – радиус цилиндра.

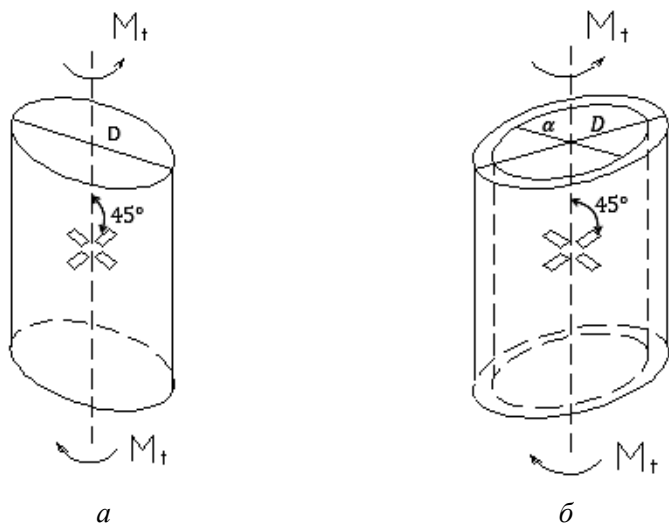


Рис. 5.21. Схемы трубчатых тензометров

Удлинение трубки, рис. 5.21, б, под действием момента  $M_t$

$$\varepsilon = \frac{M_t 8D}{\pi G (D^4 - d^4)}.$$

## Глава 6. АВТОМАТЫ

### 6.1. Конечные автоматы подсистем управления для мехатронных систем

Управляющие подсистемы мехатронной системы представляют собой звенья цепи, в которые поступает информация о состоянии системы и окружающей среды, обрабатываются и вырабатываются управляющие (регулирующие) сигналы, поступающие к исполнительным органам системы. Обработка сигналов, поступающих на вход звеньев, может происходить чисто **функционально**, когда вход  $X(t)$  и выход  $Y(t)$  связаны зависимостью

$$Y(t) = F(X(t)) \text{ или } Y(k) = F(X(k)), \quad (6.1)$$

где  $k$  – дискретный момент времени.

Функциональное звено не хранит память о том, что было с системой в момент  $\tau < t$  или  $(k - m < k)$ . Если выход  $Y(t)$  зависит не только от  $X(t)$  в момент времени  $t$ , но и от состояний  $S$  системы в прошедшие моменты времени, т. е. на выходе схемы рис. 6.1, *а* черного ящика (функционального преобразователя), необходимо ввести информацию о некоторой структуре звена, рис. 6.1, *б*, включив блок памяти БП и обратную связь.

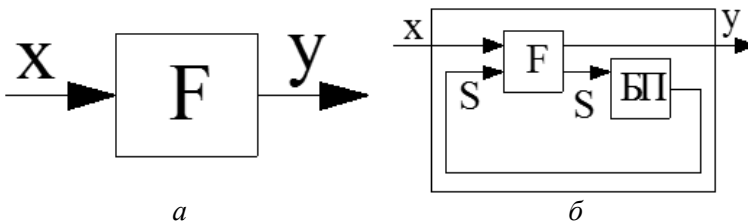


Рис. 6.1. Схема функционального преобразователя

Множество входных сигналов  $X = (x, \dots, x_n)$ , выходных  $Y = (y, \dots, y_n)$ , внутренних состояний  $S = (s, \dots, s_k)$  связывают рекуррентные зависимости вида

$$s_{i+1} = f(x_{i+1}, s_i, y_i); \quad (6.2)$$

$$y_{i+1} = F(x_{i+1}, s_i, y_i). \quad (6.3)$$

Формулы (6.1)–(6.3) представляют математическую запись алгоритмов вычисления выходных переменных  $Y$  по входным переменным  $X$  и называются **конечными автоматами** без памяти, см. рис. 6.1, *a*, и с памятью, см. рис. 6.1, *б*.

Конечный автомат – это устройство, работающее в дискретные моменты времени (такты). На вход конечного автомата в каждом такте поступает один из возможных входных сигналов, а на его выходе появляется выходной сигнал, являющийся функцией его текущего состояния  $s_i$  и поступившего входного сигнала  $x_i$ . Внутреннее состояние автомата  $s_i$  также меняется. Моменты срабатывания (такты) определяются либо принудительно тактирующими синхросигналами, либо асинхронно, наступлением внешнего события – прихода сигнала.

Определим конечный автомат абстрактно.

**Определение:** *Конечным автоматом Мили называется шестерка объектов:*  $A = S, X, Y, s_0, \delta, \lambda$ ,

где  $S$  – конечное непустое множество (состояний);

$X$  – конечное непустое множество входных сигналов (входной алфавит);

$Y$  – конечное непустое множество выходных сигналов (выходной алфавит);

$s_0 \in S$  – начальное состояние;

$\delta: S \cdot X \rightarrow S$  – функция переходов;

$\lambda: S \cdot X \rightarrow Y$  – функция выходов.

Для определения автомата можно использовать табличный способ, задавая функции переходов и выходов в виде таблиц, и диаграммный в виде графов.

### ***Реализация конечного автомата***

Рассмотрим компоненты реализации конечного автомата КА: программную и аппаратную.

**Аппаратная реализация (hardware)** требует построения физических, технических устройств памяти для запоминания текущего состояния автомата. Обычно на практике используют двоичные элементы памяти (триггеры), запоминающие значение только одного двоичного разряда. Функциональный блок автомата реализуется как конечный функциональный преобразователь. Таким образом, общий подход к аппаратной реализации конечного автомата таков:

- входные и выходные сигналы и внутренние состояния автомата кодируются двоичными кодами;
- по таблицам переходов и выходов составляются закодированные таблицы переходов и выходов – фактически табличное задание отображения  $F$ ;
- по закодированным таблицам переходов и выходов проводится минимизация двоичных функций, и они реализуются в заданном базисе;
- решаются схемотехнические вопросы синхронизации – привязки моментов выдачи выходного сигнала и изменения состояния внутренней памяти к моментам поступления входных сигналов на вход автомата.

**Программную реализацию (software)** можно выполнить на любом языке программирования высокого уровня разными способами. Топология блок-схемы программы повторяет топографию **графа** переходов конечного автомата. В зависимости от того, какой сигнал пришел на вход, выполняется та или иная функция и происходит переход к новому состоянию. Построив эту программу и добавив активные устройства, реализующие отдельные выходные операции, можно автоматизировать процесс (управления, диагностики и т. д.).

Часто как входные, так и выходные сигналы автомата кодируются произвольным образом: их кодировка обычно predetermined конкретным применением автомата. В то же время кодирование *внутренних состояний* автомата на логике его функционирования никак не сказывается (при любом кодировании состояний автомат будет реализовывать то же отображение входных последовательностей на выходные). Однако различное кодирование может влиять на надежность устройства, скорость его переключения, простоту реализации логического блока и т. д. Постоянно ведутся исследования по проблеме оптимального кодирования состояний конечного автомата при различных критериях оптимальности.

Если функции  $f$  и  $F$  не зависят от  $y_i$ , то получаем алгоритм, описывающий **автомат Мили**:

$$s_{i+1} = f(x_{i+1}, s_i);$$

$$y_{i+1} = F(x_{i+1}, s_i).$$

Если к тому же функция  $F$  не зависит от  $x$ , то получаем **автомат Мура**:

$$s_{i+1} = f(x_{i+1}, s_i);$$

$$y_{i+1} = F(s_i).$$

## 6.2. Анализ автоматов

Существуют различные постановки задачи анализа автомата. Например, задана схема автомата и нужно установить, какой оператор реализуется на ней.

Пусть известны элементы, из которых построена схема, известны ее уравнения, отношения подчиненности выходов входам. Первой задачей анализа является выяснение того, является ли схема **логической сетью**, т. е. удовлетворяет ли она требованиям правильной организованности. Если установлено, что схема является логической сетью, то возникает задача определения ограниченно-детерминированного оператора (канонических уравнений), который в ней реализуется в целом и на некоторых ее полюсах (входах). Третья задача – минимизация алфавита внутренних состояний (множества  $S$ ).

**Последовательным оператором** называется соответствие, указывающее для любой конечной последовательности  $x_1, \dots, x_k$  последовательность значений  $y_1, \dots, y_k$  так, что последовательности  $x_1, \dots, x_m$  ( $m < k$ ) соответствует подпоследовательность  $y_1, y_2, \dots, y_m$ .

Последовательности  $x_1, \dots, x_k$  и  $y_1, \dots, y_k$  называются **входными** и **выходными словами**,  $x_i, y_j$  – **буквами** входного и выходного алфавитов.

Конечный автомат является последовательным оператором. Общепринятое утверждение в общем случае не имеет смысла.

Резюмируя, можно сказать, что при постановке и решении задачи анализа автомата необходимо:

- 1) проверить правильность организации схемы в соответствии с законами логических сетей;
- 2) составить канонические уравнения оператора, который реализуется схемой;
- 3) минимизировать алфавит состояний.

### 6.3. Синтез автоматов

Конечный автомат был определен как математическая модель устройства синхронного действия, перерабатывающего информацию в дискретном виде. В то же время реальные системы, в которых происходит процесс преобразования информации, характеризуются внутренней конструкцией, способом функционирования и выполняемыми операциями. С этой точки зрения конечный автомат – это совокупность двух понятий: схемы (логической сети) и оператора (реализуемого схемой).

Процесс синтеза автоматов состоит из двух этапов:

- 1) изучение заданных требований с тем, чтобы выяснить, существует ли удовлетворяющий или ограниченно-детерминированный оператор и получить его канонические уравнения;
- 2) построение (синтез) логической сети по полученным каноническим уравнениям *оптимальной* (в смысле принятых критериев) логической сети.

При этом должны учитываться сдвиги во времени, которые в реальных системах связаны с определенной задержкой реакций.

Если решение задачи синтеза проводится, например, путем выявления канонических уравнений (таблиц) оператора такой стандартной формой его задания, исходя из которой находят решение задачи синтеза, то при таком подходе синтез логической сети можно рассматривать как перевод его стандартного языка канонических уравнений на язык логической схемы (язык схемотехники). Тогда анализ логической сети представляет собой перевод с языка схемотехники на стандартный язык уравнений.



Наиболее широко на практике применяются методы оптимального синтеза, основанные на том, что наиболее простая схема (независимо от набора элементов) получается при моделировании **минимальных форм** представления функций алгебры логики (**минимальных формул**), представленных в виде суперпозиции конъюнкции (И), дизъюнкции (ИЛИ) и отрицания (НЕ).

**Представление информации в конечных автоматах.** Для конечных автоматов все многообразие представления входных и выходных цифровых сигналов, посредством которых кодируется исходная информация, можно выразить параллельным и последовательным двоичными кодами.

При представлении информации параллельным кодом (рис. 6.2) на всех элементах конечного автомата, изображающих цифры соответствующих разрядов, одновременно будут либо высокие потенциалы ( $U_1$ ), если в этих разрядах единицы, либо низкие ( $U_0$ ), если в них – нули. Элементы будут находиться в указанном состоянии до тех пор, пока значение кодируемой информации остается неизменным.

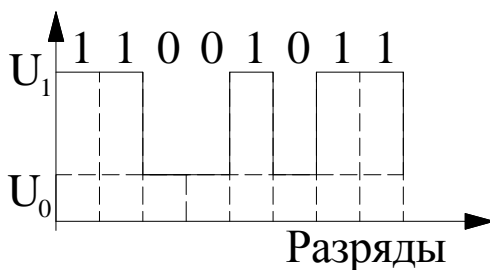


Рис. 6.2. Распределение уровней напряжений, соответствующих параллельному коду

При представлении чисел последовательным кодом каждое число изображается последовательностью импульсов, возбуждаемых в конечном автомате через равные интервалы времени  $T_{и}$  (рис. 6.3). При этом разряд цифры определяется положением импульса во времени относительно начала изображения числа этой последовательности. Младшие разряды могут передаваться либо в начале формирования последовательности, либо в ее конце. Наличие импульса в нужный интервал времени соответствует цифре 1, а отсут-

ствию – 0. Для последовательной передачи кода заданной разрядности требуется некоторый промежуток времени  $T$ , возрастающий с увеличением числа разрядов и уменьшающийся с возрастанием частоты следования импульсов. Причем за время передачи кодируемая величина не должна значительно измениться. От степени ее изменения зависит погрешность восстановления исходной величины.

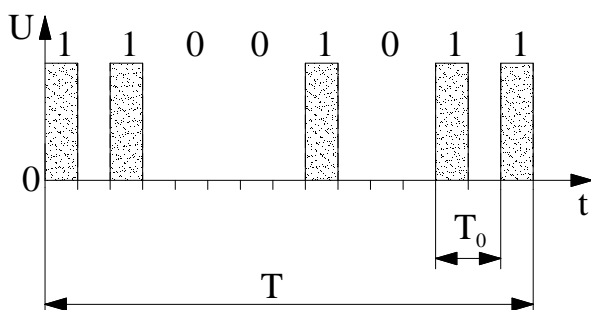


Рис. 6.3. Представление последовательного кода импульсами

**Разновидности конечных автоматов.** Различают конечные автоматы без памяти (обычно именуемые комбинационными или логическими устройствами, схемами) и с памятью (цифровые автоматы). Автомат первого типа формирует выходные сигналы без учета его предыстории работы. Выходные сигналы автомата с памятью определяются его внутренними состояниями.

Совместное использование таких автоматов находит широкое применение для построения разнообразных управляющих автоматов.

**Комбинационные схемы.** Выходные сигналы  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_j, \dots\}$  логической схемы (рис. 6.4) в некоторый дискретный момент времени  $t$  однозначно определяются значениями входных сигналов

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n\}.$$

Здесь

$$y_j = L\{x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\}, \quad j = 1, 2, \dots, k;$$

$$y_j \in Y; \quad x_q \in Y, \quad q = 1, 2, \dots, n; \quad n - \text{число входов.}$$

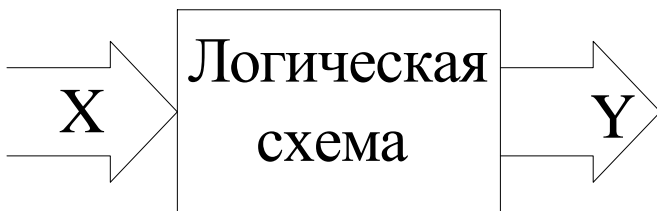


Рис. 6.4. Обобщенное представление комбинационной схемы

Построение и логическое функционирование комбинационных схем основываются на физической реализации функций *бинарной логики*, например, на таких элементарных логических операциях, как И, ИЛИ и НЕ с конечным множеством входных сигналов  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Дешифратор и мультиплексор – примеры комбинационных схем.

**Конечный автомат с памятью** (цифровой автомат, последовательностный автомат). В отличие от комбинационной схемы такой автомат имеет некоторое число различных внутренних состояний, изменяющихся под воздействием входных сигналов. Внутреннее состояние цифрового автомата определяется совокупностью состояний запоминающих элементов. Каждый элемент памяти автомата имеет два устойчивых состояния, одно из которых кодируется цифрой 1, а другое – 0.

Реакция конечного автомата с памятью на входные сигналы может быть либо однозначной, либо случайной. В первом случае называются **детерминированные автоматы**, во втором – **вероятностные**, которые в свою очередь подразделяются на автоматы с постоянной и переменной структурами.

Большая часть цифровых автоматов содержит не только элементы памяти, но и логические схемы (рис. 6.5). При такой организации информация обрабатывается последовательно во времени с запоминанием промежуточных состояний в памяти цифрового автомата. Примером конечного автомата с памятью служат триггерные системы.

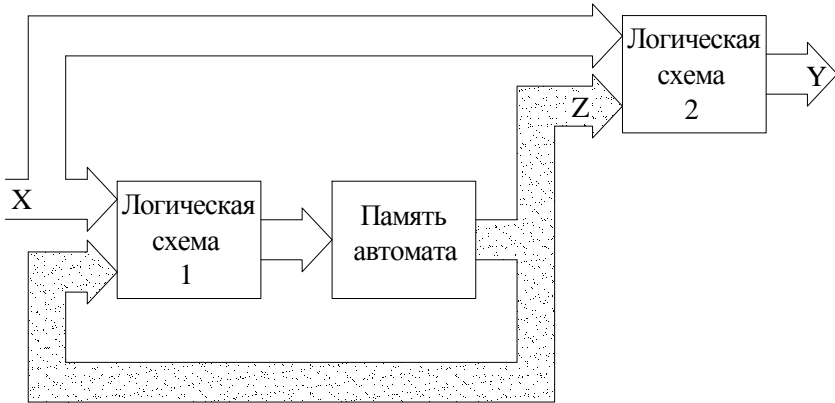


Рис. 6.5. Обобщенная структура конечного автомата с памятью

В общем случае работа цифрового автомата в некоторый дискретный момент времени  $t + 1$  задается его начальным внутренним состоянием  $S^0$ , входными сигналами  $X$ , функциями переходов из одного состояния в другое  $S = Q(\cdot)$  и выходов  $Y = G(\cdot)$ . По зависимости выходных сигналов различают автоматы Мура и автоматы Мили.

Работа **автоматов Мура** описывается системой уравнений

$$S^{t+1} = Q(S^t, X^t);$$

$$Y^t = G(S^t).$$

Значения выходных сигналов таких автоматов зависят только от внутреннего состояния автомата. Поэтому в структуре автоматов Мура входные сигналы непосредственно не поступают на вход выходной логической схемы 2 (см. рис. 6.5). К классу автоматов Мура относятся различные логические схемы, в их числе – триггерные.

Работу **автомата Мили** описывает система уравнений

$$S^{t+1} = Q(S^t, X^t);$$

$$Y^t = G(S^t, X^t).$$

Из уравнений следует, что внутреннее состояние автомата  $S^{t+1}$  в дискретный момент времени  $t + 1$  определяется его состоянием  $S^t$  в предыдущий дискретный момент времени и значениями входного сигнала  $X^t$  в этот же момент времени. Значения же выходного сигнала зависят как от состояния автомата, так и от значений входного сигнала.

Внутри цифрового автомата можно организовать асинхронный (неактивируемый) либо синхронный (синхронизируемый импульсами, подаваемыми от тактового генератора) обмен информацией. В асинхронном автомате значения выходного сигнала изменяются непосредственно после изменения значений входного сигнала. В то же время синхронные автоматы переключаются из одного состояния в другое только в строго фиксированные моменты времени, задаваемые тактовыми импульсами.

Автомат удобно представлять в виде функции  $T$  на графе  $G = V, U$ , каждой вершине которого взаимно однозначно соответствует состояние автомата, и если из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  автомат переходит в результате входного воздействия  $a$ , вырабатывая при этом выходной символ  $b$ , то соответствующие вершины  $v_i$  и  $v_j$  соединены дугой  $(v_i, v_j)$ , взвешенной парой  $(a, b)$ . Таким образом, областью определения функции  $T$  является граф  $G = V, U$ , построенный рассмотренным выше способом, а областью значений – входные, выходные символы и идентификаторы состояний автомата.

Реализуемый автоматный оператор  $T$  можно представить в виде соответствующей функции на графе  $G = V, U$  (рис. 6.6).

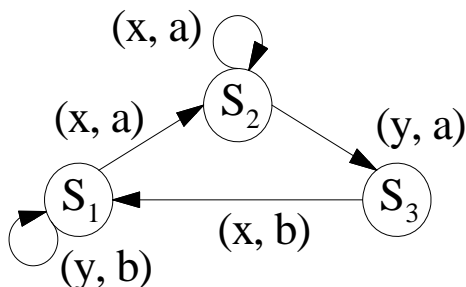


Рис. 6.6. Представление оператора  $T$  функцией на графе  $G$

Если рассматривать автомат не как устройство, реализующее соответствующую грамматику, а изучать его строение (структуру), то следует представлять этот автомат в виде блок-схемы, изображенной на рис. 6.7, где  $M_x$  – множество входных терминальных символов,  $M_y$  – множество нетерминальных символов ( $M_s = M_{s+}, M_{s-}$ ).

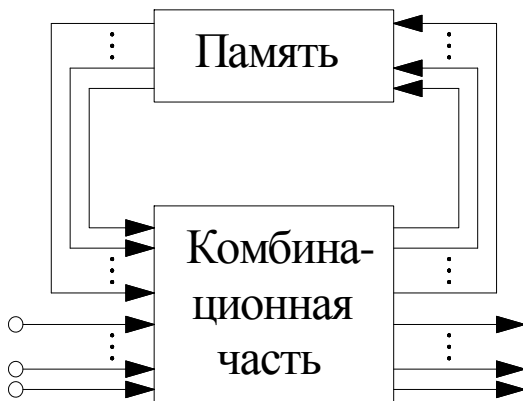


Рис. 6.7. Блок-схема автомата Мили

Вторая абстракция использует понятие автоматного контура, состоящего из операционного и управляющего автоматов.

Одной из основных характеристик автомата является объем его памяти. Число внутренних состояний автомата называется **объемом памяти автомата**.

Преобразование информации является результатом выполнения некоторого алгоритма, при этом **операционный автомат** реализует шаги алгоритма, а **управляющий автомат** – порядок выполнения шагов. Операционный и управляющий автоматы различаются не только своими назначениями, но и объемами памяти. В операционном автомате происходит преобразование информации, которая задана в виде некоторого множества чисел, записанных в регистрах. Практически объем памяти операционного автомата бесконечен. Например, блок регистров, входящий в операционный автомат и состоящий из 22 16-разрядных двоичных регистров, имеет объем памяти  $2^{352} > 10^{100}$  бит. Объем памяти управляющих автоматов обычно составляет от нескольких десятков до нескольких десятков

тысяч бит, т. е. является небольшим по сравнению с объемом памяти операционных автоматов.

Рассмотрим контур, состоящий из операционного и управляющего автоматов (рис. 6.8).

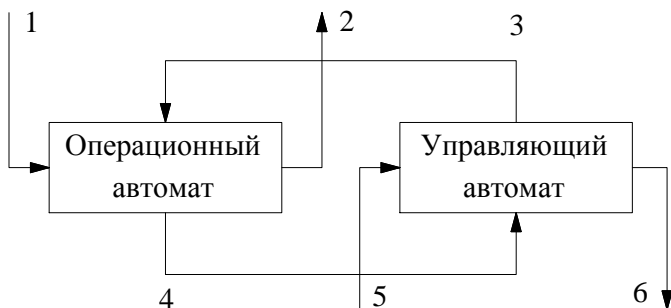


Рис. 6.8. Контур из операционного и управляющего автоматов

На вход операционного автомата (канал 1) поступает преобразуемая информация; с выхода операционного автомата (канал 2) снимаются результаты преобразований; по каналу 3 поступают управляющие воздействия, соответствующие реализуемому алгоритму; по каналу 4 на вход управляющего автомата поступают признаки, характеризующие преобразуемую информацию; по каналу 5 – сигнал, определяющий выполняемое преобразование и его начало; по каналу 6 – сигнал окончания операции. Каналы 1 и 2 называются **информационными**, каналы 3–6 – **управляющими**.

## **Глава 7. ДВОИЧНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**

Электронные системы управления обычно являются двоичными или цифровыми.

В двоичных системах двухуровневые управляющие сигналы, т. е. командные сигналы переключений, соединяются друг с другом, сохраняются и вновь выводятся уже в форме логических сигналов.

Способ связи сигналов между собой описывается алгеброй **релейно-контактных систем**.

В цифровых системах управления несколько двоичных сигналов либо серия двоичных импульсов кодируются в виде чисел, сохраняются и обрабатываются в таком виде.

Способы связи между числами описываются на основе арифметических действий, например сложения и умножения. Модулями цифровых управляющих систем являются в большинстве случаев интегральные схемы (ИС), микропроцессоры и микрокомпьютеры.

### **7.1. Двоичные логические связи**


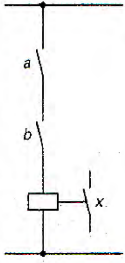
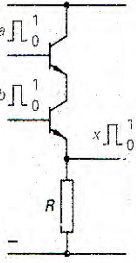
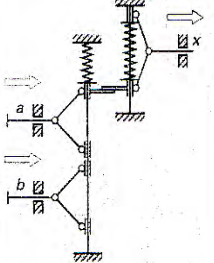
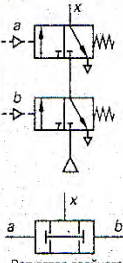
В двоичных системах управления требуются конструкционные элементы, с помощью которых можно соединять двоичные сигналы, например, сигналы бесконтактных выключателей приближения. Двоичные управляющие системы с очень большим числом сигнальных связей в большинстве случаев являются электронными системами управления с двоичными логическими схемами либо оснащенными микропроцессорами, системами программного управления от ЗУ.

Независимо от того, являются ли эти сигналы механическими, пневматическими или электрическими, среди логических операций различают функцию И, функцию ИЛИ и функцию НЕ (отрицание). Для наглядного представления этих связей выбрана форма уравнений (переключательных функций) с использованием алгебры релейно-контактных схем и схем сигнализации.

**Логический элемент И** посылает на свой выход сигнал со значением 1, если на одном и на другом входе также имеет место сигнал со значением 1, например: логический сигнал, напряжение, давление и т. д. (табл. 7.1).



## Логическая операция И

<p>Условное обозначение на схеме</p>  <p>Таблица значений функций</p> <table border="1" data-bbox="162 454 252 582"> <thead> <tr> <th>a</th> <th>b</th> <th>x</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table> <p>Форма записи: <math>x = a \wedge b</math></p>	a	b	x	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	 <p>Электрический способ (с реле)</p>	 <p>Электронный способ (с транзисторами)</p>	 <p>Механический способ</p>	 <p>Регулятор двойного давления</p> <p>Пневматический способ</p>
a	b	x																	
0	0	0																	
0	1	0																	
1	0	0																	
1	1	1																	

В таблице значений функций (см. табл. 7.1) представлены все возможные коммутационные состояния для входных сигналов  $a$ ,  $b$  с указанием относящегося сюда значения функции для выходного сигнала  $x$ . Если входы  $a$ ,  $b$  проводят каждый сигнал со значением 0, то выход  $x$  также посылает сигнал со значением 0. Если на входе  $a$  имеет место сигнал со значением 0, а на входе  $b$  – сигнал со значением 1, то выход  $x$  снова проводит сигнал со значением 0. Если, напротив,  $a$  проводит сигнал со значением 1, а вход  $b$  – сигнал со значением 0, то на выходе опять-таки будет сигнал со значением 0. И только если входные сигналы  $a$  и  $b$  будут сигналами со значением 1, то и выходной сигнал  $x$  также будет сигналом со значением 1.

В алгебре релейно-контактных (переключательных схем), имеваемой также **булевой алгеброй**, такая функциональная зависимость выражается в виде переключательной функции  $x = a \cap b$ , что означает:  $x$  равен  $a$  и  $b$ .

В **электрической схеме** функцию И реализуют на основе последовательно включенных контактов. Только при замыкании контактов  $a$  и  $b$  на реле поступает электрический ток и включает контакт  $x$  (см. табл. 7.1).

У **электронных схем** существует множество форм исполнения – в зависимости от вида используемых полупроводниковых элементов. Например, через резистор  $R$  протекает электрический ток (и соответственно на  $R$  подается напряжение) только в том случае, если на выводах базы двух транзисторов  $a$  и  $b$  имеет место управляющее напряжение (см. табл. 7.1).

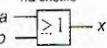
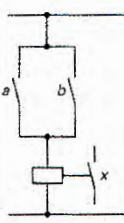
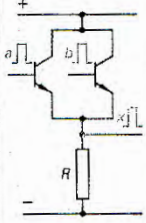
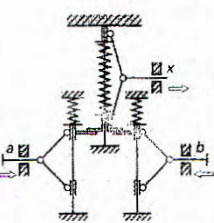
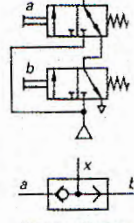
Операция **И механического действия** может быть реализована, например, с помощью двух коленчатых рычагов (см. табл. 7.1): только когда нажаты установочные кнопки  $a$  и  $b$ , длины хода коленчатых рычагов будет достаточно, чтобы отжать болт  $x$  вправо (сигнал со значением 1).

**Пневматическим** способом операцию И можно реализовать посредством включенных друг за другом распределителей, приводимых в действие, например, за счет нагружения давлением и пружинного возврата (см. табл. 7.1). Оба вентиля закрыты в состоянии покоя, и лишь когда задействованы оба присоединения управляющей линии, выход  $x$  проводит давление. Обычно в качестве элемента И используется регулятор двойного давления (см. табл. 7.1).

**Логический элемент ИЛИ** всегда посылает на свой выход сигнал со значением 1, если на одном входе или на другом входе или на обоих входах имеет место сигнал со значением 1. И только когда все входы проводят сигнал со значением 0, на выходе также появится сигнал со значением 0 (табл. 7.2).

Таблица 7.2

### Логическая операция ИЛИ

<p>Условные обозначения на схеме</p>  <p>Таблица значений функций</p> <table border="1" data-bbox="162 1212 240 1316"> <thead> <tr> <th>a</th> <th>b</th> <th>x</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table> <p>Форма записи: <math>x = a \vee b</math></p>	a	b	x	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	 <p>Электрический способ (с реле)</p>	 <p>Электронный способ (с транзисторами)</p>	 <p>Механический способ</p>	 <p>Пневматический способ</p>
a	b	x																	
0	0	0																	
0	1	1																	
1	0	1																	
1	1	1																	

Связь между входными сигналами и выходным сигналом представлена через таблицу значений функций либо через переключательную функцию  $x = a \vee b$ , что означает:  $x$  равно  $a$  или  $b$ .

**В электрической схеме** функцию ИЛИ реализуют на основе параллельно включенных контактов. При замыкании контактов  $a$  или  $b$  (или обоих сразу) реле производит включение контакта  $x$ .

При **электронной схеме** входы сигналов есть выводы без параллельно включенных транзисторов. Если на одном или на обоих выводах базы имеет место положительное напряжение, то включаются один либо оба транзистора. Тогда выход также проводит сигнал положительного напряжения  $x$ .

Для **механической функции** ИЛИ можно задействовать – на выбор – установочные кнопки  $a$  или  $b$  либо обе кнопки, чтобы отжать болт  $x$  вправо (сигнал со значением 1).



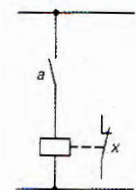
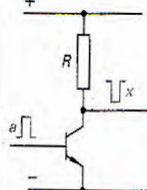
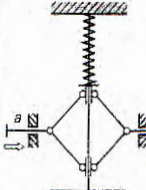
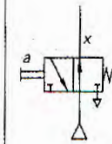
**Пневматическим способом** операцию ИЛИ можно реализовать с помощью двух распределителей. При срабатывании  $a$  или  $b$  присоединение  $x$  оказывается под давлением. Операция ИЛИ возможна и с использованием перекидного клапана.

**Элемент НЕ (схема отрицания)** вызывает изменение полярности сигнала. Из сигнала со значением 1 на входе получается сигнал со значением 0 на выходе, а из сигнала со значением 0 на входе получается сигнал со значением 1 на выходе (см. значения функций в табл. 7.3). Данная переключательная функция имеет вид  $x = \bar{a}$  и означает:  $x$  не равен  $a$ .

**В электрической схеме** изменение полярности сигнала реализуют через реле с размыкающим контактом. При включении реле происходит размыкание релейного контакта, при выключении – его замыкание.

При **электронной схеме** транзистор проводит ток, если на выводе его базы имеет место положительное напряжение (сигнал со значением 1) (см. табл. 7.3). В результате на резисторе  $R$  отмечается падение напряжения, и выход проводит напряжение около 0 В, т. е. имеет место сигнал со значением 0. Если на базе вообще нет напряжения (сигнал со значением 0), транзистор не проводит ток, а на выходе  $x$  есть напряжение и, следовательно, имеет место сигнал со значением 1.

## Логическая операция НЕ

<p>Условное обозначение на схеме</p> <p>например </p> <p><math>a</math>  <math>\bar{a} = x</math></p> <p>Таблица значений функций</p> <table border="1" data-bbox="179 446 257 526"> <tr> <td><math>a</math></td> <td><math>x</math></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table> <p>Форма записи: <math>x = \bar{a}</math></p> <p>Означает: <math>x</math> не равен <math>a</math></p>	$a$	$x$	0	1	1	0	 <p>Электрический способ (с реле)</p>	 <p>Электронный способ (с транзисторами)</p>	 <p>Механический способ</p>	 <p>Пневматический способ</p>
$a$	$x$									
0	1									
1	0									

**Механический элемент НЕ** меняет регулировочное направление болта на обратное. При отжатии установочной кнопки вправо (сигнал со значением 1) болт  $x$  перемещается влево (сигнал со значением 0), а если потянуть установочную кнопку  $a$  влево, болт пойдет вправо.

Пневматическим способом операцию НЕ можно реализовать с помощью распределителя с расходом в состоянии покоя.

Из семейства логических функциональных схем чаще всего находит применение серия SN 74, где логическая функция реализуется с использованием нескольких транзисторов. В этом случае говорят о **ТТЛ-технике** (англ. **transistor-transistor-logic** – **транзисторно-транзисторная логика**). Переключающее напряжение номинально составляет 5 В. Для сигнала со значением 0 это напряжение может находиться в диапазоне от 0 до 0,4 В, а для сигнала со значением 1 – от 2,4 до 5,5 В. Среди прочих семейств переключательных схем можно назвать:  **$I^2L$**  (англ. **integrated injection logic** – **интегральная инжекционная логика, И<sup>2</sup>Л**), **ECL** (англ. **emitter-coupled logic** – **эмиттерно-связанная логика, ЭСЛ**) и множество семейств **MOS** (англ. **metal-oxide-semiconductor** **металлоокисный полупроводник – МОП-структура**).

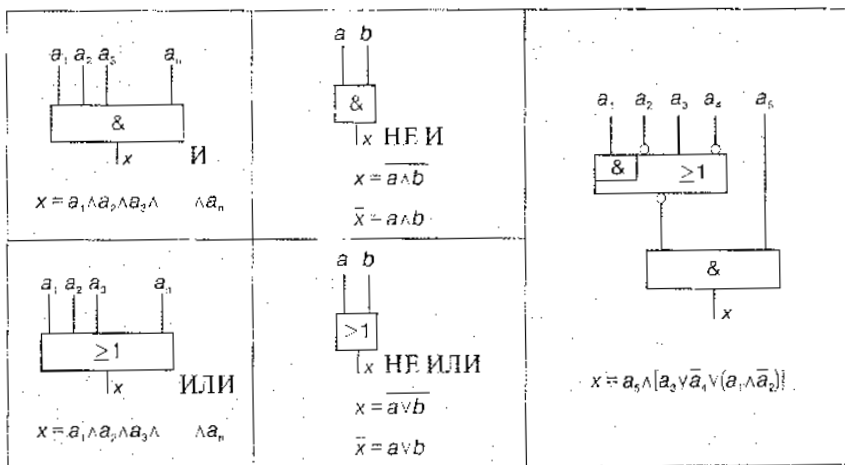
## Сочетание нескольких логических операций

Функция И и функция ИЛИ могут быть расширены на несколько входов или снабжены еще и схемой НЕ (НЕ И, НЕ ИЛИ), либо несколько логических элементов могут быть вложены друг в друга с образованием единого звена связи (табл. 7.4).

Двоичные электронные функциональные схемы обычно содержат на одном **чипе (кристалле ИС)** несколько логических модулей, например сразу четыре элемента НЕ И.

Таблица 7.4

Функциональные схемы соединений сигналов (примеры)



### Примеры

Для приведенных далее заданий определить требуемые логические функции и составить функциональную схему соединений сигналов.

#### Задание 7.1

Двигатель шпинделя  $x$  должен включаться при нажатии сигнальной кнопки  $a$  (сигнал со значением 1), причем смазочный насос  $b$  работает (сигнал со значением 1), а двигатель зажима инструмента  $c$  не работает (сигнал со значением 0).

### Решение

Логическая функция  $x = a \wedge b \wedge \bar{c}$ .

Условное обозначение на схеме



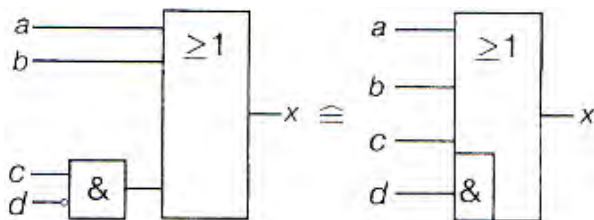
### Задание 7.2

Сигнальная лампа  $x$  должна загораться (сигнал со значением 1) при включении регулятора давления масла  $a$  (сигнал со значением 1) или срабатывании реле чисел оборотов  $b$  двигателя шпинделя (сигнал со значением 1) либо с приведением в действие двигателя зажима инструмента  $c$  (сигнал со значением 1), но без одновременной активизации тормозной муфты  $d$  (сигнал со значением 0).

### Решение

Логическая функция  $x = a \vee b \vee (c \wedge \bar{d})$ .

Условное обозначение на схеме

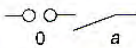
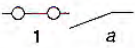
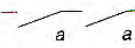
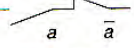
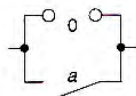
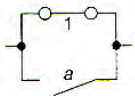
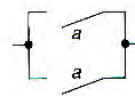
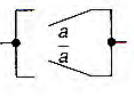


## 7.2. Алгебра переключательных схем

Алгебра переключательных схем (булева алгебра, от Boole – английский математик, 1815–1864) есть математическое описание отношений между двоичными переменными. Существует целый набор правил, объяснить которые легче всего с помощью переключающих контактов и возможного прохождения электрического тока (табл. 7.5).

Таблица 7.5

Правила алгебры переключательных схем

$0 \wedge a = 0$ 	$1 \wedge a = a$ 	$a \wedge a = a$ 	$a \wedge \bar{a} = 0$ 
$0 \vee a = a$ 	$1 \vee a = 1$ 	$a \vee a = a$ 	$a \vee \bar{a} = 1$ 

Перечислим здесь важнейшие законы алгебры переключательных схем (табл. 7.6):

- законы коммутативности;
- ассоциативные (сочетательные) законы;
- распределительные (дистрибутивные) законы;
- законы отрицания (теорема Де Моргана – от De Morgan – английский математик, 1806–1871).

Таблица 7.6

Законы алгебры переключательных схем с примерами

<p>Закон коммутативности:</p> $a \wedge b = b \wedge a$ $a \vee b = b \vee a$	<p>В пределах одного булева терма И и соответственно одного булева терма ИЛИ возможна перестановка переменных</p>
<p>Ассоциативный закон:</p> $a \wedge b \wedge c = (a \wedge b) \wedge c$ $a \vee b \vee c = (a \vee b) \vee c$	<p>Переменные одной функции могут объединяться только с использованием скобок</p>
<p>Дистрибутивный закон:</p> $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	<p>Соединение с выражениями в скобках дает новые выражения в скобках</p>
<p>Теорема Де Моргана:</p> $\bar{a} \wedge \bar{b} = \overline{a \vee b}$ $\bar{a} \vee \bar{b} = \overline{a \wedge b}$	<p>Отрицание терма тождественно отрицанию переменных, если элемент ИЛИ заменяется элементом И, и наоборот</p>

### Пример 7.1

Перевести функцию  $x = (a \wedge b) \vee (c \wedge d)$  в функцию, содержащую только термы НЕ И.

#### Решение

$$\bar{x} = \overline{(a \wedge b) \vee (c \wedge d)} = \overline{(a \wedge b)} \wedge \overline{(c \wedge d)};$$

$$x = \overline{\overline{(a \wedge b) \vee (c \wedge d)}}, \text{ рис. 7.1.}$$

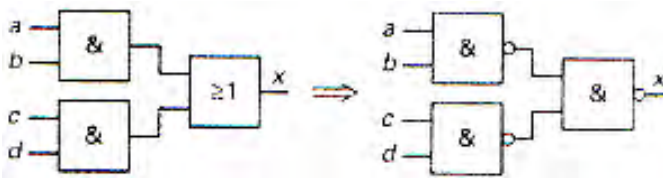


Рис. 7.1. Решение примера 7.1

### Пример 7.2

Перевести функцию  $x = (a \wedge \bar{b}) \vee c$  в термы НЕ И.

#### Решение

$$\bar{x} = \overline{(a \wedge \bar{b}) \vee c} = \overline{(a \wedge \bar{b})} \wedge \bar{c};$$

$$x = \overline{\overline{(a \wedge \bar{b})} \wedge \bar{c}}, \text{ рис. 7.2.}$$

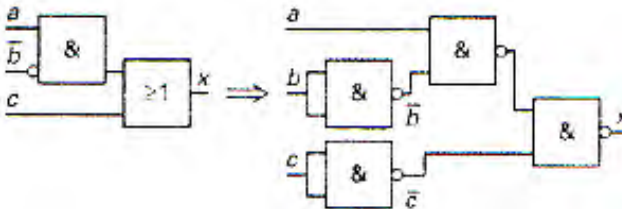


Рис. 7.2. Решение примера 7.2



Отрицание переменных получают с помощью логического элемента НЕ И:

$$\bar{b} = \overline{b \wedge b}, \quad \bar{c} = \overline{c \wedge c}.$$

### Пример 7.3

Перевести функцию  $x = (a \wedge b) \vee (c \wedge d)$  в функцию, содержащую только термы НЕ И.

### Решение

$$\bar{x} = \overline{(a \wedge b) \vee (c \wedge d)} = \overline{(a \wedge b)} \wedge \overline{(c \wedge d)} = (\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d});$$

$$\bar{x} = x = \overline{(\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})} = \overline{(\bar{a} \vee \bar{b})} \vee \overline{(\bar{c} \vee \bar{d})};$$

$$\bar{x} = \overline{\overline{(\bar{a} \vee \bar{b})} \vee \overline{(\bar{c} \vee \bar{d})}}.$$

В результате отрицания  $\bar{x}$  получают  $x$ . Отрицание переменных достигается посредством элемента НЕ ИЛИ со значением 0 (рис. 7.3).

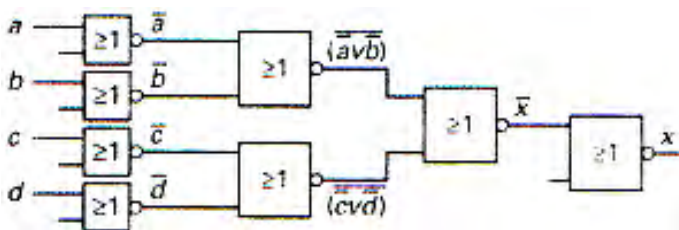


Рис. 7.3. Решение примера 7.3

## 7.3. Комбинационные системы управления

Систему, управляющие сигналы которой зависят только от комбинации ее входных сигналов, называют **комбинационной системой управления**. Относящаяся сюда схема может быть смонтирована с использованием элементов И, ИЛИ и НЕ. Для определения нужной

схемы в случае неясных условий переключений следует сначала составить полную таблицу значений функций, после чего образовать либо нормальную форму ИЛИ, либо нормальную форму И. Поскольку любая переменная на входе может принимать значения 1 и 0, схема с 2-входными переменными располагает – в соответствии с возможными двоичными числами – комбинациями в количестве  $2^n$ . Полная таблица значений функций содержит все комбинации входных переменных с относящимися к ним выходными переменными.

### Пример 7.4

Ковочная машина должна обслуживаться тремя, минимум – двумя операторами. Для этой цели оборудовано три одинаковых поста управления с кодовыми выключателями  $a, b$  и  $c$ . Чтобы машина могла включаться по сигналу  $x=1$ , должны быть задействованы минимум два или три кодовых выключателя. Составить полную таблицу значений функций.

### Решение

Три входные переменные  $c, b, a$ , каждая из которых может принимать значения 1 или 0, дают  $2^3 = 8$  возможных комбинаций (рис. 7.4). Получается, что имеются как раз четыре переключательные функции, отвечающие указанному выше требованию.

	$c$	$b$	$a$	$x$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Для образования нормальной формы И

Для образования нормальной формы ИЛИ

Рис. 7.4. Полная таблица значений функций с тремя переменными

Нормальная форма ИЛИ воспроизводит все логические функции, способные решить поставленную задачу. Она содержит элементы И всех входных переменных для всех строчек таблицы функций, в которых выходной сигнал принимает значение 1.

Нормальную форму И получают на основе переключательных функций, которые не решают поставленную задачу. Если с этими функциями произвести логическую операцию НЕ, получим новую функцию, как раз показывающую путь решения данной задачи. На основе такой функции с отрицанием получают элементы И вообще всех имеющихся входных переменных, связанных между собой логическим элементом ИЛИ.

Нормальная форма И предпочтительнее нормальной формы ИЛИ, когда выходная переменная в полной таблице значений функций реже имеет значение 0, чем значение 1: тогда она содержит меньше логических связей.

### Пример 7.5

Составить нормальную форму ИЛИ для таблицы значений функций (см. рис. 7.4) и выполнить функциональную схему.

### Решение

$$x = (\bar{c} \wedge b \wedge a) \vee (c \wedge \bar{b} \wedge a) \vee (c \wedge b \wedge \bar{a}) \vee (c \wedge b \wedge a), \text{ рис. 7.5.}$$

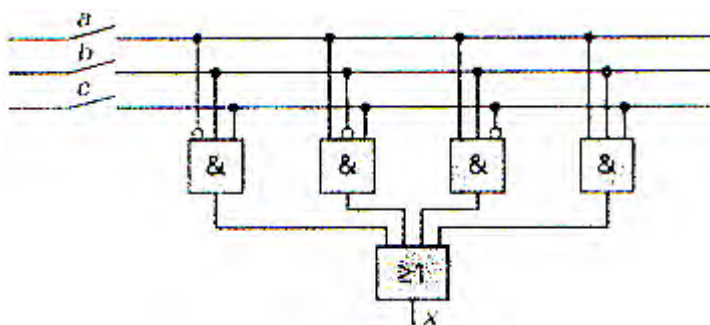


Рис. 7.5. Функциональная схема для нормальной формы ИЛИ с тремя переменными

## Пример 7.6

Составить нормальную форму И для таблицы значений функций (рис. 7.6).

$$\bar{x} = (\bar{c} \wedge \bar{b} \wedge \bar{a}) \vee (\bar{c} \wedge \bar{b} \wedge a) \vee (\bar{c} \wedge b \wedge \bar{a}) \vee (c \wedge \bar{b} \wedge a).$$

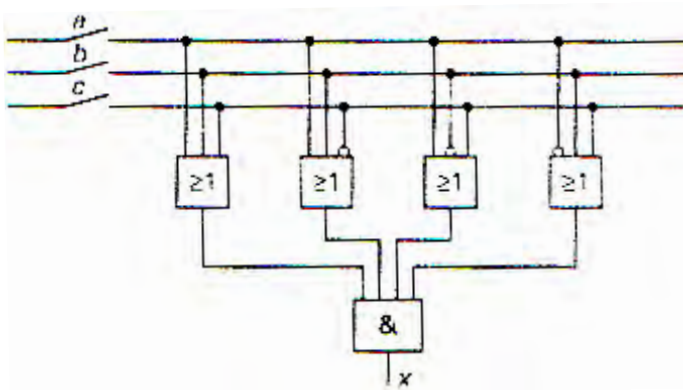


Рис. 7.6. Функциональная схема для нормальной формы И с тремя переменными

С отрицанием:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}} = x &= \overline{(\bar{c} \wedge \bar{b} \wedge \bar{a}) \vee (\bar{c} \wedge \bar{b} \wedge a) \vee (\bar{c} \wedge b \wedge \bar{a}) \vee (c \wedge \bar{b} \wedge a)}; \\ &= (c \vee b \vee a) \wedge (c \vee b \vee \bar{a}) \wedge (c \vee \bar{b} \vee a) \wedge (\bar{c} \vee b \vee a). \end{aligned}$$

## 7.4. Цифровая электроника и цепи

### 7.4.1. Двоичные устройства на аналоговых элементах

Сопротивление электрическому току в среде является одним из основных параметров для большей части электрических схем. К числу первых практических использований переменного сопротивления относится микрофон Белла, в котором изменение давления воздуха приводит к изменению плотности угольного порошка и его сопротивления

таким образом, что переменный электрический ток, протекающий через угольный порошок, воспроизводит изменение давления воздуха. Зависимость величины тока, протекающего через резистор, от величины сопротивления резистора определяется законом Ома

$$V = IR,$$

где  $V$  – напряжение, а  $I$  и  $R$  – соответственно ток и сопротивление.

Если вместо резистора с сопротивлением  $R$  использовать два последовательно соединенных резистора с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ , то

$$V = IR = I(R_1 + R_2) = IR_1 + IR_2 = V_1 + V_2.$$

Если же к двум последовательно соединенным резисторам приложено постоянное напряжение и сопротивление одного из них изменяется, то напряжение на каждом резисторе изменяется таким образом, что величина приложенного напряжения остается постоянной (рис. 7.7).

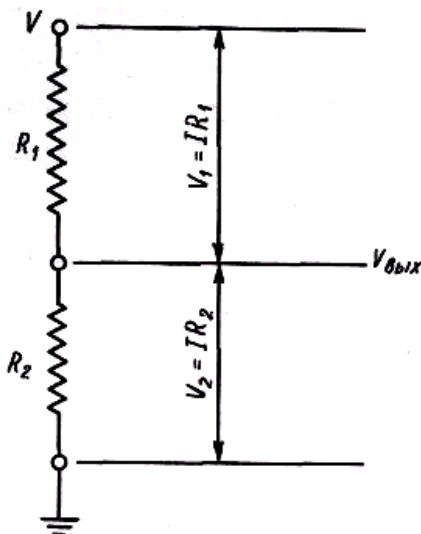


Рис. 7.7. Последовательное соединение резисторов

Для того чтобы получить более полное представление об изменении входного напряжения  $U_{\text{вых}}$  в зависимости от изменения сопро-

тивления, рассмотрим несколько случаев. Так, если  $R_1 = R_2$ , то  $V_{\text{вых}} = \frac{1}{2}V$ . Более интересным является случай, когда  $R_1 = 99R_2$ , тогда

$$V = I(R_1 + R_2) = I(100R_2),$$

и, следовательно,

$$I = V/100R_2.$$

Таким образом, падение напряжения на сопротивлении  $R_2$  определяется произведением

$$IR_2 = (V/100R_2) R_2 = 0,01U.$$

Если же  $R_2 = 99R_1$ , то падение напряжения на сопротивлении  $R_2$  составит  $0,99V$ . Отсюда следует, что, если поддерживать величину сопротивления  $R_1$  постоянной, а величину сопротивления  $R_2$  изменять в пределах от первого до четвертого порядка, выходное напряжение можно получать в пределах 1–99 % величины приложенного напряжения. Большая часть применений линейной электроники связана с использованием небольших напряжений для изменения сопротивления в целях получения больших изменений выходной величины. Все это относится к способам усиления сигналов. В цифровой электронике существенным является не изменение выходного напряжения в пределах некоторого диапазона, а тот факт, что оно может становиться приблизительно равным либо приложенному напряжению, либо потенциалу земли. В первом случае говорят, что на выходе высокий уровень, во втором – что он низкий (состояние низкого уровня). Существуют также и другие названия этих состояний: «Включено»/«Выключено», ИСТИНА/ЛОЖЬ, 1/0 и т. д.

Поскольку рассматриваемые электронные процессы изучаются в физике твердого тела, то здесь будет приведено лишь краткое описание физических явлений в электронных приборах.

Как известно, атомы примесей вводятся в кристаллическую решетку для изменения структуры энергетических зон таким образом, что приложение к кристаллу управляющих потенциалов обеспечи-

вает изменение этих зон. Сопротивление электрическому току, протекающему через кристаллическую решетку, в значительной степени зависит от энергетических зон. Следовательно, изменение структуры энергетических зон сильно влияет на величину сопротивления. Так как кристалл кремния покрыт слоем окиси металла, то, соответственно, полупроводниковый прибор называют прибором со структурой *металл-окисел-полупроводник (МОП-транзистор)*, рис. 7.8. Приложение к затвору из окиси металла электрического поля обуславливает изменение сопротивления. Таким образом, *полевой транзистор* со структурой «металл–окисел–полупроводник» (полевой МОП-транзистор) регулирует величину тока в зависимости от величины приложенного электрического поля. Сущность работы полевого МОП-транзистора заключается в том, что его затвор управляет величиной тока между истоком и стоком. Физическая структура и схемное обозначение полевого МОП-транзистора даны на рис. 7.8.

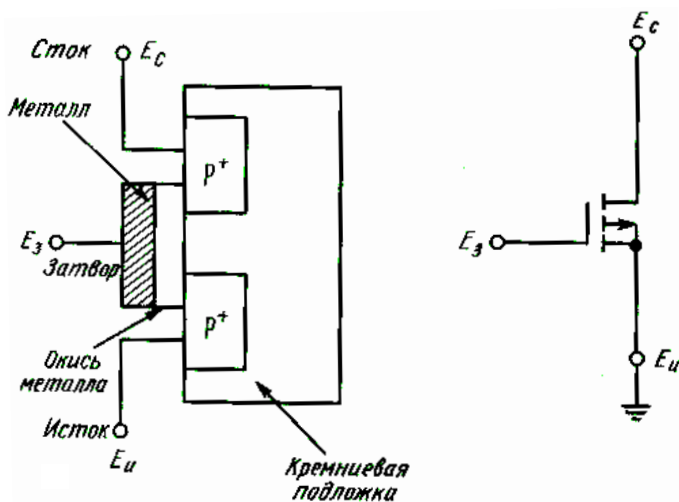


Рис. 7.8. МОП-транзистор

Поскольку полевой МОП-транзистор можно представить в виде переменного сопротивления, управляемого потенциалом зазора, заменим переменное сопротивление R2 резисторной пары полевым МОП-транзистором (рис. 7.9).

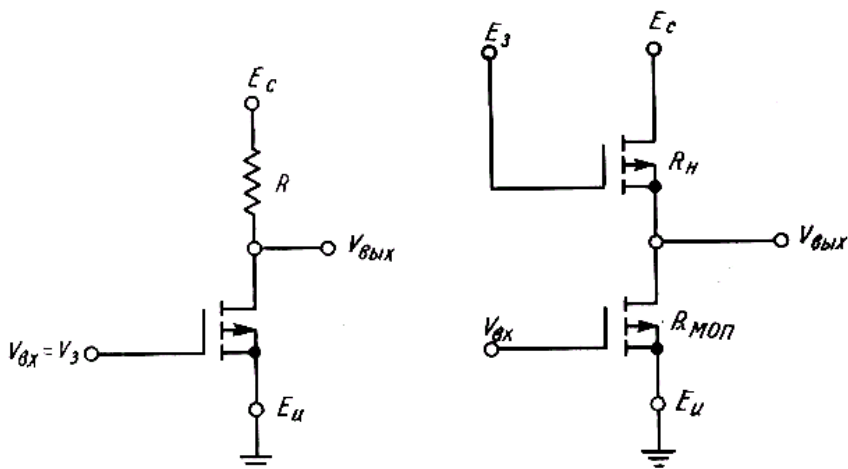


Рис. 7.9. Полевой МОП-транзистор

Так как сопротивление полевого МОП-транзистора изменяется в зависимости от изменения потенциала затвора, то любое сопротивление (в пределах диапазона сопротивлений полевого МОП-транзистора) можно получить посредством приложения соответствующего потенциала к затвору полевого МОП-транзистора. Таким образом, постоянное сопротивление нагрузки, изображенное в схеме как сопротивление  $R$ , можно также заменить полевым МОП-транзистором (см. рис. 7.9). Теперь резисторная пара образована полевыми МОП-транзисторами, при этом сопротивление верхнего резистора, соответствующее сопротивлению нагрузки  $R_n$ , фиксируется подачей постоянного потенциала затвора, а сопротивление нижнего, или переменного, резистора регулируется переменным потенциалом затвора.

Ограничивая величину  $V_{вх}$  значениями, которые обеспечивают удовлетворение величины сопротивления полевого МОП-транзистора  $R_{МОП}$  одному из следующих условий:

$$R_{МОП} > 9R_n$$

или

$$R_{МОП} < (1/9)R_n,$$



можно получить выходное напряжение  $V_{\text{вых}}$  либо больше  $0,9E_c$ , либо меньше  $0,1E_c$  соответственно. Пока мы пренебрегаем переходными значениями между этими уровнями. Выходное напряжение считают высоким ( $V_{\text{вых}} > 0,9E_c$ ) или низким ( $V_{\text{вых}} < 0,1E_c$ ), а полупроводниковый прибор, схема которого показана на рис. 7.9 справа, является базовым элементом схем на полевых МОП-транзисторах.

В больших интегральных схемах (БИС, схемы с большим уровнем интеграции) в одном (монокристаллическом) кремниевом кристалле размещаются тысячи таких приборов. Технология БИС, в которой используются  $p$ -канальные МОП-транзисторы, позволяет получать монокристаллический центральный процессор (ЦП). Соотношения между входными и выходными напряжениями имеют логические аналогии, что следует из приводимого ниже анализа.

Поскольку полупроводниковые приборы выполняются на одном кристалле, в схеме на рис. 7.10 изображена общая подложка. Схема работает таким образом, что низкому входному напряжению соответствует высокое выходное напряжение и, наоборот, высокое входное напряжение обеспечивает низкое напряжение на выходе.

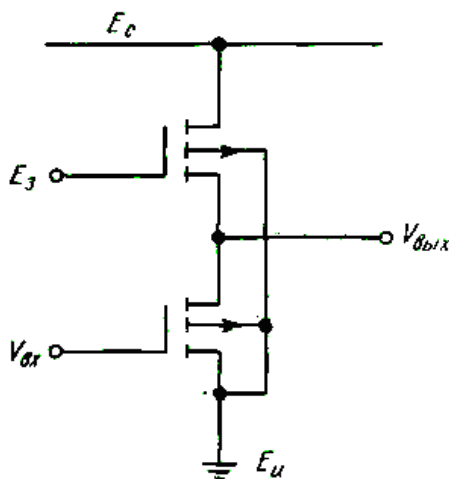


Рис. 7.10. Схема с общей подложкой

Способность этого физического прибора инвертировать напряжение имеет логическую аналогию с функцией НЕ, т. е. логическое

описание этой зависимости есть  $\text{ВЫХОД} = \text{НЕ}(\text{ВХОД})$ . Но одной только схемы НЕ недостаточно для реализации различных других логических операций. Расширим область применения МОП-транзисторов, рассмотрев схему с двумя последовательно включенными переменными сопротивлениями  $R_A$  и  $R_B$ . Так как нас интересуют только состояния с весьма большим и малым сопротивлениями (по отношению к сопротивлению нагрузки), то очевидно, что сумма обоих сопротивлений мала относительно сопротивления нагрузки только в том случае, когда величины  $R_A$  и  $R_B$  незначительны. В схеме с двумя полевыми МОП-транзисторами, соединенными последовательно с нагрузочным полевым МОП-транзистором (рис. 7.11), выходное напряжение будет низким лишь в том случае, когда входные напряжения  $V_A$  и  $V_B$  высокие. Поскольку инверсия сохраняется, логическое выражение, описывающее эту зависимость, имеет вид

$$K_{\text{вых}} = \text{НЕ}(V_A \text{ И } V_B).$$

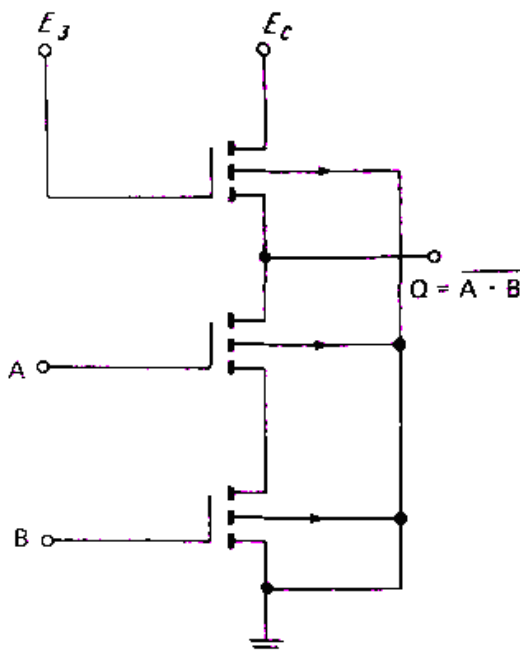


Рис. 7.11. Последовательное соединение двух полевых МОП-транзисторов

Это выражение настолько часто употребляется, что сокращенно названо логической функцией NAND (НЕ И).

Черта над символами, плюс (+) и точка (•) в системе стандартных логических обозначений в электронике соответствуют логическому отрицанию, операциям ИЛИ и И соответственно. В данной системе обозначений выражение для выходного напряжения примет вид

$$\text{ВЫХОД} = A \cdot B.$$

Символы, соответствующие напряжениям, здесь вообще опущены, поскольку для нас интерес представляют прежде всего логические соотношения и только затем – уже физические величины. Прибор с цепью общей подложки, реализующий эту логическую функцию, показан на рис. 7.12. Так как мы будем рассматривать только полевые МОП-транзисторы на общей подложке, цепь подложки схематически изображать в дальнейшем не будем. Две схемы без цепи подложки показаны на рис. 7.12, при этом под каждой электрической схемой дано ее логическое обозначение.

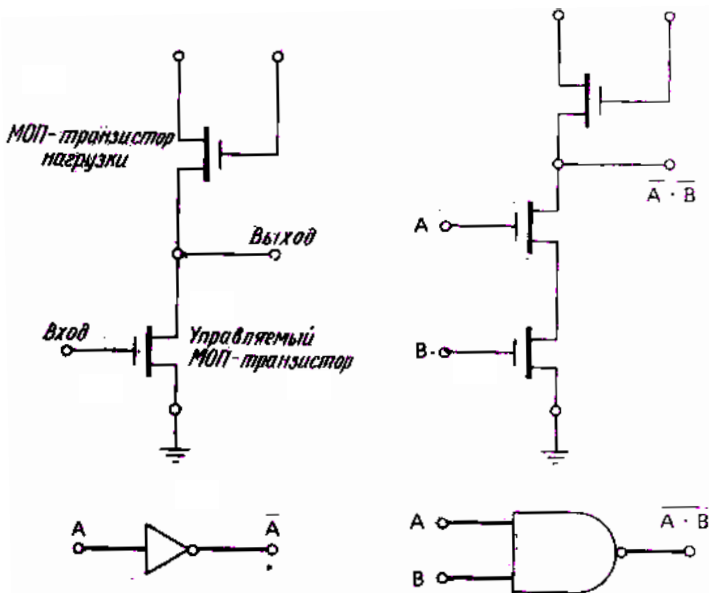


Рис. 7.12. Схемы без цепи подложки

Из сказанного выше следует, что логическую схему ИЛИ можно построить на двух параллельно включенных полевых МОП-транзисторах. Фактически она выполняется в виде инвертора или схемы НЕ ИЛИ, по тем же соображениям, что и схема НЕ. Можно было бы построить логические схемы И и ИЛИ, подав выходное напряжение на вход инвертора, но дополнительные затраты в этом случае, т. е. лишний инвертор, не оправданы.

На языке теории множеств соответствующие схемы изображены на рис. 7.13.

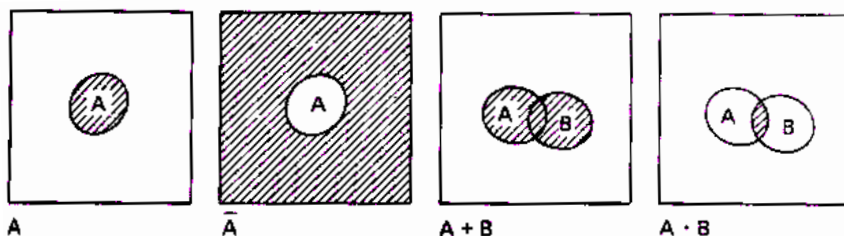


Рис. 7.13. Схемы множеств на основе теории множеств

Причины, обусловившие переход к двоичным системам, весьма разнообразны, но, пожалуй, самым очевидным достоинством таких систем является снижение требований, предъявляемых к выходу двоичной схемы по сравнению с выходом аналоговой схемы. Информация в аналоговой схеме представлена в виде величины напряжения (или тока), и любые отклонения от требуемого значения, даже самые малые, приводят к потере информации. С двоичной схемой связан всего лишь 1 бит информации, значение которого определяется тем, в каком из двух возможных состояний находится выход схемы.

Рассмотрим проблему передачи фиксированного количества информации, например 20 бит, посредством электронного сигнала. Каждый бит информации позволяет сделать выбор между двумя равновероятными вариантами; поэтому с использованием 20 бит можно представить 220 или 1048576 возможных вариантов. Таким образом, весь диапазон выходного сигнала делят на 220 равных частей и, определяя, в какой части этого диапазона находится аналоговый выходной сигнал, выделяют 20 бит информации.

Для диапазона напряжений 0–10 В приращение составляет 10 мкВ, и сконструировать реальную схему с такой точностью в пределах существующих диапазонов изменения рабочих температур и помех очень трудно или, по крайней мере, дорого. Один из вариантов решения проблемы заключается в использовании 20 двоичных схем, каждый выход которой несет 1 бит информации. Хотя это и ведет к увеличению числа используемых схем, зато стоимость каждой такой схемы значительно снижается.

Рассмотрим другой пример. Получение 40 бит информации обеспечивается либо аналоговой схемой, способной генерировать и выделять напряжение 10 пВ, либо 40 обычными двоичными схемами типа «Включено/Выключено». Очевидно, что при обработке большого количества информации из-за разницы в стоимости предпочтение отдается двоичным схемам. Диаграммы на рис. 7.14 иллюстрируют информационные возможности аналоговой и двоичной схем.

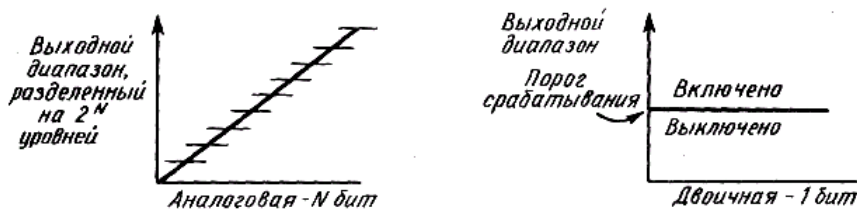


Рис. 7.14. Информационные возможности аналоговой и двоичной схем

В аналоговой схеме напряжение помех в одно приращение, добавленное к выходному сигналу на любом уровне, искажает информацию, тогда как в двоичном устройстве это возможно лишь в определенной области от порога срабатывания. Добавление помех к любому другому значению двоичного выхода не оказывает никакого влияния на работу схемы. Даже эту критическую для двоичных схем область можно исключить, образовав «запрещенную зону», разделяющую две области, при условии, что (за исключением переходов) уровень выходного напряжения всегда должен быть выше (в состоянии «Включено») или ниже (в состоянии «Выключено») этой зоны. Данная зона является запрещенной в следующем смысле. Изготовитель прибора гарантирует, что при выполнении определенных довольно простых требований в процессе его эксплу-

атации уровень напряжения включения никогда не станет ниже минимального значения, а уровень напряжения выключения никогда не превысит установленной величины (при отсутствии помех). Большая часть СИС, используемых для сопряжения БИС на МОП-структурах, – биполярные ТТЛ-схемы. Уровни напряжения для этого семейства приборов показаны на рис. 7.15.

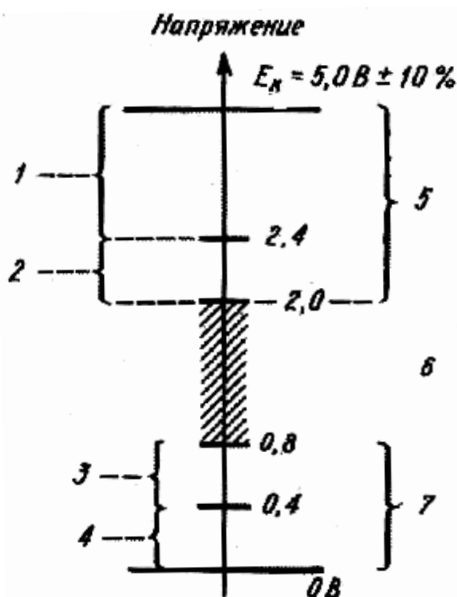


Рис. 7.15. Уровни напряжения для приборов СИС:

- 1 – гарантированный диапазон выходного напряжения для логической 1;
- 2 – гарантированный запас помехоустойчивости постоянной составляющей для логической 1;
- 3 – гарантированный запас помехоустойчивости постоянной составляющей для логической 0;
- 4 – гарантированный диапазон выходного напряжения для логического 0;
- 5 – допустимый диапазон входного напряжения для логической 1;
- 6 – для входных сигналов входного напряжения для логического 0

Самые простые *вентильные схемы*, или просто *вентили*, известны как схемы И, ИЛИ, НЕ ИЛИ и НЕ И. Название схем связано с их обычным использованием. Вентиль И — схема с  $N$  входами и одним выходом; при этом на выходе имеет место высокий уровень сигнала в том случае, когда на всех входах также высокий уровень

сигналов (т. е. вход 1 И вход 2 И вход 3 И...). Работа такой схемы определяется таблицей истинности, представленной на рис. 7.16 вместе с условным обозначением вентиля.

Таблица истинности схемы    Обозначение схемы ИЛИ на два входа

ИЛИ		
A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Рис. 7.16. Таблица истинности и обозначение схемы ИЛИ

Для простоты на рис. 7.16 дано условное обозначение схемы И только на два входа. Схема названа *вентилем* (gate), потому что, как видно из таблицы истинности, один входной сигнал можно использовать для прохождения (gating) через схему другого сигнала. Так как схема полностью симметрична, сигнал на входе *A* назовем условно управляющим сигналом, а сигнал на выходе схемы – сигналом, управляемым сигналом *A*. Пусть сигнал на входе *B* – последовательность прямоугольных импульсов, а на входе *A* – последовательность импульсов гораздо большей длительности. Форма выходного сигнала в зависимости от формы входных сигналов показана на рис. 7.17.

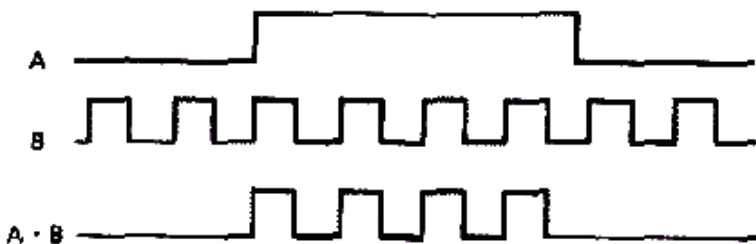


Рис. 7.17. Зависимость формы выходного сигнала от формы входных сигналов

Другой основной двоичной логической схемой является вентиль ИЛИ. Вентиль ИЛИ – схема с *N* входами и одним выходом, на ко-

тором устанавливается сигнал высокого уровня в том случае, если хотя бы на одном из входов действует сигнал высокого уровня (т. е. вход 1 ИЛИ вход 2 ИЛИ вход 3 ИЛИ...). Таблица истинности и условное обозначение этого вентиля показаны на рис. 7.18.

Таблица истинности схемы      Обозначение схемы И на два входа

ИЛИ		
A	B	A*B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Рис. 7.18. Таблица истинности и условное обозначение вентиля ИЛИ

Форма выходного сигнала при действии на входах таких же сигналов, как и в рассмотренном выше случае, показана на рис. 7.19.

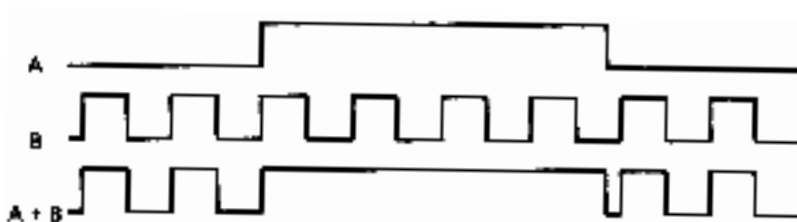


Рис. 7.19. Форма выходного сигнала при действии аналогичных сигналов

Простейшая вентиляльная схема – *инвертор*, или схема НЕ, таблица истинности и условное обозначение которой приведены на рис. 7.20.

Таблица истинности инвертора

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Обозначение инвертора



Рис. 7.20. Таблица истинности и условное обозначение инвертора



Использование инверторов в схемах показано на рис. 7.21.

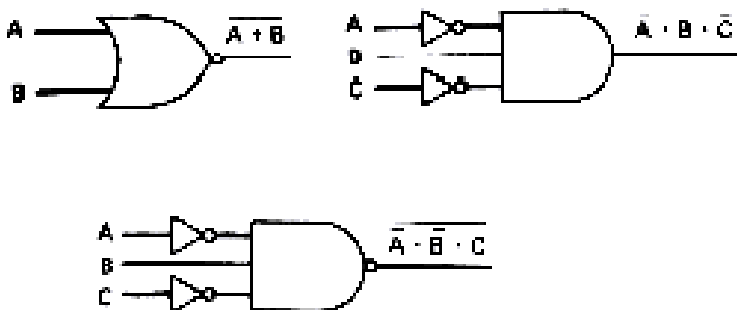


Рис. 7.21. Использование инвертора в схемах ИЛИ, И и НЕ

Схема ИЛИ с инвертором (см. рис. 7.21 вверху слева) известна как схема НЕ ИЛИ. Другие схемы – вентили И и НЕ И с тремя входами и с инверторами на некоторых из них (см. рис. 7.21). Исходя из стоимости и эффективности, в качестве базовых схем ТТЛ-семейства используют схемы НЕ, НЕ ИЛИ и НЕ И.

Еще одной базовой логической схемой является вентиль ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ, на выходе которого присутствует сигнал низкого уровня, если на обоих входах сигналы одинакового уровня, и высокого – в противном случае. Таблица истинности и условное обозначение вентиля ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ показаны на рис. 7.22.

Таблица истинности схемы  
исключающее ИЛИ

A	B	$A \times B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Обозначение схемы исключающее  
ИЛИ



Рис. 7.22. Таблица истинности и условное обозначение вентиля  
ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ

Из таблицы истинности видно, что вентиль ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ можно использовать как компаратор для сравнения входных

сигналов; на выходе вентиля всегда высокий уровень сигнала при несовпадении последних. Схема ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ, реализованная на рассмотренных выше вентилях, показана на рис. 7.23.

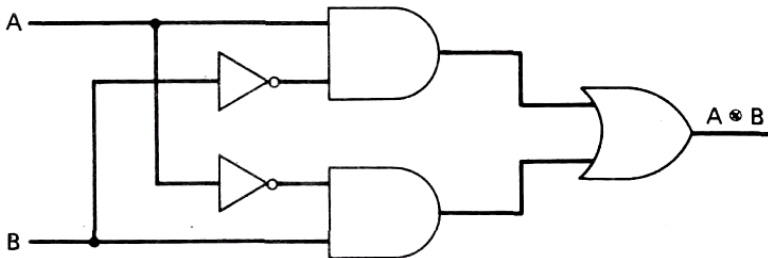


Рис. 7.23. Схема ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ

Функция сравнения имеет существенное значение при выполнении арифметических и логических операций, однако схема ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ представляет еще большие возможности. Следующая схема идентифицирует сумму  $S$  и перенос  $C$ . Из рассмотрения всех возможных комбинаций входных сигналов видно, что схема вырабатывает соответствующий сигнал суммы и сигнал переноса. Такая схема получила название *полусумматора* (рис. 7.24).

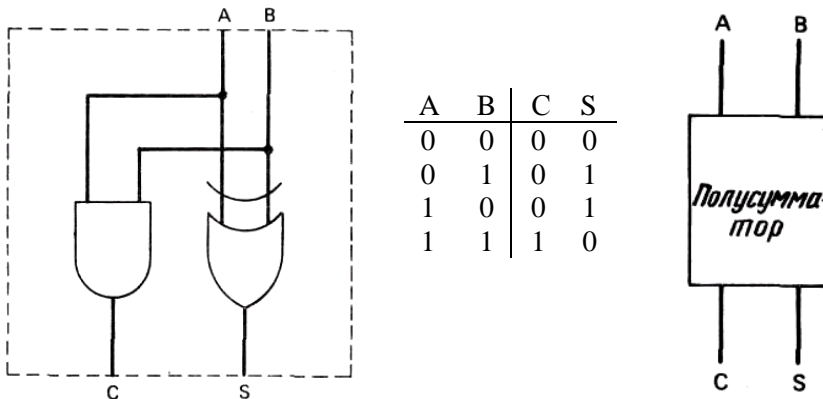


Рис. 7.24. Схема полусумматора

Схема носит такое название потому, что в ней производится сложение только первых разрядов чисел. Для сложения двух стар-

ших разрядов в такой схеме предусмотрены прием и прибавление переноса из предыдущего разряда. Два полусумматора, включенные так, как показано на рис. 7.25, выдают требуемый результат сложения во всех случаях, что нетрудно проверить по таблице истинности. Такие схемы можно включать в параллель для получения любого числа разрядов. Следовательно, с учетом того, что вычитание, умножение и деление можно производить посредством инвертирования и сложения, мы уже располагаем основными схемами, необходимыми для использования двоичной арифметики.

$C_{вз}$	A	B	$C_{вых}$	Сумма
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

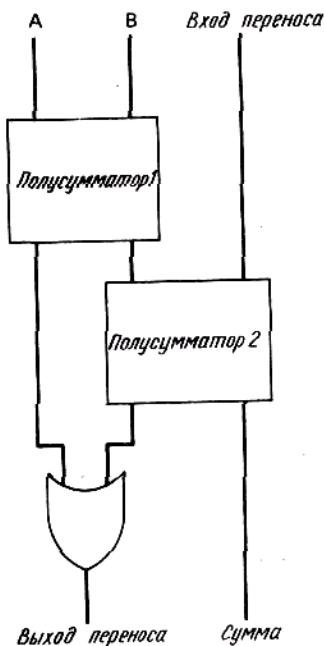


Рис. 7.25. Схема включения двух полусумматоров

При рассмотрении простых вентильных схем следует заметить, что согласно *теореме де Моргана* в курсе дискретной математики функцию НЕ ИЛИ можно выразить через функции И и НЕ, т. е. любую логическую операцию можно свести к двум основным логическим операциям – либо И-НЕ, либо ИЛИ-НЕ (рис. 7.26).

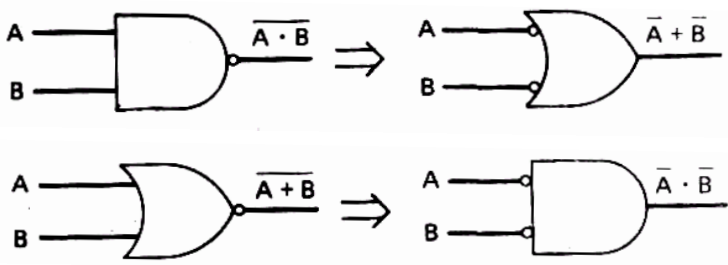


Рис. 7.26. Схемы выражения функции НЕ ИЛИ через функции И и НЕ

Аппаратные средства на уровне вентиляльных схем – это интегральные схемы с малым уровнем интеграции. Имеются модули почти всех используемых логических схем на два, три и четыре входа. Например, основные интегральные схемы семейства TTL 7400 показаны на рис. 7.27.

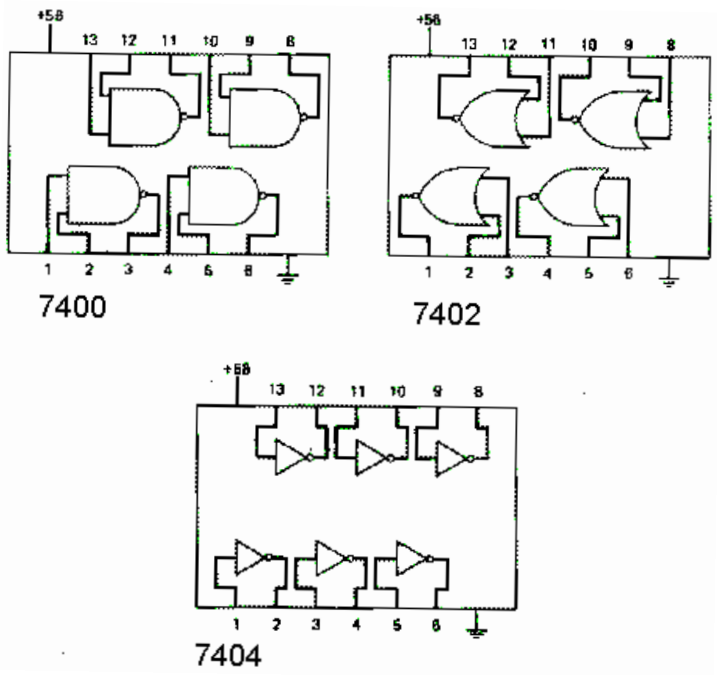


Рис. 7.27. Интегральные схемы семейства TTL 7400

Из анализа работы схемы на рис. 7.28 видно, что это вентиль ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ, состоящий из вентилях НЕ И.

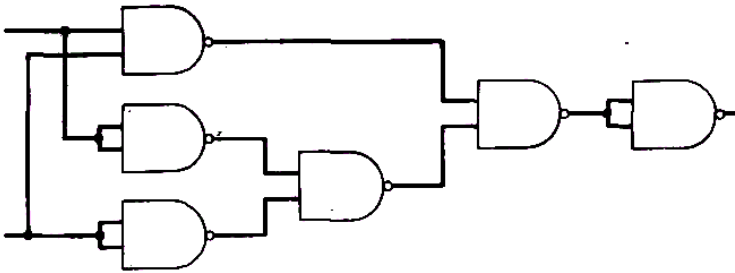


Рис. 2.28. Вентиль ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ

На аналогичных примерах можно показать, что как функция НЕ И, так и функция НЕ ИЛИ являются основными функциями булевой алгебры, через которые можно выразить все остальные логические функции. Ниже приведено аналитическое доказательство.

Определим функцию НЕ И как

$$f(a, b) = \overline{a \cdot b},$$

тогда

$$\bar{a} = f(a, a);$$

$$a \cdot b = f[f(a, b), f(a, b)];$$

$$a + b = f[f(a, a), f(b, b)].$$

Переход от булевой алгебры к логическим схемам достаточно прост. Рассмотрим равенство

$$y = \overline{A \cdot B \cdot (C + D)} + \overline{(A + B)},$$

схемная реализация которого показана на рис. 7.29. Имеются четыре входа для переменных и один выход результата. Из рассмотрения схемы сразу нельзя сказать, можно ли ее представить в более

простом виде. На основании булевых теорем приведенное выше равенство преобразуем к виду

$$y = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{(C + D)} + \overline{(A + B)} = \overline{(A + B)} \cdot \overline{(C + D)} + \overline{(A + B)} = A + B.$$

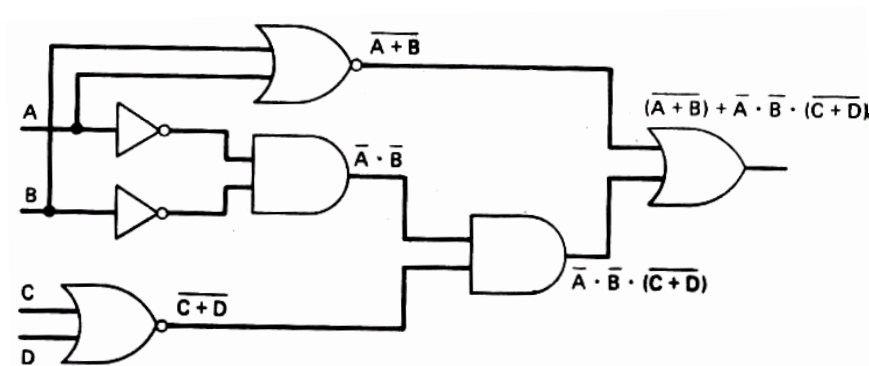


Рис. 7.29. Схемная реализация перехода от булевой алгебры к логической схеме

Таким образом, существует более простой и дешевый путь получения того же выхода – реализация функции НЕ ИЛИ переменных  $A$  и  $B$ , так как выход не зависит от переменных  $C$  и  $D$ .

В качестве примера использования дискретных логических вентилей рассмотрим следующий.

### Пример 7.7

*Я пойду в кино, если идет хороший фильм и есть машина или если телевизор сломан и нет дождя.* Построить схему, которая даст ответ, пойду ли я в кино, при задании соответствующих условий.

Условие можно записать в виде логического выражения

$$F(A, B, C, D) = (A \cdot B) + (C \cdot D),$$

где  $A$  – демонстрируется хороший фильм;

$B$  – есть машина;

$C$  – телевизор сломан;

$D$  – дождя нет.

Схемная реализация этого выражения показана на рис. 7.30. Подсоединив выключатели к входам  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  и индикаторную лампочку к выходу, самостоятельно получить ответы на вопросы, сформулированные в виде выражения  $F$  (ДА, НЕТ, НЕТ, ДА).

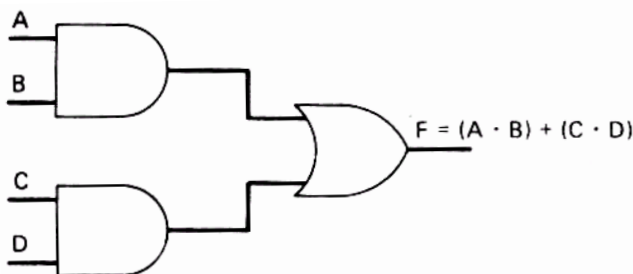


Рис. 7.30. Схема к примеру 7.7

#### 7.4.2. Цифровые стандартные блоки

Самые простые из существующих в настоящее время стандартных блоков – блоки, выполняющие логические операции И, НЕ И, ИЛИ, НЕ ИЛИ и ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ над одноразрядными двоичными словами, число которых находится в пределах 2–12. Имеются *блоки сложения* двоичных кодов различной длины, *блоки для подсчета* двоичных импульсов на входе и выдачи их суммы в двоичном коде, а также *счетчики по модулю  $N$* , вырабатывающие один выходной импульс на каждые  $N$  входных импульсов.

*Блоки компараторов* сравнивают два слова в двоичном коде, находящихся в двух входных портах, и выдают в третий порт результат сравнения. *Блоки умножения* умножают два двоичных числа с прибавлением третьего для получения арифметического результата в двоичном коде.

Существуют стандартные *блоки-дешифраторы* двоичных  $n$ -разрядных слов команд для выбора одной из  $2n$  выходных линий и аналогичные *функциональные блоки*, выбирающие 1 из  $2n$  входных линий. *Фиксаторы* принимают и хранят  $n$ -разрядные слова, предназначенные для последующего использования. *Последовательные регистры* получают последовательные данные и хранят их в виде цепочки рециркуляции. *Преобразователи* принимают  $n$ -разрядные

последовательные слова, поступающие по входной линии, и выдают их в параллельном коде на  $n$  выходов или последовательно на выходную линию. Имеются также стандартные блоки, выполняющие как ту, так и другую функцию. *Шифраторы приоритетов* выделяют сигнал с наивысшим приоритетом из любой комбинации сигналов, поступающей по  $2n$  входным линиям, и выдают  $n$ -разрядное двоичное слово, идентифицирующее эту линию. К увеличивающемуся числу блоков всех типов относятся так называемые *тристабильные устройства*, которые кроме обычных двух состояний «Включено/Выключено» имеют третье состояние, в котором они для остальной части схемы фактически «не существуют».

Имеются блоки, преобразующие  $n$ -разрядные слова в  $m$ -разрядные, где  $m$  – любое целое число, а также блоки, предназначенные для накопления 16 384 бит данных и случайной выдачи любого из них за один временной цикл. Многие из устройств можно группировать для увеличения либо числа обрабатываемых слов, либо длины последних, либо числа и длины слов одновременно. Одни стандартные блоки предназначены для выдачи последовательности импульсов в зависимости от входного слова, другие – для выработки признака четности при передаче или контроле на четность принимаемых кодов. Некоторые запоминающие регистры изменяют свое содержимое в зависимости от команды в порте управления, а блоки памяти, адресуемые по своему содержанию, делают возможным ассоциативный поиск данных на основе некоторых характеристик самих данных. Многофункциональные блоки, такие как АЛУ и ЦП, выбирают команды и данные, выполняют команды и выдают результаты.

Применяется блок *асинхронного приемопередатчика*, который в режиме передачи принимает параллельные слова, добавляет к ним признаки начала, четности и конца слова и передает эту информацию последовательно в аналогичный блок другой асинхронной системы, работающей в режиме приема. Приемник идентифицирует признак начала слова, принимает последовательное слово, контролирует его на четность, отыскивает признак конца слова, исключает дополнительные признаки, затем выдает признак приема слова и само слово в параллельном коде. Другие внутрисистемные блоки принимают до  $n$   $m$ -разрядных кодов с одной скоростью и передают их с другой скоростью. *Импульсные синхронизаторы* предназначены



ны для синхронизации поступающих импульсов с тактовыми импульсами системы или с другой командой синхронизации.

*Блоки сопряжения* имеют одинаковые характеристики, что позволяет их непосредственно соединять. Есть также блоки сопряжения семейств, входы которых имеют характеристики одного семейства, а выходы – характеристики другого семейства.

### 7.4.3. Аналого-цифровые стандартные блоки

Кроме чисто цифровых стандартных блоков, которые были описаны выше, имеется много различных аналого-цифровых блоков, включающих преобразователи кода во временные интервалы, цифро-аналоговые (ЦАП) и аналого-цифровые преобразователи (АЦП) напряжения. По одному или более входу или выходу эти блоки совместимы с одним семейством ИС, по остальным входам и выходам – с цифровыми преобразователями напряжения. Эти устройства можно эффективно использовать для сопряжения цифровых систем с аналоговыми.

В качестве наглядного примера таких устройств можно привести *светоизлучающий диод*, воспроизводящий светящимися точками или линиями буквенный символ. Блок противоположного типа – *фотодиодная матрица*, выдающая двоичные 0 или 1 в зависимости от интенсивности света на соответствующем фотодиоде. Еще одним подобным устройством является *фотоматрица* с автоматическим сканированием, состоящая из большого числа рядов элементов, сканирование которых осуществляется аналогично тому, как в телевидении. Входная величина – интенсивность света, выходная – последовательность импульсов зарядки, амплитуда которых прямо пропорциональна интенсивности света соответствующего фотодиода. Синхронизация автоматического сканирования матрицы может осуществляться тактовыми импульсами, совместимыми с устройствами соответствующего семейства цифровых блоков. Существует также большое количество различных преобразователей световых величин в код и кода в световые величины, которые можно считать основными стандартными блоками для разработчиков.

*Цифро-аналоговые преобразователи напряжения* преобразуют  $n$ -разрядные двоичные коды, поступающие на дискретные входы, в один из  $2^n$  возможных уровней напряжения. *Аналого-цифровые*

блоки, наоборот, устанавливают, какому из  $2n$  уровней напряжения соответствует уровень входного напряжения, и выдают  $n$ -разрядный двоичный код, содержащий эту информацию.

Другие блоки реагируют на переходы пороговых значений, изменяя состояние своего выхода с двоичного 0 на двоичную 1, когда такие переходы имеют место. *Нуль-детекторы* изменяют состояние своего выхода, если входное напряжение переходит уровень 0. Некоторые *пороговые детекторы* являются приборами мгновенного действия в том смысле, что в каждый момент времени выход определяет состояние входа, тогда как другие устройства срабатывают только при переходе входным напряжением определенного порогового уровня, причем это состояние запоминается до поступления команды СБРОС.

Более сложные блоки измеряют непрерывное входное напряжение и выдают четырехразрядный двоично-десятичный код для управления дисплеями или другими цифровыми блоками. Таймер, совместимый с цифровыми блоками и вырабатывающий импульсы длительностью от микросекунд до часов, является в высшей степени универсальным стандартным блоком.

Имеется довольно большое семейство линейных устройств. Так, для сопряжения стандартных цифровых блоков с нерегулируемым источником питания можно использовать прецизионные регуляторы напряжения. К другим линейным устройствам, которые редко используются с дискретными системами, относятся усилители мощности, видеоусилители, операционные и дифференциальные усилители. Имеются также детектор ЧМ-сигналов, блок ограничителя, телевизионные системы, блок балансного модема для системы связи.

Таким образом, использование элементов с переменным сопротивлением в схеме делителя напряжения дает возможность получить *двустабильный* или *двоичный* схемный элемент. Для простоты из большого разнообразия двустабильных элементов здесь рассмотрено только использование полевых МОП-транзисторов. На нескольких простых схемах с этими приборами показано, что зависимость выходных напряжений от входных напряжений определялась логическими функциями НЕ, И, ИЛИ и т. д. Затем посредством комбинации различных вентилей были получены схемы компаратора (ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ) и сумматора. Эти основные логические схемы можно использовать как для выполнения логических

операций и операций двоичной арифметики в компьютере, так и для конструирования более сложных элементов со средним уровнем интеграции. Выше был рассмотрен перечень некоторых классов компонентов СИС.

Что касается основных вентилях, то здесь следует заметить, что логическая интерпретация функции вентиля – дело разработчика. Согласно принятому условию в терминах «положительной логики» считают входной сигнал 5 В высоким уровнем или ИСТИНОЙ, а 0 В – низким уровнем или ЛОЖЬЮ. В этом случае устройства работают так, как описано выше. Если же для сигналов 0 и 5 В были бы приняты противоположные значения, то пришлось бы использовать теорему де Моргана для определения того, что вентиль НЕ И положительной логики становится вентиляем ИЛИ отрицательной логики и т. д. В принципе, возможно любое обозначение при условии постоянства его использования.

#### *7.4.4. Запоминающие элементы*

Схемы, рассмотренные выше, являлись схемами мгновенного срабатывания в том смысле, что выходной сигнал следовал непосредственно за входным сигналом. Во многих случаях необходимо сохранить информацию о том, что какое-то событие имело место. Вряд ли найдет применение счетчик импульсов, который возвращается в исходное состояние всякий раз после прохождения импульса. Необходима схема, которая могла бы переходить из своего исходного устойчивого состояния в другое устойчивое состояние, т. е. *двустабильную схему*, остающуюся во втором состоянии по прошествии события, вызвавшего ее переход в это состояние.

Как уже было показано выше, все комбинационные логические схемы можно построить только на вентилях НЕ И; поэтому можно создать запоминающий элемент посредством использования лишь этих вентилях. В основу построения такого элемента положим следующий метод: соединим вентили таким образом, чтобы входной сигнал, поступающий на один из них, как-то воздействовал и на другие вентили. Такое соединение является, вообще говоря, необходимым, так как один вентиль НЕ И не может запоминать информацию. Поэтому выход одного вентиля НЕ И подсоединим обратно к входу (или входам) других вентилях НЕ И схемы. Проанализиро-

вав вопрос о необходимости обратной связи, попытаемся определить минимально необходимое число таких вентилях. В данном случае интуитивно можно предположить, что двустабильности можно достигнуть, обеспечив симметричность схемы, а для наиболее простой двухвентильной схемы обратная связь осуществляется таким образом, что выход одного вентиля НЕ И соединен со входом другого вентиля. Такая схема с перекрестными соединениями показана на рис. 7.31.

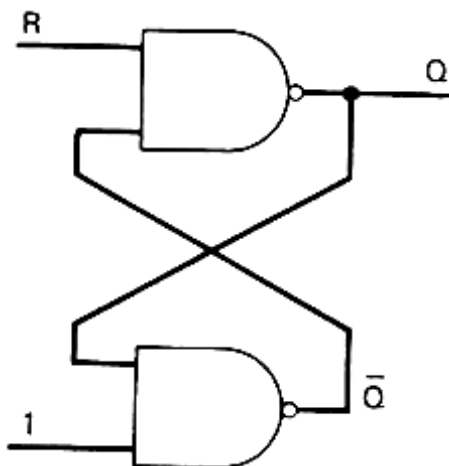
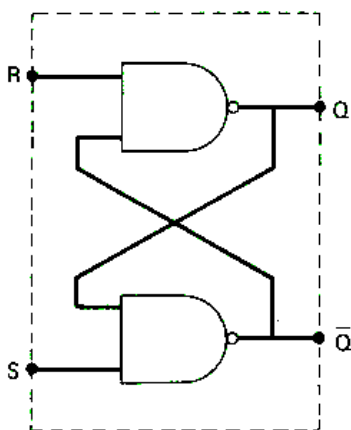


Рис. 7.31. Схема с перекрестными соединениями

Предположим, что на нижний вход схемы действует сигнал, соответствующий логической 1, а на выходе Q – логическому 0. Тогда на выходе Q будет сигнал, соответствующий логической 1, и если на вход R также воздействует сигнал, соответствующий логической 1, то схема будет находиться в устойчивом состоянии. Предположим, что вход R управляющий. Рассмотрим, что произойдет со схемой, если на входе R установится низкий уровень. В соответствии с таблицей истинности вентиля НЕ И на выходе Q в этом случае установится высокий уровень, который вызовет установку низкого уровня на выходе  $\bar{Q}$ . То что на выходе  $\bar{Q}$  уровень сигнала стал низким, не скажется на уровне выхода Q, который останется высоким. Это состояние схемы также устойчивое. Важно, что, когда уровень на

входе R становится опять высоким, уровень на выходе Q остается неизменным. Таким образом, схема в целом фиксирует тот факт, что «на вход R поступил 0 в какой-то момент времени в прошлом». Полная симметрия, разумеется, обеспечивает выполнение симметричной операции. Вместо уровня, соответствующего логической 1, на нижнем входе может быть произвольный уровень S. Таблица истинности для такой схемы, получившей название *RS-триггера*, приведена рядом с ее схемным обозначением на рис. 7.32.



R	S	Q	$\bar{Q}$
0	0	Неопределенно	
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	Не изменяется	

Рис. 7.32. Схема RS-триггера и таблица истинности

Таким образом, посредством простой и недорогой схемы обеспечивается запоминание информации. Подобная элементарная схема называется *фиксатором*, так как происходящие на любом из ее входов соответствующие изменения переводят схему в другое состояние. В настоящее время имеется много других схем для запоминания информации, но все они работают по принципу элементарного фиксатора.

Фиксатор вводит в рассмотренные схемы новый параметр – *предысторию*. До его ввода состояние выхода любой схемы на вентилях зависело от сигналов на ее входах в конкретный момент времени. Теперь же можно строить схемы, сигнал на выходе которых будет зависеть не только от входных, но и от *предшествующих* сигналов. При такой возможности запоминания встает новая проблема.

Во всех приведенных выше рассуждениях предполагалось, что, подобно множеству электронов, основные элементы, по существу, идентичны. Тот факт, что элементы практически никогда не бывают в точности одинаковыми, означает, что одни из них будут изменять состояние быстрее других, и поэтому могут возникнуть непредусмотренные *промежуточные* состояния. Ранее эти состояния не оказывали никакого влияния из-за их скоротечности, однако сейчас появилась возможность запоминания информации, обусловленной этими (нежелательными) состояниями. Таким образом, проблема проектирования во многих случаях становится труднопреодолимой.

Эта особенность большинства комбинационных логических схем получила название проблемы *состязаний* или *гонок*. Прежде чем приступить к ее рассмотрению, определим элементарный RS-триггер в терминах перекрестных вентилей НЕ ИЛИ (рис. 7.33).

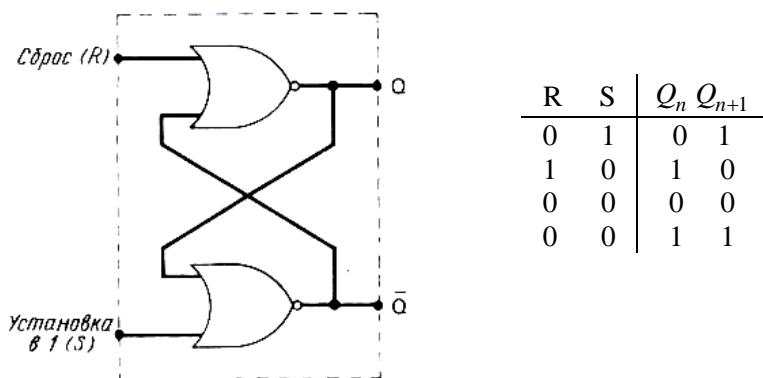


Рис. 7.33. Схема элементарного RS-триггера

В таблице истинности  $Q_n$  обозначает состояние выхода триггера до изменения состояния входов, а  $Q_{n+1}$  – состояние выхода триггера после изменения состояния его входов. Как нетрудно видеть, никаких изменений не происходит, когда на обоих входах низкий уровень. Поступление импульса на вход «Установка» вызывает переход выхода Q в состояние с высоким уровнем, а сигнал, подаваемый по линии «Сброс», возвращает выход Q в исходное состояние, которому соответствует низкий уровень. Если на обоих входах будут одновременно находиться высокие уровни, то с установкой на входе

«Сброс» низкого уровня определится состояние схемы, которое до этого не было определено. Произвольным образом за стандартную схему RS-триггера выберем эту схему, а не схему на вентилях НЕ И, рассмотренную ранее.

Проблема «состязаний» в комбинационных схемах связана с тем, что сигналы, проходящие через различные логические вентили, могут изменяться от вентиля к вентилю на величину, достаточную для ложного переброса схемы. Предположим, что задержка распространения сигнала в цепи  $A$  минимальная, а в цепи  $B$  максимальная. Схематически такой случай показан на рис. 7.34. Если бы все компоненты одной цепи имели значительно меньшую величину времени задержки прохождения сигнала, чем компоненты другой цепи, ложное срабатывание наверняка имело бы место и было бы зафиксировано.

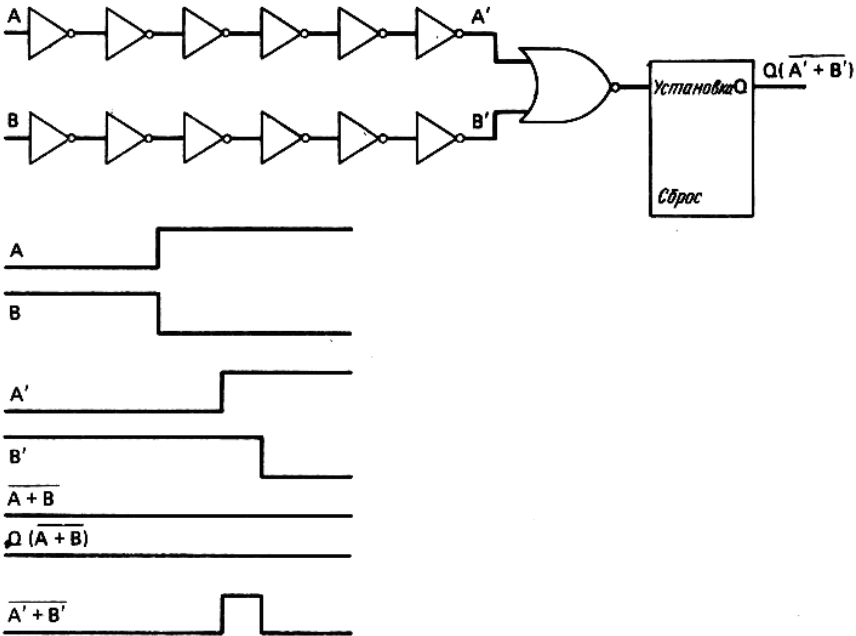


Рис. 7.34. Случай задержки распространения сигнала в цепи

Одним из способов устранения этого недостатка является блокировка срабатывания триггера на время максимальной задержки. RS-триггер с такой блокировкой (рис. 7.35) получил название *синхронизи-*

руемого триггера. Синхронизируемый RS-триггер срабатывает от высокого уровня, поступающего по любому из входов «Сброс» или «Установка», если на входе «Синхронизация» также высокий уровень.

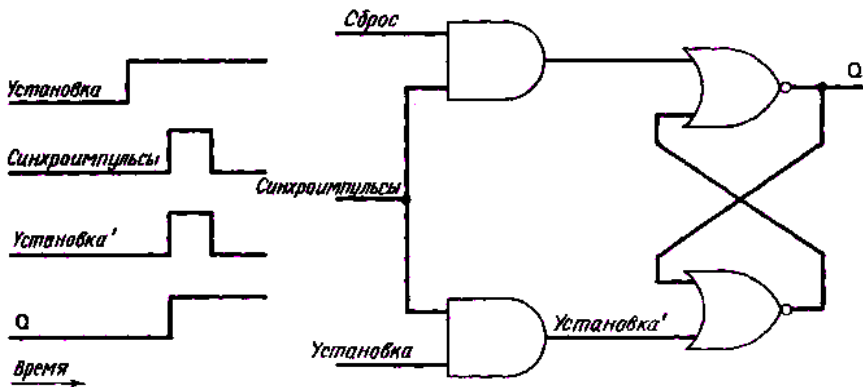


Рис. 7.35. Синхронизируемый триггер

Подобное прохождение сигналов через схему является эффективным способом решения проблемы «состязаний». В системах с такими схемами весь непрерывный временной интервал работы собственно комбинационных логических схем разделен на дискретные временные интервалы, связанные с синхронизируемыми системами. Схемы такого типа называются *последовательными*, так как в них вместо состязаний имеет место последовательная смена состояний. Система с одним синхронизирующим сигналом называется *синхронной последовательной системой*. Если же используется несколько независимых синхронизирующих сигналов, то такая система называется *асинхронной последовательной системой*. Скорость передачи информации в последовательной схеме определяется частотой генератора синхроимпульсов. Высокочастотные сигналы с узкими синхронизирующими импульсами используются для получения максимальной скорости передачи информации.

Необходимость в запоминании значительных объемов информации вызвала создание интегральных схем, состоящих из большого числа запоминающих элементов. Основной запоминающий элемент в таких схемах называется *ячейкой памяти*. Ячейки памяти изготавливают с использованием одного, трех, четырех, шести или



большого числа транзисторов. Простейшая ячейка памяти – одно-транзисторная схема на полевом МОП-транзисторе (рис. 7.36), который выполняет функцию вентиля, т. е. когда транзистор включен, схему можно рассматривать как замкнутую цепь с нулевым сопротивлением, а когда выключен, – как разомкнутую цепь фактически с бесконечно большим сопротивлением.

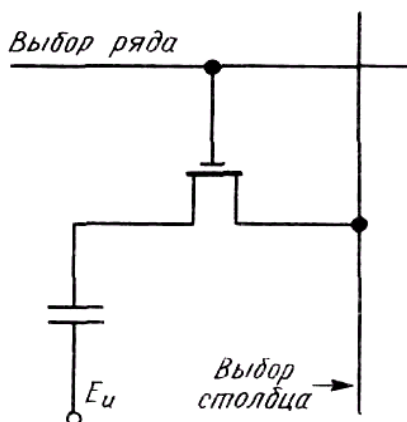


Рис. 7.36. Однотранзисторная схема на полевом МОП-транзисторе

Таким образом, в течение цикла «Запись» конденсатор заряжается до уровня, соответствующего логической 1 или логическому 0, от шины выбора столбца полевого МОП-транзистора, управляемого шиной выбора ряда. Во время цикла «Чтение» заряд конденсатора изменяет потенциал отключенной шины выбора столбца, которая соединена с входом усилителя считывания. Конденсатор должен быть достаточно большой емкости для получения считываемого сигнала требуемой величины и небольших размеров для большей плотности расположения элементов. Во избежание уменьшения заряда конденсатора вследствие утечки требуется его периодическая регенерация, а так как процесс чтения связан с разрушением данных, содержимое ячейки необходимо восстанавливать после каждого цикла чтения. Ячейки памяти с регенерацией называются *динамическими* в отличие от *статических* ячеек, в которых не требуется дополнительных синхронизирующих и управляющих схем, связанных с этим процессом.

Число запоминающих ячеек на кристаллах памяти определяется технологией изготовления кристаллов. Статические ЗУ имеют память 4096 бит, организованную в виде матриц из  $32 \times 32$  запоминающих элементов. Стандартная память динамических ЗУ на кристалле включает 16 384 бит.

Статические элементы проще использовать в схемах, но при этом увеличиваются потребляемая мощность и размер кристалла. В динамических ячейках на полевых МОП-транзисторах для обеспечения временного хранения данных в виде заряда используется паразитная емкость. Это делает ненужными элементы нагрузки, но приводит к появлению проблемы утечки заряда. Поскольку время утечки заряда с конденсатора определяется миллисекундами, необходима регенерация, или восстановление, заряда. Для схем регенерации обычно требуются специальные схемы синхронизации, которые усложняют аппаратуру и увеличивают ее стоимость. Это оправданно лишь в том случае, когда стоимость элементов нагрузки больше стоимости дополнительных схем. Так как с каждым разрядом памяти связаны два элемента нагрузки, значительная экономия имеет место лишь при большом числе разрядов (более 20 000).

Таким образом, память объемом 16 кб слов и более следует строить на динамических элементах, в других случаях можно использовать статические элементы. Многие запоминающие устройства могут работать при пониженных уровнях напряжения, что приводит к уменьшению потребляемой мощности без потери данных. Такой режим работы, называемый режимом хранения, эффективен во многих случаях. Время обращения к МОП-памяти составляет 0,1–2,0 мкс. Время обращения к ТТЛ-памяти гораздо меньше (50–150 нс), но зато больше потребляемая мощность и меньше число разрядов на один кристалл при большей стоимости.

#### 7.4.5. Счетчики

На рис. 7.37 для сравнения приведены выходной сигнал схемы с двумя устойчивыми состояниями, или  $T$ -триггера, и входной синхронизирующий сигнал. Легко заметить, что двум входным синхронизирующим импульсам соответствует только один выходной импульс. Такое соотношение входного и выходного сигналов – характерная особенность схем деления на два.

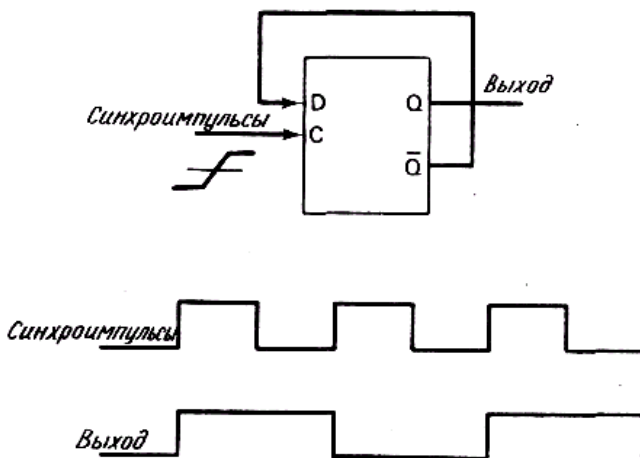


Рис. 7.37. Выходной сигнал Т-триггера и входной синхронизирующий сигнал

Так как метод деления на два с выделением остатка используется для преобразования десятичных чисел в двоичные, то ясно, что последовательное соединение схем деления на два можно использовать для выдачи в двоичном виде любого произвольного числа импульсов. На рис. 7.38 показаны три схемы деления на два, соединенные последовательно для получения схемы деления на восемь. Здесь применяются JK-триггеры с единичными уровнями на обоих входах. Для иллюстрации счета на временной диаграмме показан выход каждого триггера. Так как для синхронизации общий синхронизирующий сигнал не используется, то эта схема асинхронная. Поскольку триггеры ТТЛ-типа обычно перебрасываются отрицательным фронтом входного сигнала, уровень выходного сигнала каждого каскада изменяется с изменением уровня входного сигнала до нуля. Когда уровень входного синхронизирующего сигнала первого каскада становится низким, уровень выходного сигнала этого каскада делается высоким. Выходной сигнал первого каскада является входным синхронизирующим сигналом для второго каскада. Однако уровень выходного сигнала второго каскада не изменится до тех пор, пока уровень его входного синхронизирующего сигнала не станет низким. Уровень выходного сигнала первого каскада также останется прежним, пока на его вход не поступит следующий

синхронизирующий импульс, по заднему фронту которого выходной уровень станет высоким. Аналогичным образом при поступлении на счетный вход каждого каскада двух импульсов вырабатывается только один выходной импульс. Следовательно,  $N$ -каскадная схема делит частоту входных импульсов на  $2N$ .

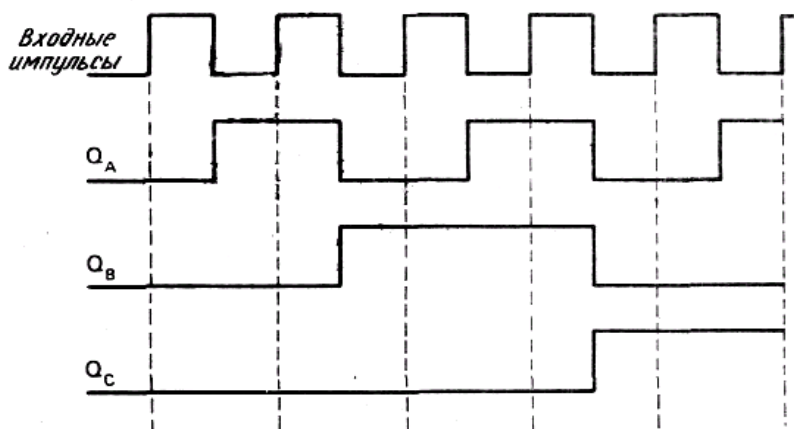
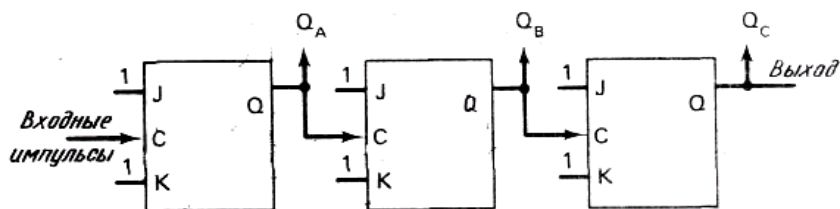


Рис. 7.38. Схемы деления на два

Предположим, что схема находится в исходном состоянии, т. е. на выходе каждого каскада низкий уровень. Характерная особенность схемы деления на  $N$  проявляется в том случае, если просматривать состояния всех ее каскадов перед поступлением первого и каждого последующего входных импульсов. Ниже в табл. 7.8 приведены состояния всех выходов  $Q_A$ ,  $Q_B$  и  $Q_C$ , просмотренные перед приходом каждого входного синхронизирующего импульса.

Таблица 7.8

Состояния выходов  $Q_A$ ,  $Q_B$ ,  $Q_C$ 

Число входных импульсов	$Q_C$	$Q_B$	$Q_A$
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1
8	0	0	0

Как видно из таблицы, выходы каскадов подсчитывают двоичные импульсы, поступающие на вход такой схемы. Цикл работы счетчика равен  $2N$ . Соединяя выходы последующих каскадов с входами предшествующих каскадов, можно получить счетчик по любому модулю, а затем его зациклить. Имеются различные конфигурации таких счетчиков и делителей частоты.

#### ***7.4.6. Сдвиговые регистры***

Выше была приведена схема двоичного счетчика, ряд триггеров которой соединен таким образом, что выход каскада  $n$  связан со счетным входом каскада  $n + 1$ . Схему используют для управления дисплеем или другими цифровыми схемами. Рассмотрим, какие еще схемы можно получить посредством последовательного соединения триггеров. Схема на триггерах D-типа, в которой выход каждого предыдущего каскада соединен с входом последующего, показана на рис. 7.39, синхронная, так как использован единый синхронизирующий сигнал. Предположим, что первоначально она находится в исходном состоянии (на всех выходах низкий уровень). Анализ работы такой схемы показывает, что сигнал на входе первого каска-

да проходит на его выход  $Q_A$  с поступлением первого синхронизирующего импульса. С приходом второго синхронизирующего импульса эти данные передаются на выход второго каскада  $Q_B$ .

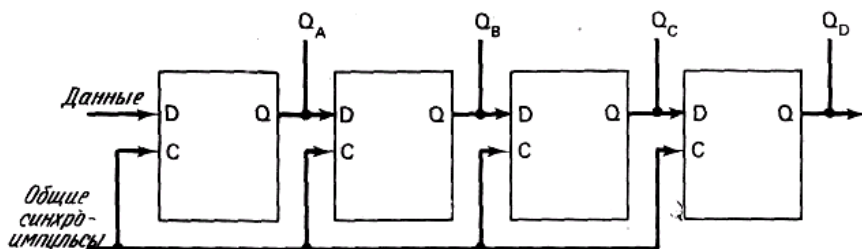


Рис. 7.39. Схема на триггерах D-типа

Аналогичным образом сдвигается вправо первый разряд данных с приходом каждого последующего синхронизирующего импульса. Так как процесс сдвига всех разрядов одинаков, входные данные записываются в виде выходных сигналов триггеров каскадов таким образом, что их первый разряд оказывается самым крайним справа. Таким образом, для записи  $n$ -разрядного слова данных необходимо  $n$  синхронизирующих импульсов. Такие схемы временного хранения данных называются *регистрами*. Регистры, обладающие возможностью ввода и вывода данных посредством их последовательного сдвига влево и вправо, получили название *сдвиговых регистров*.

Аналогично другим эффективным модулям имеется большое число сдвиговых регистров на ИС различной конфигурации. Диапазон изменения длины регистров – от 4 до 1000 разрядов и более, т. е. возможно более 1000 последовательных разрядов на модуль. Сдвиговые регистры с несколькими разрядами используются для вычислений и временного хранения данных, тогда как сдвиговые регистры с большим числом разрядов – для построения запоминающих устройств на ИС. В регистрах небольшой длины выход имеют все разряды, тогда как в длинных регистрах возможен доступ только к входу первого и выходу последнего разряда. В приводимой ниже табл. 7.9 даны состояния четырехразрядного регистра при последовательной записи кода 1101 четырьмя синхронизирующими импульсами.

Состояния четырехразрядного регистра

Состояние	Вход данных	$Q_A$	$Q_B$	$Q_C$	$Q_D$
Начальное состояние	0	0	0	0	0
Тактовый импульс 1	1	1	0	0	0
Тактовый импульс 2	0	0	1	0	0
Тактовый импульс 3	1	1	0	1	0
Тактовый импульс 4	1	1	1	0	1

Способом хранения данных в сдвиговых регистрах с периодическим обращением к каждому разряду памяти является петля *рециркуляции*. Выход такого регистра связан с его входом, и данные сдвигаются по бесконечному циклу. Очевидно, что должен существовать способ прерывания рециркуляции для ввода данных в память. Ввод производится по импульсу «Запись», который управляет работой вентиля входной цепи.

#### 7.4.7. Кодирование и стандартные СИС-блоки

В предыдущих главах на основе сочетания значений некоторого числа входных двоичных переменных мы получали значения меньшего числа выходных двоичных переменных, являющихся функцией сочетания входных сигналов. Так, например, в соответствии с уравнением

$$Y = AB + CD$$

четыре двоичные переменные  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  заменяются одной переменной  $Y$ , которая определяет истинность или ложность логического отношения между переменными в правой части уравнения. Это одно из множества возможных отношений, которые могут существовать между переменными  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . В соответствии с двоичной интерпретацией этих четырех переменных мы можем последовательно рассмотреть все возможные комбинации их значений, используя обычное условие: 1 = ИСТИНА, а 0 = ЛОЖЬ. Таким образом,

между «полностью ложным»  $(A, B, C, D) = (0, 0, 0, 0)$  и «полностью истинным»  $(1, 1, 1, 1)$  входами находится набор всех возможных комбинаций переменных. Было отмечено наличие однозначного соответствия между этими состояниями и числами в двоичной системе счисления. Теперь заметим, что для каждой комбинации значений переменных существует возможность построения по крайней мере одного уравнения, принимающего истинное значение только для этой комбинации. Простейшей иллюстрацией является функция И, представленная в табл. 7.10.

Таблица 7.10

Функция И

Двоичное число	Возможная функция И четырех переменных
0000	$y_0 = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$
0001	$y_1 = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D$
0010	$y_0 = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D}$
0011	$y_0 = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D$

Из этой таблицы видно, что для  $N$  двоичных разрядов на входе легко получить два разных логических уравнения, которые можно использовать для определения требуемой комбинации значений переменных. Нас интересуют логические схемы, генерирующие множество битов информации на выходе в результате воздействия нескольких битов на входе. Схемы такого рода необходимы для решения задач выбора или адресации устройств.

Было рассмотрено одновременное, или параллельное, поступление на схему входных сигналов. Существует множество ситуаций, в которых сигналы поступают на вход в последовательной форме. В этом случае, как и при кодировании параллельных сигналов, с каждой последовательностью входных сигналов можно сопоставить некоторый двоичный код. Примером подобного шифратора является двоичный счетчик импульсов. Если допустить, что клапан на входе открыт в течение восьми временных периодов, в каждый



из которых может поступить импульс, то возможные последовательности входных сигналов могут быть однозначно определены при помощи восьмиразрядных двоичных чисел.

Выходом двоичного счетчика является двоичный код, который содержит информацию о входной комбинации импульсов. Однако такая простейшая схема шифратора отображает входные последовательности сигналов  $D$ ,  $F$  и  $G$  в одну точку, что приводит к потере информации, содержащейся во входном потоке. Различия в перестановках можно сохранить за счет введения дополнительных разрядов, необходимых для хранения этой информации. В то время как для описания входной комбинации из  $n$  единиц и  $8 - n$  нулей достаточно трех разрядов, для сохранения относительного расположения единиц и нулей необходимы восемь разрядов. При соответствующем расположении триггеров можно легко записать всю информацию последовательности импульсов восемью битами. Это как раз то, что получают в случае сдвигового регистра. Однако необходимо подчеркнуть, что счетчик не сохранит всей информации.

В случае аналогового сигнала логические уравнения, приведенные вначале, не позволяют различать все  $2 - 1$  ложных состояния при выдаче неизменяемого сигнала истинного состояния. Потеря информации при использовании любого одного логического уравнения, связывающего значения нескольких переменных, характерна для многих цифровых систем, о чем необходимо помнить при проектировании систем.

### **7.5. Автоматические системы управления в системах с памятью**

Здесь речь идет об автоматическом программном управлении с обратной связью, при котором очередной запрограммированный этап работы начинается после завершения предыдущего. Сохранение переключательных сигналов и состояний управления осуществляется с помощью триггеров с двумя устойчивыми состояниями, именуемых также «бистабильными мультивибраторами» (англ. flipflop). Они находятся либо в состоянии включения, либо в состоянии выключения и соответственно их выходные сигналы (за исключением короткого времени коммутации) имеют значения 1 или 0.

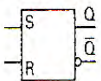
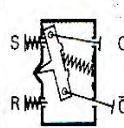
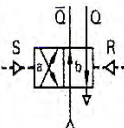
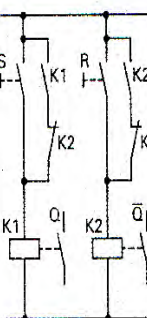
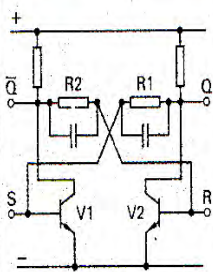
Для триггеров также возможны разные формы исполнения: механические, пневматические, электрические и электронные. Кроме того, они различаются по виду и действию входных сигналов.

## Триггеры

Триггер с раздельными входами (**RS-триггер**) устанавливается сигналом со значением 1 на входе S, т. е. приводится в коммутационное состояние «включено» (табл. 7.11). Посредством сигнала со значением 1 на входе сброса R триггер возвращается в исходное состояние, т. е. приводится в коммутационное состояние «выключено». Триггер сохраняет соответствующее коммутационное состояние, даже если сигналы удаляются от входов. Коммутационное состояние триггера может быть считано на выходе Q. В большинстве случаев имеется еще выход с отрицанием  $\bar{Q}$ , который проводит сигнал, обратный Q.

Таблица 7.11

Триггеры с раздельными входами

Условное обозначение на схеме	механический	пневматический	электрический	электронный																				
																								
<p>Таблица значений функций</p> <table border="1"> <tr> <td>S</td> <td>R</td> <td>Q</td> <td><math>\bar{Q}</math></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>*</td> <td>*</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>●</td> <td>●</td> </tr> </table> <p>* как предыдущее состояние ● неопределенное состояние</p>	S	R	Q	$\bar{Q}$	0	0	*	*	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	●	●		<p>4/2-распределитель</p>		<p>Триггер с N-P-N-транзисторами</p>
S	R	Q	$\bar{Q}$																					
0	0	*	*																					
0	1	0	1																					
1	0	1	0																					
1	1	●	●																					

У **механического** триггера перекидной рычаг посредством пружины сжатия всегда приводится в однозначное положение (см.

табл. 7.11). При нажатии клавиши S осуществляется установка триггера, при нажатии клавиши R – его сброс в исходное положение. Ни в коем случае нельзя нажимать клавиши S и R одновременно. Типичным примером такого триггера является обычный тумблер.

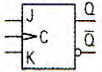
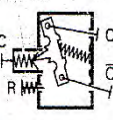
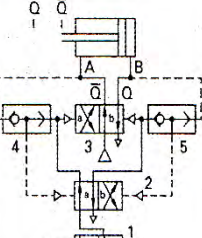
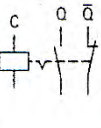
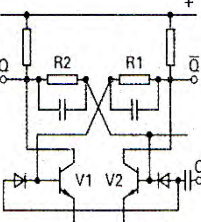
**Пневматический** вариант триггера с раздельными входами может быть реализован на основе 4/2-ходового **импульсного вентиля**. Под действием короткого импульса давления на присоединение управляющей линии R вентиль приводится в исходное положение б. При воздействии давлением присоединение S вентиль переходит в коммутационное положение а; триггер установлен.

**Электрическая триггерная** схема состоит из двух реле с самоудерживающим контактом (см. табл. 7.11). В самоблокирующем ответвлении находится еще размыкающий контакт другого реле. Если посредством клавишного переключателя S устанавливается реле K1, самоудержание реле K2 немедленно прекращается. Если же задействуется клавишный переключатель R, происходит сброс релейного триггера (включается K2) и прерывается самоудержание для K1.

**Электронные триггерные** схемы обычно выполняются в виде интегральных схем (ИС), так что пользователю не обязательно разбираться во внутренней структуре схемы. Через входы S и R включаются два транзистора. Если под действием сигнала положительного напряжения (сигнала со значением 1) на входе S транзистор V1 является токопроводящим, то выход  $\bar{Q}$  проводит сигнал со значением 0. Но тогда через резистор R1 и на управляющий вход транзистора V2 тоже поступает сигнал со значением 0, так что этот транзистор уже не проводит ток, и на выходе Q имеет место положительное напряжение (сигнал со значением 1). Через резистор R2 на управляющий вход транзистора V1 подается положительное напряжение, так что V1 остается проводящим. При наличии обратных сигналов S и R коммутационные состояния обоих транзисторов тоже меняются на обратные (проводящие либо непроводящие).

**Триггер с тактовым управлением** (табл. 7.12) при появлении фронта тактового импульса принимает значение входа J или входа K, если таковое равно 1. (Неприсоединенный вход интерпретируется в большинстве случаев как 1). Если на обоих входах присутствуют сигналы со значением 1, то состояние на выходе Q изменяется с каждым тактовым сигналом.

Триггеры с входом тактовых импульсов

условное обозначение на схеме	механический	пневматический	электрический	электронный																									
 таблица значений функций <table border="1" data-bbox="140 446 268 566"> <tr> <th>J</th> <th>K</th> <th>C</th> <th>Q</th> <th><math>\bar{Q}</math></th> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>→ 1</td> <td>*</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>→ 1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>→ 1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>→ 1</td> <td>●</td> </tr> </table> * нет изменения ● с отрицанием относительно предыдущего состояния	J	K	C	Q	$\bar{Q}$	0	0	0	→ 1	*	0	1	0	→ 1	0	1	0	0	→ 1	1	1	1	0	→ 1	●		 управление реверсом		 триггер с N-P-N-транзисторами
J	K	C	Q	$\bar{Q}$																									
0	0	0	→ 1	*																									
0	1	0	→ 1	0																									
1	0	0	→ 1	1																									
1	1	0	→ 1	●																									

В примере **механического исполнения триггера** в показанном положении рычага верхняя плоская пружина при срабатывании входит в зацепление с выемкой в перекидном рычаге и перекидывает его, в то время как нижняя плоская пружина входит в предусмотренное в рычаге углубление и остается там. У перекинутого рычага при новом срабатывании нижняя и верхняя плоские пружины действуют обратными образом. Такой механизм часто встречается у шариковых ручек.

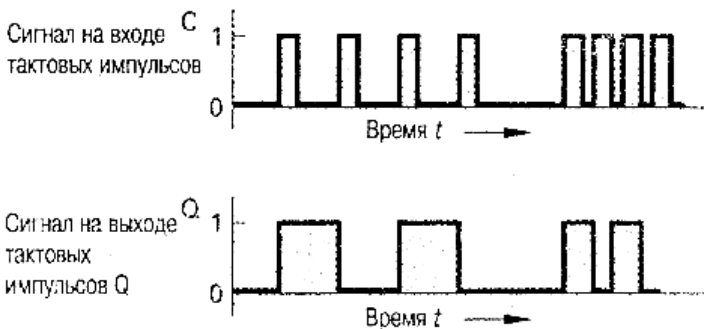


Рис. 7.40. Входной сигнал и выходной сигнал у триггера с входом тактовых импульсов

**Пневматическая схема (вентили 1–5)** этого триггера находит применение в управлении реверсом. При срабатывании сигнального элемента 1 вентиль 3 включается в положение *a*, поршневой шток цилиндра выдвигается. Из рабочей линии В посредством перекидного клапана 5 осуществляется переключение распределителя в положение *б*. Повторное короткое срабатывание сигнального элемента 1 вновь включает вентиль 3 в положение *б*, и от рабочей линии А через перекидной клапан 4 вентиль 2 возвращается в положение *a*. Поршневой шток цилиндра втягивается.



**Электрическая триггерная схема** действует на основе реле последовательного включения с двумя коммутационными положениями. С каждым импульсом тока рабочие контакты меняют свое положение.

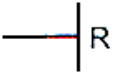

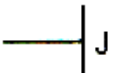
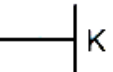


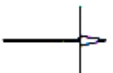

**При электронной схеме** оба транзистора управляются посредством конденсатора. Это означает, что здесь эффективны только импульсы напряжения. Импульсы положительного напряжения (сигналы 0 → 1) попадают через диоды к транзисторам. Транзистор, не проводящий ток, становится при этом проводящим и с выдержкой времени приводит токопроводящий в данный момент транзистор в непроводящее состояние.


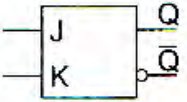


Нередко триггеры управляются не статическими двоичными сигналами 0 и 1, а на основе изменения состояния сигналов от 1 → 0 (табл. 7.13). Такой способ управления называется динамическим. Наряду с входами *R*, *S* и *T* имеются и другие управляющие входы. Они могут быть как статическими, так и динамическими.

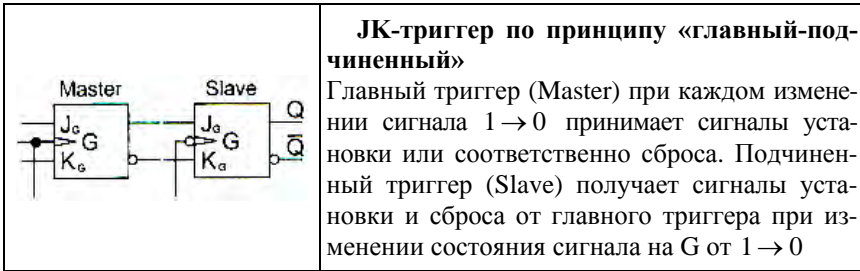
Таблица 7.13

Условные обозначения триггеров на схеме

Обозначения статических входов	
	Статический вход для входных сигналов 1 и 0
	Статический вход с отрицанием

Маркировка входов	
	<p><b>Вход R</b> (вход сигнала сброса)</p> <p>Если сигнал принимает на R-входе значение 1, на выходе Q обязательно будет значение 0. Сброс входящего сигнала к значению 0 не вызывает никакого изменения состояния</p>
	<p><b>Вход S</b> (вход сигнала установки)</p> <p>Если сигнал на входе S принимает значение 1, на выходе Q обязательно будет значение 1. Сброс входного сигнала к значению 0 не вызывает никакого изменения состояния</p>
Маркировка видов	
	<p><b>Вход J</b> (вход сигнала установки на «1»)</p> <p>Это тоже вход установки, как и вход S, с той лишь разницей, что выходной сигнал принимает дополнительное состояние, если как J, так и K имеют значение 1</p>
	<p><b>Вход K</b> (вход сброса)</p> <p>Это тоже вход сброса, как и вход RS, с той лишь разницей, что выходной сигнал принимает дополнительное состояние, если как J, так и K имеют значение 1</p>
	<p><b>Вход G</b></p> <p>Только в том случае, если входной сигнал на входе С имеет значение 1, будут активны и все прочие входы</p>
	<p><b>Вход С</b></p> <p>Только в том случае, если входной сигнал на входе С имеет значение 1, будут активны и все прочие входы</p>
Условные обозначения для динамических входов	
	<p>Динамический вход, при котором действует изменение входного сигнала от 1 → 0</p>
	<p>Динамический вход, при котором действует только изменение входного сигнала от 1 → 0</p>

Примеры	
	<p><b>Триггер RS-типа (с отдельными входами)</b></p> <p>Если входные сигналы на S и R имеют разные значения, выходные сигналы также будут различны. Если входные сигналы затем оба примут значение 0, выходные сигналы останутся в прежнем состоянии. Если оба входных сигнала имеют значение 1, то и оба выходных сигнала также будут со значением 1, но при сбросе входных сигналов на 0 выходные сигналы перейдут в разряд неопределенных</p>
	<p><b>Триггер JK-типа</b></p> <p>Выходные сигналы здесь такие же, как и у RS-триггера, но они всегда различны, даже если одновременно на входах J и K имеет место сигнал со значением 1. В этом случае выходы изменяют свое значение относительно предыдущего состояния. Сброс входных сигналов на 0 не вызывает никаких изменений состояния</p>
	<p><b>Триггер JK-типа с тактовым управлением</b></p> <p>JK-триггер с тактовым управлением при появлении фронта тактового импульса на C принимает значение J-входа, если таковой имеет значение 1. Если на обоих входах присутствуют сигналы со значением 1, то состояние на выходе Q меняется с каждым тактовым сигналом. Неприсоединенным входам обычно присваивается значение 1</p>
	<p><b>Триггер RS-типа</b></p> <p>С подготовленным S-входом выходные сигналы идентичны таковым у триггера с отдельными входами. Сигналы на входе SG активны только при условии, что на G-входе сигнал переходит от 1 → 0</p>



Триггеры обладают **множеством вариантов функций**. При функционировании по принципу «главный-подчиненный» (**Master-Slave**) с положительным фронтом тактового импульса (изменение состояния сигнала от  $0 \rightarrow 1$ ) сигнальная информация принимается через входы J и K в главный триггер. Подчиненный триггер с учетом отрицательного входа G сначала ни устанавливается, ни сбрасывается. И только с последующим отрицательным фронтом импульса информация главного триггера передается подчиненному триггеру. Такое исполнение известно также как «триггер с фиксацией состояния».



### **Часть 3. ДИНАМИКА МОБИЛЬНЫХ МИНИАТЮРНЫХ РОБОТОВ**

#### ***Глава 8. МАСШТАБ, ПОДОБИЕ И РАЗМЕРНОСТЬ В МОДЕЛЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ***

##### **8.1. Масштабный фактор. Критерии подобия**

Характерная особенность мехатронных систем – разнородность (гетерогенность) их структур, характеризующихся разной физической природой процессов, на основе которых они функционируют. В основном это механические и электродинамические процессы, а также информационно-кибернетические, использующие эффекты микроэлектрооптики. Величины, используемые для описания законов в этих областях, отличаются размерностью, что, на первый взгляд, делает их плохо совместимыми для моделирования. Однако символичный язык математики и диаграммный язык схемотехники, теории графов сделали возможным их единообразное описание как систем, состоящих из элементов (звеньев), объединенных в цепи по определенным правилам логики.

Мехатронные системы имеют широкое разнообразие не только по объединяемым в одной конструкции физическим процессам, но и по масштабу конструкций, причем масштабирование имеет выраженный эффект подобия. Например, миниатюрные роботы типа антропоидов, биороботы, дроны, колесные и гусеничные роботы имеют ясно выраженные признаки подобия с человеком, животными, самолетами, ракетами, вертолетами, машинами, танками и т. д. Это выраженное геометрическое подобие может быть экстраполировано в область физического подобия (кинематическое и динамическое подобие). Однако если геометрическое подобие достаточно легко определяется и формализуется в геометрии, топологии, то вопросы физического подобия составляют содержание специальных дисциплин, в которых они изучаются. Физическое подобие связано с размерностью, поэтому приведем краткие сведения из разделов теории подобия и размерности.

Два явления подобны, если по заданным характеристикам одного можно получить характеристики другого простым пересчетом,

который аналогичен переходу от одной системы единиц измерения к другой системе.

Для осуществления пересчета необходимо знать «переходные масштабы».

Численные характеристики для двух различных, но подобных явлений можно рассматривать как численные характеристики одного и того же явления, выраженные в двух различных системах единиц измерения. Для всякой совокупности подобных явлений все безразмерные характеристики (безразмерные комбинации из размерных величин) имеют одинаковое численное значение. Обратное заключение также справедливо, т. е. если все безразмерные характеристики для двух движений одинаковы, то движения подобны.

Пусть явление определяется  $n$  параметрами, часть из которых может быть безразмерными, а некоторые являются размерными физическими постоянными. Допустим, что размерности переменных параметров и физических постоянных выражены через  $k$  основных единиц измерения ( $k \leq n$ ). В общем случае из  $n$  величин можно составить не более  $n - k$  независимых безразмерных комбинаций, образованных из определяющих параметров. Следовательно, среди всех безразмерных величин, составленных из характеристик явления, всегда можно указать некоторую **базу**, т. е. систему безразмерных величин, которые определяют собой все остальные величины.

Класс явления, определенный постановкой задачи, содержит явления, вообще не подобные между собой. Выделение из него подкласса подобных явлений осуществляется с помощью следующего условия: **необходимым и достаточным условием подобия двух явлений будет постоянство численных значений безразмерных комбинаций, образующих базу. Условия о постоянстве базы параметров, составленных из заданных величин, определяющих явление, называются критериями подобия.**

Если условия подобия выполнены, то для фактического расчета всех характеристик в натуре по заданным данным о размерных характеристиках на модели необходимо знать переходные масштабы для всех соответствующих величин.

Если явление определяется  $n$  параметрами, из которых  $k$  имеет **независимые размерности**, то для  $k$  величин с независимыми размерностями переходные масштабы могут быть произвольными и их

нужно задать или определить условиями задачи, а при экспериментах – из опытов. Переходные масштабы для всех остальных размерных величин можно получить из формул размерности для каждой размерной величины через размерности  $k$  независимых, для которых масштабы определены опытом или постановкой задачи.

Например, в задаче об установившемся поступательном плоскопараллельном движении тела в несжимаемой вязкой жидкости все безразмерные величины определяются двумя параметрами: углом атаки  $\alpha$  и числом Рейнольдса  $R$ . Условия физического подобия – **критерии подобия** – представляются соотношениями

$$\alpha = \text{const} \quad \text{и} \quad R = \frac{v d \rho}{\mu} = \text{const}.$$

При моделировании этого явления результаты опытов с моделью можно переносить на натуру только для одинаковых  $\alpha$  и  $R$ . Первое условие всегда легко осуществить на практике. Труднее удовлетворить второму условию ( $R = \text{const}$ ), особенно в тех случаях, когда обтекаемое тело имеет большие размеры, как, например, крыло самолета. Если модель меньше натуре, то для сохранения величины числа Рейнольдса необходимо либо увеличивать скорость обтекающего потока, что обычно практически неосуществимо, либо существенно изменить плотность и вязкость жидкости.

## 8.2. Формулы из теории размерности

В теории размерности выделяют **основные и производные единицы** измерения физических величин, связанных между собой определенными соотношениями (физические, геометрические). Если некоторые из этих величин принять за **основные** и установить для них какие-то единицы измерения, то единицы измерения всех остальных величин будут определенным образом выражаться через единицы измерения основных величин. Принятые для основных величин за единицы измерения будем называть **основными** или **первичными**, а все остальные – **производными** или **вторичными**.

На практике достаточно установить единицы измерения для **трех величин**, каких именно, – это зависит от конкретных условий той или иной задачи. Так, в физических исследованиях удобно за ос-

новые единицы взять единицы длины, времени и массы, а в технике – единицы длины, времени и силы. Но можно было бы взять за основные единицы измерения также единицы скорости, вязкости и плотности и т. п.

Выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения называется *размерностью*.

При изучении механических явлений достаточно ввести только три независимые основные единицы измерения: для длины, массы (или силы) и времени. Этими единицами можно обойтись также и при изучении тепловых и даже электрических явлений. Из физики известно, что размерности тепловых и электрических величин можно выразить через  $L$ ,  $M$  и  $T$ , в электронике за основные величины выгоднее принять силу тока, сопротивление, длину и время (ампер, ом, сантиметр и секунда) и т. д.

Более того, при конкретном изучении отдельных специальных классов явлений численные значения количественных характеристик часто выгодно выражать в виде отношения к задаваемым или наиболее характерным величинам по смыслу рассматриваемых частных задач. В разных случаях эти характерные основные величины могут быть различными.

Зависимость единицы измерения производной величины от единиц измерения основных величин может быть представлена в виде формулы. Эта формула называется *формулой размерности*, и ее можно рассматривать как сжатое определение и характеристику физической природы производной величины.

О размерности можно говорить только применительно к определенной системе единиц измерения. В разных системах единиц измерения формула размерности для одной и той же величины может содержать различное число аргументов и может иметь различный вид. Например, в системе единиц измерения CGS формулы размерности всех физических величин имеют вид степенного одночлена

$$L^l M^m T^t.$$

Покажем, что такой вид формулы размерности определяется следующим физическим условием: **отношение двух численных значений какой-нибудь производной величины не должно зависеть от выбора масштабов для основных единиц измерения.**

Например, будем измерять площадь в квадратных метрах или квадратных сантиметрах, отношение двух площадей, измеренных в квадратных метрах, будет таким же, как и отношение этих же площадей, измеренных в квадратных сантиметрах. Для основных величин это условие является составной частью определения единицы измерения и удовлетворяется само собой.

Пусть имеем какую-нибудь размерную производную величину  $y$ . Примем сначала, что величина  $y$  является геометрической и поэтому зависит только от длин, следовательно:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  суть некоторые расстояния. Обозначим через  $y'$  то значение величины  $y$ , которое соответствует значениям аргументов  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ . Численное значение  $y$ , а также  $y'$  зависит от единицы измерения для расстояний  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Уменьшим эту единицу или масштаб в  $\alpha$  раз. Тогда согласно сформулированному выше условию должны иметь место

$$\frac{y'}{y} = \frac{f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{f(x'_1 \alpha, x'_2 \alpha, \dots, x'_n \alpha)}{f(x_1 \alpha, x_2 \alpha, \dots, x_n \alpha)}, \quad (8.1)$$

т. е. отношение  $y'/y$  должно быть одинаковым при любом значении масштаба  $\alpha$ . Из равенства (8.1) получаем

$$\frac{f(x_1 \alpha, x_2 \alpha, \dots, x_n \alpha)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{f(x'_1 \alpha, x'_2 \alpha, \dots, x'_n \alpha)}{f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}$$

или

$$\frac{y(\alpha)}{y(1)} = \frac{y'(\alpha)}{y'(1)} = \varphi(\alpha). \quad (8.2)$$

Следовательно, отношение численных значений производной геометрической величины, измеренной в разных масштабах длины, зависит только от отношения масштабов длин.

Из соотношения (8.2) легко найти вид функции  $\varphi(\alpha)$ . В самом деле, имеем

$$\frac{y(\alpha_1)}{y(1)} = \varphi(\alpha_1);$$
$$\frac{y(\alpha_2)}{y'(1)} = \varphi(\alpha_2).$$

Отсюда получаем

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{\varphi(\alpha_2)} = \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right), \quad (8.3)$$

так как при  $x'_1 = x_1\alpha_2$ ,  $x'_2 = x_2\alpha_2, \dots, x'_n = x_n\alpha_2$  имеем

$$\frac{y(\alpha_1)}{y(\alpha_2)} = \frac{y'_1\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{y'_1(1)} = \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right).$$

Дифференцируя уравнение (8.3) по  $\alpha_1$  и полагая  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , получаем

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)} \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha=1} = \frac{m}{\alpha}.$$

Интегрируя, найдем

$$\varphi = C\alpha^m.$$

Так как при  $\alpha = 1$  имеем  $\varphi = 1$ , то  $C = 1$ ; следовательно,

$$\varphi = \alpha^m.$$

Этот вывод справедлив для любой размерной величины, зависящей от нескольких основных величин, если менять только один

масштаб. Можно установить, что если изменяются масштабы  $\alpha, \beta, \gamma$  трех основных величин, то функция  $\varphi$  будет иметь вид

$$\varphi = \alpha^m \beta^n \gamma^l.$$

Этим доказывается, что **формулы размерности физических величин должны иметь вид степенных одночленов.**

Физические закономерности, устанавливаемые теоретически или непосредственно из опыта, представляют собой функциональные зависимости между величинами, характеризующими исследуемое явление. Численные значения этих размерных физических величин зависят от выбора системы единиц измерения, не связанной с существом явления. Поэтому функциональные зависимости, выражающие собой физические факты, которые не зависят от системы единиц измерения, должны обладать некоторой **специальной структурой.**

Пусть имеем размерную величину  $a$ , которая является функцией независимых между собой размерных величин  $a_1, a_2, \dots, a_n$ :

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n); \quad (8.4)$$

некоторые из этих параметров в рассматриваемом процессе могут быть переменными, другие – постоянными.

Выясним структуру функции  $f = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  в предположении, что эта функция выражает собой некоторый физический закон, независимый от выбора системы единиц измерения.

Пусть среди размерных величин  $a_1, a_2, \dots, a_n$  первые  $k$  величин ( $k \leq n$ ) имеют независимые размерности (число основных единиц измерения должно быть больше или равно  $k$ ).

Пользуясь относительной системой единиц измерения, соотношение (8.5) можно представить в виде

$$П = f(1, 1, \dots, П_1, \dots, П_{n-k}). \quad (8.5)$$

Таким образом, связь между  $(n+1)$ -размерными величинами  $a, a_1, \dots, a_n$ , независимая от выбора системы единиц измерения, принимает вид соотношения между  $n+1-k$  величинами  $П, П_1, \dots, П_{n-k}$ ,

представляющими собой безразмерные комбинации из  $(n+1)$ -размерных величин. Этот общий вывод теории размерностей известен под названием ***П-теоремы***.

В этой относительной системе единиц измерения численные значения параметров  $a, a_{k+1}, \dots, a_n$  определяются формулами

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}};$$

$$\Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}};$$

.....

$$\Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_k^{q_k}}.$$

Чем меньше число параметров, определяющих изучаемую величину, тем больше ограничена функциональная зависимость и тем проще вести исследование. В частности, если число основных единиц измерения равно числу определяющих параметров, которые имеют независимые размерности, то с помощью теории размерности эта зависимость полностью определяется с точностью до постоянного множителя. В самом деле, если  $n = k$ , т. е. все размерности независимы, то из параметров  $a, a_1, \dots, a_n$  нельзя образовать безразмерной комбинации, и поэтому функциональная зависимость (8.5) может быть представлена в виде

$$a = c a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_n^{m_n},$$

где  $c$  есть безразмерная постоянная, а показатели  $m_1, m_2, \dots, m_n$  определяются с помощью формулы размерности для  $a$ . Что же касается безразмерной постоянной  $c$ , то ее можно определить либо опытно, либо теоретически, решая соответствующую математическую задачу.



## Глава 9. ДИНАМИКА СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 9.1. Кинематика абсолютно твердого тела

Математические модели динамики мини-роботов базируются на теории динамики твердого тела. Модели абсолютно твердого тела используются для тех случаев, когда требуется оценить только влияние геометрии масс на динамику робота, а модели деформируемого твердого тела – в случаях, когда необходимо учесть и геометрию масс, и геометрию жесткостей конструкции с целью описать деформируемость реальных тел, их вибрацию, износ, разрушения.

Согласно теореме Эйлера из теоретической механики свободное движение твердого тела можно представить в виде поступательного движения некоторой точки  $O$  тела (полюса) и вращательного движения вокруг полюса, рис. 9.1.

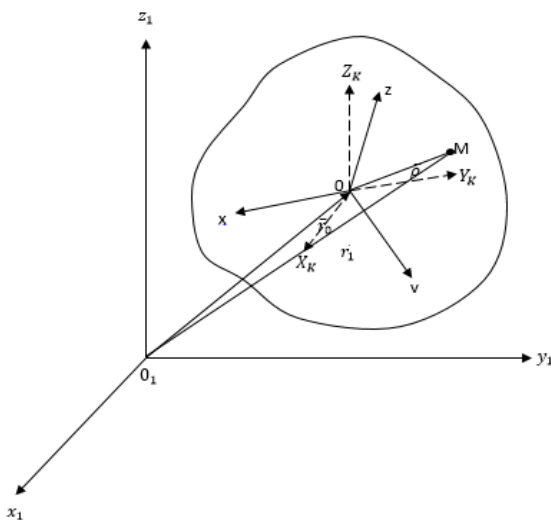


Рис. 9.1. Свободное движение твердого тела

Система  $O_1x_1y_1z_1$  – декартова неподвижная, система  $Oxyz$  – декартова, жестко связана с телом так, что свободное движение твердого тела можно рассматривать как преобразование координат произвольной точки  $M$  тела:

$$M(x, y, z) \rightarrow M(x_1, y_1, z_1).$$

В векторной форме радиусы-векторы точек  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}$  в системах  $O_1x_1y_1z_1$  и  $Oxyz$  соответственно связаны соотношением

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}. \quad (9.1)$$

Введем кёнингову систему координат  $OX_KY_KZ_K$ , оси которой параллельны осям  $O_1x_1y_1z_1$ , а начало  $O$  испытывает трансляционный перенос относительно точки  $O_1$ , тогда  $\bar{r}$  – радиус вектор точки  $M$  в кёнинговой системе координат. Очевидно, что тело испытывает вращение в кёнинговой системе координат, которое, используя формулы аналитической геометрии, можно представить в виде

$$\bar{r} = A\bar{\rho};$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где матрица  $A = A(t)$  задает переход от системы координат  $Oxyz$  к  $OX_KY_KZ_K$  и является ортогональной, т. е. сумма квадратов элементов (столбца) равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов столбцов (строк) равна нулю:

$$a_{ij}a_{jk} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k; \\ 0 & i \neq k, \end{cases} \quad (9.2)$$

где по повторяющимся индексам идет суммирование.

В силу (9.2) из девяти элементов матрицы  $A$  независимых будет три, которые могут быть выбраны произвольно. Это могут быть направляющие косинусы углов системы  $Oxyz$  относительно  $OX_KY_KZ_K$  или, например, углы Эйлера.

Рассмотрим отдельно системы координат  $OX_KY_KZ_K$  и  $Oxyz$ , рис. 9.2.

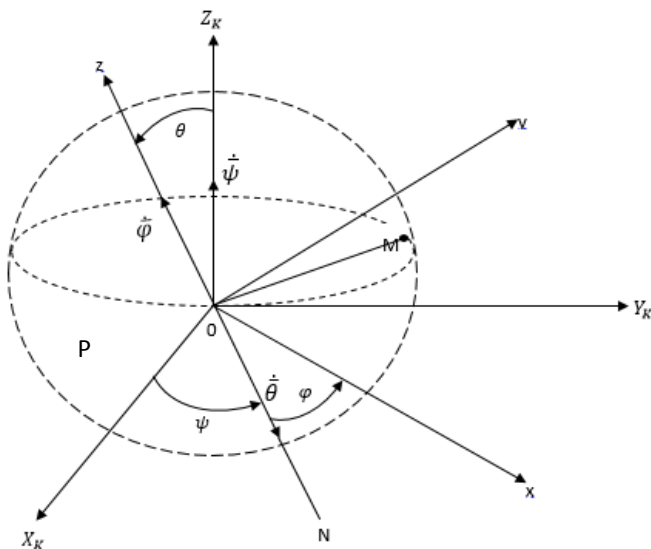


Рис. 9.2. Совмещение систем координат  $0X_K Y_K Z_K$  и  $0xyz$

Координаты плоскости  $0X_K Y_K$  и  $0xy$  пересекаются при  $\theta \neq 0$  по линии  $ON$ , которая называется **линией узлов**. Угол между  $0Z_K$  и  $0z$  называется **углом нутации**, угол между  $0X_K$  и  $0N$  называется **углом прецессии**, угол  $\varphi$  между  $0N$  и  $0x$  называется углом **собственного вращения**. Три угла Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$  независимы и задают ориентацию твердого тела (системы  $0xyz$ ) относительно системы  $0X_K Y_K Z_K$ , а значит и  $0_1 x_1 y_1 z_1$ .

Из теоретической механики известно, что вращательное движение твердого тела вокруг точки в каждый момент времени представляет собой вращение тела вокруг мгновенной оси, проходящей в данный момент времени через эту точку. Ориентация оси меняется во времени и в данный момент может быть определена, например, через углы Эйлера.

Осуществить поворот тела так, чтобы произвольная точка  $M$  перешла в любое заданное положение  $P$ , можно с помощью трех последовательных поворотов на угол  $\psi$  вокруг оси  $0Z_K$ , на угол  $\theta$  – вокруг  $0N$ , на угол  $\varphi$  – вокруг  $0z$ . Положительными считаются

повороты, которые производятся против часовой стрелки, если смотреть с концов соответствующих осей поворотов.

Рассмотрим алгоритм последовательных поворотов.

1. Вращая вокруг тела  $OZ_K$ , преобразуем систему  $OX_KY_KZ_K$  в промежуточную систему координат  $OX_1Y_1Z$ . Преобразование системы  $OX_KY_K$  к системе  $OX_1Y_1$  в плоскости  $\perp OX_KY_K$  и  $OX_1Y_1$  осуществляется с помощью ортогональной матрицы  $A_1$ , рис. 9.3:

$$\begin{pmatrix} X_K \\ Y_K \\ Z_K \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_K \end{pmatrix};$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

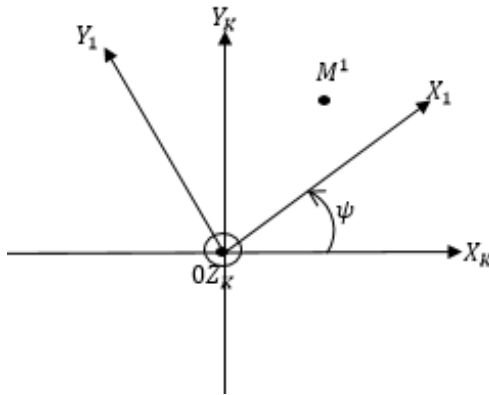


Рис. 9.3. Преобразование системы  $OX_KY_K$  к системе  $OX_1Y_1$

Здесь  $M^1$  – проекция точки  $M$  в плоскости  $OX_KY_K$ .

2. С помощью второго поворота вокруг оси  $ON$  переходим от промежуточной системы  $OX_1Y_1Z_K$  к промежуточной системе  $OX_KY_2Z$  с ортогональной матрицей преобразования  $A_2$ , рис. 9.4:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_K \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_2 \\ z \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

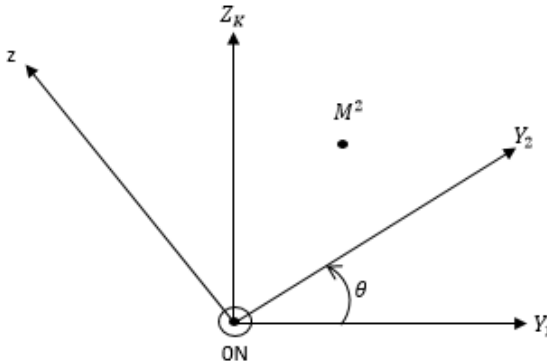


Рис. 9.4. Переход от промежуточной системы  $OX_1Y_1Z_K$  к системе  $OX_KY_2z$

Здесь  $M^2$  – проекция точки  $M$  в плоскости  $OY_1Z_K$ .

3. Третий поворот вокруг оси  $Oz$  переводит промежуточную систему координат  $OX_1Y_2z$  в основную с помощью матрицы  $A_3$ , рис. 9.5:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_2 \\ z \end{pmatrix} = A_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

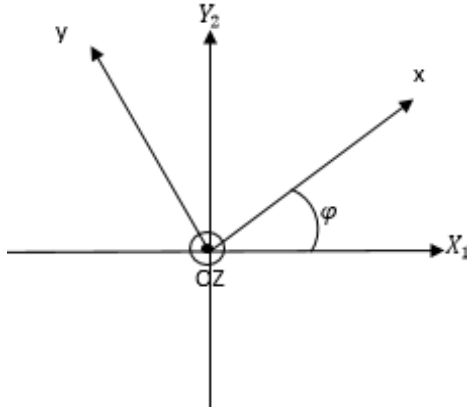


Рис. 9.5. Третий поворот вокруг оси  $Oz$

Тогда матрицу  $A$  перехода от системы  $Oxyz$  к системе  $Ox_Ky_Kz_K$  представим в виде

$$A = A_1 A_2 A_3,$$

а ее элементы имеют вид

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta; \\
 a_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta; \\
 a_{13} &= \sin \psi \sin \theta; \\
 a_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta; \\
 a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta; \\
 a_{23} &= -\cos \psi \sin \theta; \\
 a_{31} &= \sin \varphi \sin \theta; \\
 a_{32} &= \cos \varphi \sin \theta; \\
 a_{33} &= \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{9.3}$$

Как следует из (9.3), при  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$  линия узлов не определена и углы  $\varphi, \psi$  не определены, а определена только их сумма  $\varphi + \psi$ .

Следовательно, при движениях твердого тела, когда ось  $Oz$  мало отклоняется от  $OZ_K$ , целесообразно применять другие углы, определяющие ориентацию тела в пространстве.

Отметим также, что в силу того, что произведение матриц  $A = A_1 A_2 A_3$  некоммутативно, то и конечные повороты твердого тела некоммутативны. Это означает, что в общем случае ориентация твердого тела (мини-робота), получаемая им в результате двух последовательных конечных поворотов, зависит от порядка выполнения этих поворотов. Для мини-роботов, перемещающихся в автономном режиме, алгоритм подачи управляющих воздействий должен разрабатываться с учетом этого.

Отметим некоторые свойства матрицы  $A$ , следующие из ее ортогональности:

1.  $A^{-1} = A^T$ , индекс  $T$  означает транспонирование;
2.  $AA^T = E$  – единичная матрица;
3.  $(\det A)^2 = 1$ .

Если зависимость  $A(t)$  от времени непрерывная, то знак  $A(o) = \pm 1$  сохраняется в течение движения.

### ***9.1.1. Мгновенное кинематическое состояние твердого тела***

Рассмотрим свободное движение твердого тела, скорости точек которого характеризуются вектором

$$\bar{V} = \bar{V}(\bar{r}_1(t)) = \dot{\bar{r}}_1(t),$$

зависящим от радиуса-вектора  $\bar{r}_{1(t)}$  в неподвижной системе координат времени  $t$ .

Если в момент времени  $t$

$$V(\bar{r}_1(t)) = \bar{V}_o(t) = \text{const},$$

то тело совершает **мгновенное поступательное движение** в момент времени  $t$ , а при  $V_0(t) = 0$  находится в **мгновенном покое**. Очевидно, что ускорения

$$\bar{W} = \dot{\bar{V}}(\bar{r}_1(t)) = \ddot{\bar{r}}_1(t)$$

могут быть разными в момент времени  $t$  в разных точках тела.

Если в данный момент времени  $t$  в теле (мини-роботе) имеются две неподвижные точки, то тело совершает мгновенное вращательное движение вокруг прямой, проходящей через эти точки, называемой **мгновенная ось вращения**. Мгновенная ось вращения меняет свое положение в неподвижной и подвижной системах координат при конечном движении тела.

Если в данный момент времени тело (мини-робот) участвует в двух мгновенных движениях: мгновенном поступательном вдоль некоторой оси и мгновенном вращательном вокруг этой оси, то тело (мини-робот) совершает **мгновенное винтовое движение**, которое является самым общим мгновенным движением свободного твердого тела.

### **9.1.2. Скорость и ускорение точек твердого тела в общем случае движения**

Дифференцируя (9.1) по времени  $t$ , получим

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \dot{\bar{r}} = \bar{V}_0 + \bar{\omega}\bar{r}, \quad (9.4)$$

где  $\bar{V}_0$  – скорость полюса  $O$ ;

$\bar{\omega}$  – угловая скорость вращения системы  $Oxuz$  вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через  $O$ .

Формула (9.4) справедлива в силу **формулы Эйлера**

$$\dot{\bar{r}} = \bar{\omega}\bar{r}.$$

Ускорение произвольной точки  $M$  твердого тела (мини-робота) находится дифференцированием по времени  $t$  формулы (9.4):



$$\bar{W} = \dot{\bar{V}}_0 + \dot{\bar{\omega}}\bar{r} + \bar{\omega} + \dot{\bar{r}} = \bar{W}_0 + \bar{\varepsilon}\bar{r} + \bar{\omega}(\bar{\omega}\bar{r}) = \bar{W}_0 + \bar{W}_\tau + \bar{W}_n, \quad (9.5)$$

где  $\bar{W}_0$  – ускорение точки 0;

$\bar{W}_\tau = \bar{\varepsilon}\bar{r}$  – вращательное ускорение;

$\bar{W}_n$  – осестремительное ускорение;

$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$  – угловое ускорение.

### 9.1.3. Угловая скорость в подвижной и неподвижной системах координат

Вектор мгновенной угловой скорости  $\bar{\omega}$ , направленный вдоль мгновенной оси вращения, имеет компоненты  $\bar{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ , которые являются проекциями  $\bar{\omega}$  на оси подвижной системы координат  $Oxuz$ . С другой стороны,  $\bar{\omega}$  можно представить в виде суммы трех угловых скоростей вращения вокруг осей  $OZ_K(\dot{\psi}), 0N(\dot{\theta}), 0z(\dot{\phi})$ :

$$\bar{\omega} = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\phi}. \quad (9.6)$$

Записывая (9.6) покомпонентно, получим **кинематические формулы Эйлера**

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi;$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi;$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}.$$

### 9.1.4. Дискретная аппроксимация твердого тела. Геометрия масс твердого тела и эквивалентной системы материальных точек

При решении многих конкретных задач удобно заменять сплошное твердое тело эквивалентной системой материальных точек, рис. 9.6.

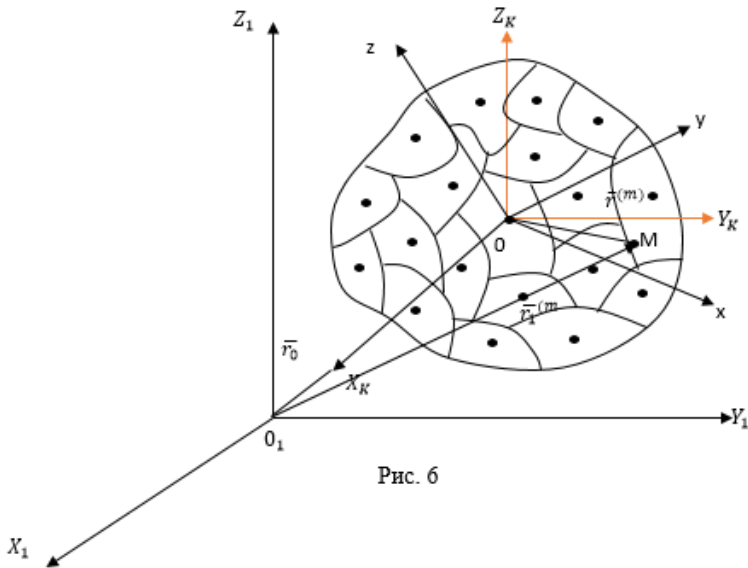


Рис. 6

Рис. 9.6. Замена сплошного твердого тела эквивалентной системой материальных точек

Разбиваем тело на конечные объемы (элементы), массы которых сосредоточим в точках, радиусы-векторы которых обозначим  $\bar{r}_1^{(m)} (m = \overline{1, n})$ ,  $\bar{r}^{(m)}$  – вектор, соединяющий точку  $O$  и  $M$  в системе  $O X_1 Y_1 Z_1$ ,  $\bar{\rho}^{(m)}$  – вектор  $\overline{OM}$  в системе  $Oxyz$ .

Центр масс  $\bar{r}_c$  твердого тела вычисляется по формуле

$$\bar{r}_c = \frac{\int_V \bar{r} dm}{\int_V dm} = \frac{\int_V \bar{r} \rho(\bar{r}) d\bar{r}}{\int_V \rho(\bar{r}) d\bar{r}}, \quad (9.7)$$

где  $\rho(\bar{r}) = \frac{dm}{dV}$ ;

- $m$  – масса тела;
- $V$  – объем;
- $\rho$  – плотность.

Проецируя (9.5) на оси координат, получим три уравнения.

Центр масс эквивалентной системы материальных точек вычисляется по формуле

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{\nu=1}^n m_\nu \bar{r}_\nu}{\sum_{\nu=1}^n m_\nu}; \quad (9.8)$$

$$m = \sum_{\nu=1}^n m_\nu,$$

где  $m_\nu$  – масса  $\nu$ -го элемента объема;

$m$  – масса всей системы.

При  $n \rightarrow \infty$  разность между  $\bar{r}_c$ , вычисляемому по формуле (9.8), стремится к  $\bar{r}_c$ , вычисляемому по формуле (9.7).

Центр масс  $c$  может быть выбран в качестве полюса 0, что будет использовано дальше.

Моменты инерции сплошного твердого тела относительно осей  $x, y, z$  вычисляются по формулам

$$I_x = \int_V (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_V (x^2 + z^2) dm, \quad I_z = \int_V (x^2 + y^2) dm, \quad (9.9)$$

а дискретной системы материальных точек – по формулам

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_{\nu=1}^n m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2); \\ I_y &= \sum_{\nu=1}^n m_\nu (x_\nu^2 + z_\nu^2); \\ I_z &= \sum_{\nu=1}^n m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Центробежные моменты твердого тела вычисляются – по формулам

$$I_{xy} = \int_V xy \, dm; \quad I_{xz} = \int_V xz \, dm; \quad I_{yz} = \int_V yz \, dm, \quad (9.11)$$

а для дискретной системы материальных точек – по формулам

$$I_{xy} = \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} x_{\nu} y_{\nu}; \quad I_{xz} = \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} x_{\nu} z_{\nu}; \quad I_{yz} = \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} y_{\nu} z_{\nu}. \quad (9.12)$$

Величины  $I_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) зависят от выбора точки 0 и ориентации осей координат  $x, y, z$ . При  $n \rightarrow \infty$  формулы (9.10), (9.12) переходят в формулы (9.9), (9.11) соответственно.

Компоненты  $I_{ij}$  образуют симметричный тензор второго ранга (тензор инерции), который характеризует сопротивление твердого тела вращательным движением:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix}.$$

Моменты инерции относительно любых параллельных осей вычисляются по формуле

$$I_u = I_{\nu} + m(d_u^2 - d_{\nu}^2), \quad (9.13)$$

где  $I_u$  – момент инерции относительно оси  $u$ ;

$I_{\nu}$  – момент инерции относительно параллельной оси  $\nu$ ;

$d_u, d_{\nu}$  – расстояния осей  $u, \nu$  от оси, проходящей через центр масс.

## 9.2. Основные законы динамики твердого тела (мини-робота)

В динамике твердого тела основные законы представляют собой уравнения баланса относительно основных динамических величин мехатронной системы, какими являются:

1) **векторные величины: импульсы (количество движения), момент количества движения (момент импульса), силы, моменты сил;**

2) **скалярные величины: кинетическая и потенциальная энергия, работа, диссипация энергии, энтропия.**

Предварительно напомним некоторые определения.

**Количество движения** (импульс) твердого тела – вектор  $\bar{Q}$ , вычисляется по формуле

$$\bar{Q} = \int_V \bar{V} dm = \int_V \rho \bar{V} dr; \quad dm = \rho dr.$$

Импульс дискретной мехатронной системы вычисляется по формуле

$$\bar{Q} = \sum_{v=1}^n m_v \bar{V}_v.$$

Кинетический момент  $\bar{K}$  (момент импульса, момент количества движения) твердого тела (мини-робота) относительно точки  $A$  вычисляется по формуле

$$\bar{K}_A = \int_V \bar{\rho}_A \bar{Q} dr,$$

где  $\bar{\rho}_A$  – радиус-вектор точек тела относительно точки  $A$ .

Проекции вектора  $\bar{K}_A$  на оси координат называются **моментами импульса относительно осей  $x, y, z$ :**

$$K_x = \bar{K}_A \dot{\bar{i}}, \quad K_y = \bar{K}_A \dot{\bar{j}}, \quad K_z = \bar{K}_A \dot{\bar{k}}, \quad (9.14)$$

где  $\dot{i}, \dot{j}, \dot{k}$  – орты осей координат.

**Кинетический момент (момент импульса)** относительно точки  $A$  дискретной системы вычисляется по формуле

$$\bar{K}_A = \sum_{v=1}^n \bar{p}_{vA} \bar{Q}.$$

Моменты импульса относительно осей  $x, y, z$  вычисляются по формулам (9.14).

При изменении центра  $A$ , относительно которого вычисляется кинетический момент, момент относительно нового центра  $B$  вычисляется по формуле

$$\bar{K}_B = \bar{K}_A + \overline{BA} \times \bar{Q}, \quad (9.25)$$

где вектор  $\overline{BA}$  – расстояние между точками  $A$  и  $B$ .

В векторно-матричном виде кинетический момент твердого тела (системы), вращающегося вокруг точки  $O$ , записывается в виде

$$\bar{K}_O = I \bar{\omega}, \quad \bar{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (p, q, r),$$

а в развернутом виде получим

$$K_{ox} = -I_x p - I_{xy} q - I_{xz} r;$$

$$K_{oy} = -I_{xy} p + I_y q - I_{yz} r;$$

$$K_{oz} = -I_{xz} p - I_{yz} q + I_z r.$$

**Закон об изменении импульса (количества движения)** в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^{(e)} \quad (9.16)$$

и говорит о том, что скорость импульса равна главному вектору  $\bar{R}^{(e)}$  внешних сил, приложенных к телу (мини-роботу).

Так как  $\bar{Q} = m\bar{V}_c$  (где  $\bar{V}_c$  – скорость центра масс), то уравнение (9.16) может быть записано в эквивалентном виде

$$m \frac{d\bar{V}_c}{dt} = \bar{R}^{(e)}. \quad (9.17)$$

С учетом того, что  $\bar{V}_c = d\bar{r}_c / dt$ , уравнение (9.17) записывается в виде закона Ньютона:

$$m \frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} = m\bar{W}_c = \bar{R}^{(e)}, \quad \bar{W}_c = d\bar{V}_c / dt,$$

где  $\bar{W}_c$  – ускорение центра масс.

**Закон об изменении момента импульса (кинетического момента)**

$$\frac{d\bar{K}_A}{dt} = \bar{M}_A^{(e)}$$

говорит о том, что скорость кинетического момента равна моменту внешних сил относительно центра  $A$ . В частности, если  $A = C$ , то получается

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \bar{M}_C^{(e)}. \quad (9.18)$$

Проецируя (9.18) на оси неподвижной системы координат, получим уравнения для поступательного перемещения твердого тела (мини-робота).

Проецируя (9.18) на оси системы координат с центром в точке  $C$ , получим уравнения для вращательных движений вокруг координатных осей кенинговой системы с началом в точке  $C$ .

### *Кинетическая энергия твердого тела и системы материальных точек*

Кинетическая энергия  $T$  элемента массы  $dm$  имеет вид

$$dT = \frac{1}{2} \bar{V}^2 dm = \frac{1}{2} \bar{V}^2 \rho dx dy dz,$$

где  $\rho$  – плотность тела;

$m = \rho dx dy dz$  – масса элементарного объема.

$$dv = dr = dx dy dz.$$

Кинетическая энергия твердого тела объема  $V = \int_v dx dy dz$  вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2} \int_v \bar{V}^2 dm = \frac{1}{2} \int_v \rho \bar{V}^2 dx dy dz.$$

Соответственно для системы материальных точек кинетическая энергия  $T$  имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n m_v \bar{V}_v^2.$$

Согласно формуле Эйлера

$$\bar{V}_v = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_v, \quad (9.19)$$

где  $\bar{V}_0$  – скорость относительного движения точки 0;

$\bar{\omega}$  – угловая скорость.

Выражение для  $T$  с учетом (9.19) записывается в виде

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} = \frac{m}{2} \bar{V}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n m_v (\bar{\omega} \times \bar{r}_v)^2.$$



Компоненты **тензора инерции**  $I_{ij}$  могут быть представлены в виде

$$I_{ij} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left[ x_{\alpha k} x_{\alpha l} \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right], \quad k=1, 2, 3;$$

$$\bar{r}_{\alpha} = (x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}) = (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3}), \quad \alpha = \overline{1, n},$$

тогда выражение для  $T_{\text{rot}}$  представляется в виде

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j.$$

Для твердого тела соответственно можно записать

$$I_{ij} = \int_{\mathcal{V}} \rho(x_1, x_2, x_3) \left[ x_k x_l \delta_{ij} - x_i x_j \right] d\mathcal{V}.$$

В векторно-матричном виде выражение для кинетического момента имеет вид

$$\bar{K}_0 = I \bar{\omega},$$

а для кинетической энергии вращательного движения

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (\bar{K}_0 \times \bar{\omega}).$$

Таким образом, имеет место **точка Кёнинга**. Кинетическая энергия тела равна сумме кинетической энергии центра масс и кинетической энергии вращения тела (системы) относительно центра масс.

Изменение кинетической энергии твердого тела (системы материальных точек) выражается теоремой об изменении кинетической энергии: изменение (дифференциал) кинетической энергии системы равно элементарной работе всех сил системы:

$$dT = \tilde{d}A^{(e)} + \tilde{d}A^{(i)} = \tilde{d}A, \quad (9.20)$$

где  $\tilde{d}A^{(e)}$ ,  $\tilde{d}A^{(i)}$  – элементарные работы внешних и внутренних сил соответственно. Для абсолютно твердого тела  $\tilde{d}A^{(i)} = 0$ .

Формула (9.20) определяет изменение кинетической энергии за интервал  $dt$ , а за конечное время  $(t_2 - t_1)$  изменение  $T$  определяется формулой

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{d}A^{(e)} + \int_{t_1}^{t_2} \tilde{d}A^{(i)},$$

что означает, что изменение кинетической энергии за время  $(t_2 - t_1)$  равно работе всех сил за то же время.

В случае если внешние и внутренние силы являются потенциальными, например, тело (робот) обладает конечной жесткостью (упругостью) и движется в поле тяжести Земли, тогда потенциальная энергия  $\Pi$  не зависит от времени, а элементарные работы сил будут полными дифференциалами:

$$\begin{aligned} \tilde{d}A^{(e)} = dA^{(e)} = -d\Pi^{(e)}; & \quad \tilde{d}A^{(i)} = dA^{(i)} = -d\Pi^{(i)}; \\ \Pi = \Pi^{(e)} + \Pi^{(i)}, & \quad dA = -d\Pi. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Из (9.20) с учетом (9.21) следует

$$dT + d\Pi = d(T + \Pi) = dE = 0, \quad (9.22)$$

где  $E$  – полная энергия тела (системы).

Из (9.22) следует закон сохранения энергии

$$E = T + \Pi = \text{const.}$$

Таким образом, законы баланса векторных величин импульса (количества движения)  $\bar{Q}$  и момента импульса (кинетического момента)  $\bar{K}$  дают возможность моделировать динамику мини-роботов в векторной форме. Подход на основе энергетического баланса дает возможность моделировать динамику мини-роботов на основе скалярных функций: кинетической и потенциальной энергий, зависящих от обобщенных координат.

## **Глава 10. ДИНАМИКА И УПРАВЛЕНИЕ БЕСПИЛОТНЫМИ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ АЭРОПЛАННОГО И ДРУГИХ ТИПОВ**

### **10.1. Основные уравнения динамики беспилотных летательных аппаратов**

Динамика беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) характеризуется наличием аэродинамических связей, действующих на дрон в полете.

Введем системы координат, рис. 10.1:

$Ox_0y_0z_0$  – **неподвижная**, начало ее совпадает с центром масс дрона, ось  $Oy_0$  направлена по вертикали, оси  $Ox_0, Oz_0$  – горизонтальные их направления фиксированы относительно Земли (кёнигова система координат);

$Ox_1y_1z_1$  – **связанная система** координат с началом в центре масс дрона, оси которой направлены по главным осям инерции робота: ось  $Ox_1$  – продольная ось,  $Oy_1$  – лежит в плоскости симметрии, ось  $Oz_1$  – перпендикулярна к плоскости симметрии;

$Oxyz$  – **скоростная система** с началом в центре масс БПЛА, ось  $Ox$  направлена по вектору скорости  $\vec{V}$ , ось  $Oy$  лежит в плоскости симметрии, ось  $Oz$  перпендикулярна к плоскости симметрии.

Вектор скорости  $\vec{V}$  относительно связанной системы  $Ox_1y_1z_1$  характеризуется углом  $\alpha$ , называемым **углом атаки**, и образуется продольной осью и проекцией вектора  $\vec{V}$  на плоскость симметрии.

Угол  $\beta$  между  $\vec{V}$  и плоскостью симметрии называется **углом скольжения**.

Выделяются продольное и боковое движение БПЛА. *Продольное движение* характеризуется вращением вокруг оси  $Oz_1$  и поступательным движением в направлении осей  $Ox_1$  и  $Oy_1$ . *Боковое движение* представляет собой вращения вокруг осей  $Ox_1, Oy_1$  и перемещение в направлении оси  $Oz_1$ .

**Углы Эйлера** в случае ЛМР характеризуют положение связанной системы координат  $Ox_1y_1z_1$  по отношению к кёниговой (услов-

но неподвижной). Угол  $\varphi_1$ , образуемый при повороте БПЛА вокруг продольной оси  $Ox_1$ , при котором поперечная ось  $Oz_1$  горизонтальна, называется **углом крена** (угол собственного вращения); угол  $\psi$ , образуемый проекцией продольной оси на горизонтальную плоскость и заданным направлением  $Ox$ , называется **углом рыскания** (угол прецессии), угол  $\theta$ , образуемый продольной осью БПЛА с горизонтальной плоскостью, называется **углом тангажа** (угол нутации), см. рис. 10.1.

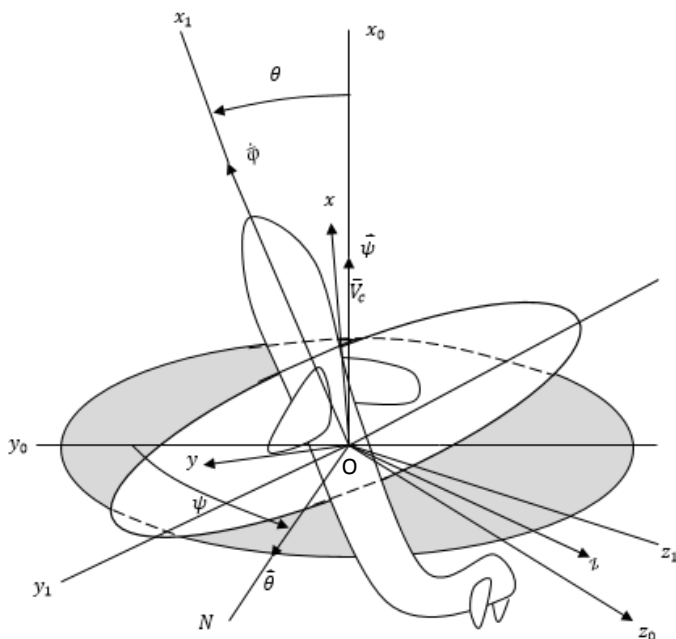


Рис. 10.1. Системы координат для мини-робота самолетного типа

Обозначим через  $\vec{\omega}$  мгновенную угловую скорость вращения системы  $Ox_1y_1z_1$  относительно системы  $Ox_0y_0z_0$ , проекции вектора  $\vec{\omega}$  на оси системы  $Ox_1y_1z_1$  соответственно  $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ . Пусть в корпусе БПЛА имеется  $n$  вращающихся частей (модулей) с фиксированными осями вращения относительно осей системы координат  $Ox_1y_1z_1$ , которые определяются направляющими косинусами

$$A_i = (a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}), \quad i = \overline{1, n}.$$

Вектор угловой скорости  $i$ -го вращающегося тела обозначим  $\overline{\Omega}_i$ , а проекции его на оси координат  $0x_1y_1z_1$  – через

$$(\Omega_{ix}, \Omega_{iy}, \Omega_{iz}) = \overline{\Omega}_i.$$

Уравнения свободного движения ЛМР в векторной форме имеют вид

$$m \left\{ \frac{d\overline{V}_C}{dt} + [\overline{\omega} \times \overline{V}_C] \right\} = \overline{R};$$

$$\frac{d\overline{K}_C}{dt} + [\overline{\omega} \times \overline{K}_C] = \overline{M}_C,$$

где  $\overline{V} = \overline{V}_C$  – скорость поступательного перемещения центра масс;

$\overline{R}$  – вектор внешних сил;

$\overline{M}_C$  – главный момент всех внешних сил;

$\overline{K}_C$  – кинетический момент системы.

Проекции вектора  $\frac{d\overline{K}_C}{dt}$  на оси связанной системы координат

$0x_1y_1z_1$  имеют вид

$$\frac{dK_x}{dt} = I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \sum_i a_{ix} I_i \frac{d\Omega_i}{dt};$$

$$\frac{dK_y}{dt} = I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \sum_i a_{iy} I_i \frac{d\Omega_i}{dt};$$

$$\frac{dK_z}{dt} = I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \sum_i a_{iz} I_i \frac{d\Omega_i}{dt},$$

где  $I_x, I_y, I_z$  – моменты инерции ЛМР;

$I_i$  – моменты тел, вращающихся в корпусе БПЛА.

Совместим оси координат  $Ox_1y_1z_1$  с главными осями инерции БПЛА, тогда в проекциях на главные оси инерции получим

$$\begin{aligned} m\left(\frac{dV_x}{dt} + \omega_y V_x - \omega_z V_y\right) &= X; \\ m\left(\frac{dV_y}{dt} + \omega_z V_x - \omega_x V_z\right) &= Y; \\ m\left(\frac{dV_z}{dt} + \omega_x V_y - \omega_y V_x\right) &= Z. \end{aligned} \tag{10.1}$$

$$\begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \sum_i a_{ix} I_i \frac{d\Omega_i}{dt} + \omega_y \left( I_z \omega_z + \sum_i a_{iz} I_i \Omega_i \right); \\ -\omega_z \left( I_y \omega_y + \sum_i a_{iy} I_i \Omega_i \right) &= M_x; \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \sum_i a_{iy} I_i \frac{d\Omega_i}{dt} + \omega_z \left( I_x \omega_x + \sum_i a_{ix} I_i \Omega_i \right); \\ -\omega_x \left( I_z \omega_z + \sum_i a_{iz} I_i \Omega_i \right) &= M_y; \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \sum_i a_{iz} I_i \frac{d\Omega_i}{dt} + \omega_x \left( I_y \omega_y + \sum_i a_{iy} I_i \Omega_i \right); \\ -\omega_y \left( I_x \omega_x + \sum_i a_{ix} I_i \Omega_i \right) &= M_z, \end{aligned} \tag{10.2}$$

где  $X, Y, Z$  – проекции вектора сил на оси системы координат  $Ox_1y_1z_1$ ;

$M_x, M_y, M_z$  – проекции главного момента оси систем координат  $Ox_1y_1z_1$ .

Выражения для проекций  $X, Y, Z$  имеют вид

$$X = P_x - c_x Sq - G \sin \theta;$$

$$Y = P_y - c_y Sq - G \cos \theta \cos \varphi;$$

$$Z = P_z - c_z Sq - G \cos \theta \sin \varphi,$$

где  $c_x, c_y, c_z$  – коэффициенты боковой силы;

$P_x, P_y, P_z$  – компоненты вектора силы тяги.

На БПЛА самолетной схемы вектор силы тяги  $\bar{P}$  почти совпадает с направлением продольной оси, поэтому приближенно можно положить

$$P_x \approx P; P_y \approx P_z \approx 0.$$

На БПЛА других схем вектор силы тяги  $\bar{P}$  может иметь составляющие по всем трем осям.

Проекции вектора скорости центра масс

$$\left. \begin{aligned} V_x &= V \cos \alpha \cos \beta; \\ V_y &= -V \sin \alpha \cos \beta; \\ V_z &= V \sin \beta. \end{aligned} \right\}$$

Входящие в уравнения (10.2) проекции главного момента внешних сил могут быть представлены в виде трех составляющих:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_{xa} + M_{xp}; \\ M_y &= M_{ya} + M_{yp}; \\ M_z &= M_{za} + M_{zp}. \end{aligned} \right\}$$

где  $M_{xa}$ ,  $M_{ya}$ ,  $M_{za}$  – аэродинамические моменты;

$M_{xp}$ ,  $M_{yp}$ ,  $M_{zp}$  – моменты, создаваемые управляющими двигателями.

Аэродинамические моменты можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} M_{xa} &= m_x q S l; \\ M_{ya} &= m_y q S l; \\ M_{za} &= m_z q S l. \end{aligned} \right\}$$

Преобразуем уравнения (10.1), (10.2), приводя подобные члены, тогда получим

$$\left. \begin{aligned} m \left( \frac{dV_x}{dt} + \omega_y V_z - \omega_z V_y \right) &= P_x - c_x S q - G \sin \vartheta; \\ m \left( \frac{dV_y}{dt} + \omega_z V_x - \omega_x V_z \right) &= P_y - c_y S q - G \cos \vartheta \cos \gamma; \\ m \left( \frac{dV_z}{dt} + \omega_x V_y - \omega_y V_x \right) &= P_z - c_z S q - G \cos \vartheta \sin \gamma; \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

$$\left. \begin{aligned} J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z + \omega_y \sum a_{iz} J_i \Omega_i - \omega_z \sum a_{iy} J_i \Omega_i &= \\ &= M_{xa} + M_{xp} - \sum a_{ix} J_i \frac{d\Omega_i}{dt}; \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z + \omega_z \sum a_{ix} J_i \Omega_i - \omega_x \sum a_{iz} J_i \Omega_i &= \\ &= M_{ya} + M_{yp} - \sum a_{iy} J_i \frac{d\Omega_i}{dt}; \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y + \omega_x \sum a_{iy} J_i \Omega_i - \omega_y \sum a_{ix} J_i \Omega_i &= \\ &= M_{za} + M_{zp} - \sum a_{iz} J_i \frac{d\Omega_i}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$



Из этих уравнений следует, что продольное движение ЛМР связано с его боковым движением посредством инерционных, аэродинамических и гироскопических членов. Инерционные члены уравнений (10.4)  $(J_z - J_y)\omega_y\omega_z$ ,  $(J_x - J_z)\omega_x\omega_z$ ,  $(J_y - J_x)\omega_x\omega_y$  пренебрежимо малы при малых угловых скоростях и малых разностях моментов инерции. Видно, что возможность разделения продольного и бокового движений вытекает из условия  $\omega_x = 0$ . Когда  $\omega_x \neq 0$  и велико, продольное и боковое движения следует рассматривать взаимосвязанными.

Аэродинамическая связь продольного и бокового движений обусловлена зависимостью коэффициентов моментов  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  от параметров этих движений. Последний и предпоследний члены в левых частях уравнений (10.4) возникают вследствие гироскопических эффектов, вызванных вращающимися телами на борту БПЛА. При больших угловых скоростях вращения  $\Omega_i$  и значительных моментах инерции  $J_i$  гироскопические члены, обуславливающие перекрестные связи между продольным и боковым движениями, могут быть сравнимыми с другими членами уравнений.

Последние члены в правых частях уравнений (10.4), обусловленные изменением кинетического момента вращающихся масс, указывают на возможность использования этих явлений для управления угловыми движениями БПЛА. Заметим, что управляющие воздействия существуют до тех пор, пока угловые скорости вращающихся масс возрастают или убывают. Поэтому такое управление возможно только в сочетании с управлением, например, посредством двигателей, рулей.

Уравнения (10.4) в частных случаях могут быть упрощены. Если по каждой из осей ЛМР расположен один маховик, а вращающиеся массы в силовых установках отсутствуют, то, полагая  $J_1 = J_2 = J_3 = J$ ,  $\Omega_1 = \Omega_x$ ,  $\Omega_2 = \Omega_y$ ,  $\Omega_3 = \Omega_z$  и учитывая, что  $a_{1x} = 1$ ,  $a_{2y} = 1$ ,  $a_{3z} = 1$ , получим

$$\left. \begin{aligned} J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z + J(\omega_y\Omega_z - \omega_z\Omega_y) &= M_{xa} + M_{xp} - J \frac{d\Omega_x}{dt}; \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z + J(\omega_z\Omega_x - \omega_x\Omega_z) &= M_{ya} + M_{yp} - J \frac{d\Omega_y}{dt}; \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y + J(\omega_x\Omega_y - \omega_y\Omega_x) &= M_{za} + M_{zp} - J \frac{d\Omega_z}{dt}. \end{aligned} \right\}$$

Шесть уравнений движения (10.3) и (10.4) ЛМР как системы твердых тел связывают восемь переменных  $V, \alpha, \beta, \vartheta, \varphi, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ , определяющих движение центра масс БПЛА и движение относительно центра масс  $n$  переменных  $\Omega_i (i=1, \dots, n)$ , определяющих движение вращающихся масс по отношению к системе координат, связанной с БПЛА. Три координаты управляющих рулей  $\delta_v, \delta_n, \delta_\vartheta$  и три составляющие вектора  $P_x, P_y, P_z$  находятся из уравнений движения системы управления, которые будут рассмотрены ниже. Величины  $\Omega_i$  будем принимать известными функциями времени или определим их также из уравнений динамики системы управления.

Для определения остальных переменных необходимо составить еще два уравнения. В качестве этих уравнений можно взять соотношения между угловыми скоростями  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  и производными  $d\vartheta/dt, d\varphi/dt, d\psi/dt$ :

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta; \\ \omega_y &= \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta \cos \psi + \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi; \\ \omega_z &= \frac{d\vartheta}{dt} \cos \varphi - \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta \sin \varphi. \end{aligned} \right\}$$

Если провести линеаризацию уравнений (10.3) и (10.4), то можно убедиться, что даже при малых угловых скоростях, когда инерционными связями между продольным и боковым движениями можно пренебречь, остаются аэродинамические и гироскопические связи.

## 10.2. Задача управления летательными аппаратами с учетом различных факторов. Задачи управления

Рассмотрим краткие сведения об особенностях управления летательными мини-роботами и общих требованиях к управляемому полету, об информационных характеристиках процессов управления и аппаратуре для получения информации, а также проведем классификацию средств автоматического управления.

Движение БПЛА в пространстве определяется начальными условиями и действующими на аппарат силами. В пределах атмосферы на аппарат действуют сила тяги, аэродинамические силы и сила тяжести. При действии на БПЛА указанных сил его движение непрерывно возмущается, а параметры полета отклоняются от программных (расчетных). Для получения заданного движения БПЛА необходимо управлять действующими на него силами.

Любая из возмущающих сил, действующих на БПЛА, может быть использована для управления движением. При создании систем управления к управляющим силам предъявляются следующие требования:

- 1) широкий диапазон изменения по величине и направлению;
- 2) простота реализации управляющих органов;
- 3) малые затраты энергии на управление;
- 4) малое влияние управляющих органов на аэродинамическое сопротивление.

Рассмотрим способы создания управляющих сил и моментов для некоторых типов БПЛА. На дронах типа самолетов и крылатых ракет в качестве управляющих сил обычно используются аэродинамические и газодинамические силы.

На рис. 10.2 дана схема аэродрона, на котором в качестве рулевых органов применены элероны 4 с триммером 5, стабилизатор 6 и руль направления 7 с триммером 8. Подъемная сила у крылатых БПЛА создается, главным образом, крыльями, частью которых являются элероны, поэтому посредством элеронов можно менять направление и отчасти – величину подъемной силы. Устойчивость и управляемость БПЛА обеспечивается горизонтальным (стабилизатор, нередко стабилизатор и руль высоты) и вертикальным (киль 12 и руль направления 7) оперением.

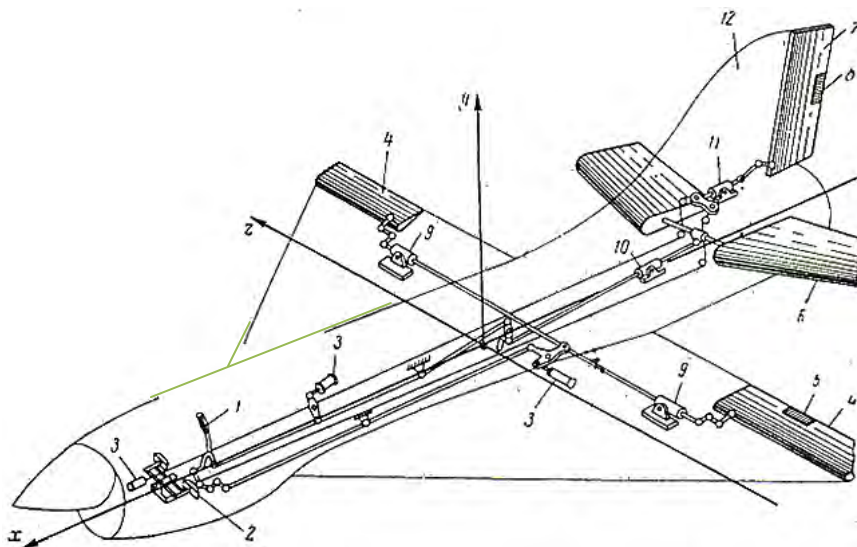


Рис. 10.2. Структурная схема расположения органов управления дрона самолетного типа

**Управление элеронами и стабилизатором** (или рулем высоты) осуществляется посредством рычага, отклоняемого соответственно вправо-влево и вперед-назад. Движение ручки через систему тяг и бустерные механизмы (усилители) 9 и 10 передается элеронам 4 и стабилизатору 6. Для управления рулем направления 1 воздействуют на рычаги 2, которые через бустер 11 передают движение рулю. Поскольку контроллер управляет рулевыми органами не непосредственно, а через бустерные механизмы, то для создания «чувства» управления применяются загрузочные механизмы 3.

**Управление дроном в вертикальной плоскости** осуществляется отклонением стабилизатора (руля высоты) из нейтрального положения вверх или вниз. Если стабилизатор отклонен вверх (вниз), то под действием встречного потока возникает аэродинамическая сила  $Y_c^1$ , создаваемая стабилизатором и направленная вниз (вверх). Момент  $M_{zc}$  этой силы поворачивает дрон относительно оси  $Oz$ , увеличивая (уменьшая) угол атаки, вследствие чего меняется подъемная сила крыльев. При изменении подъемной силы меняется высота полета,

а момент  $M_{zc}$  изменяет угол наклона продольной оси дрона (угол тангажа). Другими словами, стабилизатор (руль высоты) служит для управления углом тангажа и высотой полета.

**Управление дроном в горизонтальной плоскости** осуществляется элеронами 4 и рулем направления 7. При нейтральном положении элеронов подъемные силы правого и левого крыльев одинаковы. Если элероны отклоняются (если правый элерон поднимается, то левый – опускается, и наоборот), то подъемная сила крыла с поднятым элероном уменьшается, а с опущенным – увеличивается. Разность подъемных сил крыльев обуславливает возникновение момента  $M_x$  относительно оси  $Ox$ , называемого *моментом крена*. Под действием этого момента самолет накренивается (при этом подъемные силы остаются перпендикулярными плоскостям крыльев), в результате чего образуются горизонтальные составляющие этих сил, направленные в сторону крена. Под действием горизонтальных составляющих подъемной силы крыльев центр масс дрона будет перемещаться в горизонтальной плоскости в сторону крена. Таким образом, с помощью элеронов можно управлять углом крена и боковым движением центра масс дрона.

При отклонении руля направления вправо или влево от нейтрального положения возникает аэродинамический момент  $M_y$  относительно оси  $Oy$ , называемый *моментом рыскания*. Под действием этого момента БПЛА поворачивается в горизонтальной плоскости вправо или влево, вокруг вертикальной оси  $y$ , т. е. изменяется угол рыскания БПЛА. Помимо изменения угла рыскания меняется также угол скольжения, т. е. угол, образуемый вектором скорости с плоскостью симметрии БПЛА. В результате этого возникает боковая сила, пропорциональная углу скольжения, вызывающая боковое движение БПЛА. Следовательно, с помощью руля направления можно управлять углами рыскания и скольжения, а также боковым движением центра масс БПЛА.

В простейшем случае БПЛА рассматриваем как абсолютно твердое тело, движение которого характеризуется шестью степенями свободы. Для управления БПЛА в общем случае необходимо создать управляющие силы и моменты по трем взаимно перпендикулярным осям и изменять их в соответствии с требуемыми законами управления.

Формирование управляющих сил и моментов осуществляется в системе управления в соответствии с информацией о движении БПЛА, при этом система управления должна иметь столько каналов управления, сколько степеней свободы имеет управляемый объект.

В ряде случаев БПЛА приходится рассматривать как систему твердых тел (такой системой является, например, вертолет). Число степеней свободы такого БПЛА возрастает, поэтому система управления усложняется.

Задачи управления БПЛА усложняются при необходимости учета упругих свойств. В этом случае БПЛА может совершать аэроупругие колебания, для уменьшения которых создаются специальные замкнутые контуры управления (помимо контуров управления БПЛА как твердым телом).

Согласно вышесказанному движение БПЛА нужно рассматривать состоящим из движения центра масс и движения вокруг центра масс. Необходимость управления угловыми движениями вызывается тем, что БПЛА *должен занимать вполне определенное положение по отношению к вектору скорости центра масс*. В частности, продольная ось БПЛА должна совпадать или быть близкой к направлению вектора скорости.

Управление движением центра масс необходимо для того, чтобы БПЛА *совершал полет по заданной траектории*, которая в определенном смысле должна быть оптимальной. Автоматическое удержание центра масс БПЛА на заданной траектории осуществляется специальными контурами управления (контуры управления высотой, боковым отклонением, скоростью полета и т. д.).

Для управления угловыми движениями применяются соответствующие контуры управления (контуры крена, рыскания, тангажа).

Динамические характеристики (демпфирование, управляемость, устойчивость) БПЛА в ряде случаев (например, при малых скоростных напорах) оказываются неудовлетворительными, поэтому возникает необходимость их улучшения средствами автоматики. Для этого применяются автоматы устойчивости, демпфирования и другие устройства.

Летательный аппарат совершает полеты в переменных внешних условиях (изменение характеристик атмосферы, изменение веса и моментов инерции и т. д.), что приводит к изменению его динамических параметров (демпфирование, постоянные времени, коэффициенты эф-

фективности управляющих органов и др.) и к изменению их реакции на внешние возмущения. Для сохранения одинаковой (в общем случае минимально возможной) реакции БПЛА на возмущения в переменных внешних условиях системы управления полетом должны иметь переменные параметры, а иногда и переменную структуру, т. е. ЛМР должны быть *самоадаптирующимися системами*.

Полет БПЛА должен быть оптимальным, причем оптимальность обычно понимается в широком смысле (например, обеспечиваются минимальный километровый расход топлива энергии, минимальное время достижения цели, максимальная дальность полета и т. д.). Системы управления должны обеспечивать *оптимальность режимов полета*.

Когда БПЛА, получая информацию о цели, стремится к встрече с целью, а цель, имея информацию о БПЛА, уклоняется от встречи или противодействует встрече, то возникает характерная *игровая задача с двумя участниками игры*. Задачу управления полетом можно трактовать как игровую также и в том случае, когда в качестве одного игрока выступает система управления, а в качестве второго – погода (возмущения на БПЛА и на систему управления). Очевидно, что задачи систем управления, расположенных на БПЛА и на цели, противоположны. Алгоритмы, решающие задачи поведения, преследования, уклонения, разрабатываются на основе теории игр.

Летательные аппараты, особенно мини-роботы, совершают полет группами, образуя, например, *строй*, который с точки зрения управления им должен рассматриваться как единая динамическая система. Системы автоматического управления строем являются разновидностями систем управления полетом.

Автоматизация управления полетом БПЛА должна быть комплексной, т. е. такой, при которой автоматизируется вся последовательность взаимосвязанных функций, таких как *сбор информации* об этапах и режимах полета, *переработка информации и формирование законов управления, исполнение команд* и т. д. Комплексование систем осуществляется на базе контроллеров, микропроцессоров, работающих по программам, написанным на основе нейросетевых, генетических, эволюционных с использованием нечеткой логики алгоритма.

Все возмущения, действующие на систему «БПЛА–система управления», можно разделить на *полезные*, которые система должна воспроизводить без искажений, и *вредные*, на которые система

должна слабо реагировать. При этом как полезные, так и вредные возмущения могут быть *детерминированными* и *случайными*.

При управлении движением БПЛА должны быть достигнуты:

заданное качество переходного процесса;

точность исполнения команд;

слабая реакция на внешние возмущения;

точное наведение на цели;

оптимальность движения (минимальный расход, минимизация времени полета, максимальная дальность и т. д.);

безопасность полета.

Таким образом, управление полетом должно сводиться к управлению параметрами режима полета угловыми и линейными координатами, скоростями и ускорениями, характеризующими движение БПЛА по отношению к цели и к другим аппаратам и т. д. Следовательно, для функционирования систем управления необходима информация об указанных параметрах режимов полета.

### ***Классификация средств автоматизации летательных аппаратов***

Из рассмотрения задач, выполняемых системами автоматического управления, следует, что они должны состоять из ряда автоматических устройств. На пилотируемых дронах (геликоптерах) к числу этих устройств относятся автоматы управления, автопилоты, автоматы тяги и командные системы управления.

*Автоматы управления* (демпферы крена, тангажа и рыскания, автоматы устойчивости) служат для улучшения динамических характеристик – управляемости и устойчивости БПЛА. При применении автоматов управления динамика БПЛА становится более точной.

Автоматические устройства, воздействующие на управляющие органы самолета (рули высоты и направления, элероны и т. д.) и обеспечивающие автоматическое пилотирование, называются *автопилотами*. Близкими по своим функциям являются автоматы тяги – автоматические устройства, служащие для управления скоростью полета.

*Командные системы управления* служат для обработки разнообразной пилотажно-навигационной информации, необходимой для управления на траектории полета, и выдачи ее контроллеру в удобном для управления виде или подачи ее в автопилот. При примене-



нии командных систем роль контроллера сводится к обработке сформированных командных сигналов.

Совокупность указанных автоматических устройств образует систему автоматического управления (САУ). Эта система может также включать ряд дополнительных устройств, обеспечивающих управление аэроупругими колебаниями ЛМР со средой, управление групповым полетом.

Системы автоматического управления дронов должны включать автопилоты и ряд автоматических устройств, обеспечивающих наведение на цель, маневрирование и т. д. Автопилот, включающий каналы управления угловыми движениями и скоростью полета, называют *автоматом стабилизации*, а автоматическое устройство наведения на цель – *системой наведения*. При такой трактовке САУ беспилотных БПЛА состоит из автомата стабилизации и системы наведения.

Автопилот является одним из важнейших элементов любой САУ. Автопилоты различаются структурными особенностями, законами управления, формой сигналов – носителей информации, числом каналов управления и др.

Принцип действия автопилота виден из схемы системы управления самолетом, изображенной на рис 10.3. Информация об углах  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$  и угловых скоростях  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  (крена, рыскания и тангажа) от измерительных систем подается в блок формирования команд системы управления. Вырабатываемые в блоке команды поступают на рулевые системы  $PM_\vartheta$ ,  $PM_H$  и  $PM_C$ , которые изменяют соответственно положение элеронов, руля направления и стабилизатора в таком направлении, чтобы устранить изменения угловых координат и скоростей.

В блок формирования команд подаются также сигналы обратной связи, пропорциональные углам отклонения рулевых органов  $\delta_\vartheta$ ,  $\delta_H$  и  $\delta_C$ . В ряде случаев в блок формирования команд подаются сигналы ускорений (перегрузок), предельных значений параметров режима полета и т. д.

Если необходимо стабилизировать координаты центра масс БПЛА (высоту полета  $H$  и боковое отклонение  $Z_0$ ), то помимо угловых координат и скоростей измеряют величины

$$\Delta H = H_0 - H \text{ и } \Delta Z = Z_{60} - Z_6,$$

где  $H_0$  и  $Z_{60}$  – требуемые значения высоты и боковой координаты.

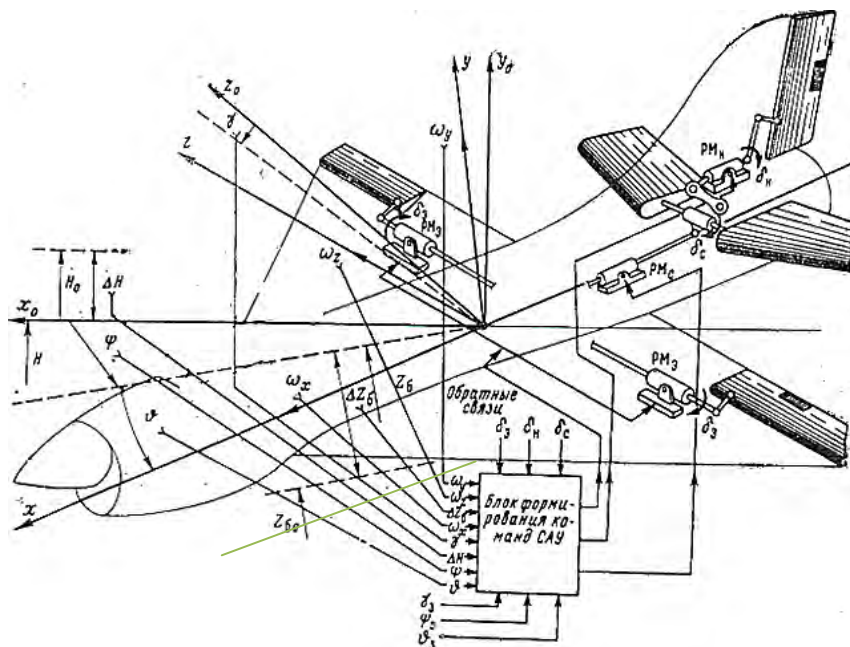


Рис. 10.3. Функциональная схема системы управления самолетом

В этом случае система управления будет работать до тех пор, пока рассогласования  $\Delta H$  и  $\Delta Z_6$  не будут устранены.

Система управления позволяет автоматически выполнять угловые маневры. Для этого в блоке формирования команд задаются углы  $\varphi_3(t)$ ,  $\gamma_3(t)$ ,  $\psi_3(t)$  и  $\vartheta_3(t)$  как функции времени и система управления полетом, исполняя команды, обеспечивает выполнение равенств  $\varphi(t) = \varphi_3(t)$ ,  $\gamma(t) = \gamma_3(t)$ ,  $\psi(t) = \psi_3(t)$  и  $\vartheta(t) = \vartheta_3(t)$ , т. е. в этом случае система управления работает в режиме слежения.

Если сигналы  $\varphi_3(t)$ ,  $\gamma_3(t)$ ,  $\psi_3(t)$  и  $\vartheta_3(t)$  формируются в системе наведения (самонаведения) на основе информации о цели, то система управления обеспечивает наведение БПЛА на цель (воздуш-

ную или наземную). При управлении строем летательных аппаратов сигналы  $\varphi_3(t)$ ,  $\gamma_3(t)$ ,  $\psi_3(t)$  и  $\vartheta_3(t)$  вырабатываются в системе измерения дистанции, интервала и превышения. Следует только указать, что при управлении группой в системе управления необходимо сформировать еще один канал – канал управления скоростью полета путем изменения тяги двигателей.

Из рассмотрения схемы следует, что система автоматического управления полетом БПЛА является многоканальной (число каналов равно числу рулевых органов), причем все каналы, замыкаемые через звенья, отображающие динамику и кинематику БПЛА, оказываются связанными между собой. Каждый канал управления, в свою очередь, является многоконтурным. На рис. 10.4 дана структурная схема системы управления полетом.

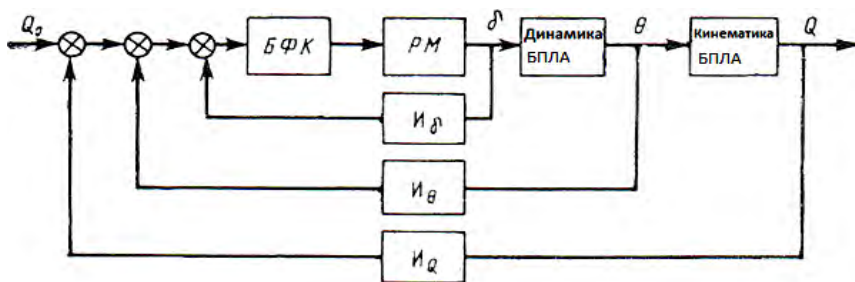


Рис. 10.4. Структурная схема системы управления полетом

Основными элементами системы управления являются:

- датчики информации  $I_\delta$ ,  $I_\theta$ ,  $I_Q$  соответственно о координатах рулевых органов, параметрах, характеризующих динамику ЛМР, и параметрах, характеризующих его кинематику;
- блок формирования команд (БФК), включающий вычислительные, преобразовательные, усилительные и другие устройства;
- рулевые устройства (РУ).

Динамические свойства замкнутой системы, включающей САУ и БПЛА, определяются динамическими свойствами составляющих ее элементов и способами их соединения. Более подробно вопросы динамики и управления летательными аппаратами некоторых типов рассматриваются в следующих главах.

## Глава 11. ДИНАМИКА ПЛОСКОГО ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА АЭРОПЛАННОГО ТИПА

### 11.1. Линеаризация уравнения динамики в двумерном случае

Рассмотрим плоское движение БПЛА, при котором вектор скорости центра масс совпадает с вертикальной плоскостью  $Oxy$ . Такое движение называется *продольным*.

Введем следующие обозначения:  $\bar{X}$  – сила лобового сопротивления;  $\bar{Y}$  – подъемная сила;  $\bar{G}$  – сила тяжести;  $\theta$  – угол наклона траектории;  $m$  – масса;  $\bar{P}$  – сила тяги, принимаемая совпадающей по направлению с продольной осью БПЛА (рис. 11.1).

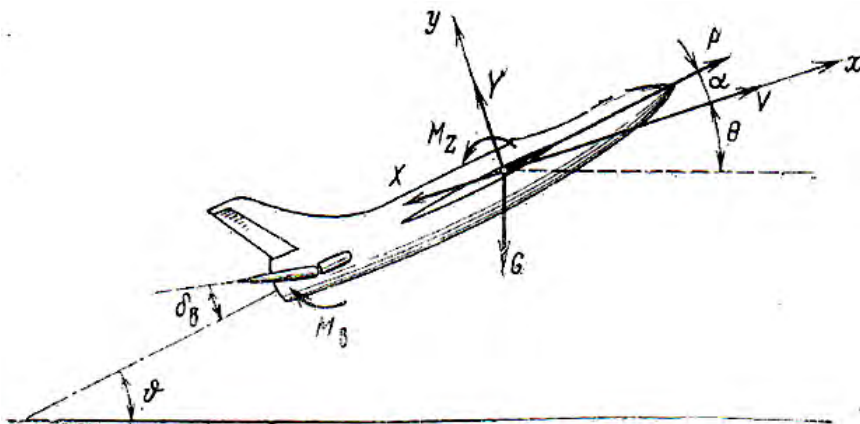


Рис. 11.1. Продольное движение БПЛА

Выберем систему координат  $Oxy$  с началом в центре масс БПЛА, направив ось  $Ox$  по касательной, а ось  $Oy$  – по нормали к траектории. Предположим, что на аппарат по осям  $Ox$  и  $Oy$  действуют возмущения  $X_B$  и  $Y_B$ , смысл которых будет в дальнейшем детализирован.

Процируя силы, действующие на БПЛА, на оси координат  $Ox$  и  $Oy$  соответственно, получим

$$m \frac{dV}{dt} = P \cos \alpha - X - G \sin \theta + X_B; \quad (11.1)$$

$$mV \frac{d\theta}{dt} = P \sin \alpha + Y - G \cos \theta + Y_B. \quad (11.2)$$

Обозначим через  $M_z$ ,  $J_z$  и  $M_{z.B}$  соответственно суммарный момент аэродинамических сил, действующий относительно поперечной оси  $Oz$ , проходящей через центр масс, и направленный перпендикулярно плоскости рисунка, момент инерции относительно той же оси  $Oz$  и возмущающий момент. Уравнение моментов относительно поперечной оси имеет вид

$$J_z \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_z + M_{z.B}. \quad (11.3)$$

Добавим к этим уравнениям кинематическое уравнение, связывающее углы  $\theta$ ,  $\vartheta$  и  $\alpha$  (см. рис. 11.1):

$$\vartheta = \theta + \alpha. \quad (11.4)$$

Из этих четырех уравнений движения при заданных силах и моментах можно определить величины  $V$ ,  $\theta$ ,  $\vartheta$  и  $\alpha$  как функции времени.

Уравнения (11.1)–(11.4) описывают движение БПЛА в системе координат, связанной с центром масс аппарата. Для определения движения БПЛА по отношению к системе координат, связанной с Землей, к уравнениям (1.1)–(1.4) необходимо добавить кинематические уравнения

$$\frac{dH}{dt} = V \sin \theta; \quad (11.5)$$

$$\frac{dL}{dt} = V \cos \theta, \quad (11.6)$$

где  $H$  и  $L$  – соответственно высота полета и пройденное расстояние.

Система дифференциальных уравнений (11.1)–(11.6) является *нелинейной математической моделью продольного движения летательного аппарата*. Эта система уравнений используется при исследовании динамики полета. При аналитическом исследовании пользуются **линеаризованными уравнениями**.

Для вывода **линеаризованных уравнений** установим зависимость сил и моментов от величин  $V$ ,  $\theta$ ,  $\vartheta$ ,  $\omega_z$ ,  $\alpha$ ,  $H$ ,  $\delta_v$  и  $\delta_d$ .

Сила тяги двигателя  $P$  зависит от параметров двигателя и внешних условий, определяемых скоростью полета  $V$ , давлением  $p_n$  и температурой  $T_n$  атмосферы и др. В общем случае можно написать

$$P = P(V, p_n, T_n, \delta_d). \quad (11.7)$$

Аэродинамические силы и моменты представляются в виде

$$X = c_x Sq; \quad Y = c_y Sq; \quad M_z = m_z b Sq, \quad (11.8)$$

где  $c_x$  и  $c_y$  – соответственно коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы;

$S$  – площадь крыльев;

$q = \frac{\rho V^2}{2}$  – скоростной напор;

$m_z$  – коэффициент момента тангажа;

$b$  – длина средней аэродинамической хорды крыла.

Возмущающие силы  $X_v$  и  $Y_v$  и момент  $M_{zB}$ , действующие на БПЛА, обусловлены горизонтальными и вертикальными порывами ветра (характеризуемыми величинами  $\Delta U_x$  и  $\Delta U_y$ ), изменениями веса  $\Delta G$ , импульсными возмущениями  $X'_v$ ,  $Y'_v$  и  $M'_{zB}$ , например, вызванными разрывами вблизи БПЛА и др. Порывы ветра изменяют действующие на БПЛА аэродинамические силы и моменты.

Для приближенной оценки реакции БПЛА на указанные возмущения пренебрегают изменением моментов и изменения аэродинамических сил вследствие порывов ветра заменяют эквивалентными им ускорениями. Тогда

$$\left. \begin{aligned} X_B &= m \frac{d\Delta U_x}{dt} + \Delta G \sin \theta + X'_B; \\ Y_B &= m \frac{d\Delta U_y}{dt} + \Delta G \cos \theta + Y'_B; \\ M_{zB} &= \Delta G l_1 + M'_{zB}, \end{aligned} \right\}$$

где  $l_1$  – расстояние центра масс сбрасываемого груза до центра масс БПЛА.

Для линеаризации уравнений (11.1)–(11.6) предполагается, что невозмущенное движение летательного аппарата характеризуется параметрами  $V_0, \alpha_0, \vartheta_0, \theta_0, H_0$ , удовлетворяющими тем же уравнениям. В качестве невозмущенного движения можно взять:

- 1) горизонтальный полет с постоянной скоростью;
- 2) полет с заданным наклоном траектории;
- 3) полет при известном программном изменении некоторых из величин, например,  $V$  или  $H$  и т. д., рис. 11.2 и 11.3.

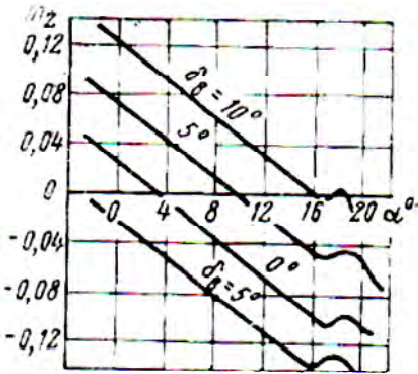


Рис. 11.2. Графики зависимости коэффициента  $m_z$  от угла атаки  $\alpha$

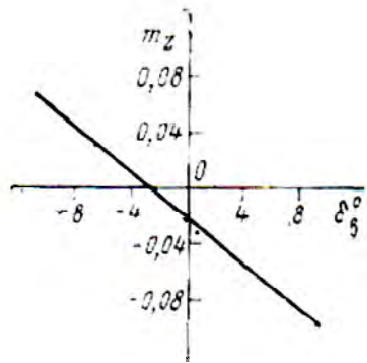


Рис. 11.3. Графики зависимости коэффициента  $m_z$  от отклонения руля  $\sigma_B$

Пусть в некоторый момент времени вследствие возмущений, действующих на БПЛА, можно записать

$$V = V_0 + \Delta V;$$

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha;$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Delta\vartheta;$$

$$\theta = \theta_0 + \Delta\theta;$$

$$H = H_0 + \Delta H; \dots,$$

где  $\Delta V$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\vartheta$ ,  $\Delta\theta$ ,  $\Delta H$  – малые приращения указанных параметров.

Из этих выражений видно, что движение БПЛА можно представить состоящим из невозмущенного движения и малых отклонений от него.

Разлагая силы  $X$ ,  $Y$ ,  $P$  и момент  $M_z$  в ряды Тейлора по малым приращениям и ограничиваясь линейными членами приращений, получим

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d\Delta V}{dt} &= -(P_0 \sin \alpha_0 + X_0^\alpha) \Delta\alpha + (P_0^V \cos \alpha_0 - X^V) \Delta V - \\ &- G \cos \theta_0 \Delta\theta + (P_0^H \cos \alpha_0 - X_0^H) \Delta H + P_0^\delta \delta_d \cos \alpha_0 + X_B; \\ m V_0 \frac{d\Delta\theta}{dt} &= (P_0 \cos \alpha_0 + Y_0^\alpha) \Delta\alpha + G \sin \theta_0 \Delta\theta + (P_0^H \sin \alpha_0 + Y_0^H) \times \\ &\times \Delta H + (P_0^V \sin \alpha_0 + Y_0^V) \Delta V + P_0^\delta \delta_d \sin \alpha_0 + Y_B; \\ J_z \frac{d^2 \Delta\vartheta}{dt^2} &= M_z^\alpha \Delta\alpha + M_{z0}^\alpha \frac{d\Delta\alpha}{dt} + M_{z0}^{\omega_z} \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + M_{z0}^V \Delta V + \\ &+ M_{z0}^H \Delta H + M_{z0}^\delta \delta_B + M_{zB}; \\ \frac{d\Delta H}{dt} &= V_0 \cos \theta_0 \Delta\theta + \Delta V \sin \theta_0; \quad \Delta\vartheta = \Delta\theta + \Delta\alpha, \end{aligned} \right\} (11.9)$$

где члены с верхними индексами обозначают частные производные по соответствующим переменным в окрестности невозмущенного движения, которое обозначено нижним индексом «0».



Для частных производных, входящих в уравнения (11.9), с учетом выражений (11.8) можно написать

$$\left. \begin{aligned} X_0^\alpha &= c_{x0}^\alpha S q_0; & M_{z_0}^\alpha &= m_{z_0}^\alpha b S q_0; \\ X_0^V &= \left( c_{x0} + \frac{1}{2} M_0 c_{x0}^M \right) 2S \frac{q_0}{V_0}; & M_{z_0}^V &= m_{z_0}^V b S q_0; \\ X_0^H &= \left( c_x \rho_0^H + \rho_0 c_{x0}^H \right) S \frac{q_0}{\rho_0}; & M_{z_0}^H &= m_{z_0}^H b S q_0; \\ Y_0^\alpha &= c_{y0}^\alpha S q_0; & M_{z_0}^{\omega_z} &= m_{z_0}^{\omega_z} b S q_0; \\ Y_0^V &= \left( c_{y0} + \frac{1}{2} M_0 c_{y0}^M \right) 2S \frac{q_0}{V_0}; & M_{z_0}^\alpha &= m_{z_0}^\alpha b S q_0; \\ Y_0^H &= \left( c_y \rho_0^H + \rho_0 c_{y0}^H \right) S \frac{q_0}{\rho_0}; & M_{z_0}^\delta &= m_{z_0}^\delta b S q_0. \end{aligned} \right\}$$

Здесь  $M = \frac{V}{a}$  – число Маха, где  $a$  – скорость звука.

При дальнейших преобразованиях воспользуемся тем, что

$$\left. \begin{aligned} C_x^H &= C_x^M M^H; & C_y^H &= C_y^M M^H; & m_z^H &= m_z^M M^H; \\ M^H &= \left( \frac{V}{a} \right)^H = -\frac{M}{a} a^H. \end{aligned} \right\}$$

Используемый в формулах параметр  $\rho$  является функцией высоты:

$$\rho = \rho_3 (1 - \gamma_1 H)^{\beta_1 - 1}; \quad T_H = T_3 - \beta_1 H,$$

где  $\gamma_1 = \frac{\beta}{T_3}$ ;

$$\beta_1 = \frac{1}{\beta_1 R};$$

$\beta_\Gamma$  – градиент температуры;

$R$  – газовая постоянная;

$T_H$  – температура на высоте  $H$ ;

$T_3$  и  $\rho_3$  – температура и плотность атмосферы на уровне моря.

После этого находим

$$\left. \begin{aligned} X_0^H &= \left[ \left( \beta_\Gamma - \frac{1}{R} \right) \frac{c_{x0}}{T_{H0}} - \frac{M_0}{a_0} a_0^H c_{x0}^M \right] S q_0; \\ Y_0^H &= \left[ \left( \beta_\Gamma - \frac{1}{R} \right) \frac{c_{y0}}{T_{H0}} - \frac{M_0}{a_0} a_0^H c_{y0}^M \right] S q_0; \\ M_{z0}^H &= -m_{z0}^M a_0^H \frac{M_0}{a_0} b S q_0. \end{aligned} \right\}$$

В целях сокращения записи введем относительные величины

$$v = \frac{\Delta V_0}{V_0}; \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau_a},$$

где  $\tau_a = \frac{m}{\rho_0 S V_0}$  – аэродинамическая постоянная времени БПЛА.

Вместо приращений  $\Delta\vartheta$ ,  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\theta$  будем писать  $\vartheta$ ,  $\alpha$  и  $\theta$ , придавая последним величинам смысл тех же приращений.

Уравнения (11.9) с учетом введенных обозначений можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} (p + n_{11})v + n_{12}\alpha + n_{13}\vartheta + n_{12}h &= n_d \delta_d + f_1; \\ -n_{21}v + (p + n_{22})\alpha - (p + n_{23})\vartheta + n_{24}h &= n_{d1} \delta_d + f_2; \\ n_{31}v + (n_0 p + n_{32})\alpha - (p^2 + n_{33}p)\vartheta + n_{34}h &= -n_b \delta_b + f_3; \\ -n_{41}v + n_{42}\alpha - n_{42}\vartheta + ph &= f_4. \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

Здесь

$$p = \frac{d}{dt};$$

$$n_{11} = c_{x0} + \frac{1}{2}M_0c_{x0}^M - \frac{P_0^M \cos \alpha_0}{\alpha_0 \rho_0 SV_0};$$

$$n_{12} = \frac{1}{2}(c_{x0}^\alpha - c_{y0});$$

$$n_{13} = \frac{1}{2}c_{y0};$$

$$n_{14} = \frac{\beta_\Gamma \tau_a}{2T_{H0}} \left( \frac{M_0 P_0 \cos \alpha_0}{\rho_0 SV_0^2} + \left( \frac{c_{x0}}{\gamma_1 - 1} - \frac{M_0 c_{x0}^M}{2} \right) M_0 \right);$$

$$n_{1\Delta} = \frac{P_0^\delta \cos \alpha_0}{\rho_0 SV_0^2};$$

$$n_{21} = c_{y0} + \frac{1}{2}M_0c_{y0}^M;$$

$$n_{22} = \frac{1}{2}(c_{y0}^\alpha - c'_{x0});$$

$$n_{23} = \frac{1}{2}c'_{x0};$$

$$n_{24} = \frac{\beta_\Gamma \tau_a}{2T_{H0}} \left( \frac{M_0 P_0^M \sin \alpha_0}{\rho_0 SV_0^2} - \left( \frac{c_{y0}}{\gamma_1 - 1} - \frac{M_0 c_{y0}^M}{2} \right) M_0 \right);$$

$$n_{\alpha 1} = \frac{P_0^\delta \sin \alpha_0}{\rho_0 S V_0^2};$$

$$n_{31} = -\mu M_0 m_{z0}^M;$$

$$n_0 = -\mu \frac{m_{z0}^a}{\tau_a};$$

$$n_{32} = -\mu m_{z0}^a;$$

$$n_{33} = -\mu \frac{m_{z0}^{\omega_z}}{\tau_a};$$

$$n_{34} = -\mu \frac{M_0}{2} m_{z0}^M \frac{\beta_\Gamma \tau_a}{T_{H0}} V_0;$$

$$n_B = -\mu m_{z0}^{\delta_H};$$

$$\mu = \frac{bm}{2r_z^2 \rho_0 S};$$

$$c'_{x0} = c_{x0} - 2 \frac{P_0 \cos \alpha_0}{\rho_0 S V_0^2};$$

$$n_{41} = \sin \theta_0, \quad n_{42} = \cos \theta_0;$$

$$h = \frac{\Delta H}{\tau_a V_0};$$

$$f_1 = p v_x + \frac{\Delta G \sin \theta_0}{\rho_0 S V_0^2} + \frac{X_{B'}}{\rho_0 S V_0^2};$$

$$f_2 = p v_y + \frac{\Delta G \cos \theta_0}{\rho_0 S V_0^2} + \frac{Y_{B'}}{\rho_0 S V_0^2};$$

$$f_3 = \frac{\Delta G}{\rho_0 S V_0^2} \frac{l_1}{b} + \frac{M'_{zB}}{b \rho_0 S V_0^2};$$

$$f_4 = v_y;$$

$$v_x = \frac{\Delta U_x}{V_0};$$

$$v_y = \frac{\Delta U_y}{V_0};$$

$r_z$  – радиус инерции самолета.

Система дифференциальных уравнений (11.10) является *линейной математической моделью продольного движения летательного аппарата*.

Входящие в уравнения (11.10) коэффициенты  $n_{ik}$  являются известными функциями времени. В короткие промежутки, не превосходящие постоянную времени  $\tau_a$  более чем на один порядок, их можно принять постоянными. В табл. 11.1 даны значения этих коэффициентов для БПЛА для случая прямолинейного горизонтального полета с постоянной скоростью. Коэффициенты уравнений (11.10) безразмерны, поэтому по ним трудно судить об изменении динамических характеристик БПЛА по режимам полета.

Таблица 11.1

## Коэффициенты функции времени

Коэффициент	ЛМП	
	$H = 11$ км, $M = 0,9$ , $\tau_a = 3,8$ с	$H = 15$ км, $M = 2,5$ , $\tau_a = 2,5$ с
$n_{11}$	0,024	-0,01
$n_{12}$	-0,11	-0,08
$n_{13}$	0,2	0,2
$n_{14}$	-0,0004	-0,0004
$n_{21}$	-0,4	-0,68
$n_{22}$	2,4	2,5
$n_{23}$	0	0
$n_{24}$	-0,012	-0,013
$n_{31}$	0	-0,8
$n_0$	0,4	0,7
$n_{32}$	38	16
$n_{33}$	2,45	2,2
$n_{34}$	-0,053	-0,055
$n_B$	49	100
$n_D$	0,022	0,02

Для учета влияния режимов полета на динамику самолета рассмотрим размерные коэффициенты  $n'_{ik}$ , которые связаны с коэффициентами  $n_{ik}$  соотношениями

$$n'_{ik} = \frac{n_{ik}}{\tau_a} \quad (i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, 4);$$

$$n'_D = \frac{n_D}{\tau_a}; \quad n'_{33} = \frac{n_{33}}{\tau_a}; \quad n'_0 = \frac{n_0}{\tau_a}; \quad n'_B = \frac{n_B}{\tau_a};$$

$$n'_{3k} = \frac{n_{3k}}{\tau_a^2} \quad (k = 1, 2, 4).$$

Поскольку постоянная времени  $\tau_a$  зависит от скорости полета и плотности воздуха (высоты), то все размерные коэффициенты меняются по режимам полета. Коэффициенты  $n_{12}, n_{13}, n_{22}, n_0, n_{33}$  мало зависят от  $\rho_0$  и  $V_0$ , поэтому

$$n'_{12}, n'_{13}, n'_{22}, n'_0, n'_{33} \sim \rho_0 V_0.$$

Коэффициенты  $n_{31}, n_{32}$  и  $n_b$  обратно пропорциональны плотности  $\rho_0$  (поскольку коэффициент  $\mu$  пропорционален  $\frac{1}{\rho_0}$ ), поэтому, учитывая их связь с размерными коэффициентами, находим

$$n'_{31}, n'_{32}, n'_b \sim \rho_0 V_0^2.$$

Коэффициенты  $n_{11}, n_{14}, n_d, n_{21}, n_{24}$  и  $n_{34}$  являются сложными функциями от  $\rho_0$  и  $V_0$ , поэтому и соответствующие размерные коэффициенты являются сложными функциями тех же параметров.

Рассмотрим природу коэффициентов  $n_{ik}$ . Коэффициенты  $n_{11}, n_{22}, n_{33}$  характеризуют степень естественного демпфирования движений по каналам  $\psi, \alpha$  и  $\vartheta$ , причем чем они больше, тем быстрее затухают движения.

Коэффициенты  $n_{ik}$  ( $i \neq k$ ) с разными индексами характеризуют перекрестные связи между каналами  $\psi, \alpha, \vartheta$  и  $h$ . Эти связи могут быть слабыми, средними и сильными. Слабые связи, соответствующие коэффициентам  $n_{14}, n_{24}$  и  $n_{34}$ , учитывающим изменение плотности воздуха с высотой полета, оказывают влияние на движения БПЛА с очень малыми частотами (порядка тысячных долей герца), не имеющими значения для управляемого полета. Средние связи, соответствующие коэффициентам  $n_{12}, n_{21}, n_{13}$  и  $n_{31}$ , характе-

ризуют взаимное влияние канала скорости полета  $\upsilon$  и каналов  $\alpha$  и  $\vartheta$ . Эти связи существенны в области частот фугоидных колебаний и являются причиной появления последних. Сильные связи, характеризуемые коэффициентами  $n_{23}$  и  $n_{32}$ , проявляются на всех частотах, в том числе и на частотах короткопериодических колебаний, которые обусловлены этими связями.

Коэффициент  $n_{32} \sim (-m_z^\alpha)$  характеризует продольную статическую устойчивость, причем если  $n_{32} > 0$  (или  $m_z^\alpha < 0$ ), то БПЛА устойчив, в противном случае неустойчив. Эффективность регулирующих органов характеризуется коэффициентами  $n_d, n_{d1}, n_b$ .

## 11.2. Частные случаи продольного движения. Передаточные функции и частотные характеристики

При полете с незначительным изменением высоты членами  $n_{14}h, n_{24}h$  и  $n_{34}h$  в уравнениях (11.10) можно пренебречь. В этом случае вместо системы (11.10) получаем

$$\left. \begin{aligned} (p + n_{11})\upsilon + n_{12}\alpha + n_{13}\vartheta &= n_d\delta_d + f_1; \\ -n_{21}\upsilon + (p + n_{22})\alpha - (p + n_{23})\vartheta &= n_{d1}\delta_d + f_2; \\ n_{31}\upsilon + (n_0p + n_{32})\alpha + (p^2 + n_{33}p)\vartheta &= -n_b\delta_b + f_3; \\ -n_{41}\upsilon + n_{42}\alpha - n_{42}\vartheta + ph &= \upsilon_y. \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

Первые три уравнения системы (11.11) могут быть исследованы независимо от последнего уравнения. Если предположить, что ручка управления двигателями и руль высоты фиксированы ( $\delta_d = \delta_b = 0$ ), а внешние возмущения отсутствуют ( $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ ), то получим систему, описывающую собственные движения (колебания) ЛМР.

Характеристическое уравнение этой системы имеет четыре корня, которые могут быть либо вещественными, либо попарно сопряженными комплексными. Обычно одна пара корней по абсолютной



величине значительно больше (более чем на порядок) второй пары. Пара больших корней соответствует так называемому короткопериодическому движению, т. е. угловому колебанию БПЛА относительно центра масс. При этом изменяются углы атаки и тангажа, а скорость полета неизменна. Пара малых корней характеризует длиннопериодическое (фугоидное) движение, при котором изменяются скорость полета и угол тангажа. При фугоидном движении сумма моментов относительно поперечной оси равна нулю.

Для рассмотрения короткопериодического движения положим  $v = 0$ , тогда из системы (11.11) получим

$$\left. \begin{aligned} (p + n_{22})\alpha - p\vartheta &= f_2; \\ (n_0 p + n_{32})\alpha + (p^2 + n_{33}p)\vartheta &= -n_B \delta_B + f_3; \\ \alpha - \vartheta + ph &= \gamma_y. \end{aligned} \right\}$$

В горизонтальном полете эта система сведется к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} (p + n_{22})\alpha - p\vartheta &= f_2; \\ (n_0 p + n_{32})\alpha + (p^2 + n_{33}p)\vartheta &= -n_B \delta_B + f_3. \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

Из уравнений (1.12), применяя преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях, получим передаточные функции

$$\left. \begin{aligned} W_{\delta\vartheta}(p) &= \frac{\vartheta(p)}{\delta_B(p)} = \frac{-n_B(p + n_{22})}{(p^2 + 2d_0\omega_0 p + \omega_0^2)p}; \\ W_{\delta\alpha}(p) &= \frac{\alpha(p)}{\delta_B(p)} = \frac{-n_B}{p^2 + 2d_0\omega_0 p + \omega_0^2}, \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

где  $\omega_0^2 = n_{32} + n_{22}n_{33}$ ;  $2d_0\omega_0 = n_0 + n_{22} + n_{33}$ .

Из выражений (11.13) следует, что БПЛА по отношению к углу атаки  $\alpha$  является колебательным звеном, тогда как по отношению

к углу тангажа  $\vartheta$  его передаточная функция может быть представлена в виде последовательного соединения колебательного, форсирующего и интегрирующего звеньев (рис. 11.4).

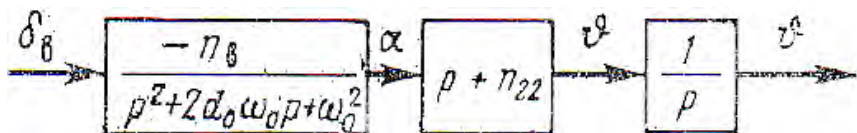


Рис. 11.4. Структурная схема динамики ЛМП

На рис. 11.5 динамика БПЛА в соответствии с системой уравнений (11.12) характеризуется двухканальной структурной схемой с асимметричными перекрестными обратными связями. Поскольку каждый из каналов включен в обратную связь другого канала, это дает ясное представление о динамике системы и позволяет легко находить любую из передаточных функций.

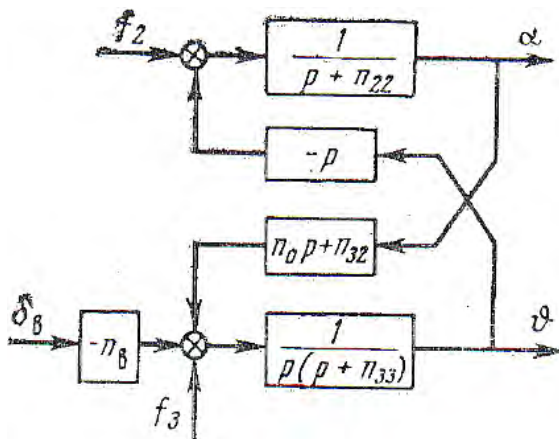


Рис. 11.5. Структурная схема динамики БПЛА

Для получения *частотных характеристик* БПЛА положим в выражениях (11.13)  $p = j\omega$ , где  $\omega$  – относительная частота, связанная с частотой  $\omega$  соотношением  $\omega = \tau_a \omega'$ .

Тогда амплитудные частотные и фазовые частотные характеристики будут определяться выражениями

$$\left. \begin{aligned}
 A_g(\omega) &= \frac{n_B \sqrt{\omega^2 + n_{22}^2}}{\omega \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d_0^2 \omega_0^2 \omega^2}}; \\
 \varphi_g &= \operatorname{arctg} \left\{ \frac{2d_0 \omega_0 \omega^2 + n_{22}(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega [2d_0 \omega_0 n_{22} - (\omega_0^2 - \omega^2)]} \right\}; \\
 A_\alpha(\omega) &= \frac{n_B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d_0^2 \omega_0^2 \omega^2}}; \\
 \varphi_\alpha &= \operatorname{arctg} \frac{2d_0 \omega_0 \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (11.14)$$

Оценим ширину области существенных частот БПЛА, для чего условимся считать существенными такие частоты, при которых амплитуда колебаний угла атаки составляет 5 % от амплитуды на нулевой частоте, рис. 11.6. Из выражения (11.14) получаем наибольшую частоту  $\omega_m$  из области существенных частот:

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - 2d_0^2 + \sqrt{(1 - d_0^2)^2 - 0,11}}.$$

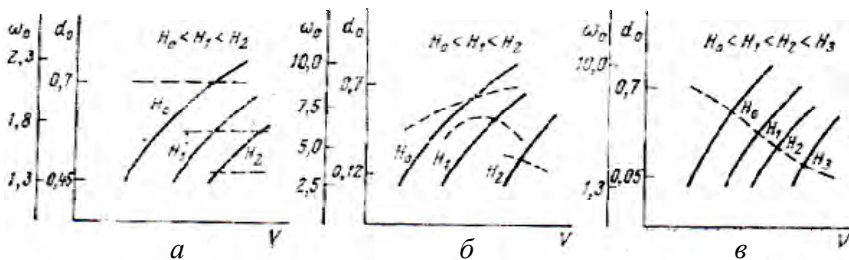


Рис. 11.6. Графики зависимости частоты и коэффициента демпфирования от режимов полета

Уравнения длиннопериодического движения можно получить из системы (11.11), если учесть равновесие моментов относительно поперечной оси:

$$\left. \begin{aligned} (p + n_{11})\upsilon + n_{12}\alpha + n_{13}\vartheta &= n_{\text{д}}\delta_{\text{д}} + f_1; \\ -n_{21}\upsilon + (p + n_{22})\alpha - p\vartheta &= n_{\text{д1}}\delta_{\text{д}} + f_2; \\ n_{31}\upsilon + n_{32}\alpha &= -n_{\text{в}}\delta_{\text{в}} + f_3. \end{aligned} \right\} \quad (11.15)$$

Особенности этого движения определяются свойствами характеристического уравнения системы (11.15):

$$p^2 + A_1p + A_2 = 0,$$

где

$$A_1 = n_{11} - \frac{n_{31}}{n_{32}}(n_{12} + n_{13});$$

$$A_2 = -n_{13} \left( n_{21} + \frac{n_{31}}{n_{32}}n_{22} \right).$$

Если предположить, что угловые координаты  $\vartheta$  и  $\alpha$  стабилизированы быстродействующим автопилотом, то  $\vartheta = \alpha = 0$  и вместо системы (11.15) получим

$$(p + n_{11})\upsilon = n_{\text{д}}\delta_{\text{д}} + f_1.$$

Это выражение, приближенно описывающее движение центра масс БПЛА, будет использовано при рассмотрении автоматов скорости полета.

## Глава 12. УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЦЕНТРА МАСС БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

### 12.1. Линейная модель управления высотой полета

Движение центра масс БПЛА должно совершаться по программной траектории. Выбор траектории полета обуславливается различными факторами, среди которых основными являются безопасность полета, экономичность, тактические соображения и др.

При реализации систем управления движением центра масс предусматривается управление высотой полета, боковым отклонением, пройденным расстоянием, горизонтальными, вертикальными и боковыми составляющими скоростей и ускорений.

Для формирования контура управления высотой полета необходимо получать информацию о высоте с помощью, например, барометрического высотомера, информацию о скорости изменения высоты, получаемую путем дифференцирования сигнала высоты, информацию об угле тангажа, которая необходима для демпфирования движения центра масс, и информацию об угловой скорости тангажа, необходимую для демпфирования угловых движений. Схема на рис. 12.1 отражает указанную структуру сигналов для **статического автопилота**.

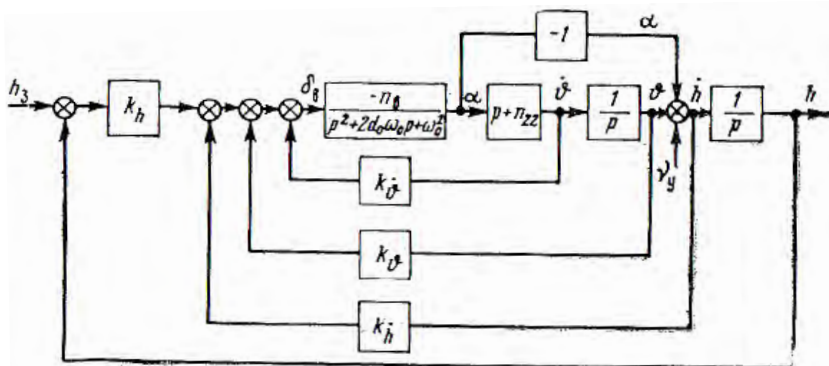


Рис. 12.1. Структурная схема системы управления высотой полета

Рассмотрим работу схемы при отклонении высоты полета от заданной, например, при наборе высоты (рис. 12.2). В горизонтальном установившемся полете (точка 1) между вектором скорости  $V$

и продольной осью БПЛА  $x$  имеется положительный угол атаки  $\alpha_0$ . Пусть в точке 2 автопилотом с помощью привода управления создано рассогласование  $\Delta h = h_3 - h$  (где  $h_3$  и  $h$  – соответственно заданная и фактическая относительные высоты полета), под действием которого произойдет отклонение руля высоты и продольной оси  $x$  кверху, при этом угол атаки получит приращение  $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$ , что приведет к увеличению подъемной силы. Вследствие этого вектор скорости начнет поворачиваться вверх и траектория полета искривится. В точке 3 уменьшается рассогласование  $\Delta h$  и возрастает угол тангажа, что приведет к уменьшению угла отклонения руля высоты. При этом уменьшатся угол атаки и приращение подъемной силы, поэтому вектор скорости перестанет поворачиваться. Между точками 3 и 4 имеется такая точка, в которой рассогласование  $\Delta h$  становится равным углу тангажа, поэтому руль высоты займет нейтральное положение, а угол атаки станет равным значению  $\alpha_0$ , которое было в горизонтальном полете. При дальнейшем наборе высоты  $\Delta h$  продолжает уменьшаться, поэтому под действием сигнала угла тангажа руль будет отклонен вниз, а угол атаки станет отрицательным (точка 4). Траектория полета будет искривляться выпуклостью вверх, пока ЛА не перейдет в точке 5 в горизонтальный полет. Теперь угол атаки опять будет равен  $\alpha_0$ .

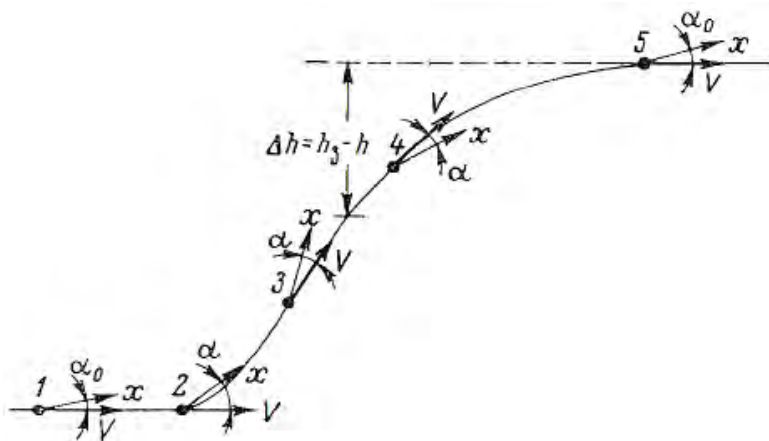


Рис. 12.2. Схема набора высоты

Из изложенного видно, что при автоматическом управлении высотой полета БПЛА совершает сложное движение в вертикальной плоскости.

Рассмотрим процессы управления высотой полета БПЛА с помощью статического автопилота, схема которого изображена на рис. 12.1. Из схемы следует закон управления автопилота, который имеет вид

$$\delta_{\text{в}} = (k_h + k_h p)h + (k_{\text{г}} + k_{\text{г}} p)\vartheta - k_h h_3. \quad (12.1)$$

Предположим, что элементы системы управления не имеют динамических погрешностей, что обычно реализуется, поскольку движение центра масс является относительно медленным. Возьмем уравнение БПЛА, полагая скорость полета постоянной, в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta(p)\vartheta &= (b_0 p + a_4) p h_3 + F_1; \\ \Delta(p)h &= a_4 h_3 + F_2, \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

где

$$a_1 = c_1 + n_{\text{в}} k_{\text{г}}; \quad a_2 = c_2 + n_{\text{в}} (k_{\text{г}} + n_{22} k_{\text{г}});$$

$$a_3 = n_{\text{в}} n_{22} (k_{\text{г}} + k_h); \quad a_4 = n_{\text{в}} n_{22} k_h;$$

$$b_0 = n_{\text{в}} k_h; \quad \Delta(p) = p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4,$$

а величины  $F_1$  и  $F_2$  – внешние возмущения, вызванные факторами  $f_2$ ,  $f_3$  и  $v_y$ .

Устойчивость системы (12.2) следует из неравенства

$$a_3 (a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4 > 0,$$

а критический коэффициент усиления  $k_h$  имеет вид

$$k_h = (k_{\text{г}} + k_h) \left[ \frac{c_2 + n_{\text{в}} (k_{\text{г}} + n_{22} k_{\text{г}})}{c_1 + n_{\text{в}} k_{\text{г}}} - \frac{n_{\text{в}} n_{22} (k_{\text{г}} + k_h)}{(c_1 + n_{\text{в}} k_{\text{г}})} \right]. \quad (12.3)$$

Из выражения (12.3) видно, что для увеличения коэффициента  $k_h$  необходимо увеличивать коэффициенты  $k_{\dot{h}}$ ,  $k_{\dot{g}}$  и  $k_{\ddot{g}}$ . Заметим, что управлять высотой полета без информации об угле и угловой скорости тангажа невозможно. Это, в частности, следует из выражения (12.3), если в нем  $k_{\dot{g}}$  и  $k_{\ddot{g}}$  положить равными 0. При этом сигнал угловой скорости необходим для демпфирования угловых движений, а сигнал угла – для демпфирования движений центра масс.

Передаточные числа системы управления высотой полета будем выбирать из условий получения заданного переходного процесса. Для этого требуется, чтобы передаточная функция по управляющему сигналу

$$W_h(p) = \frac{a_4}{p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4} \quad (12.4)$$

совпадала со стандартной передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{\Omega_4}{p^4 + A_1 \Omega p^3 + A_2 \Omega^2 p^2 + A_3 \Omega^3 p + \Omega_4}, \quad (12.5)$$

где  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и  $\Omega$  – заданные величины.

В табл. 12.1 даны значения величин  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  для случаев близости частотных характеристик, стандартных коэффициентов и кратных корней. Что касается частоты  $\Omega$ , то она определяет время регулирования.

Таблица 12.1

### Характеристики

Рассматриваемый случай	$A_1$	$A_2$	$A_3$
Близость частотных характеристик	2,62	3,08	2,62
Стандартные коэффициенты	3,41	4,24	3,41
Кратные корни	4	6	4



На рис. 12.3 даны графики переходных процессов для случая кратных корней (кривая 1), стандартных коэффициентов (кривая 2) и близости частотных характеристик (кривая 3). Видно, что наиболее приемлемым является переходный процесс при кратных корнях (время регулирования не превышает 30 с).

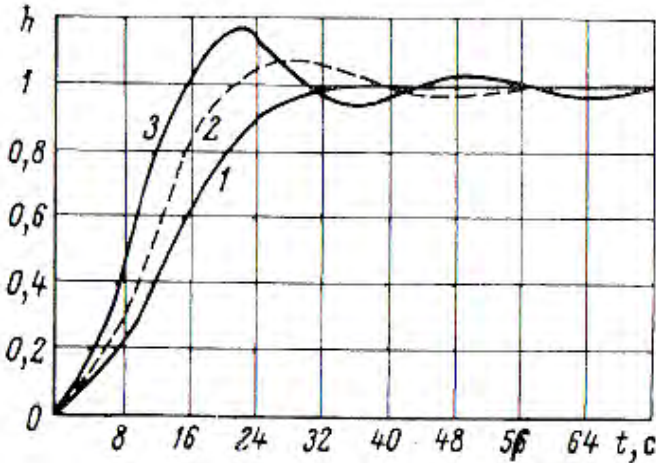


Рис. 12.3. Графики переходного процесса

Из сравнения коэффициентов передаточных функций (12.4) и (12.5) получаем выражения для передаточных чисел:

$$\left. \begin{aligned} k_h &= \frac{\Omega_4}{n_B n_{22}}; \quad k_{\dot{h}} = \frac{1}{n_B n_{22}} \left( A_3 \Omega^3 - A_2 \Omega^2 n_{22} + n_{22} (c_2 - c_1 n_{22}) \right); \\ k_{\ddot{h}} &= \frac{1}{n_B} \left( A_2 \Omega^2 - c_2 + c_1 n_{22} - A_1 \Omega n_{22} \right); \quad k_{\ddot{\delta}} = \frac{1}{n_B} (A_1 \Omega - c_1). \end{aligned} \right\}$$

### Пример 12.1

Требуется найти передаточные числа для дрона с параметрами  $c_1 = 5,5$ ,  $c_2 = 42$ ,  $n_B = 46$ ,  $n_{22} = 2,4$ ,  $\tau_a = 2,5$  с в случае кратных корней ( $A_1 = A_3 = 4$ ,  $A_2 = 6$ ) и частоты  $\Omega = 4$ :

$$k_h = 2,32; \quad k_{\dot{h}} = 0,625; \quad k_{\ddot{h}} = 0,625; \quad k_{\ddot{\delta}} = 0,23.$$

Размерные передаточные числа по угловым координатам будут

$$k_{\vartheta'} = k_{\vartheta} = 0,625 \frac{\text{град}}{\text{град}}; \quad k'_{\vartheta} = \tau_a k_{\vartheta} = 0,575 \frac{\text{град}}{\text{град/с}}.$$

Размерные передаточные числа  $k_h$  и  $k_{\dot{h}}$  найдем из соотношений

$$k_h = \frac{\delta_H}{h} = \tau_a V \frac{\delta_B}{\Delta H} \quad \text{и} \quad k_{\dot{h}} = \frac{\delta_H}{ph} = V \frac{\delta_B}{\Delta H}$$

или

$$k_{h'} = \frac{k_h}{\tau_a V} \quad \text{и} \quad k'_{\dot{h}} = \frac{k_{\dot{h}}}{V}.$$

Если  $v = 300$  м/с, то

$$k_{h'} = \frac{2,32}{2,5 \cdot 300} = 0,003 \frac{\text{град}}{\text{с}}; \quad k'_{\dot{h}} = \frac{0,625}{300} = 0,002 \frac{\text{град}}{\text{м/с}}.$$

Найденные передаточные числа  $k_{\vartheta}$  и  $k_{\dot{\vartheta}}$  имеют тот же порядок величин, что и значения, полученные при исследовании угловых движений. Это обстоятельство позволяет пользоваться одними и теми же передаточными числами как при управлении угловыми движениями, так и при управлении движением центра масс.

Анализ структуры коэффициента  $a_3 = n_b n_{22} (k_{\vartheta} + k_{\dot{\vartheta}})$  в передаточной функции (12.4) показывает, что передаточные числа  $k_{\vartheta}$  и  $k_{\dot{\vartheta}}$  равнозначны. Уменьшение одного из этих передаточных чисел можно компенсировать увеличением другого. Например, передаточное число  $k_{\dot{\vartheta}}$  можно положить равным нулю, увеличив соответственно передаточное число  $k_{\vartheta}$ . Эквивалентность этих передаточных чисел вытекает из кинематического уравнения  $ph = \vartheta - \alpha + v_y$ , т. е. угол тангажа с точностью до  $-\alpha + v_y$  совпадает с производной

от сигнала высоты. Учитывая эти обстоятельства в продольных каналах автопилотов сигнал  $\dot{h}$  почти никогда не используется, а соответствующее демпфирование движений центра масс достигается за счет сигнала угла тангажа.

При использовании **астатического автопилота** для управления высотой полета закон управления обычно имеет вид

$$\delta_b = \frac{1}{p} \left( k_\vartheta \vartheta + k_{\dot{\vartheta}} p \vartheta + k_{\ddot{\vartheta}} p^2 \vartheta + k_h (h - h_3) \right). \quad (12.6)$$

Отметим, что астатические автопилоты не имеют преимуществ перед статическими автопилотами.

## 12.2. Управление высотой полета при учете случайных возмущений со стороны воздушной среды

Рассмотрим поведение самолета со статическим и астатическим автопилотами в турбулентной атмосфере. Статические характеристики турбулентной атмосферы зададим в виде спектральной плотности

$$S_v(\omega) = \frac{2\alpha_v \sigma_v^2}{\alpha_v^2 + \omega^2},$$

где  $\sigma_v^2$  – дисперсия скорости порывов ветра.

Реакция БПЛА со статическим и астатическим автопилотами будет определяться уравнениями

$$\Delta_1(p)h = L_1(p)v_y; \quad (12.7)$$

$$\Delta_2(p)h = L_2(p)v_y, \quad (12.8)$$

где  $\Delta_1(p)$  и  $\Delta_2(p)$  – полиномы четвертого и пятого порядков, получаемые в результате совместного решения уравнений законов

управления (12.1) и (12.6). Полиномы  $L_1(p)$  и  $L_2(p)$  в правых частях уравнений (12.7) и (12.8) имеют вид

$$L_1(p) = h_{22} \left( p^2 + (n_{33} + n_{\text{в}} k_{\dot{\vartheta}}) p + n_{\text{в}} k_{\vartheta} \right);$$

$$L_2(p) = h_{22} \left( p^3 + (n_{33} + n_{\text{в}} k_{\dot{\vartheta}}) p^2 + n_{\text{в}} k_{\dot{\vartheta}} p + n_{\text{в}} k_{\vartheta} \right).$$

Для вычисления дисперсии ошибок статической и астатической систем можно воспользоваться соотношениями

$$\sigma_{\text{ст}}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{L_1(j\omega)}{\Delta_1(j\omega)} \right|^2 S_{\text{v}}(\omega) d\omega; \quad (12.9)$$

$$\sigma_{\text{аст}}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{L_2(j\omega)}{\Delta_2(j\omega)} \right|^2 S_{\text{v}}(\omega) d\omega. \quad (12.10)$$

Поскольку непосредственное использование формул (12.9) и (12.10) затруднительно ввиду их громоздкости, то применим косвенный способ оценки. Для этого заметим, что подынтегральные выражения в формулах (12.9) и (12.10) отличаются множителями

$$\left| \frac{L_1(j\omega)}{\Delta_1(j\omega)} \right|^2 \quad \text{и} \quad \left| \frac{L_2(j\omega)}{\Delta_2(j\omega)} \right|^2,$$

которые рассмотрим применительно к частному случаю кратных корней:

$$\left| \frac{L_1(j\omega)}{\Delta_1(j\omega)} \right|^2 = \frac{\omega^4 + B_1 \omega^2 + B_2}{(\omega^2 + \Omega^2)^4}; \quad (12.11)$$

$$\left| \frac{L_2(j\omega)}{\Delta_2(j\omega)} \right|^2 = \frac{\omega^6 + B' \omega^4 + B_2 \omega^2 + B_3'}{(\omega^2 + \Omega^2)^5}. \quad (12.12)$$

При  $\omega \rightarrow 0$  эти функции принимают значения соответственно  $B_2 / \Omega^8$  и  $B'_2 / \Omega^{10}$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$  обращаются в нуль. Предположим, что параметры систем выбраны так, что частоты  $\Omega$  у них одинаковы. Тогда коэффициент  $B'_3 = n_b k_9$  примерно на порядок больше коэффициента  $B_2 = n_b k_9$  вследствие того, что передаточное число  $k_9$  для астатической системы примерно на столько же больше, чем для статической. В таком случае выражения  $B_2 / \Omega^8$  и  $B'_2 / \Omega^{10}$  имеют одинаковый порядок величин и, следовательно, функции (12.11) и (12.12) будут практически совпадать. Вследствие этого дисперсии ошибок  $\sigma_{ст}^2$  и  $\sigma_{аст}^2$  будут иметь один порядок величин.

Таким образом, *статическая и астатическая системы управления высотой полета при прочих равных условиях в турбулентной атмосфере ведут себя одинаково*. При выборе систем управления высотой полета следует отдать предпочтение статической системе как более простой.

Рассмотренный случай поведения дрона самолетной схемы с автопилотом в турбулентной атмосфере показывает, что для уменьшения дисперсии ошибки выдерживания высоты полета необходимо увеличивать передаточные числа автопилота. Если на систему, кроме турбулентных возмущений, действуют помехи на входном управляющем сигнале, то требования к автопилоту будут другими, в частности, большие передаточные числа автопилота могут оказаться вредными.

Предположим, что полет совершается над неровной поверхностью, а высота измеряется радиовысотомером (рис. 12.4). Если неровности земной поверхности имеют достаточную протяженность, то радиовысотомер будет давать показание

$$h' = h - h_{н},$$

где  $h$  – средняя высота, которую необходимо выдерживать постоянной;

$h_{н}$  – высота неровностей.

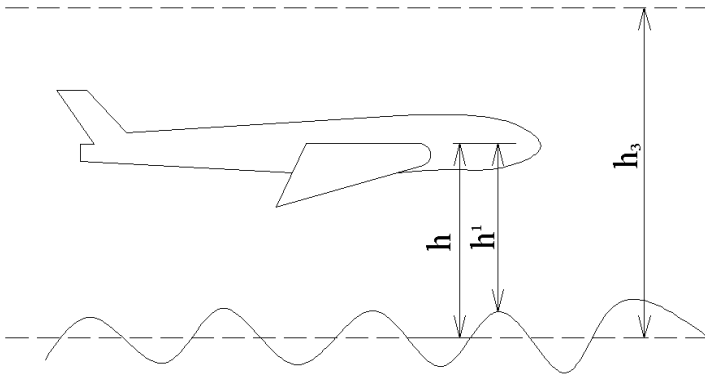


Рис. 12.4. Схема полета над неровной поверхностью

Если сравнить показание высотомера  $h'$  с требуемым значением высоты  $h_3$ , то получим сигнал рассогласования на входе в автопилот  $\Delta h = h_3 + h_n - h$  (см. рис. 12.4). Следовательно, на величину  $h_n$  можно смотреть как на помеху, вводимую в систему вместе с полезным сигналом  $h_3$ .

Из схемы (рис. 12.5) видно, что на систему действуют помеха  $h_n$  и вертикальные порывы ветра  $v_y$ . Поведение системы при этих условиях, как легко получить из второго уравнения (12.2), описывается уравнением

$$\Delta(p)h = a_4(h_3 + h_n) + L(p)v_y,$$

где полином  $L(p)$  в уравнении (12.8) был обозначен  $L_1(p)$ .

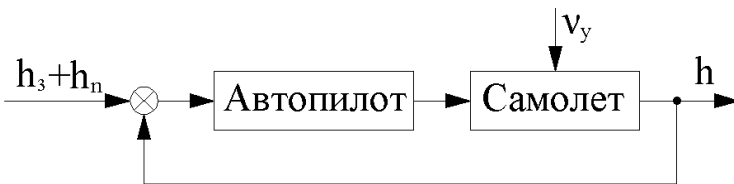


Рис. 12.5. Функциональная схема системы управления

Так как по предположению  $h_3$  постоянно, найдем только ту часть погрешности  $h^*$ , которая обусловлена помехами  $h_n$  и  $v_y$ , т. е.

$$\Delta(p)h^* = a_4 h_n + L(p)v_y$$

или

$$h^* = W(p)h_n + (1 - W(p))A(p)v_y, \quad (12.13)$$

где

$$W(p) = \frac{a_4}{\Delta(p)}; \quad A(p) = \frac{Lp}{\Delta(p) - a_4}.$$

Из уравнения (12.13) следует, что при отсутствии порывов ветра ( $v_y = 0$ ) для уменьшения реакции дрона на неровности  $h_n$  необходимо уменьшать частоту замкнутой системы  $\Omega$  (или, что то же самое, необходимо уменьшать передаточные числа автопилота), т. е. осуществлять фильтрацию помехи  $h_n$  путем сильного сглаживания. Такое сглаживание ухудшит воспроизведение заданного сигнала управления  $h_3$ . Если на дрон действуют порывы ветра, то при малой частоте  $\Omega$  система будет сильно реагировать на эти порывы. Это значит, что при сильном сглаживании помех  $h_n$  возрастают помехи от порывов ветра. Уменьшения погрешности от порывов ветра можно достигнуть путем увеличения частоты  $\Omega$ , но при этом возрастает погрешность от помех  $h_n$ . Можно выбрать такую частоту  $\Omega$ , при которой погрешность  $h^*$  будет минимальной.

Будем оценивать погрешность  $h^*$  дисперсией  $\sigma^2$ , которую в предположении, что помехи  $h_n$  и  $v_y$  некоррелированы и являются стационарными случайными функциями времени, можно определить по формуле

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |W(j\omega)|^2 S_H(\omega) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |1 - W(j\omega)|^2 |A(j\omega)|^2 S_V(\omega) d\omega, \quad (12.14)$$

где  $S_H(\omega)$  – спектральная плотность неровностей;

$S_V(\omega)$  – спектральная плотность порывов ветра.

Первые множители в подынтегральных выражениях являются квадратами частотных характеристик системы для входных сигналов соответственно  $h_n$  и  $v_y$ .

Вид функции  $S_H(\omega)$  определяется протяженностью неровностей поверхности, скоростью полета, высотой полета и др. Если спектр функции  $S_H(\omega)$  значительно шире полосы пропускания системы, то в целях упрощения можно принять, что помеха  $h_n$  является белым шумом.

Из выражения (12.14), как и из уравнения (12.13), следует, что при сильном сглаживании ( $W(j\omega) \rightarrow 0$ ) помехи от неровностей стремятся к нулю, но усиливаются помехи от порывов ветра. Если  $W(j\omega) \rightarrow 1$ , т. е. если собственная частота системы достаточно велика, то помехи от порывов ветра исчезают, но возрастают помехи от неровностей. Можно подобрать такую частотную характеристику  $W(j\omega)$ , называемую оптимальной, при которой дисперсия  $\sigma^2$  минимальна.

Нахождение оптимальной частотной характеристики  $W(j\omega)$  представляет большую трудность. Для приближенного определения частотной характеристики введем обозначения

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |W(j\omega)|^2 S_H(\omega) d\omega;$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |1 - W(j\omega)|^2 |A(j\omega)|^2 S_V(\omega) d\omega.$$



Предположим, что структура автопилота задана, т. е. задан закон управления, и необходимо найти передаточные числа. Меняя, например, передаточные числа автопилота или, что равносильно, частоту замкнутой системы, можно добиться минимизации дисперсии  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ .

При возрастании частоты системы дисперсия  $\sigma_1^2$  будет возрастать, а дисперсия  $\sigma_2^2$  – убывать (рис. 12.6). Суммарная дисперсия  $\sigma^2$  будет минимальна в точке пересечения кривых  $\sigma_1^2$  и  $\sigma_2^2$ . Следовательно, параметры автопилота (передаточные числа) необходимо выбирать такими, чтобы частота системы  $\Omega$  соответствовала минимуму  $\sigma^2$ .

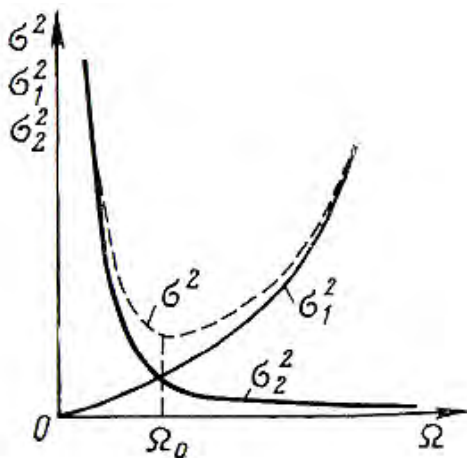


Рис. 12.6. Графики дисперсии ошибок высоты

Следует иметь в виду, что спектральные плотности  $S_h(\omega)$  и  $S_v(\omega)$  помех  $h_n$  и  $v_y$  не остаются неизменными в разных условиях полета, поэтому частота системы для получения минимума дисперсии должна меняться по условиям полета. Такое изменение частоты (параметров автопилота) может быть достигнуто за счет применения *устройств самонастройки*.

### 12.3. Управление высотой полета низколетящих дронов

Повышенный интерес к полетам на малых и предельно малых высотах обусловлен снижением вероятности  $P_{\Pi}$  поражения дрона средствами ПВО (рис. 12.7). Однако при таком полете возрастает вероятность  $P_c$  столкновения самолета с препятствиями. Вероятность достижения цели  $P = (1 - P_{\Pi}) (1 - P_c)$  будет наибольшей при некоторой оптимальной высоте  $h_0$ . Анализ показывает, что оптимальная высота полета  $h_0$  зависит от рельефа местности и определяется разностью между наименьшими и наибольшими возвышениями.

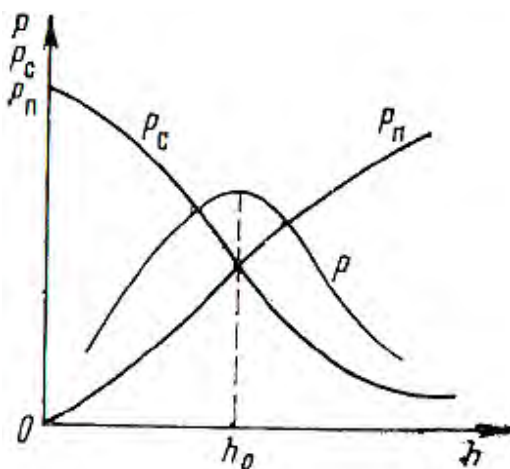


Рис. 12.7. Графики вероятностей столкновения, поражения и выхода на цель

Трудности полета на малых высотах при автоматическом пилотировании обусловлены недостатком информации о впереди лежащей местности, быстротечностью процессов, временем реакций приводов на изменяющуюся обстановку и турбулентностью атмосферы. Особо рассмотрения требуют условия полета в городских условиях.

Для уменьшения высоты полета и, следовательно, увеличения вероятности  $P$  достижения цели необходимо иметь измерительные устройства для получения информации о рельефе местности, впереди лежащей по курсу, улучшать системы отображения информации о препятствиях и автоматизировать управление дроном при облете препятствий.

Полет на малой высоте возможен, если известны истинная высота над пролетаемой местностью и расстояние до препятствий рельефа, расположенных впереди. Измерение истинной высоты полета осуществляется радиовысотомерами малых высот. Эти приборы достаточно совершенны и обладают большой надежностью. Однако выдаваемая ими информация о высоте полета недостаточна для автоматического пилотирования при полетах на малых высотах.

Для облета препятствий необходимо измерять не только истинную высоту полета, но и наклонную дальность до препятствий, лежащих впереди. Зная дальность, можно определить так называемую упрежденную высоту полета, т. е. высоту впереди лежащих препятствий. Измерение наклонной дальности  $D$  до препятствий (рис. 12.8) производится с помощью радиодальномера так, что ось антенны дальномера наклоняется на заданный угол  $\mu$  по отношению к продольной оси или вектору скорости самолета или по отношению к горизонту.

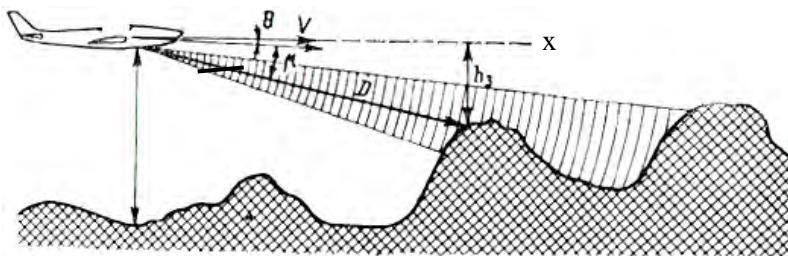


Рис. 12.8. Схема работы дальномера

Антенны излучают неподвижные или сканирующие по отношению к опорному направлению лучи. В последнем случае измеряется не только дальность до препятствия, но и вырабатывается информация о рельефе впереди лежащей местности.

Автоматическое управление при облете препятствий осуществляется путем стабилизации минимально допустимой наклонной дальности  $D_3$ , которая может быть определена по формуле

$$D_3 = \frac{h_3}{\sin \mu},$$

где  $h_3$  – заданная упрежденная высота (см. рис. 12.8).

Таким образом, стабилизация наклонной дальности сводится к стабилизации упрежденной высоты  $h_3$ . При уменьшении наклонной дальности ниже допустимого предела дрон должен увеличивать высоту полета с целью облета препятствия.

Недостатком этого способа пилотирования является то, что при облете препятствия происходит «выброс» высоты (кривая 1 на рис. 12.9). Для устранения этого недостатка необходимо обеспечить облет препятствия так, чтобы над вершиной препятствия траектория была близка к горизонтальной (кривая 2). Это достигается с помощью логического устройства, которое при исчезновении сигнала наклонной дальности обеспечивает сначала стабилизацию угла наклона траектории  $\theta_3$ , а затем стабилизацию постоянной отрицательной перегрузки  $n_3 = -0,5$ . При отрицательной перегрузке траектория полета начнет снижаться. Снижение траектории будет продолжаться до тех пор, пока луч радиодальномера не коснется впереди лежащей местности. После этого система опять будет стабилизировать заданную упрежденную высоту  $h_3$ .

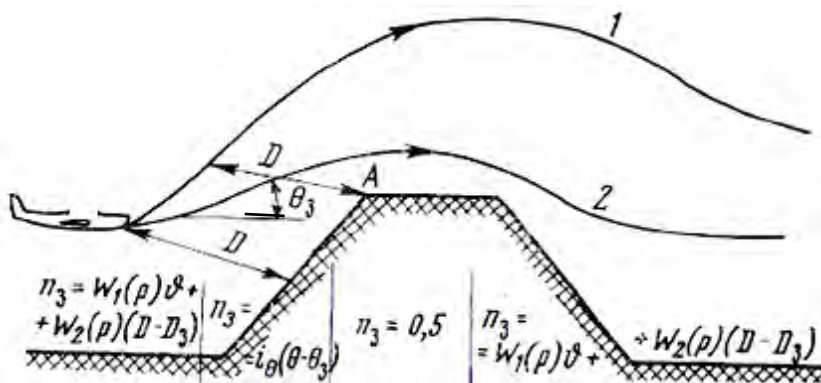


Рис. 12.9. Законы управления облетом препятствий

При описанном алгоритме управления система будет поддерживать заданную истинную высоту, а после пролета вершины препятствия дрон начнет снижаться. После этого картина облета препятствий будет такой же, как указано выше. При реализации систем управления необходимо учитывать требования по ограничению перегрузок, о которых говорилось выше.

На рис. 12.9 показаны законы управления, необходимые для реализации траектории 2 облета. Видно, что при полете над ровной местностью закон управления имеет вид

$$n_3 = W_1(p)\vartheta + W_2(p)(D - D_3),$$

где  $n_3$  – заданная перегрузка;

$$W_1(p) = i_\vartheta \frac{Tp}{Tp+1};$$

$$W_2(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2dTp + 1}.$$

Этот закон сохраняется и при облете препятствия вплоть до потери луча. Затем необходимо осуществлять стабилизацию угла наклона траектории

$$n_3 = i_\theta (\theta - \theta_3),$$

где  $\theta_3$  – запомненное значение  $\theta$  в момент потери луча.

Стабилизация угла наклона траектории должна сохраняться почти до точки  $A$ , которая определяется моментом времени  $t_3$  после потери луча по формуле

$$t_3 = \frac{D_3}{V},$$

где  $D_3$  – запомненное значение дальности в момент потери луча.

После этого необходимо обеспечить закон управления  $n_3 = -0,5$ , при котором траектория начнет снижаться. При появлении луча опять необходимо переходить на закон управления

$$n_3 = W_1(p)\vartheta + W_2(p)(D - D_3).$$

Рассмотренная схема управления должна включать радиолокатор (РЛ) для определения рельефа впереди лежащей местности, радиовысотомер малых высот, логическое устройство (контроллер) и автопилот. На рис. 12.10 дана схема такой системы. Сигналы с РЛС поступают в контроллер 1, где в соответствии с алгоритмом формируется закон управления, различный на различных этапах облета препятствия. В контроллер может подаваться также сигнал радиовысотомера для формирования управляющего сигнала безопасности на случай отказа РЛС.

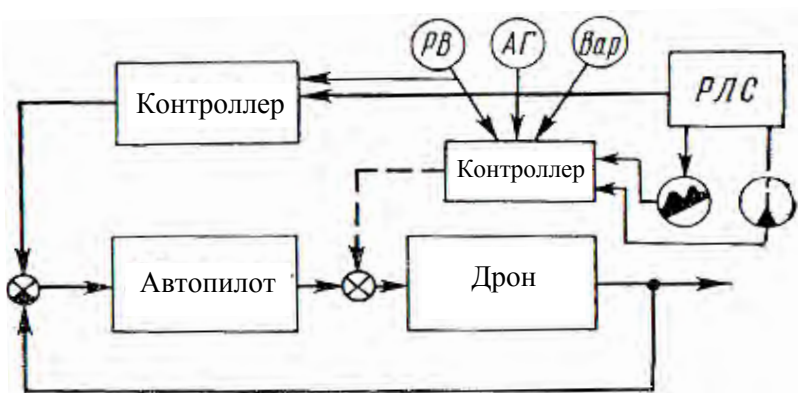


Рис. 12.10. Схема системы управления при облете препятствий

Контроллер получает информацию от радиовысотомера (РВ), авиагоризонта (АГ) и вариометра (Вар), а также от приборов, отображающих рельеф и препятствия.

При создании систем управления полетом на малой высоте основное внимание уделяется безопасности полета.

#### 12.4. Управление боковым движением центра масс беспилотного летательного аппарата

Управление боковым движением центра масс дрона производится путем воздействия горизонтальных составляющих боковых сил, создаваемых при крене дрона или скольжении. Боковая сила от крена дрона обычно значительно больше силы, возникающей от скольжения, что связано с большей эффективностью элеронов по сравнению

с рулем направления. Если учитывать боковое движение со скольжением нежелательно, то тогда на большинстве крылатых БПЛА аэропланной схемы это управление осуществляется путем крена.

Учитывая это и пренебрегая скольжением (скольжение обычно устраняется путем воздействия на руль направления), уравнения бокового движения центра масс дрона можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} p\psi &= n_{14}\gamma; \\ pz &= \psi + v_z, \end{aligned} \right\} \quad (12.15)$$

где  $z$  – координата бокового движения центра масс;

$v_z$  – относительная скорость бокового ветра.

Угол крена дрона, необходимый для создания боковой силы, возьмем пропорциональным боковому отклонению центра масс и углу рыскания, т. е.

$$\gamma = k_z^*(z - z_3) + k_\psi^*\psi. \quad (12.16)$$

Взаимодействие дрона и системы управления показано на рис. 12.11.

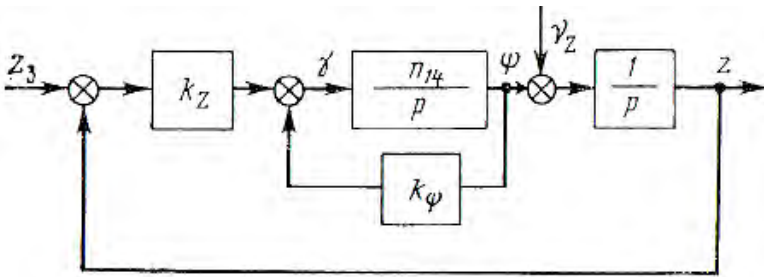


Рис. 12.11. Структурная схема управления боковым движением дрона

Решая совместно уравнения (12.15) и (12.16), получим

$$\left( p^2 + 2d\Omega p + \Omega^2 \right) z = \Omega^2 z_3 + (p + 2d\Omega) v_z, \quad (12.17)$$

где

$$\Omega^2 = -n_{14}k_z^*; \quad 2d\Omega = -n_{14}k_\phi^*.$$

Передаточные числа системы управления определяются из соотношений

$$k_z^* = \frac{\Omega^2}{-n_{14}}; \quad k_\psi^* = \frac{2d\Omega}{-n_{14}}.$$

### Пример 12.2

Вычислить передаточные числа дрона, для которого

$$n_{14} = -0,1,$$

$$d = 1 \quad \text{и} \quad \Omega = 0,5.$$

Тогда

$$k_z^* = \frac{0,25}{0,1} = 2,5; \quad k_\psi^* = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0,5}{0,1} = 10.$$

Так как передаточные числа  $k^*$  и  $k_z^*$  получены в результате предположения, что элероны регулируются с большой скоростью (контур управления элеронами является быстродействующим), имеем

$$\sigma_\vartheta = k_\gamma \gamma + k_\psi \psi + k_z (z - z_3) = 0,$$

откуда

$$k_\psi = k_\gamma k_\psi^*; \quad k_z = k_\gamma k_z^*.$$

Взяв полученное передаточное число канала крена  $k_\gamma = 0,28$ , найдем

$$k_\psi = 2,8 \frac{\text{град}}{\text{град}}; \quad k_z' = \frac{0,7}{\tau_a M} = \frac{0,7}{2,5 \cdot 300} = 0,0009 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$



Представление о переходном процессе в системе при выбранных передаточных числах дает кривая на рис. 12.12.

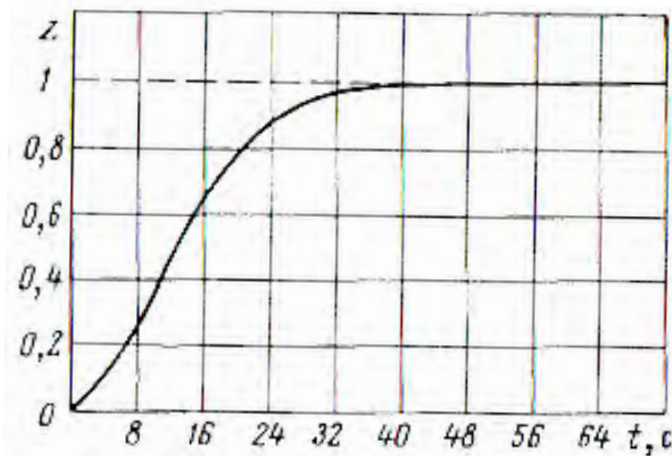


Рис. 12.12. График переходного процесса

Таким образом, можно создать систему автоматического управления боковым движением центра масс с приемлемыми значениями передаточных чисел.

Рассмотрим поведение системы при боковых случайных порывах ветра  $v_z$ . Для этого возьмем спектральную плотность этих порывов в таком же виде, как и для вертикальных порывов, а именно

$$S_v(\omega) = \frac{2a_v \sigma_v^2}{\omega^2 + \alpha_v^2}, \quad (12.18)$$

где  $\sigma_v^2$  – дисперсия скорости боковых порывов ветра.

Передаточная функция по порывам ветра, как видно из выражения (12.17), имеет вид

$$W_v(p) = \frac{p + 2d}{p^2 + 2d\Omega p + \Omega^2}.$$

Будем полагать, что параметры системы (12.17) выбраны из условия кратности корней, тогда выражение для дисперсии ошибки по координате  $z$ , вызванной порывами ветра, будет

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 + 4\Omega^2}{(\omega^2 + \Omega^2)^2} \frac{2a_v \sigma_v^2}{\omega^2 + a_v^2} d\omega.$$

Вычисление интеграла дает

$$\sigma_z^2 = \frac{8\Omega + 3a_v}{2\Omega(\Omega + a_v)^2} \sigma_v^2. \quad (12.19)$$

Отсюда видно, что для уменьшения дисперсии ошибки необходимо увеличивать частоту системы  $\Omega$ .

Дадим количественную оценку величины средней квадратической погрешности  $\sigma_z$ . Для этого вместо дисперсий  $\sigma_v^2$  и  $\sigma_z^2$  будем рассматривать размерные величины  $\sigma_v'^2$  и  $\sigma_z'^2$ , причем

$$\sigma_v'^2 = V^2 \sigma_v^2; \quad \sigma_z'^2 = \tau_a^2 V^2 \sigma_z^2.$$

Установлено, что коэффициент  $a_v$  лежит в пределах 0,25–1 с. Взяв для примера  $a_v = 0,5$  с и воспользовавшись заданной выше частотой системы  $\Omega = 0,5$ , после подстановки в выражение (12.19) получим

$$\sigma_z' = \sqrt{5,5} \tau_a \sigma_v'.$$

Если  $\tau_a = 2,5$  с и  $\sigma_v' = 5$  м/с, то  $\sigma_z' = 30$  м, т. е. среднее квадратическое значение координаты бокового отклонения  $z$ , стабилизируемого системой управления, в данном примере может достигать нескольких десятков метров.

## 12.5. Управление скоростью полета центра масс дрона

Скорость центра масс дрона в горизонтальном полете определяется из уравнения

$$m \frac{dV}{dt} = P \cos \alpha - X. \quad (12.20)$$

Сила тяги  $P$  и сопротивление  $X$  зависят от скорости полета. В установившемся режиме полета сила тяги  $P$  равна силе сопротивления  $X$ , т. е.  $P = X$ . Из этого равенства можно определить величину установившейся скорости полета. В неустановившемся движении величина ускорения  $dV/dt$  и характер ее изменения определяются видом функций  $P(V)$  и  $X(V)$ .

Дрон по отношению к скорости полета может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от взаимной зависимости характеристик  $P(V)$  и  $X(V)$  в точке их пересечения. Полагая, что скорость  $V_0$  соответствует равенству  $P = X$  и беря линейные члены разложения функций  $P(V)$  и  $X(V)$  в ряды по малым приращениям  $\Delta V = V - V_0$ , преобразуем уравнение (12.20) к виду

$$m \frac{dV}{dt} - \left( \cos \alpha \frac{\partial P}{\partial V} - \frac{\partial X}{\partial V} \right) V = 0.$$

Если положить приближенно  $\cos \alpha \approx 1$ , то условие устойчивости самолета по отношению к скорости полета примет вид

$$\frac{\partial P}{\partial V} - \frac{\partial X}{\partial V} < 0. \quad (12.21)$$

При нарушении этого неравенства дрон становится неустойчивым по отношению к скорости полета.

Из характера пересечения характеристик  $P_0$  и  $X_1$  следует, что аппарат всегда устойчив, так как неравенство (12.21) удовлетворяется.

Необходимость управления скоростью полета возникает также при режимах захода на посадку, наведении дронов на цели, при полете в строю и др.

Для управления скоростью полета можно воздействовать на тягу двигателя и руль высоты. При воздействии на руль высоты меняется угол атаки, что ведет к изменению силы сопротивления.

Так как двигатель, используемый в качестве регулирующего фактора при управлении скоростью полета, формирует требуемую тягу с запаздыванием по отношению к приводу управления, то его динамические характеристики будут влиять на динамику контура управления скоростью полета. Поэтому при исследовании процессов в контуре управления скоростью полета следует учитывать запаздывание в передаче сигналов из-за двигателя.

Для автоматического регулирования скорости полета могут быть применены **статический и астатический регуляторы** (рис. 12.13 и 12.14). В качестве чувствительных элементов в регуляторах применяются аэрометрические измерители скорости полета, а сигналы ускорений могут быть получены с помощью акселерометров или дифференцирующих устройств. На этих схемах передаточная функция дрона по скорости полета отображена инерционным звеном, а передаточная функция двигателя – звеном  $H(p)$ , которое в дальнейшем тоже будем считать инерционным, т. е.

$$H(p) = \frac{1}{\tau p + 1},$$

где

$$\tau = \frac{\tau_d}{\tau_a};$$

$\tau_d$  – постоянная времени запаздывания двигателя.

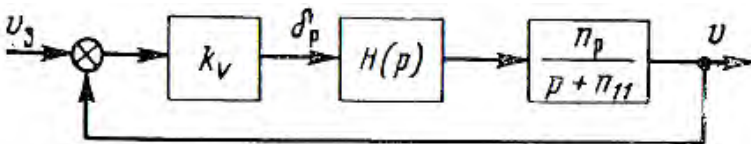


Рис. 12.13. Структурная схема статического регулирования скорости полета дрона

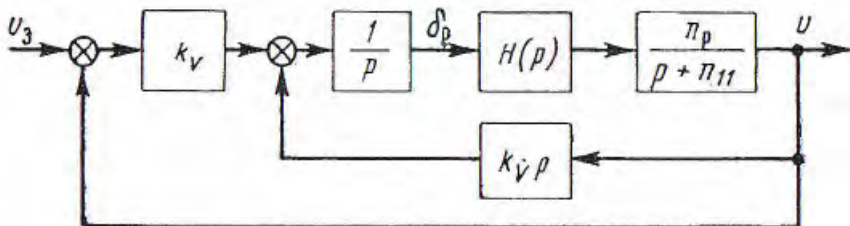


Рис. 12.14. Структурная схема астатического регулирования скорости полета дрона

При рассмотрении динамики процессов управления скоростью полета полагаем, что угловые движения самолета стабилизируются быстродействующим автопилотом. В этом случае математическая модель самолета как объекта управления по скорости полета может быть представлена уравнением

$$(p + n_{11})v = n_p \delta_p + p v_x, \quad (12.22)$$

где  $v_x$  – продольные порывы ветра.

Уравнения движения автоматов скорости с учетом передаточной функции двигателя, как следует из схем (см. рис. 12.13 и 12.14), можно представить в виде:

для статической системы

$$\delta_p = -\frac{1}{\tau p + 1} [k_V (v - v_3)]; \quad (12.23)$$

для астатической системы

$$\sigma_p = -\frac{1}{\tau p + 1} \left[ \frac{k_V (v - v_3) + k_{\dot{v}} p v}{p} \right], \quad (12.24)$$

где  $k_V$  и  $k_{\dot{v}}$  – передаточные числа;

$v_3$  – сигнал заданной скорости полета.

Рассмотрим переходные процессы в **статическом автомате** регулирования скорости полета, для чего решим совместно уравнения (12.22) и (12.23). Найдем уравнение замкнутой системы

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) v = a'_2 v_3 + (a_0 p + 1) p v_x, \quad (12.25)$$

где

$$a_0 = \tau; \quad a_1 = 1 + n_{11} \tau; \quad a_2 = n_{11} + n_p k_V; \quad a'_2 = n_p k_V.$$

Поскольку для неустойчивых по скорости полета дронов  $n_{11} < 0$ , то условиями устойчивости системы будут

$$1 + n_{11} \tau > 0;$$

$$n_{11} + n_p k_V > 0.$$

Первое условие всегда выполняется, поскольку  $n_{11} \tau \ll 1$ . Для выполнения второго условия передаточное число  $k_V$  должно удовлетворять условию

$$k_V > -\frac{n_{11}}{n_p}.$$

Поскольку в коэффициенты  $a_1 / a_0$  и  $a_2 / a_0$  в уравнении (12.25) входят только в одно передаточное число  $k_V$ , то отсутствует неопределенность в его выборе. Поэтому следует взять достаточно большое значение числа  $k_V$ , при котором обеспечивается устойчивость системы, но при этом тяга двигателя при работе регулятора меняется в приемлемых пределах. Так, например, если взять  $k_V = 5,5$ , чему соответствует собственная частота системы  $\omega_0 = 0,5$  и время регулирования  $t_p = 30$  с, то получим автомат регулирования скорости, при работе которого изменению скорости полета на 1 % будет соответствовать изменение тяги двигателя на 5,5 %.

В случае **астатического автомата** скорости полета, решая совместно уравнения (12.22) и (12.24), получаем

$$\left(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3\right) v = a_3 v_3 + (a_0 p + 1) p^2 v_x,$$

где

$$a_0 = \tau;$$

$$a_1 = 1 + n_{11} \tau;$$

$$a_2 = n_{11} + n_p k_{\dot{V}};$$

$$a_3 = n_p k_V.$$

Для устойчивости системы необходимо удовлетворить условиям

$$1 + n_{11} \tau > 0; \quad n_{11} + n_p k_{\dot{V}} > 0;$$

$$(1 + n_{11} \tau)(n_{11} + n_p k_{\dot{V}}) - n_p \tau k_{\dot{V}} > 0.$$

Отсюда следует, что если  $k_{\dot{V}} = 0$ , то система структурно неустойчива.

Можно выбрать такие передаточные числа  $k_V$  и  $k_{\dot{V}}$ , при которых переходные процессы будут удовлетворительны. Однако если учесть, что астатический автомат скорости полета более сложен, чем статический, а преимущества его незначительны, то в летательных аппаратах чаще применяют статические автоматы.

## **Глава 13. ДИНАМИКА БОКОВЫХ И УГЛОВЫХ ДВИЖЕНИЙ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА**

### **13.1. Линеаризованная математическая модель боковых движений беспилотного летательного аппарата**

Реализация бокового движения при малых отклонениях возможна при следующих условиях:

- а) исходное невозмущенное движение является продольным;
- б) можно пренебречь аэродинамическими и гироскопическими связями между продольным и боковым движениями ввиду относительной малости величин связей.

Рассмотрим боковое движение в случае малых угловых скоростей, когда произведениями  $\omega_x \omega_z$  и  $\omega_y \omega_z$  можно пренебречь. Предположим также, что отсутствуют вращающиеся массы внутри дрона. Тогда уравнения бокового движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m \left( \frac{dV_z}{dt} + \omega_x V_y - \omega_y V_x \right) &= c_z q S + G \sin \gamma \varphi \cos \vartheta + Z_B; \\ J_x \frac{d\omega_x}{dt} &= M_x + M_{x_B}; \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} &= M_y + M_{y_B}; \\ \omega_x &= \frac{d\gamma \varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta; \\ \omega_y &= \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta \cos \psi + \frac{d\gamma \varphi}{dt} \sin \gamma \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

В этих уравнениях  $M_{x_B}$ ,  $M_{y_B}$  и  $Z_B$  – возмущающие моменты и сила, определяемые следующим образом:



$$M_{x_B} = \Delta G l_2 + M'_{x_B};$$

$$M_{y_B} = \Delta P l_3 + M'_{y_B};$$

$$Z_B = m \frac{d\Delta U_z}{dt} + Z'_B,$$

где  $\Delta U_z$  – изменение скорости бокового ветра (за счет порывов);

$\Delta G$  – изменение веса (за счет сброшенных грузов и др.);

$\Delta P$  – разность тяг двигателей;

$l_2$  и  $l_3$  – плечи моментов;

$Z'_B$ ,  $M'_{x_B}$  и  $M'_{y_B}$  – другие возмущающие силы и моменты.

Если предположить, что скорость полета постоянна, а угол скольжения  $\beta$  мал, то первое уравнение системы (13.1) примет вид

$$mV_0 \left( \frac{d\beta}{dt} - \omega_x \sin \alpha - \omega_y \cos \alpha \right) = c_z q S + G \sin \gamma \cos \vartheta. \quad (13.2)$$

Для полного описания движения центра масс БПЛА необходимо взять кинематическое уравнение вида

$$\frac{dz}{dt} = V \sin(\psi - \beta), \quad (13.3)$$

где  $z$  – координата бокового отклонения от заданной траектории полета.

В уравнении (13.3) под знаком синуса вследствие малости опущен член  $\alpha_0 \gamma$ , учитывающий кинематику поворота вектора путевой скорости при крене самолета.

Проведем линеаризацию уравнений, предполагая, что установившиеся значения величин  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\beta$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ,  $\delta_H$ ,  $\delta_3$  равны нулю.

Разлагая нелинейные члены в уравнениях (13.1)–(13.3) в ряды и ограничиваясь линейными частями разложений, получим:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d\beta}{dt} - \frac{qS}{m} c_z^\beta \beta - \frac{g}{V} \gamma \varphi \cos \nu - \omega_x \sin \alpha - \omega_y \cos \alpha = Z_B; \\
 & \frac{d\omega_x}{dt} - \frac{qSl}{J_x} m_x^\beta \beta - \frac{qSl}{J_x} m_x^{\omega_x} \omega_x - \frac{qSl}{J_y} m_y^{\omega_y} \omega_y = \frac{qSl}{J_x} m_x^{\delta_3} \delta_3 + M_{xB}; \\
 & \frac{d\omega_y}{dt} - \frac{qSl}{J_y} m_y^\beta \beta - \frac{qSl}{J_y} m_y^{\omega_x} \omega_x - \frac{qSl}{J_y} m_y^{\omega_y} \omega_y = \frac{qSl}{J_y} m_y^{\delta_H} \delta_H + \\
 & \quad + \frac{qSl}{J_y} m_y^{\delta_3} \delta_3 + M_{yB}; \\
 & \frac{d\gamma \varphi}{dt} - \omega_x + \omega_y \operatorname{tg} \nu = 0; \quad \frac{dz}{dt} = V(\psi - \beta) - V_z; \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega_y}{\cos \nu}.
 \end{aligned} \right\} (13.4)$$

Из графиков (рис. 13.1–13.3) коэффициентов  $c_z, m_x, m_y, m_z$  видно, что соответствующие частные производные могут быть приняты постоянными.

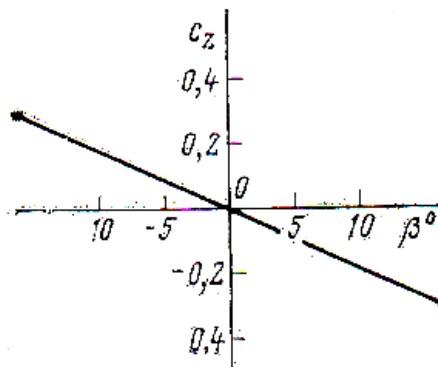


Рис. 13.1. График зависимости коэффициента  $c_z$  от угла скольжения

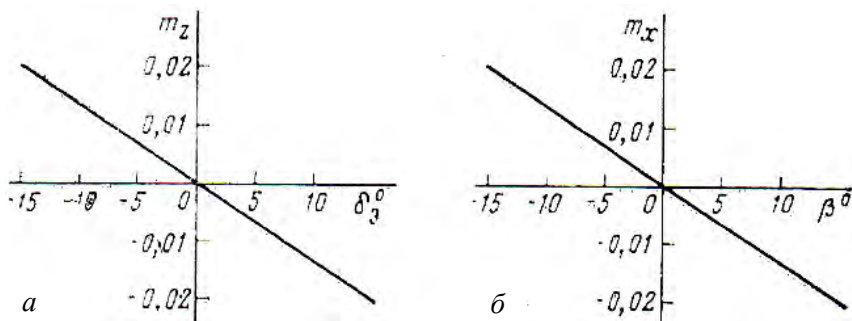


Рис. 13.2. Графики зависимости коэффициентов  $m_z$  и  $m_x$  от углов  $\delta_3$  (а) и  $\beta$  (б) соответственно

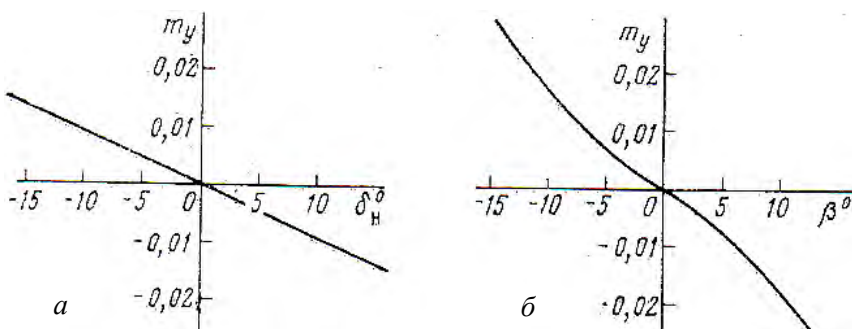


Рис. 13.3. Зависимости коэффициента  $m_y$  от углов  $\delta_n$  (а) и  $\beta$  (б)

Коэффициенты  $m_x^{\beta}$  и  $m_y^{\beta}$  характеризуют поперечную статическую и путевую устойчивость БПЛА. Поэтому их называют соответственно *коэффициентом поперечной статической устойчивости* и *коэффициентом путевой устойчивости*. Если в уравнения (13.4) ввести относительное время  $\bar{t} = \frac{t}{\tau_a}$ , то после преобразования Лапласа (13.4) получим

$$\left. \begin{aligned} (p + n_{11})\beta + n_{12}\bar{\omega}_x + n_{13}\bar{\omega}_y + n_{14}\gamma &= f_1; \\ n_{21}\beta + (p + n_{22})\bar{\omega}_x + n_{23}\bar{\omega}_y &= -n_3\delta_3 + f_2; \\ n_{31}\beta + n_{32}\bar{\omega}_x + (p + n_{33})\bar{\omega}_y &= -n_H\delta_H + f_3; \\ -\bar{\omega}_x + n_{43}\bar{\omega}_y + p\gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

К этим уравнениям следует добавить кинематические уравнения

$$pz = \psi - \beta + v_z; \quad \bar{\omega}_y = p\psi \cos \vartheta. \quad (13.6)$$

В уравнениях (13.5) и (13.6) приняты следующие обозначения:

$$\bar{\omega}_x = \tau_a \omega_x; \quad \bar{\omega}_y = \tau_a \omega_y; \quad z = \frac{z'}{\tau_a V};$$

$$n_{11} = -\frac{1}{2}c_z^\beta; \quad n_{12} = -\sin \alpha_0; \quad n_{13} = -\cos \alpha_0; \quad n_{14} = -\frac{g\tau_a}{V} \cos \vartheta_0;$$

$$n_{21} = -\mu_1 m_x^\beta; \quad n_{22} = -\mu_1 m_x^{\bar{\omega}_x}; \quad n_{23} = -\mu_1 m_x^{\bar{\omega}_y}; \quad n_3 = -\mu_1 m_x^{\delta_3};$$

$$n_{31} = -\mu_2 m_y^\beta; \quad n_{32} = -\mu_2 m_y^{\bar{\omega}_x}; \quad n_{33} = -\mu_2 m_y^{\bar{\omega}_y}; \quad n_H = -\mu_2 m_y^{\delta_H};$$

$$n_{43} = \operatorname{tg} \vartheta; \quad \mu_1 = \frac{lmV}{2J_x}; \quad \mu_2 = \frac{lmV}{2J_y}; \quad v_z = \frac{U_z}{V};$$

$g$  – ускорение силы тяжести.

В выражениях для  $n_{22}$ ,  $n_{23}$ ,  $n_{32}$ ,  $n_{33}$  производные моментов  $m_x$ ,  $m_y$  взяты по относительным угловым скоростям вида

$$\bar{\omega} = \tau_a \omega_x,$$

$$\bar{\omega}_y = \tau_a \omega_y.$$

В характеристиках дронов эти производные даются обычно по относительным угловым скоростям вида

$$\bar{\omega}_x = \frac{l}{2V} \omega_x;$$

$$\bar{\omega}_y = \frac{l}{2V} \omega_y.$$

Для перехода от величин  $\bar{\omega}_x$  и  $\bar{\omega}_y$  следует воспользоваться соотношениями

$$\bar{\omega}_x = \frac{2\tau_a V}{l} \bar{\omega}_x;$$

$$\bar{\omega}_y = \frac{2\tau_a V}{l} \bar{\omega}_y.$$

Аналогично имеем:

$$m_x^{\bar{\omega}_x} = m_x^{\bar{\omega}_x} \frac{l}{2\tau_a V};$$

$$m_x^{\bar{\omega}_y} = m_x^{\bar{\omega}_y} \frac{l}{2\tau_a V};$$

$$m_y^{\bar{\omega}_x} = m_y^{\bar{\omega}_x} \frac{l}{2\tau_a V};$$

$$m_y^{\bar{\omega}_y} = m_y^{\bar{\omega}_y} \frac{l}{2\tau_a V}.$$

Для возмущений  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  имеем выражения

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= p v_z + f_1' \\ f_2 &= \frac{\Delta G}{\rho_0 S V_0^2} \frac{l_2}{l} + f_2' \\ f_3 &= \frac{\Delta P}{\rho_0 S V_0^2} \frac{l_3}{l} + f_3' \end{aligned} \right\}$$

где  $f_1'$ ,  $f_2'$ ,  $f_3'$  – возмущения, вызванные, например, ударными волнами вблизи БПЛА, взрывами и т. д;

$l_2$  – плечо момента крена;

$l_3$  – расстояние между двигателями, имеющими разные тяги.

Уравнения (13.5) и (13.6), устанавливающие связь между регулируемыми величинами  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и регулируемыми факторами  $\delta_\vartheta$  и  $\delta_n$  и характеризующие динамические свойства БПЛА в боковом движении, описывают *линейную математическую модель бокового движения летательного аппарата*.

В случае горизонтального полета ( $\vartheta = 0$ ) с учетом малости угла  $\psi$  из уравнений получаем

$$\omega_x = \gamma; \quad \omega_y = \psi$$

или в относительной форме

$$\bar{\omega}_x = p\gamma; \quad \bar{\omega}_y = p\psi.$$

Уравнения (13.5) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} (p + n_{11})\beta + (n_{12}p + n_{14})\gamma + n_{13}p\psi &= f_1; \\ n_{21}\beta + (p + n_{22})p\gamma + n_{23}p\psi &= -n_\vartheta\delta_\vartheta + f_2; \\ n_{31}\beta + n_{32}p\gamma + (p + n_{33})p\psi &= -n_n\delta_n + f_3. \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

В табл. 13.1 даны ориентировочные значения коэффициентов  $n_{ik}$  уравнений бокового движения легкого самолета для двух режимов полета.

Таблица 13.1

Ориентировочные значения коэффициентов  $n_{ik}$

Коэффициент	БПЛА	
	$H = 6 \text{ км},$ $M = 0,77,$ $\tau_a = 2,5 \text{ с}$	$H = 10 \text{ км},$ $M = 0,8,$ $\tau_a = 3,8 \text{ с}$
$n_{11}$	0,156	0,097
$n_{12}$	0	0
$n_{13}$	-1	-1
$n_{14}$	-0,039	-0,039
$n_{21}$	15,8	9,5
$n_{22}$	6,7	4,82
$n_{23}$	0,43	0,41
$n_{31}$	5,76	4,3
$n_{32}$	0,037	0,0058
$n_{33}$	0,22	0,16
$n_{\omega}$	30,7	19
$n_{\eta}$	3,18	2,26

### 13.2. Передаточные функции конкретных моделей бокового движения беспилотного летательного аппарата

Рассмотрим частные случаи уравнений бокового движения. Простейшим боковым движением БПЛА является движение рыскания без крена, когда в силу большой инерции можно пренебречь движением центра масс под действием боковых сил. При таком движении продольная ось БПЛА совершает колебания относительно вектора

скорости, поворот которого не учитывается. Опуская первое и второе уравнения (13.7) и полагая в последнем уравнении  $\varphi = 0$ , получим

$$n_{31}\beta + (p^2 + n_{33}p)\psi = -n_n\delta_n + f_3. \quad (13.8)$$

В этом уравнении при указанных выше предположениях угол  $\psi$  есть угол между вектором скорости и продольной осью БПЛА. Следовательно, этот угол равен углу скольжения, т. е.  $\psi = \beta$ , и уравнение (13.8) принимает вид

$$(p^2 + n_{33}p + n_{31})\psi = -n_n\delta_n + f_3.$$

Передаточная функция будет

$$W(p) = \frac{-n_n}{p^2 + n_{33}p + n_{31}}.$$

Следующим частным видом бокового движения является плоское движение со скольжением при неизменном угле крена. Полагая в уравнениях (13.7)  $\gamma = 0$  и опуская второе уравнение, получим

$$\left. \begin{aligned} (p + n_{11})\beta - p\psi &= f_1; \\ (p^2 + n_{33}p)\psi + n_{31}\beta &= -n_n\delta_n + f_3. \end{aligned} \right\} \quad (13.9)$$

При выводе этих уравнений предполагается, что угол атаки  $\alpha$  близок к нулю, поэтому  $\sin \alpha \approx 0$  и  $\cos \alpha \approx 1$ .

Из уравнений (13.9) получаем выражения для передаточных функций:

$$\left. \begin{aligned} W_\beta(p) &= \frac{-n}{p^2 + 2d_0\omega_0p + \omega_0^2}; \\ W_\psi(p) &= \frac{-n_n(p + n_{11})}{(p^2 + 2d_0\omega_0p + \omega_0^2)p} \end{aligned} \right\} \quad (13.10)$$



где

$$2d_0\omega_0 = n_{11} + n_{33},$$

$$\omega_0^2 = n_{31} + n_{11}n_{33}.$$

Из выражений (13.10) видно, что БПЛА является нейтральным по отношению к углу рыскания  $\psi$ .

Рассмотрим случай бокового движения, реализуемого приближенно в начальный момент крена БПЛА, при этом пренебрегаем изменением курса ( $\psi = 0$ ). В этом случае уравнения (13.7) принимают вид (третье уравнение опускаем)

$$\left. \begin{aligned} (p + n_{11})\beta + (n_{12}p + n_{14})\psi &= f_1; \\ n_{21}\beta + (p^2 + n_{22}p)\gamma &= -n_3\delta_3 + f_2. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда находим выражения для передаточных функций, полагая  $f_1 = f_2 = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} W_\gamma(p) &= \frac{-n_3(p + n_{11})}{\Delta(p)}; \\ W_\psi(p) &= \frac{n_3(n_{12}p + n_{14})}{\Delta(p)}, \end{aligned} \right\}$$

где

$$\Delta(p) = p^3 + c_1'p^2 + c_2'p + c_3';$$

$$c_1' = n_{11} + n_{22}; \quad c_2' = n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}; \quad c_3' = -n_{21}n_{14}.$$

Рассмотрим также случай движения по крену без скольжения. В этом случае из системы (13.7) при пренебрежении моментом рыскания находим

$$\left. \begin{aligned} p\Psi &= n_{14}\gamma; \\ (p^2 + n_{22}p)\gamma + n_{23}p\Psi &= -n_3\delta_3. \end{aligned} \right\}$$

### 13.3. Автоматическое управление угловыми движениями летательного аппарата

Вектор скорости центра масс БПЛА как твердого тела в каждый момент времени направлен по касательной к траектории полета. Следовательно, для изменения направления траектории полета в пространстве необходимо менять направления вектора скорости. Величина и направление вектора скорости определяются величиной и направлением вектора тяги двигателя и аэродинамическими характеристиками БПЛА. Вектор тяги обычно ориентируется по отношению к корпусу БПЛА, и на большинстве режимов полета его направление остается неизменным или меняется в ограниченных пределах.

Аэродинамические характеристики БПЛА (подъемная сила, боковая сила, сила лобового сопротивления и др.) зависят от углового положения вектора тяги по отношению к вектору скорости. Так, например, для изменения подъемной или боковой сил необходимо изменять углы между векторами тяги и скорости полета в вертикальной (угол атаки) или горизонтальной (угол скольжения) плоскостях.

Таким образом, вектор тяги на данном режиме полета должен занимать определенное положение по отношению к вектору скорости. Поскольку вектор тяги связан с осями БПЛА, то БПЛА должен занимать определенное угловое положение по отношению к вектору скорости, различное в разных условиях полета. Задание определенных угловых положений, осуществляемое управляющей системой, составляет основную задачу управления угловыми движениями БПЛА.

При этом угловые координаты и их производные, характеризующие движение БПЛА по отношению к центру масс, остаются неизменными или меняются по определенным законам. Обычно производится управление углами тангажа, крена, рыскания, атаки, скольжения и их производными.

При построении САУ (систем автоматического управления) угловыми движениями БПЛА необходимо изучать динамику переходных процессов, влияние структуры и параметров систем управления на качество процессов, а также рассматривать вопросы синтеза систем управления для получения заданного качества процесса управления.

### 13.3.1. Управление угловой скоростью дрона

В системах автоматического управления полетом имеются контуры управления угловыми скоростями БПЛА, служащие для формирования демпфирующих моментов и, следовательно, для улучшения качества переходного процесса. Для этих же целей применяются самостоятельные системы управления угловыми скоростями, называемые *демпферами*.

Рассмотрим систему управления угловой скоростью тангажа, представленную структурной схемой на рис. 13.4. В этой схеме закон управления принят в виде

$$\delta_B = k_{\dot{\theta}} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_3),$$

где  $k_{\dot{\theta}}$  – передаточное число;

$\dot{\theta}_3$  – заданная угловая скорость тангажа, а передаточная функция БПЛА по угловой скорости представлена в прямоугольнике.

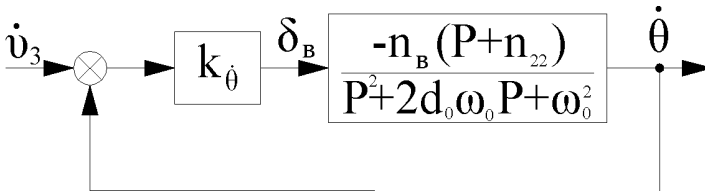


Рис. 13.4. Схема управления угловой скоростью тангажа

Передаточная функция системы, как следует из рис. 13.4, имеет вид

$$W(p) = \frac{k_{\dot{\theta}} n_B (p + n_{22})}{p^2 + 2d\omega p + \omega^2}. \quad (13.20)$$

Здесь

$$2d\omega = 2d_0\omega_0 + n_B k_{\dot{\theta}}; \quad (13.21)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + n_B n_{22} k_{\dot{\theta}},$$

где  $\omega_0$  и  $d_0$  – соответственно собственная частота и коэффициент затухания движений БПЛА.

Видно, что передаточная функция системы управления угловой скоростью тангажа равна произведению передаточных функций колебательного и форсирующего звеньев. Для выбора передаточного числа  $k_{\dot{\vartheta}}$  заметим, что наилучшее качество процесса в колебательном звене получается при  $d = 0,7/1$ , причем верхнее значение следует брать при наличии форсирования. Исключая из уравнений (13.12) частоту  $\omega$ , получим выражение для  $k_{\dot{\vartheta}}$ :

$$k_{\dot{\vartheta}} = \frac{2d\omega_0}{n_B} \left( 1 - 2d_0 + d \frac{n_{22}}{\omega_0} \right). \quad (13.13)$$

В табл. 13.2 приведены значения передаточного числа  $k_{\dot{\vartheta}}$  и собственной частоты  $\omega_0$  для контуров управления угловой скоростью дронов № 1 и 2, параметры которых взяты из табл. 13.2.

Таблица 13.2

Значения  $k_{\dot{\vartheta}}$  и  $\omega_0$

Самолет	$n_B$	$n_{11}$	$2d\omega_0$	$\omega_0$	$\tau_a, c$	$k_{\dot{\vartheta}}$	$k'_{\dot{\vartheta}}$ град/с	$\omega', c^{-1}$	$\tau_p, c$
№ 1	49	2,4	5,25	43,9	3,8	0,154	0,585	2,07	3
№ 2	24,5	2,6	4,94	15,13	2,1	0,128	0,28	2,3	2,7

Заметим, что относительные значения передаточного числа  $k_{\dot{\vartheta}}$  и собственной частоты  $\omega_0$  вычислены по формулам (13.12) и (13.13), а размерные – определены из соотношений

$$k'_{\dot{\vartheta}} = k_{\dot{\vartheta}} \tau_a,$$

$$\omega' = \frac{\omega_0}{\tau_a}.$$

Время регулирования в обоих случаях не превышает 3 с.

При рассмотрении системы управления угловой скоростью рыскания возьмем структурную схему (рис. 13.5), подобную схеме, показанной на рис. 13.4.

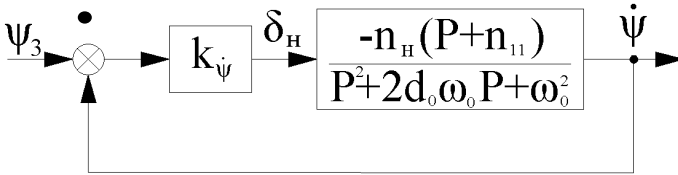


Рис. 13.5. Схема управления угловой скоростью рыскания

Передаточная функция этой системы может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{k_{\dot{\Psi}} n_H (p + n_{11})}{p^2 + 2d\omega p + \omega^2}, \quad (13.23)$$

где

$$2d\omega = 2d_0\omega_0 + k_{\dot{\Psi}} n_H;$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + k_{\dot{\Psi}} n_H n_{11}.$$

Поскольку структура передаточной функции (13.14) аналогична структуре передаточной функции (13.11), то передаточное число  $k_{\dot{\Psi}}$  можно определить из формулы (13.14), в которой параметры продольного движения дрона следует заменить параметрами бокового движения.

В табл. 13.3 приведены значения передаточного числа  $k_{\dot{\Psi}}$  и собственной частоты  $\omega_0$  для контуров управления угловой скоростью рыскания № 1 и 2; коэффициент относительного затухания  $d = 1$ .

Таблица 13.3

Значения  $k_{\psi}$  и  $\omega_0$

Самолет	$n_n$	$n_{11}$	$2d_0\omega_0$	$\omega_0^2$	$\tau_a, c$	$k_{\psi}$	$k'_{\psi}$ град/с	$\omega', c^{-1}$	$\tau_p, c$
№ 1	3,18	0,156	0,376	5,8	2,5	1,37	3,42	1,02	6,15
№ 2	22,5	0,26	1,05	54	2,1	0,29	0,61	3,34	1,78

Из сравнения передаточных чисел  $k_{\delta}$  и  $k_{\psi}$  видно, что требуемое значение передаточного числа в канале рыскания значительно больше, чем в канале тангажа. Объясняется это малым естественным демпфированием дрона по углу рыскания.

При рассмотрении систем управления угловой скоростью тангажа и рыскания предполагалось, что законы управления реализованы точно. Рассмотрим теперь систему управления угловой скоростью крена, причем будем полагать, что динамические погрешности сервопривода значительны.

На рис. 13.6 динамика сервопривода отражена внутренним контуром, а динамика управления угловой скоростью – внешним контуром. Передаточная функция БПЛА по угловой скорости крена взята в виде инерционного звена.

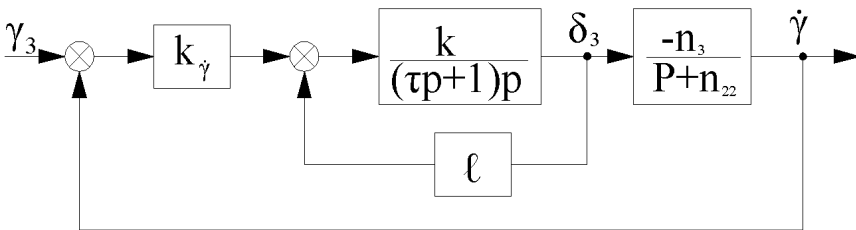


Рис. 13.6. Схема управления угловой скоростью крена

На рис. 13.7 показана одноконтурная структурная схема, преобразованная из схемы, приведенной на рис 13.6. В этой схеме параметры передаточной функции сервопривода определяются выражениями

$$\omega_c^2 = \frac{ik}{\tau};$$

$$2d_c\omega_c = \frac{1}{\tau};$$

$$k' = \frac{k}{\tau}.$$

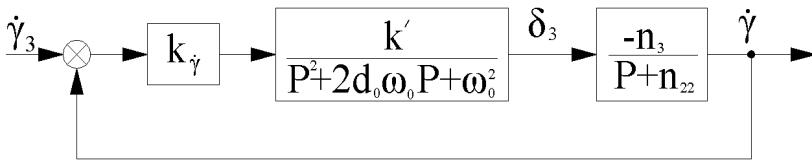


Рис. 13.7. Схема преобразования из схемы рис. 13.6

Видно, что чем больше постоянная времени  $\tau$  рулевой машины, тем хуже динамические свойства сервопривода (тем меньше собственная частота  $\omega_c$  и коэффициент относительного затухания  $d_c$ ).

Передаточная функция системы (см. рис. 13.6 и 13.7) будет

$$\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_3} = \frac{n_3 k' k_{\dot{\gamma}}}{(p^2 + 2d_c \omega_c p + \omega_c^2)(p + n_{22}) + n_3 k' k_{\dot{\gamma}}}. \quad (13.15)$$

Из структуры выражения (13.15) видно, что для улучшения качества процесса необходимо увеличивать собственную частоту сервопривода  $\omega_c$ . В пределе, при достаточно большой частоте  $\omega_c$ , динамическими погрешностями можно пренебречь, и тогда поведение системы управления угловой скоростью крена будет описываться передаточной функцией типа инерционного звена, для которого увеличение передаточного числа  $k_{\dot{\gamma}}$  приводит к сокращению времени переходного процесса.

Улучшение динамических характеристик сервоприводов в системах управления достигается путем включения корректирующих контуров в виде жестких, скоростных или изодромных внутренних обратных связей.

### 13.3.2. Управление ускорением центра масс дрона

В ряде случаев системы управления полетом БПЛА включают контуры управления перегрузками, т. е. ускорениями центра масс. Такие контуры управления являются внешними по отношению к контурам управления угловыми скоростями.

Поскольку нормальная и боковая перегрузки пропорциональны соответственно углам атаки и скольжения, то контуры управления перегрузкой эквивалентны контурам управления углами  $\alpha$  и  $\beta$ . Последние контуры обеспечивают повышение запасов устойчивости продольного и бокового движения.

Рассмотрим нормальные и боковые ускорения, которые определяются скоростью изменения углов наклона траектории в вертикальной и горизонтальной плоскостях:

$$\dot{J}_y = V\dot{\theta}, \quad \dot{J}_z = V\dot{\theta}_\sigma,$$

где  $\theta = \vartheta - \alpha$ ;  $\theta_\sigma = \psi - \beta$ .

Если воспользоваться первыми из уравнений (13.7), то (при условии  $f_2 = 0$  и  $f_1 = 0$ ) получим

$$\dot{J}_y = n_{22}V\alpha; \quad \dot{J}_z = Vn_{11}\beta. \quad (13.16)$$

Передаточные функции самолета по ускорениям  $\dot{J}_y$  и  $\dot{J}_z$  при входах  $\delta_B$  и  $\delta_\sigma$  можно получить из передаточных функций и соотношений (13.16):

$$\frac{\dot{J}_y}{\delta_B} = \frac{-n_B n_{22} V}{p^2 + 2d_0 \omega_0 p + \omega_0^2};$$

$$\frac{\dot{J}_z}{\delta_\sigma} = \frac{-n_\sigma n_{11} V}{p^2 + 2d_0 \omega_0 p + \omega_0^2}.$$

Рассмотрим теперь схему системы стабилизации нормального ускорения (рис. 13.8). Для измерения ускорения  $\dot{J}_y$  и  $\dot{J}_z$  можно



применить акселерометры, оси чувствительности которых совпадают соответственно с нормальной  $Oy$  и поперечной  $Oz$  осями аппарата.

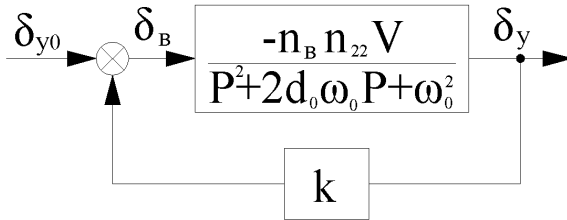


Рис. 13.8. Схема системы стабилизации нормального ускорения

Запишем закон управления в соответствии со схемой рис. 13.8 в виде

$$\delta_B = k(\dot{j}_y - \dot{j}_{y0}). \quad (13.17)$$

Уравнение движения системы будет

$$(p^2 + 2d_0\omega_0 p + \omega_0^2 + kn_{22}n_B V) \dot{j}_y = kn_{22}n_B V \dot{j}_{y0}.$$

Отсюда видно, что при принятом законе управления (13.17) обеспечивается повышение запаса статической устойчивости БПЛА. Такой же эффект будет при введении в закон управления угла атаки  $\alpha$  вместо нормального ускорения  $\dot{j}_y$ . Демпфирование же БПЛА будет неудовлетворительным. Для получения приемлемого переходного процесса контур управления ускорением необходимо применять совместно с контуром управления угловой скоростью. Сказанное здесь об управлении нормальным ускорением полностью относится и к управлению боковым ускорением.

### 13.3.4. Управление углом тангажа посредством статического автопилота

Рассмотрим статическую систему автоматического управления углом тангажа (рис. 13.9), включающую контур управления угловой

скоростью и контур управления углом тангажа. Передаточная функция БПЛА взята в предположении постоянства скорости самолета. На структурной схеме не показаны внешние возмущения  $f_2$  и  $f_3$ , действующие на БПЛА. Закон управления системы берем в виде

$$\delta_B = k_\vartheta (\vartheta - \vartheta_3) + k_{\dot{\vartheta}} p \vartheta, \quad (13.18)$$

где  $\vartheta_3$  – заданное значение угла тангажа.

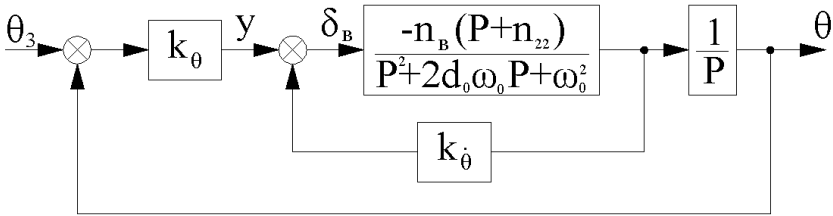


Рис. 13.9. Схема управления углом тангажа

Решая уравнение (13.18) совместно с уравнениями (13.17), получим

$$(p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) \vartheta = (b_0 p + a_3) \vartheta_3 + (n_0 p + n_{32}) f_2 + (p + n_{22}) f_2,$$

где

$$a_1 = 2d_0 \omega_0 + n_B k_{\dot{\vartheta}}; \quad a_2 = \omega_0^2 + n_B (k_\vartheta + n_{22} k_{\dot{\vartheta}});$$

$$a_3 = n_B n_{22} k_\vartheta; \quad b_0 = n_B k_\vartheta.$$

Выбор параметров системы управления следует производить из условий неискаженного воспроизведения заданного угла тангажа  $\vartheta_3$  при слабом реагировании на возмущения  $f_2$  и  $f_3$ . Если передаточные числа  $k_\vartheta$  и  $k_{\dot{\vartheta}}$  выбрать достаточно большими, то реакция системы на возмущения  $f_2$  и  $f_3$  будет слабой.

Выбор передаточных чисел  $k_g$  и  $k_{\dot{g}}$  осуществляется в два этапа. Сначала выберем значение передаточного числа  $k_{\dot{g}}$  из условия заданного переходного процесса во внутреннем контуре (см. рис. 13.9), передаточная функция для которого имеет вид

$$\frac{\dot{g}}{y} = \frac{n_b(p + n_{22})}{p^2 + 2d\omega p + \omega^2},$$

где

$$\omega^2 = \omega_0^2 + n_b n_{22} k_{\dot{g}}; \quad 2d\omega = 2d_0\omega_0 + n_b k_{\dot{g}}.$$

Затем выберем такое значение передаточного числа  $k_g$ , чтобы коэффициент затухания был оптимальным, например  $d = 1$ . Находим

$$k_{\dot{g}} = \frac{1}{n_b} \left( 2d^2 n_{22} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{2d_0\omega_0}{d^2 n_{22}} + \frac{\omega_0^2}{d^2 n_{22}^2}} \right) - 2d_0\omega_0 \right).$$

Для внешнего замкнутого контура (см. рис. 13.9) можно написать

$$\frac{g}{g_3} = \frac{n_b k_g (p + n_{22})}{p^3 + A_1 \omega p^2 + A_2 \omega^2 p + \omega^3},$$

где

$$A_1 = 2d; \quad A_2 = 1 + \frac{n_b k_g}{\omega^2}; \quad \omega^3 = n_b k_g n_{22}.$$

## **Глава 14. ДИНАМИКА БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ УЧЕТЕ УПРУГОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ**

### **14.1. Балочные модели изгибных колебаний корпуса дрона**

Ранее в главах 12–13 предполагалось, что БПЛА является абсолютно жестким телом. Такое предположение справедливо до тех пор, пока собственные частоты замкнутой системы «автопилот–БПЛА» значительно ниже наименьшей частоты собственных изгибных колебаний корпуса БПЛА. При больших скоростных напорах воздуха могут возникать аэроупругие колебания. Аэроупругие колебания, возникающие в результате взаимодействия упругих и аэродинамических сил, совершаются с частотами, близкими к собственным изгибным колебаниям конструкции (фюзеляжа, крыльев).

Изгибные колебания БПЛА могут возбуждаться не только аэродинамическими силами, но также отклонениями рулей управления.

Изгибные колебания, независимо от вызвавшей их причины, нежелательны, а в ряде случаев недопустимы. При их появлении, особенно в управляемом полете, летательный аппарат подвергается сильным возмущениям, которые могут привести к катастрофической усталости элементов и разрушению конструкции. Когда частоты упругих колебаний близки к частотам фильтрации контуров управления, могут возникать неустойчивые режимы.

Рассмотрим влияние упругих колебаний БПЛА на его передаточную функцию в продольном движении.

Летальный аппарат, как сложная распределенная система, имеет различные типы свободных колебаний. Для того чтобы это описать, можно рассмотреть различные формы упругих линий фюзеляжа и крыльев (рис. 14.1). На рисунке показаны  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  – упругие линии фюзеляжа;  $M_1, \dots, M_6$  – аэродинамические моменты, действующие на фюзеляж и крылья. Ограничиваясь в дальнейшем рассмотрением упругих колебаний только фюзеляжа, будем полагать, что его упругие линии  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  подобны упругим линиям балки со свободными концами.

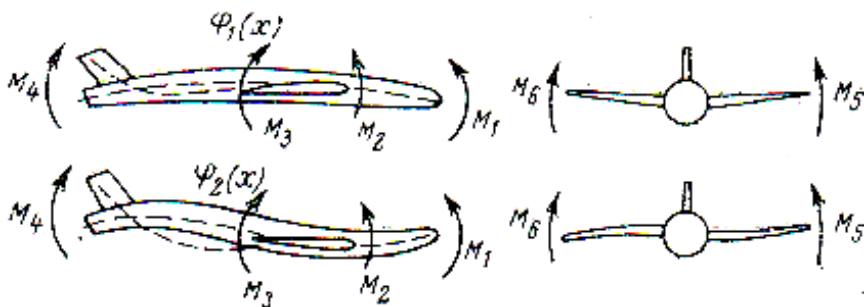


Рис. 14.1. Схема действия сил и моментов на упругий летательный аппарат

Уравнение изгибных движений балки можно записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F(x) \frac{\partial y}{\partial x} + D(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = T \delta(t) (x + x_i). \quad (14.1)$$

Граничные условия для балки со свободными концами сводятся к следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 y(0,t)}{\partial x^3} = 0; \quad \frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 y(l,t)}{\partial x^3} = 0. \quad (14.2)$$

В выражениях (14.1) и (14.2) приняты обозначения:

$x$  – текущая координата вдоль продольной оси БПЛА;

$l$  – длина БПЛА;

$t$  – время;

$y(x, t)$  – прогиб в точке  $x$ ;

$EI(x)$  – жесткость на изгиб;

$m(x)$  – закон распределения массы по продольной оси;

$F(x)$  – коэффициент пропорциональности восстанавливающей аэродинамической силы, направленной нормально к продольной оси;

$D(x)$  – коэффициент аэродинамического демпфирования;

$T\delta(t)$  – сила, создаваемая управляющим органом нормально к продольной оси;

$\delta$  – угол отклонения управляющего органа (например, руля высоты);

$\Delta(x - x_i)$  – дельта-функция, определяемая соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \Delta(x - x_i) &= 0 \text{ при } x \neq x_i, \\ \int_0^{x_i} \Delta(x - x_i) dx &= 1 \text{ при } x = x_i. \end{aligned} \right\}$$

Для упрощения задачи предположим, что величины восстанавливающей и демпфирующей аэродинамических сил, действующих нормально к продольной оси, зависят только от вращательного эквивалентного жесткого БПЛА, имеющего одинаковую аэродинамическую форму и обладающего одинаковым распределением масс:

$$\left. \begin{aligned} F(x) \frac{\partial y}{\partial x} &\approx F(x) \frac{\partial y_R}{\partial x}; \\ D(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} &\approx D(x) \frac{\partial^2 y_R}{\partial t \partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (14.3)$$

где  $y_R(x, t)$  – длина дуги, описываемой точкой недемпфированной оси в данном плоском вращении, происходящем под действием аэродинамических сил.

Для вращательного движения эквивалентного жесткого тела имеем

$$y_R(x, t) = (x - x_0)\theta(t), \quad (14.4)$$

где  $x_0$  – координата центра масс;

$\theta$  – угол поворота тела около центра масс (этот угол в зависимости от направления соответствует углу тангажа или рыскания).

Используя выражение (14.4), вместо зависимостей (14.3) можем написать

$$\left. \begin{aligned} F(x) \frac{\partial y}{\partial x} &\approx F(x) \theta(t); \\ D(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} &\approx D(x) \frac{\partial \theta(t)}{\partial t}. \end{aligned} \right\}$$

Учитывая, что масса эквивалентного жесткого тела равна  $m(x)(x-x_0)$ , а коэффициенты демпфирующей и восстанавливающей сил соответственно  $D(x)$  и  $F(x)$ , дифференциальное уравнение вращательного движения тела запишем в виде

$$m(x)(x-x_0) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + D(x) \frac{d\theta}{dt} + F(x) \theta = T \delta \Delta(x-x_i).$$

Умножим обе части этого уравнения на  $x-x_0$  и проинтегрируем по  $x$  в пределах от 0 до  $l$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \int_0^l m(x)(x-x_0)^2 dx + \frac{d\theta}{dt} \int_0^l D(x)(x-x_0) dx + \\ + \theta \int_0^l F(x)(x-x_0) dx = T \delta (l-x_0). \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \int_0^l m(x)(x-x_0)^2 dx; \quad d_0 = \frac{1}{I_0} \int_0^l D(x)(x-x_0) dx; \\ \mu_0 &= \frac{1}{I_0} \int_0^l F(x)(x-x_0) dx, \quad \mu_1 = \frac{1}{I_0} T(l-x_0), \end{aligned} \right\}$$

можем написать

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + d_0 \frac{d\theta}{dt} + \mu_0 \theta = \mu_1 \delta.$$

Преобразовав уравнение по Лапласу, получим

$$\theta(p) = \frac{\mu_1}{p^2 + d_0 p + \mu_0} \delta(p). \quad (14.5)$$

Преобразуя уравнение (14.1) и граничные условия (14.2) по Лапласу, найдем

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left( EI(x) \frac{dy(x, p)}{dx^2} \right) + p^2 m(x) y(x, p) = \\ = T \delta(p)(x-l) - (pD(x) + F(x)) \theta(p); \end{aligned} \quad (14.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y(0, p)}{dx^2} = \frac{d^3 y(0, p)}{dx^3} = 0; \\ \frac{d^2 y(l, p)}{dx^2} = \frac{d^3 y(l, p)}{dx^3} = 0. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Подставляя выражение (14.5) в уравнение (14.6), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + p^2 m(x) y = \\ = \left( T \Delta(x - x_i) - \frac{\mu_1}{p^2 + d_0 p + \mu_0} (pD(x) + F(x)) \right) \delta(p). \end{aligned} \quad (14.8)$$

Для решения этого неоднородного уравнения, сначала рассмотрим решение однородного уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 \eta}{dx^2} \right] + p^2 m(x) \eta = 0$$

при граничных условиях (14.7), в которых следует положить  $y = \eta$ .



Известно, что решение этого уравнения при  $p = j\omega$  выражается через собственные функции  $\varphi_k(x, \pm j\omega_k)$ , представляющие собой изгибные формы упругой линии, где  $\omega_k$  – собственные частоты, причем

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(p) \varphi_k(x, \pm j\omega_k),$$

где

$$A_k(p) = \frac{T\varphi_k(l) - \frac{\mu_1}{p^2 + d_0p + \mu_0}(pD_1 + F_1)}{N(p^2 + \omega_k^2)}.$$

Учитывая структуру правой части уравнения (14.8), его решение можно представить в виде

$$y(x, p) = A(p) + A_0(p)(x - x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(p) \varphi_k(x, \pm j\omega_k), \quad (14.9)$$

где

$$A(p) = \frac{1}{N} \frac{1}{p^2} \left( T - \frac{\mu_1}{p^2 + d_0p + \mu_0} (pd_1 + F_1) \right) \delta(p); \quad (14.10)$$

$$A_0(p) = \frac{\mu_1}{p^2 + d_0p + \mu_0} \delta(p); \quad (14.11)$$

$$D_1 = \int_0^l D(x) \varphi_k dx; \quad F_1 = \int_0^l F(x) \varphi_k dx; \quad N = \int_0^l m(x) \varphi_k^2 dx. \quad (14.12)$$

Подставляя выражения (14.10) – (14.12) в уравнение (14.9), получим

$$\begin{aligned}
 y(x, p) = & \left( \frac{1}{N} \frac{1}{p^2} \left( T - \frac{\mu_1}{p^2 + d_0 p + \mu_0} (pD_1 + F_1) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\mu_1}{p^2 + d_0 p + \mu_0} (x - x_0) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T\varphi_k(l, \pm j\omega_k) - \frac{\mu_1}{p^2 + d_0 p + \mu_0} (pD_1 + F_1)}{N(p^2 + \omega_k^2)} \varphi_k \right) \right) \delta(p).
 \end{aligned} \tag{14.13}$$

На основании выражения (14.13) можно найти искомую передаточную функцию летательного аппарата, связывающую угол  $\delta$  отклонения управляющего руля с углом  $\theta_r$ , измеряемым позиционным гироскопом.

Предположим, что гироскоп расположен в точке  $x = x_r$  на продольной оси. Его показание будет соответствовать местному значению наклона упругой линии, т. е.

$$\theta_r(t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_r},$$

или в преобразованном по Лапласу виде

$$\theta_r(p) = \frac{\partial y(x, p)}{\partial x} \Big|_{x=x_r}. \tag{14.14}$$

Подставляя значение  $y(x, p)$  из уравнения (14.13) в выражение (14.14), получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\theta_r(p)}{\delta(p)} = & \left( \frac{\mu_1}{p^2 + d_0 p + \mu_0} \left( 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{pD_1 + F_1}{p^2 + \omega_k^2} \frac{d\varphi_k}{dx} \right) + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_1}{(p^2 + \omega_k^2) N} \frac{d\varphi_k}{dx} \right),
 \end{aligned} \tag{14.15}$$

где

$$T_1 = T\varphi_k(l, \pm j\omega_k).$$

Известно, что упругое состояние системы довольно точно можно описать одной или двумя гармониками, поэтому вместо бесконечных сумм в выражении (14.15) можно взять несколько членов.

Вводя обозначения

$$\Phi = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{pD_1 + F_1}{(p^2 + \omega_k^2)N} \frac{d\varphi_k}{dx} \Big|_{x=x_T}; \quad \Phi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_1}{(p^2 + \omega_k^2)N} \frac{d\varphi_k}{dx} \Big|_{x=x_T},$$

представим уравнение (14.15) в виде

$$\frac{\theta_r(p)}{\delta(p)} = \frac{\mu_1}{p^2 + d_0p + \mu_0} (1 + \Phi) + \Phi_1, \quad (14.16)$$

На рис. 14.2 дана структурная схема, соответствующая передаточной функции (14.16). Видно, что если  $\Phi(p) \rightarrow 0$  и  $\Phi_1(p) \rightarrow 0$ , т. е. если БПЛА абсолютно жесткий, то связь между  $\delta(p)$  и  $\theta_r(p)$  определяется передаточной функцией  $\frac{\mu_1}{p^2 + d_0p + \mu_0}$ , характеризующей движение эквивалентного жесткого БПЛА.

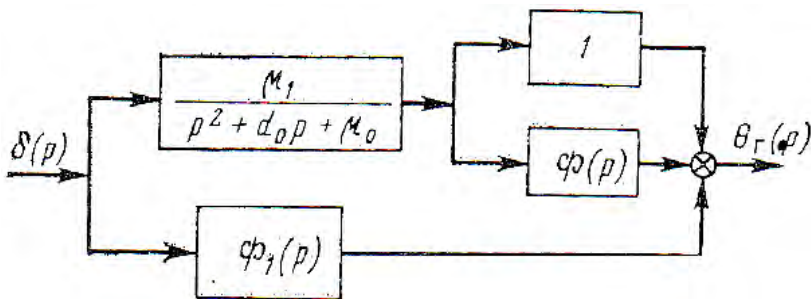


Рис. 14.2. Структурная схема упругого дрона

По известным передаточным функциям  $\Phi(p)$  и  $\Phi_1(p)$  можно найти такое положение для установки гироскопа и акселерометров, при котором влияние жесткости конструкции будет минимальным.

## **14.2. Влияние флуктуаций состояния атмосферы на динамику беспилотного летательного аппарата**

Рассмотрим методы оценки влияния порывов ветра на движение БПЛА. Для этого приведем некоторые количественные характеристики возмущений атмосферы.

Порывы ветра можно описать случайными функциями времени и пространственных координат. Интенсивность и частота порывов ветра – случайные величины, определяемые условиями погоды, а их воздействие на БПЛА зависит от скорости полета. Вероятность встречи БПЛА с порывами ветра различной интенсивности различна, причем наиболее часто встречаются порывы ветра малой интенсивности. Порывы ветра большой интенсивности могут быть приняты в пределе за единичные, как скачки скорости ветра. Движущимся БПЛА такой скачок воспринимается как импульс.

В ряде случаев более важными являются не единичные порывы ветра, а случайные возмущения, состоящие из нерегулярно чередующихся единичных порывов ветра. Такие нерегулярные порывы ветра называются *турбулентностью атмосферы*. При детальном рассмотрении турбулентности атмосферы помимо составляющих скорости по любому направлению приходится учитывать корреляцию между вертикальными и горизонтальными составляющими скорости воздуха.

Для изучения влияний турбулентности можно рассматривать пространственную картину распределения скоростей частиц воздуха в данный момент времени, полагая скорости зависящими от пространственных координат. Определив скорости как функции пространственных координат, получим представление о статистических характеристиках турбулентности атмосферы.

Если рассматривать составляющие скорости как функции времени в каждой данной точке пространства, то получим полную картину статистических процессов во всем пространстве.

При рассмотрении вопроса о возмущениях, действующих на БПЛА вследствие турбулентности атмосферы, необходимо учитывать, что характер возмущений зависит от скорости полета БПЛА. Продолжительность воздействия порыва ветра обратно пропорциональна скорости полета.

В простейшем случае модель турбулентности атмосферы может быть представлена в виде стационарного случайного процесса, оцениваемого спектральной плотностью интенсивности и некоторым распределением, причем характеристики этих процессов обычно определяются на основе экспериментальных исследований.

Предположим, что для турбулентности как стационарного случайного процесса, т. е. процесса, средние характеристики которого не изменяются во времени, из множества возможных взята одна временная характеристика  $y(t)$ , которая может быть, например, характеристикой изменения скорости порывов ветра во времени. В этом случае говорят, что  $y(t)$  является *реализацией* случайного процесса.

Пусть

$$y_{\tau}(t) = \begin{cases} y(t), & -T \leq t \leq T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases} \quad (14.17)$$

Имея реализацию случайного процесса, можно найти корреляционную функцию  $R(\tau)$  и спектральную плотность  $S(\omega)$  порывов ветра:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} y_{\tau}(\tau) y_{\tau}(t + \tau) d\tau; \quad (14.18)$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (14.19)$$

Следовательно, имея соотношения (14.17)–(14.19) и пользуясь реализациями случайного процесса  $y(t)$ , можно определить спектральные характеристики турбулентной атмосферы.

Определим реакцию БПЛА на турбулентные возмущения. Обозначим спектральную плотность вертикальных порывов ветра, соответствующую скорости порывов  $v_y(t)$ , и  $W(j\omega)$  – частотную характеристику БПЛА в продольном движении. Тогда спектральная плотность интенсивности реакции БПЛА  $S_0(\omega)$  на вертикальные порывы будет

$$S_0(\omega) = S_y(\omega) |W(jm)|^2. \quad (14.20)$$

Если воспользоваться соотношением (14.20), то получим выражение для дисперсии  $\sigma^2$  реакции ЛМР на порывы ветра:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_y(\omega) |W(jm)|^2 d\omega.$$

На рис. 14.3 дан график спектральной плотности интенсивности вертикальных порывов ветра для скорости полета 100 м/с, построенный на основе экспериментальных данных. Этот график не очень удобен для пользования, так как его приходится строить для всех интересующих нас скоростей полета. Если в функции  $S$  ввести новые независимые переменные

$$\Omega = \frac{\omega}{V}; \quad x = Vt,$$

то получим

$$S(\Omega) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi x} \left( \int_0^x v(x) e^{-j\Omega x} dx \right)^2,$$

где  $v(x)$  – скорость порывов ветра.

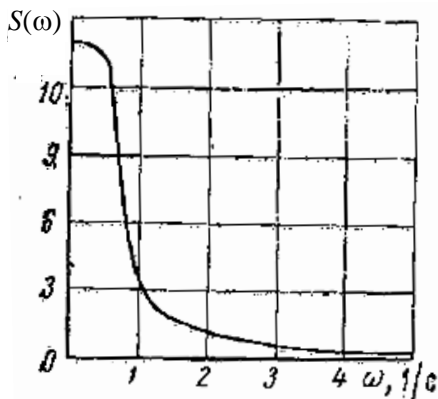


Рис. 14.3. Спектральная плотности интенсивность вертикальных порывов ветра

На рис. 14.4 дан график спектральной плотности интенсивности  $\Phi(\Omega)$ , пригодный для всех скоростей полета.

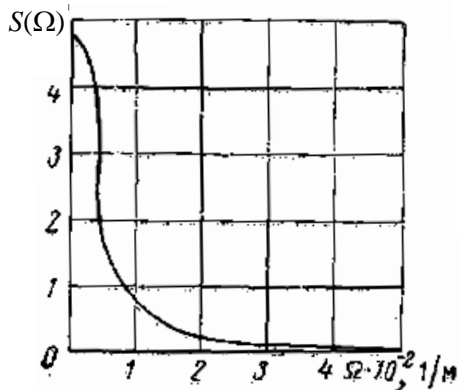


Рис. 14.4. Спектральная плотность интенсивности  $\Phi(\Omega)$

Имеющиеся экспериментальные данные по порывам ветра относятся главным образом к вертикальным порывам. Значительно меньше имеется данных по горизонтальным порывам ветра. Однако, учитывая, что природа горизонтальных и вертикальных порывов

одна и та же, можно полагать, что спектральные плотности порывов в обоих случаях будут иметь один и тот же вид. Разница будет только в величинах ординат характеристик спектральной плотности вследствие разных скоростей горизонтальных и вертикальных порывов ветра.

Из графика на рис. 14.4 можно сделать вывод, что спектральная плотность интенсивности убывает обратно пропорционально квадрату частоты. Поэтому для спектральной плотности предложены аналитические выражения, учитывающие указанную зависимость от частоты.

В частности, широко применяется выражение

$$\frac{S(\omega)}{V^2} = \frac{2\alpha_v v^{-2}}{\alpha_v^2 + \omega^2}, \quad (14.21)$$

где  $v^{-2}$  – дисперсия вертикальных или горизонтальных составляющих относительной скорости порывов:

$$v = \frac{v_y}{V};$$

$\alpha_v$  – плотность распределения вероятности порывов;

$\omega$  – круговая частота.

Постоянная  $\alpha_v$  прямо пропорциональна скорости полета и равна  $0,25 - 11 \text{ с}^{-1}$ .

Для определения спектральной плотности порывов по формуле (14.21) необходимо знать среднее квадратическое значение скорости порывов, постоянную  $\alpha_v$  и скорость полета.



## Глава 15. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРЫЛЬЕВ, ДЕТАЛЕЙ КОРПУСА, ВИНТОВ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

### 15.1. Профили крыльев и их аэродинамические характеристики

#### Геометрические характеристики профиля крыла

Крыло – часть летательного аппарата, предназначенная для создания аэродинамической подъемной силы.

**Крылом** называют тело, которое создает в потоке жидкости подъемную силу, значительно превышающую силу лобового столкновения. Крыло самолета имеет форму, симметричную относительно некоторой плоскости – плоскости симметрии.

Любое сечение крыла плоскостью, параллельной плоскости симметрии крыла, называется **профилем** крыла. В разных сечениях профиль крыла может быть различным по форме, размеру и ориентации.

Типичный профиль крыла изображен на рис. 15.1. Точка  $A$  – передняя кромка профиля,  $B$  – задняя кромка профиля или точка схода профиля. Линия  $AB$ , соединяющая две наиболее удаленные точки профиля, т. е. переднюю и заднюю кромки профиля, называется **хордой** профиля  $b$ . Хорда делит профиль на две части – верхнюю и нижнюю. Угол между хордой профиля и направлением невозмущенного потока называется **углом атаки**  $\alpha$ , если вектор скорости невозмущенного потока параллелен плоскости профиля. В более общем случае угол атаки измеряется между хордой профиля и проекцией скорости невозмущенного потока на плоскость профиля.

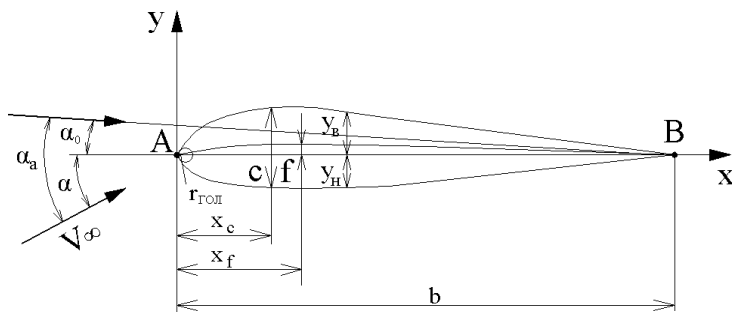


Рис. 15.1. Геометрические параметры профиля

При изучении геометрических характеристик профиля используется система прямоугольных координат, у которой начало совпадает с передней кромкой профиля, ось  $OX_a$  направлена вдоль хорды по направлению к задней кромке, ось  $OY_a$  – вверх.

В этой системе координатных осей уравнения верхнего и нижнего контуров профиля соответственно имеют вид  $y_B = f_1(x)$  и  $y_H = f_2(x)$ .

Толщина профиля в произвольной точке хорды выражается как разность ординат и точек  $y_B$  и  $y_H$ . Наибольшая длина перпендикулярного к хорде отрезка – между верхним и нижним контурами профиля, т. е.  $(y_B - y_H)_{\max}$ , называется **максимальной толщиной** или просто **толщиной профиля** и обозначается  $c$  (см. рис. 15.1).

Отношение максимальной толщины профиля  $c$  к длине хорды  $b$  носит название **относительной толщины профиля**:

$$c / b = \bar{c}$$

или в процентах

$$(c / b)100 = \bar{c}, \%$$

Относительная толщина аэродинамических профилей крыльев и лопастей винтов обычно находится в пределах от 3 до 25 %. Тонкие профили применяются на концах лопастей винтов.

Линия, соединяющая середины отрезков  $y_B - y_H$ , построенных в разных точках хорды, называется **средней линией** профиля (пунктирная линия на рис. 15.1). В частном случае, когда профиль симметричен, средняя линия совпадает с хордой. Наибольшая ордината средней линии называется **кривизной** профиля  $f$ , а ее отношение к хорде называется **относительной кривизной**

$$f / b = \bar{f}$$

или в процентах  $(f / b)100 = \bar{f}, \%$ .

Относительная кривизна современных профилей крыльев и лопастей винтов обычно не превышает 2 %.

Абсциссы наибольшей толщины профиля и наибольшей кривизны соответственно обозначаются  $x_c$  и  $x_f$  (см. рис. 15.1). Отношения этих величин к хорде носят названия **относительных абсцисс соответственно толщины и кривизны**:

$$L = T + U = T - \Pi;$$

$$\bar{x}_f = x_f / b.$$

Значения  $\bar{x}_c$  колеблются в пределах 25–30 %.

Радиусы кривизны в «головке» и «хвостовике» профиля ( $r_{\text{гол}}, r_{\text{хв}}$ ) также относятся к хорде, например относительный радиус

$$\bar{r} = r / b,$$

и часто выражают в процентах от длины хорды.

Серии профилей при проектировании дронов можно получить путем деформации какого-либо исходного профиля по заданному закону с сохранением неизменными одного или нескольких перечисленных выше безразмерных параметров.

Величины  $b, \bar{c}, \bar{x}_c, \bar{x}_f, \bar{f}, \bar{r}$  являются основными **геометрическими параметрами** профиля, от которых зависят его аэродинамические характеристики.

## 15.2. Аэродинамические силы и момент

Взаимодействие между воздушной средой и движущимся в ней крылом приводит к возникновению непрерывно распределенных по поверхности крыла аэродинамических сил, которые могут быть охарактеризованы величинами нормального  $n$  и касательного  $\tau$  напряжений в каждой точке поверхности крыла.

Результирующая сила давления и трения, возникающих при движении летательного аппарата относительно воздушной среды, сила  $\bar{R}_A$ , называется **полной аэродинамической силой**. Часто под

полной аэродинамической силой  $\vec{R}_A$  понимают только результирующую нормальных сил, пренебрегая при этом силами трения.

Момент полной аэродинамической силы относительно передней кромки крыла  $M_z$  называется **продольным моментом** или **аэродинамическим моментом тангажа**. Момент  $M_z$  считается положительным, если он стремится повернуть крыло в сторону увеличения угла атаки  $\alpha$ , и отрицательным – в обратную сторону. Положительный момент называется **кабрирующим**, а отрицательный – **пикирующим**.

При теоретическом и экспериментальном исследовании силового воздействия движущегося тела с окружающей его средой обычно рассматривается не результирующая сила  $R_A$ , а проекции этой силы на оси той или иной системы координат, которая выбирается в зависимости от условий задачи. В аэродинамике чаще используются две системы координат: скоростная и связанная.

В **скоростной** системе координат ось  $OX_a$  совпадает с направлением скорости полета, ось  $OY_a$  перпендикулярна оси  $OX_a$  и лежит в плоскости симметрии летательного аппарата. Ось  $OZ_a$  составляет с осями  $OX_a$  и  $OY_a$  правую систему координат (направлена вдоль правого крыла).

При аэродинамических расчетах начало координат обычно совмещают с передней кромкой крыла.

В связанной системе координат ось  $OX$  направлена вдоль хорды крыла или продольной оси дрона, ось  $OY$  перпендикулярна оси  $OX$  и лежит в плоскости симметрии летательного аппарата, ось  $OZ$  составляет с осями  $OX$  и  $OY$  правую систему.

В скоростной системе координат проекции силы  $R_A$  обозначаются  $X_a, Y_a, Z_a$ , а в связанной –  $X, Y, Z$  (рис. 15.2).

При рассмотрении плоских течений аэродинамическая сила раскладывается на две составляющие  $X_a, Y_a(X, Y)$ :

$$R_A = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{или} \quad R_A = \sqrt{X_a^2 + Y_a^2}. \quad (15.1)$$



или

$$Y_A = Y \cos \alpha - X \sin \alpha; \quad (15.3)$$

$$X_A = X \cos \alpha + Y \sin \alpha.$$

Рассмотрим силы, действующие на цилиндрическое крыло бесконечного размаха, обтекаемое потоком жидкости, в связанной системе координат, начало которой находится на расстоянии  $x_c$  от передней кромки крыла (рис. 15.3). В качестве характерной длины выделим отрезок крыла длиной  $l$  и характерной площади – площадь  $S = lb$  ( $b$  – длина хорды).

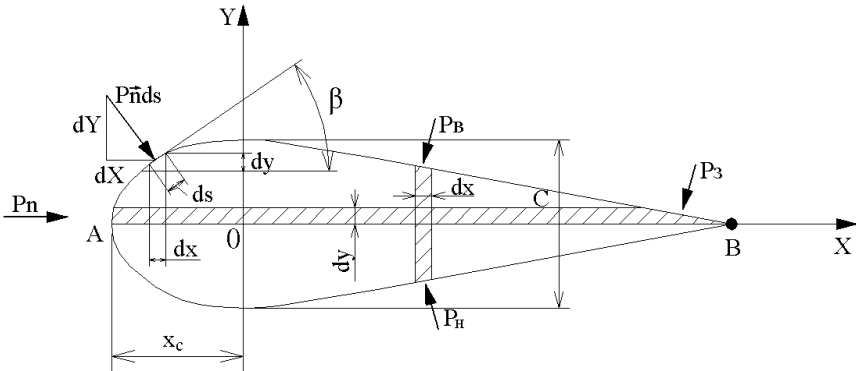


Рис. 15.3. К расчету подъемной силы и лобового сопротивления

Сила давления, действующая на элемент поверхности крыла  $lds$ , равна  $plds$ , а проекции этой силы на оси  $OX$  и  $OY$

$$dY = p \cos \beta l ds = \pm l dp_x; \quad dX = p l \sin \beta dS = l p dy.$$

Для определения сил  $X$  и  $Y$  необходимо просуммировать элементарные составляющие по всему контуру профиля.

Вдоль оси  $OX$  суммирование производим отдельно для верхней и нижней частей профиля, вдоль оси  $OY$  – для передней и задней. Тогда для нормальной и продольной сил получим

$$Y = l \int_A^B (p_H - p_B) dx;$$

$$X = l \int_{y_H}^{y_B} (p_H - p_3) dy,$$

где  $p_H, p_3, p_H, p_B$  – соответственно давление на передней, задней, нижней и верхней частях профиля.

Действительная аэродинамическая продольная сила будет больше расчетной на величину равнодействующей сил трения на поверхности крыла.

По величинам  $Y$  и  $X$  для каждого угла атаки с помощью формул связи (15.3) можно определить подъемную силу  $Y_a$  и силу лобового сопротивления  $X_a$ .

По опытным данным, продольная сила  $X$  и толщина профиля малы по сравнению с нормальной силой  $Y$  и хордой профиля, поэтому моментом от продольной силы ввиду его малости обычно пренебрегают. Зная элементарный момент от нормальной силы

$$dM_z = -dYx = -(p_H - p_B) l x dx,$$

можно определить и полный момент крыла относительно передней кромки профиля:

$$M_z = -l \int_{(A,B)} (p_H - p_B) x dx.$$

### 15.3. Аэродинамические коэффициенты и качество профиля

Общие формулы для определения подъемной силы и силы лобового сопротивления крыла имеют вид

$$Y_a = c_{ya} q S; \quad X_a = c_{xa} q S,$$

где  $q = \rho_{\infty} \frac{V_{\infty}^2}{2}$  – скоростной напор или динамическое давление невозмущенного потока;

$c_{ya}$  – коэффициент подъемной силы;

$c_{xa}$  – коэффициент лобового сопротивления;

$V_{\infty}$  – скорость потока на бесконечности.

Соответственно формулы для нормальной и продольной сил имеют вид

$$Y = c_y q S; \quad X = c_x q S, \quad (15.4)$$

где  $c_y, c_x$  – коэффициенты нормальной и продольной сил.

Если обозначить коэффициент полной аэродинамической силы через  $c_{RA}$ , а коэффициент полного момента относительно передней кромки профиля через  $c_m$ , то

$$R_A = c_{RA} q S; \quad M_z = c_m q S b,$$

где  $b$  – условное плечо момента (обычно хорда профиля).

С учетом формул (15.1) и (15.4) получим

$$c_{RA} = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}.$$

В формулах (15.2) и (15.3) от сил можно перейти к их коэффициентам:

$$c_y = c_{ya} \cos \alpha + c_{xa} \sin \alpha; \quad c_x = c_{xa} \cos \alpha - c_{ya} \sin \alpha; \quad (15.5)$$

$$c_{ya} = c_y \cos \alpha - c_x \sin \alpha; \quad c_{xa} = c_x \cos \alpha + c_{ya} \sin \alpha. \quad (15.6)$$

Углы атаки, реализуемые в полете, обычно невелики, поэтому можно положить  $\cos \alpha \approx 1, \sin \alpha \approx \alpha$ . Учитывая, что на практике коэффициент сопротивления  $c_{xa}$  обычно на порядок меньше коэффи-



коэффициента подъемной силы  $c_{ya}$ , формулы (15.5) и (15.6) можно привести к более простой и чаще употребляемой форме:

$$\begin{aligned} c_{ya} &= c_y, \quad c_{xa} = c_x + c_y \alpha; \\ c_y &= c_{ya}, \quad c_x = c_{xa} - c_y \alpha. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Используя выражение (15.7), формулу для определения коэффициента нормальной силы профиля представим в виде

$$c_y = \frac{Y}{\rho_\infty \frac{V_\infty^2}{2} b} = \int_{(A,B)} \left( \frac{p_H - p_0}{\rho_\infty \frac{V_\infty^2}{2}} - \frac{p_B - p_0}{\rho_\infty \frac{V_\infty^2}{2}} \right) \frac{dx}{b} = \int_0^1 b (\bar{p}_H - \bar{p}_B) d\bar{x},$$

где  $d\bar{x} = \frac{dx}{b}$ ;

$$\bar{p}_H = \frac{p_H - p_0}{\rho_\infty \frac{V_\infty^2}{2}};$$

$$\bar{p}_B = \frac{p_B - p_0}{\rho_\infty \frac{V_\infty^2}{2}}.$$

Аналогично для коэффициента  $c_m$  можно записать

$$c_m = - \int_0^1 (\bar{p}_H - \bar{p}_B) \bar{x} d\bar{x}.$$

При малых углах атаки коэффициент подъемной силы

$$c_{ya} \approx \int_0^1 (\bar{p}_H - \bar{p}_B) d\bar{x}.$$

Таким образом, по распределению давления на нижней и верхней сторонах профиля можно определить его коэффициент подъемной силы. Для практической реализации этого метода расчета необходимы экспериментальные исследования с дренированной моделью профиля при условии обтекания, соответствующем бесконечному размаху крыла (плоское обтекание).

Чаще аэродинамические коэффициенты определяются весовым методом, для чего на специальных весах измеряются непосредственно в потоке аэродинамической трубы силы и моменты, действующие на модель крыла, а затем расчетным путем определяются коэффициенты.

Для оценки аэродинамических свойств профиля вводится понятие о качестве профиля  $K$ . Аэродинамическим **качеством** профиля называется отношение подъемной силы к силе лобового сопротивления:  $K = Y_a / X_a$  или через аэродинамические коэффициенты  $K = c_{ya} / c_{xa}$ . Эта величина представляет собой тангенс угла наклона полной аэродинамической силы  $R_A$  к направлению невозмущенного потока (см. рис. 15.2), т. е.  $K = \operatorname{tg} \varphi$ .

**Чем меньше лобовое сопротивление при той же подъемной силе, тем больше качество.**

Безразмерные величины  $c_{xa}$ ,  $c_{ya}$ ,  $c_m$ ,  $c_{RA}$  и  $K$  являются **основными аэродинамическими коэффициентами профиля крыла.**

### *Зависимость аэродинамических коэффициентов от угла атаки профиля, поляры профиля*

Аэродинамические коэффициенты  $c_{xa}$ ,  $c_{ya}$ ,  $c_m$  являются независимыми друг от друга величинами, а  $c_{RA}$  и  $K$  определяются через коэффициенты  $c_{xa}$  и  $c_{ya}$  по соответствующим формулам.

Коэффициент полной аэродинамической силы  $c_{RA}$ , а также его компоненты  $c_{xa}$  и  $c_{ya}$ , коэффициент момента  $c_m$  и аэродинамическое качество  $K$  зависят от формы профиля, угла атаки, критериев подобия  $Re$ ,  $M$ , степени турбулентности потока и др. Этими коэффициентами удобно пользоваться, поскольку для динамически подобных течений они одинаковы, поэтому же результаты экспериментальных исследований приводятся в виде зависимостей для аэродинамических коэффициентов.

## 15.4. Геометрические и аэродинамические характеристики тел вращения

Изучение методов определения аэродинамических характеристик тел вращения имеет важное значение, поскольку фюзеляжи, наружные и топливные баки, gondолы двигателей, корпуса снарядов и ракет обычно имеют форму тел вращения или близкую к ней. На рис. 15.4 показаны некоторые формы тел вращения. Тело вращения обычной формы (рис. 15.4, 5з) можно разделить на переднюю (головную или носовую), среднюю (цилиндрическую) и заднюю (хвостовую или кормовую) части.

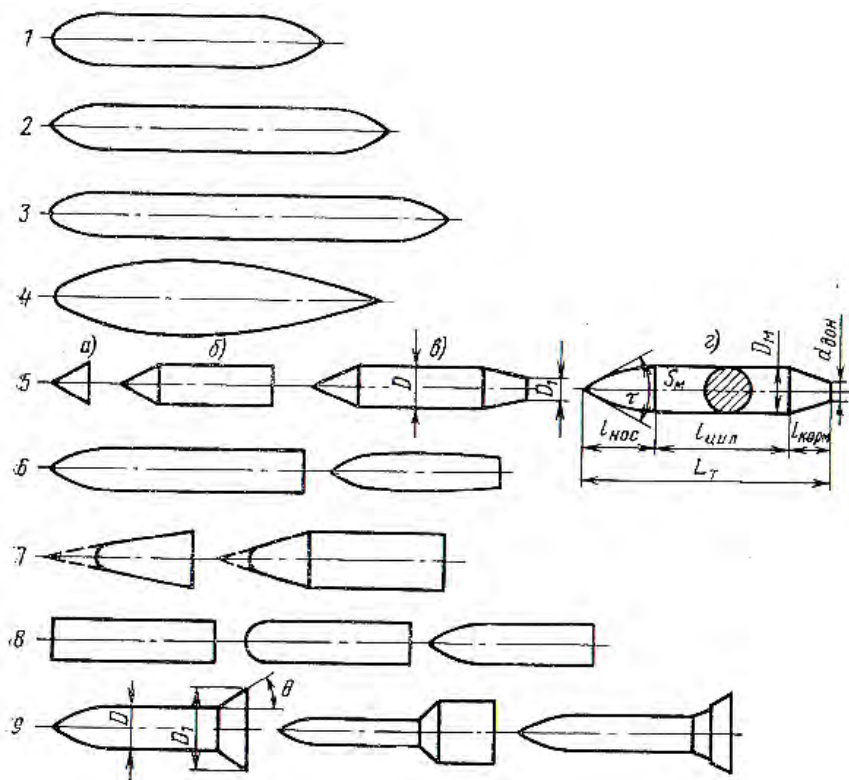


Рис. 15.4. Типичные формы тел вращения в аэродинамике

Каждая из указанных частей характеризуется своими геометрическими параметрами.

**Носовая часть**, как правило, имеет вид конуса, оживального (образованного вращением дуги окружности некоторого радиуса) или параболического тела и характеризуется углом раствора  $\tau$  носка тела и удлинением

$$\lambda_{\text{нос}} = l_{\text{нос}} / D_{\text{м}},$$

где  $l_{\text{нос}}$  – расстояние от носка тела до его миделя сечения;

$D_{\text{м}}$  – диаметр миделя.

Под **миделем** подразумевают сечение, перпендикулярное продольной оси тела и имеющее наибольшую площадь. Максимальная площадь у фюзеляжей самолетов располагается примерно на первой трети их длины. Если тело имеет цилиндрическую часть, то мидель – площадь поперечного сечения цилиндра, а  $l_{\text{нос}}$  – расстояние от носка тела до его цилиндрической части. В общем случае под диаметром миделя  $D_{\text{м}}$  подразумевают диаметр круга, эквивалентного по площади миделю. Цилиндрическая часть тела вращения также характеризуется удлинением

$$\lambda_{\text{цил}} = l_{\text{цил}} / D_{\text{м}}.$$

Геометрическими параметрами **кормовой части** тела вращения являются **удлинение**

$$\lambda_{\text{корм}} = l_{\text{корм}} / D_{\text{м}}$$

и **сужение**

$$\eta_{\text{корм}} = d_{\text{дон}} / D_{\text{м}},$$

где  $d_{\text{дон}}$  – диаметр донного среза (см. рис. 15.4, 5 з).

При отсутствии у тел вращения **донного среза**  $\eta_{\text{корм}} = 0$ .

**Удлинение тела вращения** равно сумме удлинений отдельных его частей:

$$\lambda = \lambda_{\text{нос}} + \lambda_{\text{цил}} + \lambda_{\text{корм}} = \frac{L_T}{D_M},$$

где  $L_T$  – полная длина тела вращения.

Величина, **обратная удлинению**, называется **относительной толщиной тела вращения**:

$$\bar{d} = 1 / \lambda.$$

Как и при изучении аэродинамических характеристик крыла, аэродинамические силы, действующие на тело вращения, рассматриваются в скоростной или связанной системах координат. В скоростной системе координат формулы для определения подъемной силы и силы лобового сопротивления имеют следующий вид:

$$Y_a = c_{ya} q S_M;$$

$$X_a = c_{xa} q S_M,$$

где  $c_{ya}$  и  $c_{xa}$  – коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления тела вращения;

$q = \rho V^2 / 2$  – динамическое давление;

$S_M$  – площадь миделя.

Переход к связанной системе координат производится так же, как и для крыла.

## 15.5. Подъемная сила тел вращения в аэродинамике

Подъемную силу тела вращения, обтекаемого потоком под некоторым углом атаки, можно определить, зная закон распределения давления на поверхности тела. При малых скоростях распределение давления может быть найдено достаточно надежно только экспериментальным путем.

Как видно из рис. 15.5, эпюра распределения давления по меридиональному сечению тела вращения (кривая 2), обтекаемого потоком несжимаемой жидкости, качественно сходна с эпюрой распределения давления по профилю крыла (кривая 1) той же относительной толщины и формы при том же угле атаки. Однако разрежение на теле вращения значительно меньше разрежения на крыле, что обусловлено пространственным характером обтекания тела вращения.

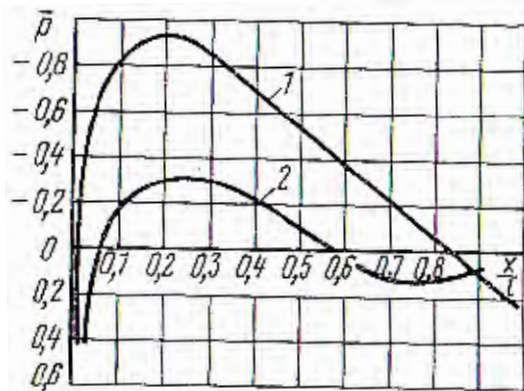


Рис. 15.5. Распределение давления по профилю крыла (кривая 1) и меридиональному сечению тела вращения (кривая 2) при малых числах  $M_\infty$

Обтекание тела вращения можно сравнить с обтеканием крыла очень малого удлинения, у которого, как известно, разрежение на верхней поверхности при прочих равных условиях всегда меньше, чем у крыла большого удлинения, вследствие перетекания воздуха через концевые кромки крыла из области повышенного давления в область пониженного. Так же, как для крыльев малого удлинения, зависимость  $c_{ya} = f(\alpha)$  для тела вращения носит в значительной мере нелинейный характер. Таким образом, характер изменения подъемной силы и силы лобового сопротивления тела вращения в первом приближении качественно близок характеру изменения  $X_\alpha$  и  $Y_\alpha$  крыла как при малых, так и при больших значениях числа  $0_{\text{хуз}}$ .

Так как на теле вращения разрежение меньше, чем на крыле, то при одинаковых числах  $M_\infty$  в случае обтекания тела вращения вли-

яние сжимаемости сказывается слабее. Поэтому у тел вращения число  $M_{кр}$  значительно больше, чем у крыла. Например, профиль крыла толщиной 15 % имеет  $M_{кр} = 0,78$ , а тело вращения той же относительной толщины имеет  $M_{кр} = 0,95$ .

Отмеченные особенности в обтекании тела вращения, несомненно, сказываются на величинах подъемной силы и лобового сопротивления тела вращения.

При расчете траекторий движения летательных аппаратов в основном используется скоростная система координат (рис. 15.6). В этом случае коэффициент подъемной силы тела вращения

$$c_{ya} = c_y \cos \alpha - c_x \sin \alpha.$$

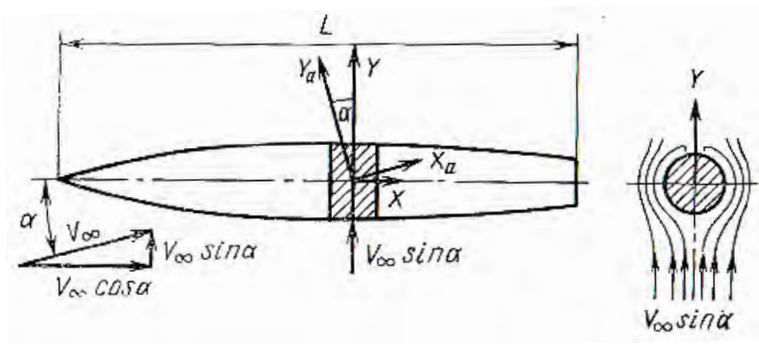


Рис. 15.6. Возникновение на теле вращения нормальной силы, обусловленной поперечным обтеканием

Коэффициент нормальной силы тела вращения в связанной системе координат  $c_y$  определяется по формуле

$$c_y = c_{y \text{ нос}} + c_{y \text{ цил}} + c_{y \text{ п}} + c_{y \text{ корм}}, \quad (15.8)$$

где  $c_{y \text{ нос}}$  – коэффициент нормальной силы носовой части тела вращения;

$c_{y \text{ цил}}$  – коэффициент нормальной силы цилиндрической части тела вращения;

$c_{yп}$  – коэффициент нормальной силы цилиндрической и кормовой частей, обусловленный наличием отрыва потока при больших углах атаки;

$c_{yкорм}$  – коэффициент нормальной силы кормовой части тела вращения.

Экспериментально установлено, что цилиндрическая часть, прилегающая к носовой части тела вращения, также создает нормальную силу. Величина этой силы небольшая, и отдельно ее не выделяют, а добавляют к нормальной силе носовой части. В этом случае формула (15.8) принимает вид

$$c_y = c_{yнос} + c_{yп} + c_{yкорм}.$$

Формулу для определения коэффициента нормальной силы, отнесенного к площади миделя, согласно линейной теории можно представить и в другом виде:

$$c_y = c_y^\alpha \alpha, \quad (15.9)$$

где  $c_y^\alpha = \partial c_y / \partial \alpha$ .

Как показывают экспериментальные данные, коэффициент  $c_y^\alpha$  зависит не только от угла атаки  $\alpha$ , но и от формы тела вращения и прежде всего от формы его носовой части, структуры пограничного слоя, числа  $M_\infty$ , удлинения тела вращения  $\lambda$  и ряда других факторов.

Производную  $c_y^\alpha$  в общем случае можно представить в виде суммы:

$$c_y^\alpha = c_{yнос}^\alpha + c_{yп}^\alpha + c_{yкорм}^\alpha,$$

где  $c_{yнос}^\alpha$  – производная по углу атаки от коэффициента нормальной силы носовой части (с учетом цилиндрической части);

$c_{yп}^\alpha$  – производная по углу атаки от коэффициента нормальной силы цилиндрической и кормовой части;



$c_{y \text{ корм}}^\alpha$  – производная по углу атаки от коэффициента нормальной силы кормовой части.

Экспериментально установлено, что производная от коэффициента нормальной силы носовой части тела вращения  $c_{y \text{ нос}}^\alpha$  является функцией удлинения носовой и цилиндрической частей тела вращения, а также числа  $M_\infty$ . Графики для определения  $c_{y \text{ нос}}^\alpha$  тел вращения с конической и оживальной носовыми частями приводятся на рис. 15.7 а и б.

Коэффициент нормальной силы цилиндрической и кормовой частей тела вращения, обусловленный наличием срыва потока при больших углах атаки, выражается эмпирической формулой

$$c_{y \text{ п}} = 0,624\lambda^2 c_{x \text{ цил}} \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

Производная  $c_{y \text{ п}}^\alpha$  цилиндрической и кормовой частей может быть определена из соотношения

$$c_{y \text{ п}}^\alpha = 1,872\lambda^2 c_{x \text{ цил}} \operatorname{tg}^2 \alpha \left( 1 - \frac{2}{3} \sin^2 \alpha \right),$$

где  $c_{x \text{ цил}}$  – коэффициент сопротивления кругового цилиндра при его поперечном обтекании;

$c_{x \text{ цил}} = 0,35$  при турбулентном пограничном слое;

$c_{x \text{ цил}} = 1,2$  при ламинарном пограничном слое

Производная от коэффициента подъемной силы кормовой части тела вращения определяется по эмпирической формуле

$$c_{y \text{ корм}}^\alpha = -2\xi \left( 1 - \eta_{\text{корм}}^2 \right).$$

Поправочный коэффициент  $\xi$  зависит от чисел  $Re$ ,  $M_\infty$ , формы кормовой части и учитывает уменьшение коэффициента нормальной силы из-за утолщения и отрыва пограничного слоя в суживающейся кормовой части ( $\xi = 0,15-0,20$ ).

Для тела с расширяющейся кормовой частью (рис. 15.7)  $c_{y \text{ корм}}^\alpha$  определяется выражением

$$c_{y \text{ корм}}^\alpha = 0,8 \left( \left( \frac{D_1}{D} \right)^2 - 1 \right) \frac{2}{57,3} \cos^2 \theta.$$

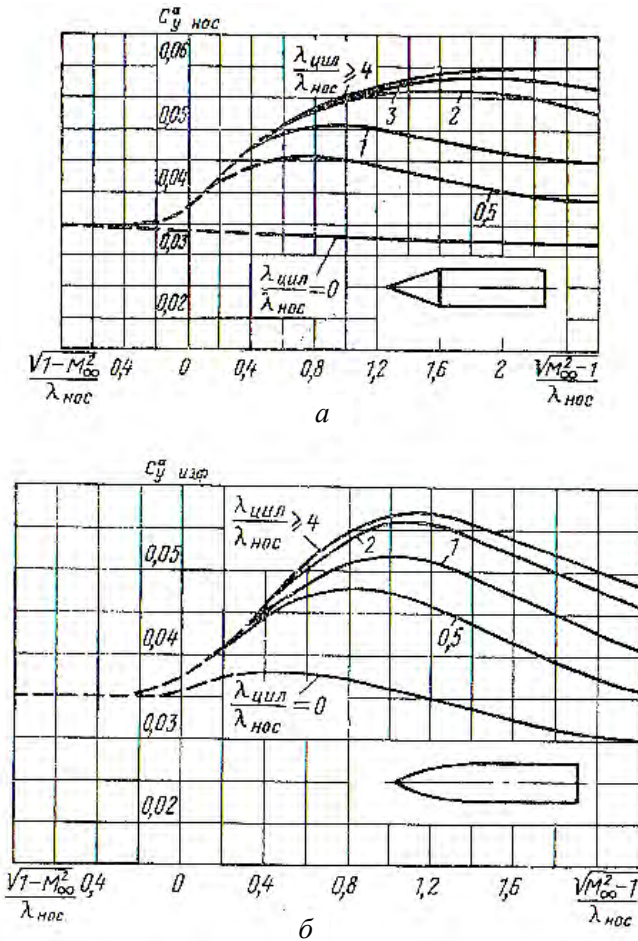


Рис. 15.7. График для определения  $c_{y \text{ а}}^\alpha$  тела вращения с конической (а) и оживальной (б) носовыми частями

Сумма  $c_{y\text{нос}}^\alpha$ ,  $c_{y\text{уп}}^\alpha$ ,  $c_{y\text{корм}}^\alpha$  согласно формуле (15.10) равна  $c_y^\alpha$ .

Подставляя в формулу (15.9) значение  $c_y^\alpha$ , получим выражение для коэффициента подъемной силы тела вращения:

$$c_y = \left( c_{y\text{нос}}^\alpha + 0,624\lambda^2 c_{x\text{цил}} \alpha^2 - 2\xi \left( 1 - \eta_{\text{корм}}^2 \right) \right) \alpha.$$

Учитывая, что для малых углов атаки  $\alpha^2 \rightarrow 0$ , имеем

$$c_y = \left( c_{y\text{нос}}^\alpha - 2\xi \left( 1 - \eta_{\text{корм}}^2 \right) \right) \alpha. \quad (15.11)$$

Если поперечное сечение тела имеет не круглую, а овальную форму, то расчет ведется по формуле

$$c_{y\text{ов}} = c_y \frac{\pi B^2}{4S_M},$$

где  $c_y$  – определяется по формуле (15.11);

$B$  – ширина миделя;

$S_M$  – площадь миделя, к которой отнесен коэффициент  $c_{y\text{ов}}$ .

Если в носовой части расположен воздухозаборник, то при работе двигателя на расчетном режиме возникает дополнительная сила, коэффициент которой  $\Delta c_y$  будет

$$\Delta c_y = 2\alpha \frac{S_{\text{вх}}}{S_M},$$

где  $S_{\text{вх}}$  – площадь входа в воздухозаборник.

## Глава 16. ДИНАМИКА БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА РАКЕТНОГО ТИПА

### 16.1. Динамика беспилотного летательного аппарата с двумя плоскостями симметрии

Уравнения движения летательных аппаратов с двумя плоскостями симметрии (рис. 16.1) могут быть получены из уравнений движения БПЛА самолетных схем.

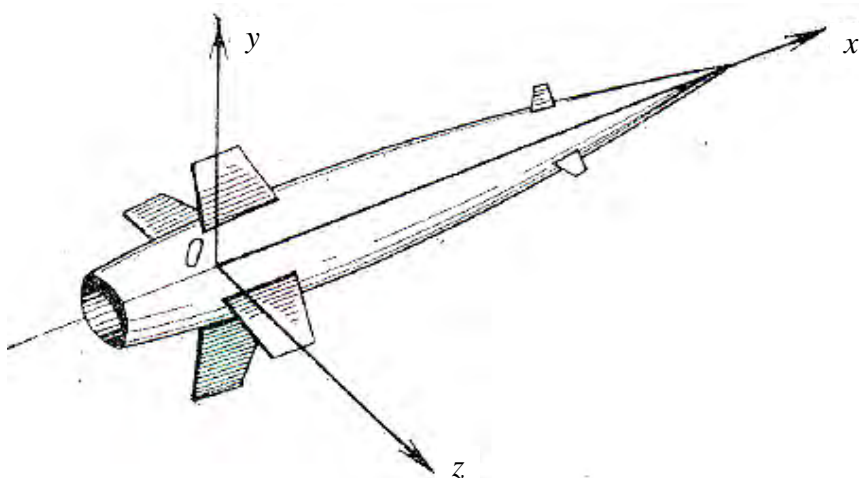


Рис. 16.1. Беспилотный летательный аппарат с двумя плоскостями симметрии

Преимущественное распространение получили плоскокрылые (рис. 16.2) и крестокрылые (рис. 16.2) дроны ракетного типа. В плоскокрылых ракетах в качестве рулевых органов используются элероны 1, руль направления 2 и руль высоты 3. Хвостовое оперение плоскокрылой ракеты крестообразное. В крестокрылых ракетах применяются руль направления 1 и элероны 2, рис. 16.3.

Газодинамические рулевые органы реализуются в виде газовых рулей, поворотных, шарнирно закрепленных маршевых двигателей и реактивных микродвигателей.

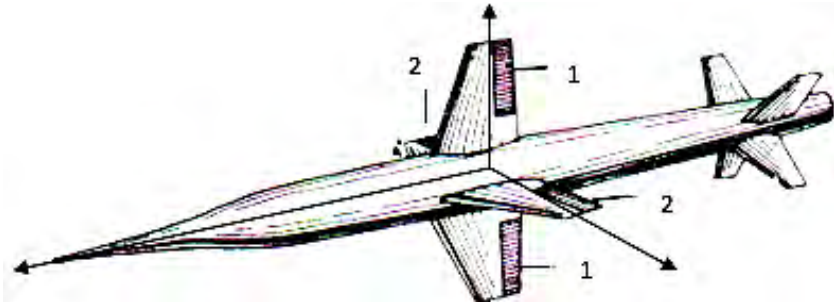


Рис. 16.2. Схема дрона типа крестокрылой ракеты

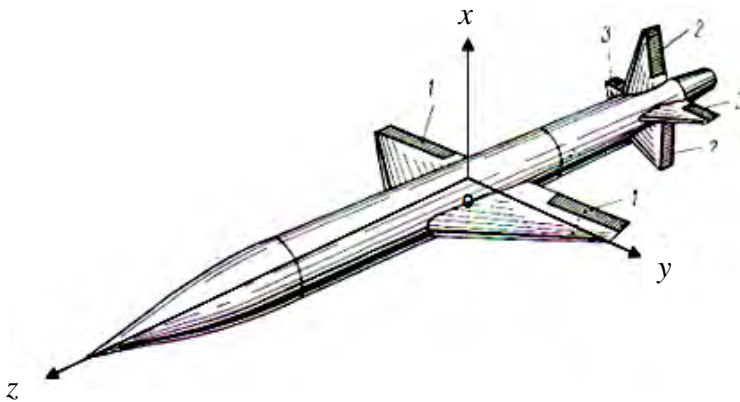


Рис. 16.3. Схема дрона типа крылатой ракеты с одной плоскостью симметрии

Уравнение движения БПЛА с двумя плоскостями симметрии получается из уравнений главы 11. Пренебрегая влиянием сил тяжести на динамику БПЛА, с учетом того, что БПЛА имеет две плоскости симметрии, рис. 16.1, получим

$$\left. \begin{aligned} J_y &= J_z; \\ c_y &= c_z; & m_y^{\bar{\omega}^y} &= m_z^{\bar{\omega}^z}; \\ c_y^\alpha &= -c_z^\beta; & m_y^\beta &= m_z^\alpha; \\ c_y^{\bar{\omega}^y} &= c_z^{\bar{\omega}^z}; & m_y^\beta &= m_z^{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \right\}$$

Эти соотношения позволяют установить, что рассмотренное выше плоское движение БПЛА в вертикальной плоскости, описываемое уравнениями главы 11, подобно плоскому движению в горизонтальной плоскости, описываемому уравнениями главы 10. Следовательно, имеем

$$\left. \begin{aligned} (p + n_{22})\alpha - p\vartheta &= f_2; \\ (n_0 p + n_{32})\alpha + (p^2 + n_{33}p)\vartheta &= -n_b \delta_b + f_3; \end{aligned} \right\} \quad (16.1)$$

$$\left. \begin{aligned} (p + n_{22})\beta + p\psi &= f_2; \\ (n_0 p + n_{32})\beta - (p^2 + n_{33}p)\psi &= n_b d_b + f'_3. \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

Введем комплексные углы:  
атаки

$$\alpha_1 = \beta + j\alpha;$$

ориентации продольной оси

$$\psi_1 = -\psi + j\vartheta;$$

отклонения управляющих поверхностей

$$\delta_1 = -\delta_n + j\delta_b,$$

где  $j = \sqrt{-1}$ .

Умножая каждое из уравнений (16.2) на  $j$  и складывая с соответствующим уравнением (16.3), получим для БПЛА с двумя плоскостями симметрии уравнения в виде

$$\left. \begin{aligned} (p + n_{22})\alpha_1 - p\psi_1 &= F_2; \\ (n_0 p + n_{32})\alpha_1 + (p^2 + n_{33}p)\psi_1 &= -n_b \delta_1 + F_3, \end{aligned} \right\}$$

где

$$F_2 = f_2' + jf_2F_3 = f_3' + jf_3.$$

Эти уравнения по форме аналогичны исходным уравнениям главы 10. Однако они описывают сложное пространственное движение БПЛА, тогда как каждая из систем (16.1.) и (16.2) описывает плоское движение. Применяемый способ преобразования уравнений движения БПЛА имеет то преимущество, что исследование системы четвертого порядка сведено к исследованию системы второго порядка. Такое упрощение значительно облегчает решение задачи нахождения уравнений системы управления.

Движение по крену, т. е. движение вокруг оси  $x$  БПЛА с двумя плоскостями симметрии, отличается от соответствующего движения БПЛА самолетной схемы тем, что его можно принимать практически независимым от движений рыскания и тангажа. Поскольку площади крыльев и оперений относительно малы, то демпфирующий момент крена мал при полете в атмосфере с малыми скоростями и уравнение движения по крену можно представить в виде

$$J_x \frac{d^2\gamma}{dt^2} = M_{xp},$$

где  $\gamma = \int_0^t \omega_x dt$  – угол крена;

$M_{xp}$  – момент, создаваемый системой управления движением по крену.

## 16.2. Динамика осесимметричных беспилотных летательных аппаратов ракетного типа

Осесимметричные БПЛА (снаряды) (рис. 16.4) стабилизируются посредством сообщения им угловой скорости вращения вокруг продольной оси. Это накладывает особые требования на динамику движения снаряда. При выводе уравнений движения будем полагать, как и выше, что силами тяжести можно пренебречь. Предположим также, что угловые скорости  $\omega_y$  и  $\omega_z$  малы по сравнению с  $\omega_x$ .

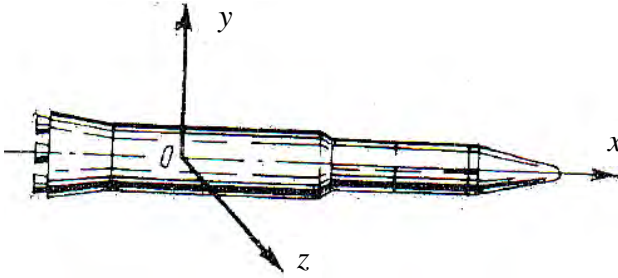


Рис. 16.4. Осесимметричный летательный аппарат

Аналогично будем принимать

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \approx V_x.$$

При этих предположениях приближенные уравнения движения в форме Эйлера примут вид

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= X; \\ m \left( \frac{dV_y}{dt} \omega_z V - \omega_x V_z \right) &= Y; \\ m \left( \frac{dV_z}{dt} \omega_x V_y - \omega_y V \right) &= Z; \\ J_x \frac{d\omega_x}{dt} &= M_x; \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= M_y; \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= M_z. \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

В дальнейшем первое и четвертое уравнения системы (16.3) не рассматриваются.

В осесимметричных снарядах в качестве характерного размера принимается диаметр  $d$ . Введем относительные угловые скорости:



$$\bar{\omega}_z = \frac{\omega_z d}{V}; \quad \bar{\omega}_y = \frac{\omega_y d}{V}.$$

Напишем линеаризованные выражения для аэродинамических сил и моментов, входящих в правые части уравнений (16.3):

$$\left. \begin{aligned} Y &= -c_y^\alpha qd^2 \frac{V_y}{V} - c_y^{\bar{\omega}_z} qd^2 \frac{\omega_z d}{V} - c_{yM} qd^2 \frac{\omega_x d}{V} \frac{V_z}{V} + c_{y1} qd^2 + Y_p; \\ Z &= c_y^\beta qd^2 \frac{V_z}{V} + c_z^{\bar{\omega}_y} qd^2 \frac{\omega_y d}{V} + c_{zM} qd^2 \frac{\omega_x d}{V} \frac{V_y}{V} + c_{z1} qd^2 + Z_p; \\ M_y &= m_y^\alpha qd^3 \frac{V_z}{V} + m_y^{\bar{\omega}_z} qd^3 \frac{\omega_z d}{V} + m_{yM} qd^3 \frac{\omega_x d}{V} \frac{V_y}{V} + m_{y1} qd^3 + M_{yp}; \\ M_z &= -m_z^\alpha qd^3 \frac{V_y}{V} + m_z^{\bar{\omega}_y} qd^3 \frac{\omega_y d}{V} + m_{zM} qd^3 \frac{\omega_x d}{V} \frac{V_z}{V} + m_{z1} qd^3 + M_{zp}, \end{aligned} \right\} (16.4)$$

где  $c_{yM}$ ,  $c_{zM}$  и  $m_{yM}$ ,  $m_{zM}$  – коэффициенты сил и моментов Магнуса;  
 $q$  – скоростной напор;

$c_{y1}$ ,  $c_{z1}$  и  $m_{y1}$ ,  $m_{z1}$  – коэффициенты сил и моментов, появляющихся вследствие несимметрии несущих поверхностей;

$Y_p$ ,  $Z_p$  и  $M_{yp}$ ,  $M_{zp}$  – силы и моменты, появляющиеся за счет несовпадения вектора тяги с осью  $Ox$  и за счет несовпадения линии действия тяги с центром масс.

Очевидно, силы  $Y_p$  и  $Z_p$  и моменты  $M_{yp}$ ,  $M_{zp}$  могут быть специально созданы с целью управления снарядом. При этом для управления движением центра масс должны быть созданы силы  $Y_p$  и  $Z_p$ , а для управления углами  $\psi$  и  $\vartheta$  – моменты  $M_{yp}$ ,  $M_{zp}$ .

Вращающий момент  $M_x$  можно представить в виде

$$M_x = c_x^{\bar{\omega}_z} qd^2 \frac{\omega_x d}{V} + M_{xp},$$

где  $M_{xp}$  – составляющая момента, создаваемого специальными верньерными двигателями или аэродинамическими рулями, служащая для сообщения снаряду скорости вращения  $\omega_x$ .

В силу осевой симметрии снаряда можно положить

$$\left. \begin{aligned} J_y = J_z = J; \\ c_y^\alpha = -c_z^\beta = c_\varphi; \quad m_y^\beta = m_z^\alpha = m_\varphi; \\ c_y^{\bar{\omega}_z} = c_z^{\bar{\omega}_y} = c_\omega; \quad m_y^{\bar{\omega}_y} = m_z^{\bar{\omega}_z} = m_\omega; \\ c_{yM} = c_{zM} = c_M; \quad m_{yM} = m_{zM} = m_M. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя значения  $Y, Z, M_y$  и  $M_z$  из выражений (16.4) в систему (16.3), найдем

$$\left. \begin{aligned} m \left( \frac{dV_y}{dt} + \omega_z V - \omega_x V_z \right) &= -c_\varphi q d^2 \frac{V_y}{V} - \\ &- c_\omega q d^3 \frac{\omega_z}{V} - c_M q d^3 \frac{\omega_x}{V} \frac{V_z}{V} + c_{y1} q d^2 + Y_p; \\ m \left( \frac{dV_z}{dt} + \omega_x V_y - \omega_y V \right) &= -c_\varphi q d^2 \frac{V_z}{V} + c_\omega q d^3 \frac{\omega_y}{V} + \\ &+ c_M q d^3 \frac{\omega_x}{V} \frac{V_y}{V} + c_{z1} q d^2 + Z_p; \\ J_y \frac{d\omega_x}{dt} + (J_x - J) \omega_x \omega_y &= m_\varphi q d^3 \frac{V_z}{V} + m_\omega q d^4 \frac{\omega_y}{V} + \\ &+ m_M q d^4 \frac{\omega_x}{V} \frac{V_y}{V} + m_{y1} q d^3 + M_{yp}; \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J - J_x) \omega_x \omega_y &= -m_\varphi q d^3 \frac{V_y}{V} + m_\varphi q d^4 \frac{\omega_z}{V} + \\ &+ m_M q d^4 \frac{\omega_x}{V} \frac{V_z}{V} + m_{z1} q d^3 + M_{zp}. \end{aligned} \right\} \quad (16.5)$$

Умножим первое и третье уравнения системы (16.5) на  $j$  и сложим соответственно со вторым и четвертым уравнениями. Вводя обозначения:

$$V_1 = V_z + jV_y;$$

$$\omega_1 = \omega_z + j\omega_y,$$

получим

$$\left. \begin{aligned} (p + A)V_1 - B\omega_1 &= c_1V^2 + N_p; \\ CV_1 + (p + D)\omega_1 &= m_1V^2 + M_p, \end{aligned} \right\} \quad (16.6)$$

где

$$A = j\omega_x \left( 1 - \frac{c_M}{\bar{m}} \right) + \frac{c_\varphi}{md} V; \quad B = jV \left( 1 + \frac{c_M}{\bar{m}} \right); \quad c_1 = \frac{c_{z1} + jc_{y1}}{md};$$

$$N_p = \frac{Z_p + jY_p}{m}; \quad C = \frac{m_\varphi}{Jd} V - \frac{m_M}{J} \omega_x; \quad D = j\omega_x \left( 1 - \frac{\bar{J}_x}{J} \right) - \frac{m_\omega}{J} V;$$

$$m_1 = \frac{m_{z1} + jm_{y1}}{Jd}; \quad M_p = \frac{M_{zp} + jM_{yp}}{J};$$

$$\bar{m} = \frac{2m}{\rho d^3}; \quad \bar{J} = \frac{2J}{\rho d^4}.$$

Выражения (16.6) являются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Введенные здесь комплексные переменные  $W$  и  $\omega$  позволили понизить порядок дифференциальных уравнений с четвертого до второго, что упрощает исследование динамики.

Проведем исследование устойчивости движения вращающихся снарядов. Для этого рассмотрим характеристическое уравнение системы (16.6):

$$\Delta(p) = p^2 + (A + D)p + AD + BC = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения являются комплексными. Корни уравнения будут

$$p_1 = -\delta_1 - j\omega_1 + \delta_2 + j\omega_2; \quad p_2 = -\delta_1 - j\omega_1 - \delta_2 - j\omega_2, \quad (16.7)$$

где

$$\delta_1 = \frac{V}{2} \left( \frac{c_\phi}{md} - \frac{m_\omega}{j} \right); \quad \omega_1 = \frac{\omega_x}{2} \left( 2 - \frac{c_M}{\bar{m}} - \frac{\bar{J}_x}{J} \right);$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{A^2 + B^2} + A_2}; \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} - B_1};$$

$$A_1 = V^2 \left( \frac{c_\phi}{md} + \frac{m_\omega}{J} \right)^2 - \omega_x^2 \left( \frac{\bar{J}_x}{J} - \frac{c_M}{\bar{m}} \right)^2;$$

$$B_1 = 2V \left( \omega_x \left( \left( \frac{\bar{J}_x}{J} - \frac{c_M}{\bar{m}} \right) \left( \frac{c_\phi}{md} + \frac{m_\omega}{J} \right) + 2 \left( 1 + \frac{c_\omega}{m} \right) \frac{m_M}{J} \right) - \right. \\ \left. - 2V \frac{m_\phi}{Jd} \left( 1 + \frac{c_\omega}{\bar{m}} \right) \right).$$

Для устойчивости системы необходимо, чтобы вещественные части корней (16.7) были отрицательны. Это требование сводится к выполнению двух неравенств:

$$-\delta_1 + \delta_2 < 0; \quad -\delta_1 - \delta_2 < 0.$$

Из этих неравенств при заданных параметрах снаряда можно определить границы устойчивости.

## Глава 17. КИНЕТИКА ВИНТОВ И КОРПУСА ГЕЛИКОПТЕРОВ

### 17.1. Кинематика лопасти винта и кинематика вертикального движения вверх

Автоматическое управление мультикоптером является сложной и интересной задачей.

Гексакоптеры представляют собой разновидность летательных аппаратов вертолетной схемы, оснащенных шестью несущими винтами. Полет мультикоптера осуществляется за счет подъемной силы, которую создают несущие винты. Как правило, винты расположены на крест-накрест пересекающихся балках и вращаются в диагонально противоположных направлениях, причем каждый винт приводится в движение отдельным двигателем.

Система координат  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ , рис. 17.1, жестко связана с корпусом летательного аппарата, ось  $Z_1$  – одна из осей, на которой вращается винт (лопасть).

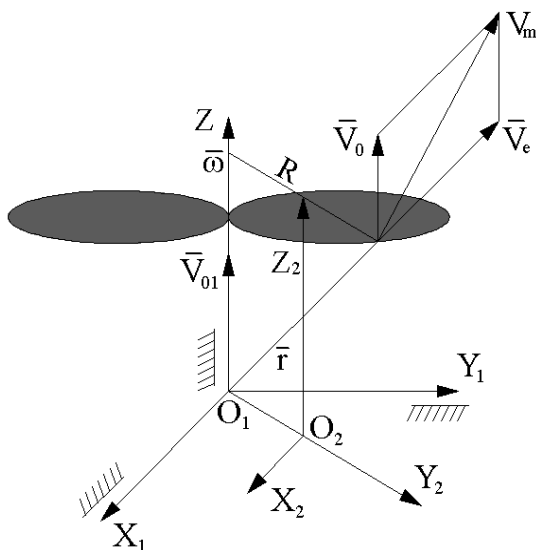


Рис. 17.1. Схема винтового движения

Точка  $M$  – точка лопасти, для которой должно выполняться равенство

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{V}_{O_1} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (17.1)$$

где  $V_{O_1}$  – скорость поступательного движения точки  $O_1$  (оси вращения).

1.  $V_{O_1} \parallel \boldsymbol{\omega}$ . Введем систему координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ , которая вращается угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  вокруг оси  $Z_1$  так, что  $OZ_1, OZ_2$ , оси  $OX_1, OY_2$  перемещаются параллельно самим себе. Тогда движение точки  $M$  можно рассматривать как абсолютное относительно системы  $O_1X_1Y_1Z_1$  и относительное в системе  $O_2X_2Y_2Z_2$ . Уравнение (17.1) тогда имеет вид

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_r,$$

где  $\mathbf{V}_e$  – скорость переносного движения;

$\mathbf{V}_r$  – скорость относительного движения точки  $M$ .

Из рис. 17.1 следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_r}{V_e} = \frac{V_m}{\omega R},$$

где  $R$  – расстояние от точки  $M$  до оси вращения.

Таким образом, точка  $M$  совершает винтовое движение в силу наличия крутки лопасти, что обуславливает поступательно перемещение оси вращения винта с корпусом гексакоптера. Шаг винта  $h$

$$h = V_0 T = \frac{2\pi V_0}{\omega},$$

где  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  – период вращения точки  $M$ .

Параметр винта  $p$

$$p = \frac{V_0}{\omega}.$$

Рассмотренное движение называется **кинематическим винтом**. Если  $V_{O1}$  и  $\omega$  – переменные, то движение мгновенно винтовое. В этом случае  $p = p(t)$ .

2.  $V_{O1} \perp \omega$ . Пусть теперь поступательное движение происходит в горизонтальном направлении перпендикулярно оси винта, рис. 17.2. Пусть вектор  $V_{O1}$  перпендикулярен оси  $O_1Z_1$ . Как известно, поступательное движение эквивалентно паре вращений, которую построим следующим образом. Вектор  $\omega_1 = \omega$ . Вектор  $\omega_2$  лежит в плоскости  $\Pi$ , перпендикулярной  $V_{O1}$  в точке  $O_3$ , и  $\omega_2 = -\omega_1$ .

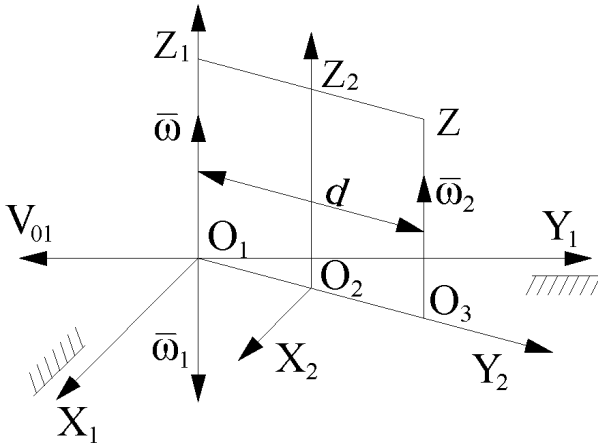


Рис. 17.2. Движение перпендикулярной оси винта

Тогда, используя свойства эквивалентности систем векторов, можем записать

$$(V_{O1}, \omega) \sim (\omega, \omega_1, \omega_2), \text{ но } (\omega, \omega_1) \sim 0, \text{ поэтому } (V_{O1}, \omega) \sim \omega_2.$$

Это означает, что результирующее движение эквивалентно одному вращению вокруг мгновенной оси вращения  $O_3$  со скоростью

$$V_O = \boldsymbol{\omega} \times O_1 O_3.$$

3.  $V_{O1}$  – произвольная. Поступательное движение оси в произвольном направлении.

Пусть теперь лопасть вращается со скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  и совершает поступательное перемещение в произвольном направлении со скоростью  $V_{O1}$ . Представим  $V_{O1}$  в виде

$$V_{O1} = V_{\text{пар}} + V_{\text{пер}},$$

где  $V_{\text{пар}} \parallel \boldsymbol{\omega}$ ,  $V_{\text{пер}}$  перпендикулярна  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $V_{\text{пер}} \perp \boldsymbol{\omega}$ , тогда, как и в случае «2»,  $V_{\text{пер}} \sim (\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ .

Соотношения эквивалентности имеют вид

$$(V_{O1}, \boldsymbol{\omega}) \sim (V_{\text{пар}}, V_{\text{пер}}, \boldsymbol{\omega}) \sim (V_{\text{пар}}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \sim (V_{\text{пар}}, \boldsymbol{\omega}_2),$$

$$\text{так как } (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_1) \sim 0.$$

Таким образом, движение приводится к мгновенно-винтовому, совершаемому вокруг оси  $O_3 Z$ , отстоящий от  $O_1 Z_1$  на расстояние  $d$ .

$$d = O_1 O_3 \frac{V_{O1}}{\omega}, \quad \omega_1 = -\omega, \quad V_{O1} = O_1 O_3 \times \boldsymbol{x} \boldsymbol{\omega}_2;$$

$$d = \frac{V_{\text{пер}}}{\omega} = \frac{V_{O1} \sin \varphi}{\omega}, \quad h = \frac{2\pi V_{O1} \sin \varphi}{\omega}.$$

Ось вращения совершает поступательное вверх и вращательное движение.



## 17.2. Кинематика сечения мультикоптера

Рассмотрим случай, когда четыре винта расположены в углах квадрата или прямоугольника (квадрокоптер). Винты, расположенные на одном диаметре, вращаются в разные стороны. Если имеем шесть винтов в вершинах и правильного шестиугольника (гексакоптер), – винты вращаются в противоположные стороны.

Рассмотрим плоскость, проходящую через диаметр описанного круга.

Как показано на рис. 17.3, точка винта совершает движение по спирали, а это значит, что точка оси вращения совершает поступательное перемещение за один поворот на шаг  $h$ :

$$h = \frac{2\pi V}{\omega},$$

где  $h$  – шаг винта;

$V$  – скорость поступательного движения;

$\omega$  – угловая скорость винта.

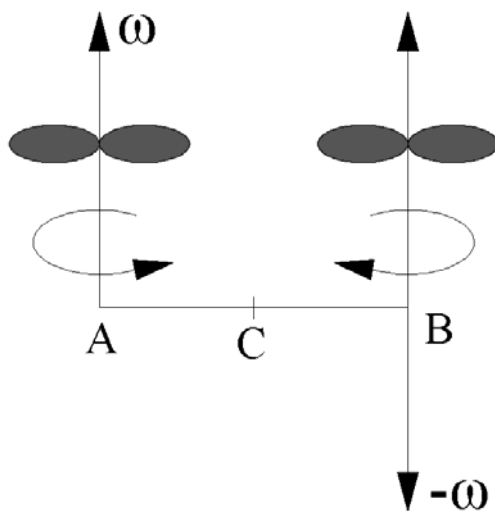


Рис. 17.3. Схема угловых скоростей

Векторы поступательной скорости пары винтов, расположенных на одной балке, направлены в одну сторону, а угловых скоростей – в противоположные.

Если скорости равны, то центр масс движется поступательно в направлении  $V$ , рис. 17.4.

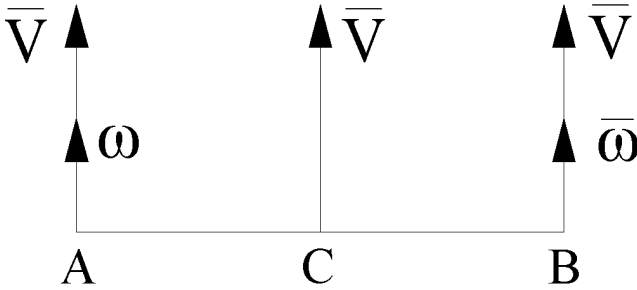


Рис. 17.4. Движение центра масс при равенстве скоростей

Если скорости не равны, то в точке  $P$  существует МЦС и в плоскости пары винтов совершается вращение вокруг точки  $P$ . Скорость в точке  $C$  – среднее арифметическое значений скоростей в точках  $A$  и  $B$ , рис. 17.5:

$$\frac{V_a}{AP} = \frac{V_b}{BP};$$

$$V_c = \frac{V_a + V_b}{2}.$$

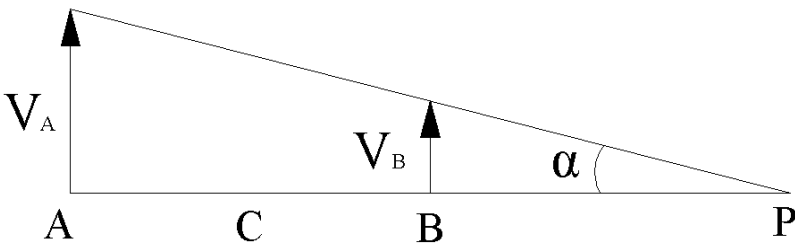


Рис. 17.5. Схема для определения  $M$

При повороте  $AB$  на угол  $\alpha$  появляются проекции скоростей  $V_A, V_B$  точек  $A, B$  на горизонталь, т. е. возникает поступательное движение вбок, рис. 17.6:

$$V_A^{(h)} = V_A \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = V_a \sin \alpha;$$

$$V_B^{(h)} = V_B \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = V_B \sin \alpha;$$

$$V_A^{(v)} = V_a \cos \alpha;$$

$$V_B^{(v)} = V_B \cos \alpha.$$

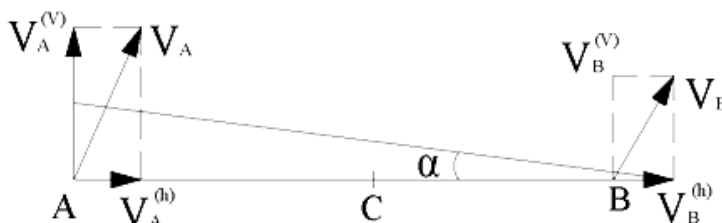


Рис. 17.6. Схема для определения скорости движения вбок

Боковое движение линии  $AB$  поступательное, если  $V_A^{(h)} = V_B^{(h)}$ . На самом деле  $AB$  совершает не горизонтальное движение, а более сложное.

Имеет место ускоренное движение, когда вектор  $\varepsilon$  имеет то же направление, что и  $\omega$ , а в случае замедления – в противоположную сторону, рис. 17.7:

$$\varphi_a = \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{\omega^2};$$

$$AQ_a = \frac{wa}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}}.$$

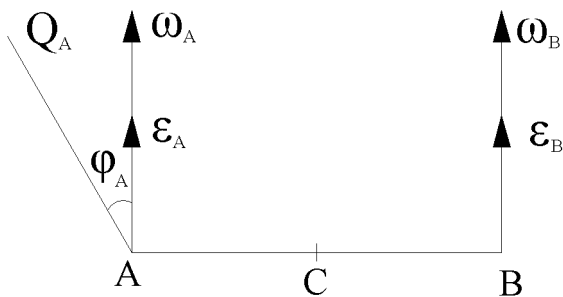


Рис. 17.7. Схема для определения угла

Движение вращательное, когда вертолет описывает окружность на месте, рис. 17.8.

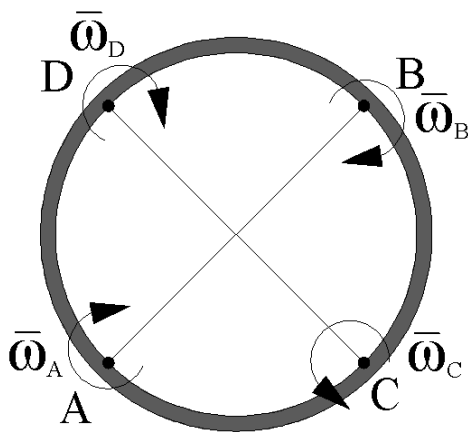


Рис. 17.8. Схема вращения на месте

Уменьшение скорости вращения винтов против часовой стрелки через один приведет к вращению по часовой стрелке в силу третьего закона Ньютона, а по часовой – в противоположном направлении.

### 17.3. Динамика корпуса мультикоптера

Мультикоптер представляет собой твердое тело, к которому симметрично прикреплены двигатели с параллельно расположен-

ными винтами. Винты могут отклоняться от вертикального положения с помощью автоматов перекоса, однако в мультикоптерной схеме считаем оси жесткими стержнями. Схематически корпус мультикоптера можно считать сфероидом вращения, у которого по большому диаметру прикреплены двигатели. Центр масс мультикоптера расположен в точке  $O$ , рис. 17.9.

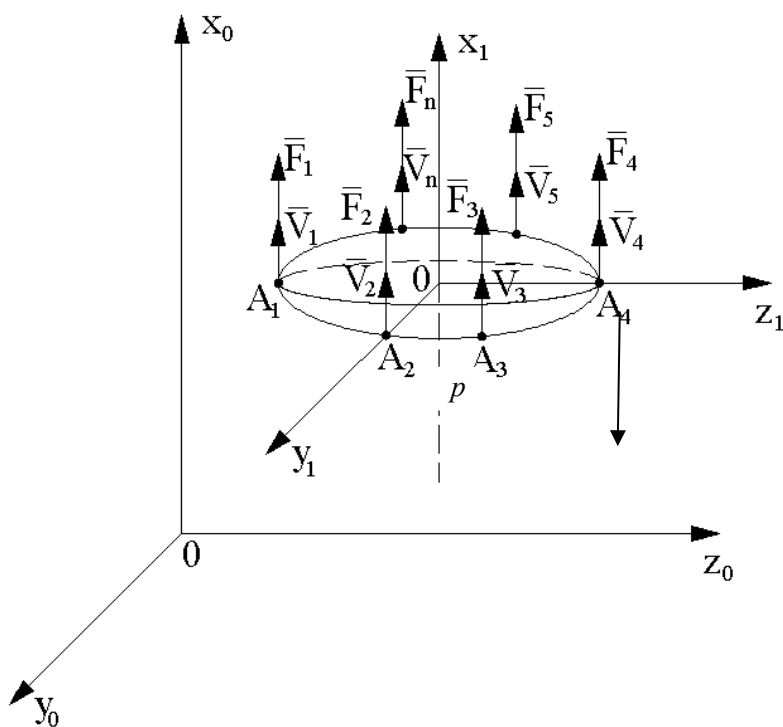


Рис. 17.9. Схема сил и скоростей мультикоптера

Заменим корпус мультикоптера системой масс, сосредоточенных в точках крепления двигателей, так, что центр масс остается в точке  $O$ . В настоящее время распространены схемы с четным симметричным расположением винтов, жестко скрепленных с корпусом. В общем случае винты могут вращаться с разными угловыми скоростями и в разных направлениях, соответственно скорости поступательных перемещений всегда параллельны, но по величине могут

различаться. Тяговое усилие винта зависит от его угловой скорости, а направление совпадает с осью вращения и поступательной скоростью перемещения.

Рассмотрим случай четного  $n = 2m$  числа симметрично расположенных винтов в углах правильного  $2m$ -угольника, вписанного в окружность. В случае независимых между собой двигателей могут быть записаны уравнения движения.

Как известно, по третьему закону Ньютона сила действия равна силе противодействия, поэтому вращение винта, например, по часовой стрелке приводит к тому, что вертолет будет вращаться против часовой стрелки, если на него не наложены связи, например, когда он стоит на земле. Чтобы исключить эффект противовращения, соседние винты должны вращаться в противоположные стороны с одинаковыми угловыми скоростями. В этом случае эффект вращения вертолета в желаемом направлении осуществляется путем снижения (увеличения) угловых скоростей винтов через один. Движение вертолета в вертикальном направлении достигается увеличением (подъем) или уменьшением (спуск) угловых скоростей всех винтов одновременно. Зависание (равновесие) осуществляется при равенстве суммы подъемных сил винтов и силы тяжести. Перемещение в горизонтальном направлении осуществляется уменьшением угловых скоростей вращения винтов в той части мультивертолета, куда агрегат должен перемещаться. В случае общего движения по траектории подъема или спуска проекции линейной скорости центра масс на оси  $Ox_1$  и на плоскость  $Oy_1z_1$  будут определять направление и скорость перемещения центра:

$$m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt} = \bar{F}_i - m\bar{g} - M\bar{g}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (17.2)$$

где  $m$  – масса всех двигателей;

$M$  – масса корпуса.

Просуммируем в (17.2) все уравнения:

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i - m\bar{g} - M\bar{g} = \bar{F} - m\bar{g} - M\bar{g}$$

или

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = \bar{F} - m\bar{g} - M\bar{g}.$$

Выполняя обычные преобразования

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i = m \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i}{m} \right), \quad m = \sum m_i,$$

получим уравнения для движения центра масс точки 0:

$$m \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = m \frac{d\bar{V}_c}{dt} = \bar{F} - m\bar{g} - M\bar{g},$$

где  $\bar{r}_c$  – координата центра масс в абсолютной системе координат;

$\bar{V}_c$  – скорость центра масс.

Мультикоптер будет совершать вращательные движения на месте **без перенесения центра масс**, если будут возникать моменты сил тяги относительно каких-либо осей или точек.

Изменение угла нутации будет происходить, если пара двигателей, расположенных в плоскости, проходит через точку 0 перпендикулярно плоскости главного круга, рис. 17.10.

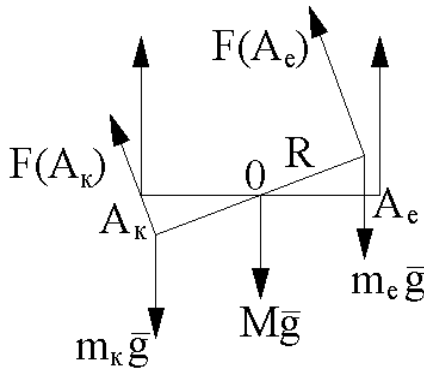


Рис. 17.10. Изменение угла нутации

Если силы в точках  $A_k, A_e$  не равны:  $F(A_k) < F(A_e)$ , что обусловлено тем, что  $\omega(A_k) < \omega(A_e), \bar{V}(A_k) < \bar{V}(A_e)$ , то возникает момент вращения корпуса мультикоптера вокруг оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости чертежа:

$$F(A_e)R - F(A_k)R = M_0 = R(F(A_e) - F(A_k)).$$

Считаем, что поворот происходит относительно линии углов.

Так как для осесимметричной модели главная ось инерции проходит через точку  $O$  перпендикулярно плоскости большого круга, то будем считать угол  $\theta$  (нутаии) углом тангажа. Угол прецессии (крена)  $\psi$  изменяется в зависимости от сил тяги винтов при  $\theta \neq 0$ . В этом случае подъем происходит с вращением мультикоптера вокруг неподвижной вращательной оси за счет моментов сил относительно оси  $Ox_1$ . Собственное вращение главной оси происходит вокруг вертикальной главной оси перпендикулярно плоскости главного круга. При чисто вертикальном движении собственное вращение появляется в результате бегущего изменения тяги винтов двигателей через один по кругу. Если в плане рис. 17.10 уменьшение тяги бежит против часовой стрелки, то вращение будет в обратном направлении по часовой стрелке, а если – по часовой, то вращение будет против часовой. Это является результатом того, что при уменьшении тяги винта происходит нутация, бегущая по кругу, а в результате получается проекция силы тяги в направлении вращения, рис. 17.11.

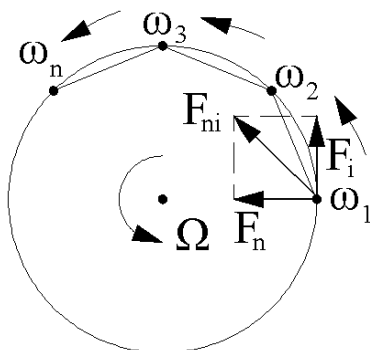


Рис. 17.11. Нутация, бегущая по кругу



Вращательные движения мультикоптера в общем случае требуют знания моментов инерции и центробежных моментов. В силу осесимметричности большая главная ось инерции проходит вертикально и перпендикулярно плоскости главного круга, две другие главные оси лежат в плоскости большого круга, так как корпус мультикоптера имеет симметрию эллипсоида вращения с периодическим повторением двух главных значений моментов инерции. Оси проходят либо через пары двигателей, расположенных на главном диаметре, либо через середины сторон правильного многоугольника. Например, для квадрокоптера имеем симметрию через  $\frac{\pi}{2}$  поворотов симметрии.

Момент инерции относительно оси  $Ox$

$$I_x = A = \sum_{i=1}^{2l} m_i r_i^2 = m_0 R^2 2l.$$

Для квадрокоптера

$$I_y = I_z = B = c = 2m_0 R^2;$$

$$I_x = 4m_0 R^2 = B = c.$$

Для гексакоптера

$$I_y = B = c = 4m_0 \left( R \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 3m_0 R^2;$$

$$I_x = A = 6m_0 R^2.$$

Момент вращения вокруг осей  $x_0, y_0, z_0$

$$M_x^{(i)} = F_i R \cos \alpha_i,$$

где  $\alpha_i$  – угол между силой тяги  $F_i$  и касательной к окружности большого круга в точке  $A_i$ . Если при наклоне платформы мульти-

коптера сила  $F_i$  проецируется не на касательный вектор  $\bar{\tau}$ , а в плоскость  $Oyz$ , то имеем вид, показанный на рис. 17.12.

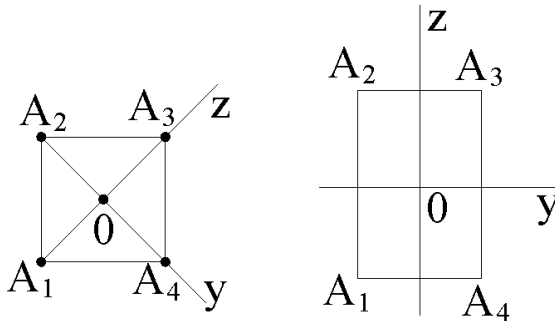


Рис. 17.12. Схема для квадрокоптера

А для гексакоптера через  $\pi/4$  поворотов симметрии – видна, рис. 17.13.

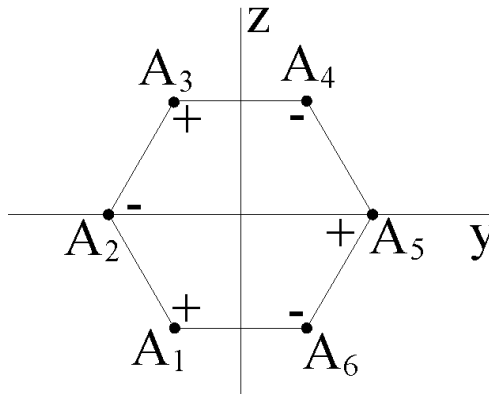


Рис. 17.13. Схема для гексакоптера

Вращательный момент

$$M_x^{(i)} = F_i R \cos \beta_i \cdot \cos \gamma_i,$$

где  $\beta_i$  – угол между  $F_i$  и проекцией  $F_i$  на плоскость  $Oyz$ ;

$\gamma_i$  – угол между проекцией  $F_i$  и касательным вектором  $\tau$ ,  
рис. 17.14.

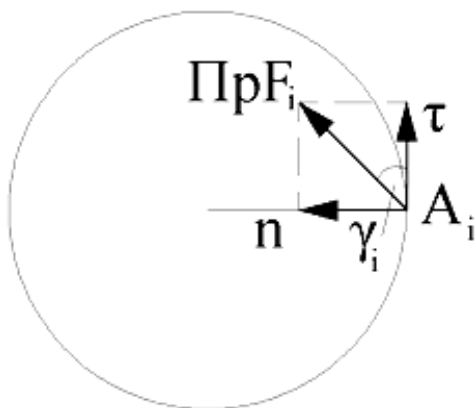


Рис. 17.14. К определению вращательного момента проекцией

Для квадрокоптера

$$M_y^{(i)} = F(A_1)R - F(A_3)R = R(F(A_1) - F(A_3))$$

или

$$M_y^{(i)} = 2(F(A_1) - F(A_2))R \frac{\sqrt{2}}{2} = (F(A_1) - F(A_2))R\sqrt{2}.$$

Для гексакоптера

$$\begin{aligned} I_y^{(i)} &= (F(A_1) - F(A_3))R \sin 30^\circ + (F(A_6) - F(A_4))R \sin 30^\circ = \\ &= \frac{R}{2}(F(A_1) - F(A_3) + F(A_6) - F(A_4)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_z^{(i)} &= R(F(A_5) - F(A_2)) + \frac{R}{2}(F(A_4) - F(A_3)) + \frac{R}{2}(F(A_6) - F(A_1)) = \\ &= R(2F(A_5) - 2F(A_2) + F(A_4) - F(A_3) + F(A_6) - F(A_1)). \end{aligned}$$

#### 17.4. Сведение винтовой мультисхемы к эквивалентной моносхеме

В случае геликоптера мультисхемного типа имеем параллельную систему сил. Силы тяжести, приложенные в центре масс двигателей и в центре масс геликоптера, все время направлены вертикально вниз, силы тяги двигателей, жестко скрепленных с корпусом, все время параллельны и направлены вверх, рис. 17.15, но в общем случае не вертикально.

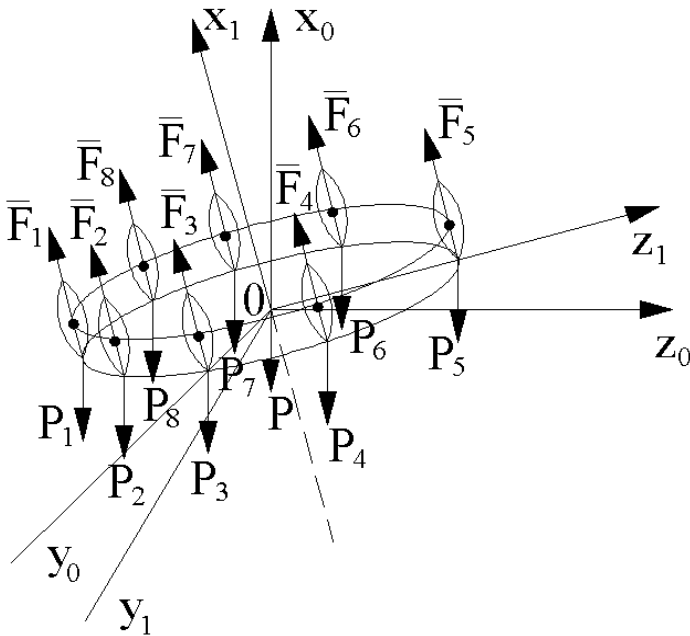


Рис. 17.15. Параллельная система сил для геликоптера мультивинтового типа

Здесь  $F_i$  – сила тяги  $i$ -го двигателя,  $P_i$  – сила тяжести  $i$ -го двигателя;  $P_9$  – сила тяжести корпуса без учета двигателей.

Центр сил тяжести вычисляется по формуле

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{2m} \mathbf{r}_i P_i + \mathbf{r}_o P}{\sum_{i=1}^{2m} P_i + P}.$$

Очевидно, вектор  $\mathbf{r}_c$  имеет координаты  $\mathbf{r}_c = (x_c, 0, 0)$ , т. е. линии выше точки 0 на оси  $x_0$ .

Центр сил тяги находится по формуле

$$\mathbf{r}_F = \frac{\sum \mathbf{r}_i^{(F)} F_i}{\sum F_i}$$

и имеет координаты  $\mathbf{r}_F = (x_F, 0, 0)$ , т. е. линии выше точки 0.

В момент времени, когда силы тяги становятся неравными, возникают моменты сил относительно точки 0 и осей координат:

$$M_x = \sum_{i=1}^{2m} M_x(F_i) \neq 0, \quad M_y = \sum_{i=1}^{2m} M_y(F_i) \neq 0, \quad M_z = \sum_{i=1}^{2m} M_z(F_i) = 0.$$

Таким образом, момент поворота вокруг осей  $x$ ,  $y$  возникает, когда силы тяги становятся неравными и корпус (плоскость круга) отклоняется на величину угла нутации  $\theta$ .

Раскладывая в этом положении векторы тяги  $\mathbf{F}_i$  на составляющие  $\mathbf{F}_{i\parallel}$ , направленные по вертикальной оси  $x_0$ , и  $\mathbf{F}_{i\perp}$ , горизонтальной в плоскости  $0y_0z_0$ :

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i\parallel} + \mathbf{F}_i,$$

получим, что в этом случае мультигеликоптер будет перемещаться как вертикально, так и горизонтально, если

$$\sum_{i=1}^{2n} \mathbf{F}_{i\perp} > \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{P}_{i\perp} + \mathbf{P}_0.$$

Отметим, что в общем случае центр системы параллельных сил тяги  $r_F$  и центр сил тяжести (центр масс) не совпадают. Поскольку центр сил существует и его можно найти, главный вектор сил тяги, приложенный в точку  $r_F$ , и главный вектор сил тяжести  $r_c$ , то силовую мультисхему можно заменить эквивалентной моно схемой. Отличие состоит в том, что мультисхема позволяет создавать вращение аппарата вокруг главной оси за счет создания бегущего по окружности режима изменения скорости вращения винтов, для моно схем (одновинтовой вертолет), как правило, повороты корпуса по курсу (рысканье) осуществляются за счет хвостового винта. Рассмотрим модель моногеликоптера с хвостовым винтом. В этом случае главную продольную ось удобнее брать вдоль корпуса вертолета по направлению горизонтального полета вперед.

Боковое движение эквивалентного монокоптера создается за счет автомата перекоса винта, что должно быть эквивалентно изменению угловых скоростей винтов мультикоптера.

Рассмотрим пару винтов на балке диаметра окружности, на которой расположены винты, рис. 17.16. В случае чисто вертикального движения  $\omega_A = \omega_B$ ,  $F_A = F_B$ , движение чисто поступательное. Боковое движение осуществляется изменением скорости в точке  $A$  (уменьшение движения влево), увеличение движения – вправо.

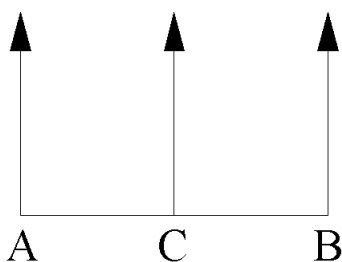


Рис. 17.16. Схема эквивалентности

В случае перекоса винта горизонтальная проекция скорости перекоса в точке  $C$  (монокоптера) и изменения угловых скоростей винтов в точках  $A$  и  $B$  эквивалентны, рис. 17.17:

$$V_A^{(h)} = V_B^{(h)} = V_C^{(h)}.$$

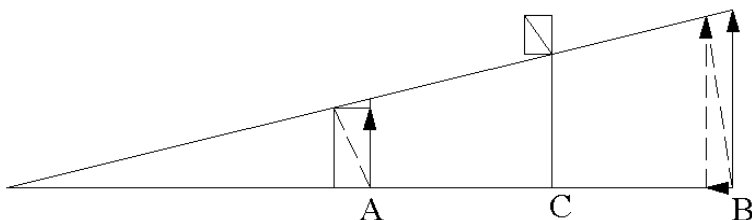


Рис. 17.17. Схема эквивалентности с перекосом

### 17.5. Аэродинамика несущего винта вертолета

В отличие от винта летательного аппарата типа самолета винт вертолета выполняет не только функции движителя для преодоления силы лобового сопротивления, но и уравнивает в полете вес вертолета. Винт вертолета обеспечивает устойчивость и управляемость полета, а также безопасность аварийного снижения.

Несущий винт (система несущих винтов) позволяет в широких пределах изменять вектор тяги как по абсолютной величине, так и по направлению. В широких пределах и достаточно оперативно также меняется момент тяги.

Наибольшее распространение получили винты, у которых плоскость вращения лопастей может менять положение по отношению к оси вала. Последнее достигается за счет шарнирного крепления лопастей несущего винта к втулке и применения специального механизма, так называемого автомата перекоса.

Если рассмотреть силы, действующие на лопасть в плоскости вращения (силы сопротивления и центробежные силы), аналогичные рассуждения приводят к выводу, что вертикальный шарнир разгружает лопасть от изгибающих моментов в плоскости вращения, рис. 17.18. В этом основное назначение вертикального шарнира.

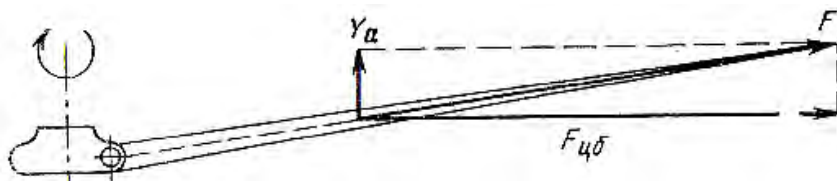


Рис. 17.18. Равновесное положение лопасти

Благодаря горизонтальному и вертикальному шарнирам лопасть винта в полете под действием изменяющихся по величине моментов сил все время совершает колебательные движения. В конструкции винта имеются упоры, ограничивающие поворот лопастей. На рис. 17.19  $Y_a$  – аэродинамическая сила,  $F_{цб}$  – центробежная сила,  $F$  – результирующая сила.

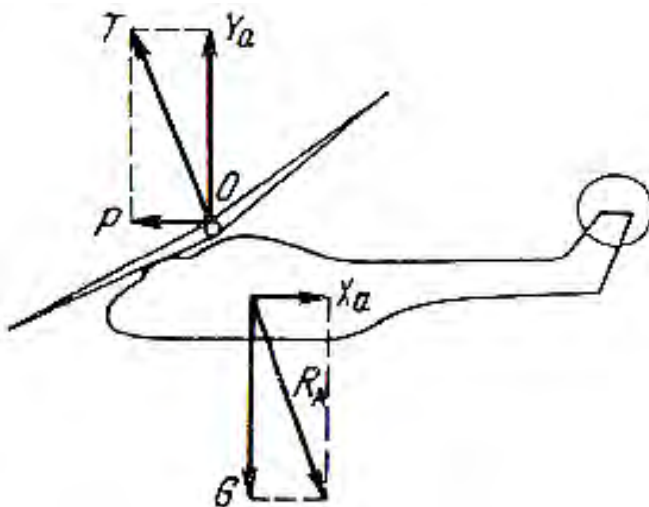


Рис. 17.19. Схема сил, действующих на моногеликоптер в полете

Автомат перекоса управляет углами установки лопастей на работающем винте в зависимости от их положения, которое характеризуется углом азимута  $\psi$  (рис. 17.20). Если увеличивать углы установки лопастей при значениях  $\psi$ , близких к 0, и уменьшать – при  $\psi$ , близких к  $\pi$ , то вследствие изменения подъемной силы плоскость вращения лопастей наклоняется вперед, сила тяги винта  $T$  создает горизонтальную составляющую  $P$  и вертолет начинает перемещаться вперед (рис. 17.19). Если уменьшить углы установки лопастей при значениях  $\psi$ , близких к  $3\pi/2$ , и увеличивать – при  $\psi$ , близких к  $\pi/2$ , то вертолет начинает перемещаться вправо.



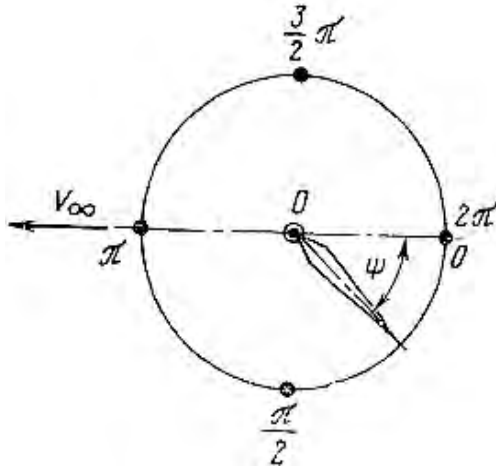


Рис. 17.20. Азимутальное положение лопасти

Для получения более равномерной работы несущего винта число лопастей обычно делают больше двух. Лопастям придают прямоугольную или трапециевидную форму в плане со слабым сужением. Они, как правило, имеют крутку, уменьшающую углы установки по мере приближения к концам лопастей.

### 17.5.1. Влияние косо́й обду́вки на аэродинамику винта

Плоскость вращения лопастей несущего винта вертолета в полете составляет некоторый угол с направлением полета. Этот угол называют *углом атаки винта*. В обычном полете угол атаки отрицателен. При углах атаки  $\alpha = \pm\pi/2$ , соответствующих вертикальному подъему и снижению вертолета, винт вертолета встречает воздух в осевом направлении. При  $\alpha$ , отличном от  $\pm\pi/2$ , винт работает в режиме *косо́й обду́вки*.

Косая обдувка приводит к тому, что условия работы лопасти винта при изменении угла азимута  $\psi$  изменяются. Разложим скорость полета  $V_\infty$  на осевую составляющую  $V_\infty \sin \alpha$  и составляющую в плоскости вращения  $V_\infty \cos \alpha$ .

Косую обдувку винта можно представить как сумму осевой (со скоростью  $V_\infty \sin \alpha$ ) и поперечной (со скоростью  $V_\infty \cos \alpha$ ).

### 17.5.2. Аэродинамические характеристики винта

Пусть несущий винт работает под углом атаки  $\alpha$  (рис. 17.21). Полную аэродинамическую силу  $R_A$ , действующую на винт, можно разложить на составляющие в скоростной или связанной системах координат.

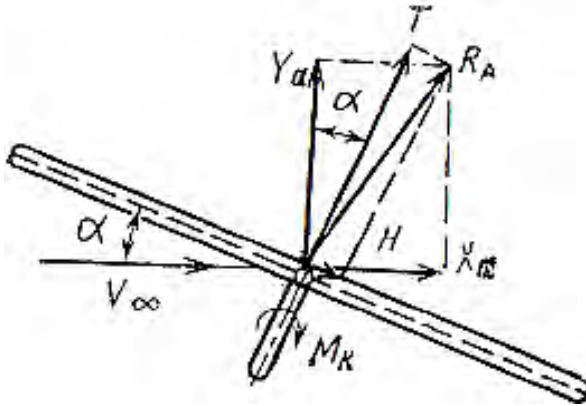


Рис. 17.21. Проекции равнодействующей аэродинамических сил несущего винта на направления скоростных и связанных осей

В связанной системе координат получим перпендикулярную к плоскости вращения составляющую в плоскости вращения винта  $H$  – **продольную силу винта**.

В скоростной системе координат  $Y_a$  – **подъемная сила винта** и  $X_a$  – **пропульсивная сила винта**.

В соответствии с законами аэродинамического подобия для составляющих сил  $R_A$  можно написать следующие выражения:

$$T = c_T \frac{1}{2} \rho (\omega R)^2 \pi R^2;$$

$$Y_a = c_{y_a} \frac{1}{2} \rho (\omega R)^2 \pi R^2;$$

$$H = c_H \frac{1}{2} \rho (\omega R)^2 \pi R^2;$$

$$X_a = c_{xa} \frac{1}{2} \rho (\omega R)^2 \pi R^2.$$

Здесь  $c_T$ ,  $c_H$ ,  $c_{ya}$  и  $c_{xa}$  – коэффициенты соответствующих сил – безразмерные величины, зависящие от параметров динамического подобия винтов в условиях косої обдувки.

Пользуясь понятием эквивалентного винта, в приближенных расчетах считают, что аэродинамические коэффициенты винта определяются помимо основных геометрических параметров (число лопастей  $z_L$ , коэффициент заполнения  $\sigma$ , относительная толщина профиля  $\bar{c}$ , угол установки лопастей  $\varphi$ ) значением поступи  $\lambda$ , углом атаки  $\alpha$ , числом  $Re$  (Рейнольдса) и числом  $M$  (Маха). Выражение для крутящего момента на валу винта

$$M_k = c_{mk} \frac{1}{2} \rho (\omega R)^2 \pi R^3,$$

где  $c_{mk}$  – коэффициент крутящего момента.

Совокупность коэффициентов  $c_T$ ,  $c_H$  и  $c_{mk}$  в связанной системе или  $c_{ya}$ ,  $c_{xa}$  и  $c_{mk}$  – в скоростной системе координат определяют аэродинамические свойства несущего винта и называются его **аэродинамическими характеристиками**.

Аэродинамические характеристики одной и другой систем связаны между собой следующими соотношениями:

$$c_T = c_{ya} \cos \alpha + c_{xa} \sin \alpha;$$

$$c_H = c_{xa} \cos \alpha - c_{ya} \sin \alpha.$$

При расчетах летных характеристик моногеликоптеров пользуются безразмерными коэффициентами, получаемыми как частное

от деления вышеприведенных коэффициентов на коэффициент заполнения  $\sigma$ :

$$t = \frac{c_T}{\sigma} = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho\pi R^2 (\omega R)^2};$$

$$h = \frac{c_H}{\sigma} = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho\pi R^2 (\omega R)^2};$$

$$t_{ya} = \frac{c_{ya}}{\sigma} = \frac{Y_a}{\frac{1}{2}\rho\pi R^2 (\omega R)^2};$$

$$t_{xa} = \frac{c_{xa}}{\sigma} = \frac{X_a}{\frac{1}{2}\rho\pi R^2 (\omega R)^2};$$

$$m_k = \frac{c_{mk}}{\sigma} = \frac{M_k}{\frac{1}{2}\rho\pi R^3 (\omega R)^2}.$$

**Коэффициентом заполнения  $\sigma$**  называется отношение суммарной площади проекции лопастей на плоскость вращения к площади диска несущего винта.

## 17.6. Автоматическое управление моновинтовым геликоптером

У геликоптеров подъемная сила создается несущими винтами. Вследствие этого геликоптеры могут держаться в воздухе при нулевой скорости полета (режим висения). Геликоптеры могут иметь один или несколько несущих винтов. Наибольшее распространение среди макромашин получили одновинтовые геликоптеры.

Регулирующими элементами при управлении одновинтовым вертолетом являются:

кольцо автомата-перекоса для управления по крену и тангажу;

шаг хвостового винта для управления по курсу;

шаг несущего винта для управления по высоте полета и сектор газа для управления скоростью полета.

При наклоне кольца автомата-перекоса создается циклическое изменение шага лопастей винта, которое приводит к изменению направления аэродинамической силы несущего винта и, следовательно, к изменению момента этой силы относительно центра масс вертолета.

Управление курсом вертолета осуществляется изменением шага хвостового винта. Изменение шага меняет силу тяги хвостового винта, что приводит к изменению момента относительно вертикальной оси вертолета.

Изменение шага несущего винта меняет создаваемую винтом подъемную силу, что приводит к изменению высоты полета.

В некоторых случаях возникает необходимость регулирования скорости вращения несущего винта. Для этого следует изменять мощность приводного двигателя.

Автопилоты на вертолетах применяются:

для стабилизации относительно трех осей в горизонтальном полете, при спуске и наборе высоты, при висении и при переходе с одного режима на другой;

выполнения маневров;

стабилизации высоты полета;

стабилизации скорости вращения несущего винта.

### ***17.6.1. Математическая модель моновертолета как объекта управления***

Для получения математической модели вертолета как объекта управления введем две системы координат:

– систему  $Oxuz$  с началом в центре масс (ось  $Ox$  направим горизонтально вперед, ось  $Oy$  – вертикально вверх, ось  $Oz$  – горизонтально вправо);

– систему  $Ox_1y_1z_1$  с началом в центре масс вертолета и осями  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$ , жестко связанными соответственно с продольной, нормальной и поперечной осями вертолета (рис. 17.22, 17.23 и 17.24).

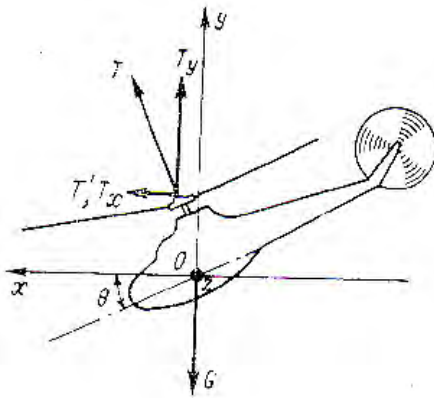


Рис. 17.22. Схема одновинтового вертолета (вид сбоку)

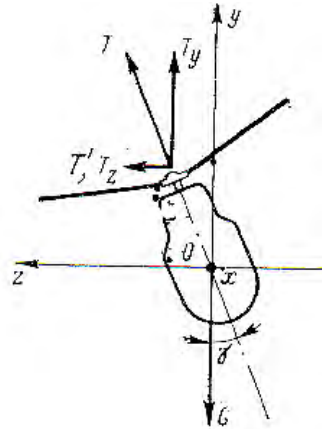


Рис. 17.23. Схема одновинтового вертолета (вид спереди)

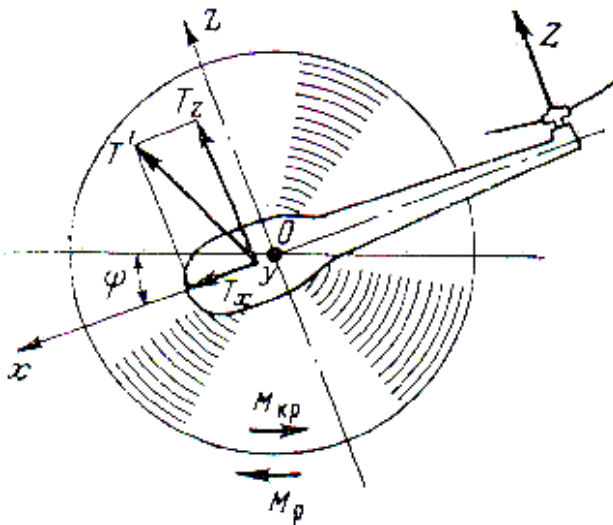


Рис. 17.24. Схема одновинтового вертолета (вид сверху)

При вращении несущего винта создается подъемная сила  $T$ , направленная по оси винта и приложенная к его втулке. Движение вертолета и его пространственное положение зависят от положения силы  $T$  в пространстве и по отношению к фюзеляжу.

Сила  $T$  может быть разложена на вертикальную  $T_y$  и горизонтальную  $T'$  составляющие, а эта последняя – на продольную  $T_x$  и поперечную  $T_z$  – составляющие. Каждая из сил  $T_x$ ,  $T_y$  и  $T_z$  вызывает движение вертолета соответственно вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , см. рис. 17.22. Если  $G$  – сила тяжести вертолета, то при  $T_y > G$  вертолет будет подниматься, а при  $T_y < G$  – опускаться. Висение вертолета будет при  $T_y = G$ . Для управления высотой полета, очевидно, необходимо изменять силу  $T_y$  (она близка к  $T$ ), что достигается изменением шага несущего винта. При наклонении вектора силы  $T$  вперед-назад или вправо-влево с помощью автомата-перекоса меняются составляющие  $T_x$  и  $T_z$  и возникают соответственно моменты  $M_z$  и  $M_x$ . Возникновение этих моментов обусловлено тем, что сила  $T$  приложена к втулке винта и не всегда проходит через центр масс.

При выводе дифференциальных уравнений движения вертолета исходят из того, что вертолет является системой со многими степенями свободы. Например, вертолет с четырехлопастным винтом имеет 15 степеней свободы. В общем случае уравнения вертолета из-за конечного числа лопастей винта имеют периодические коэффициенты. Эти обстоятельства затрудняют получение простой математической модели вертолета как объекта управления.

Для упрощения уравнений движения вертолета обычно полагают, что продольное движение его независимо от бокового, хотя боковое движение рассматривается с учетом влияния продольного движения. Для получения уравнений продольного движения вертолета введем скоростную систему координат (рис. 17.25), как и в случае дрона аэропланного типа. Тогда уравнения движения в этой системе имеют вид

$$\left. \begin{aligned}
 m \frac{dV}{dt} &= T \sin \alpha - X - G \sin \theta - P \cos \alpha; \\
 mV \frac{d\theta}{dt} &= T \cos \alpha - G \cos \theta + P \sin \alpha; \\
 J_z = \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} &= M_z; \quad J_p = \frac{d\Omega}{dt} = M_d - M_p; \\
 \frac{dH}{dt} &= V \sin \theta; \quad \vartheta = \theta + \alpha,
 \end{aligned} \right\} (17.3)$$

где кроме указанных выше  $P$  – продольная сила несущего винта;

$M_z$  – аэродинамический момент относительно поперечной оси вертолета;

$\vartheta$ ,  $\theta$  и  $\alpha$  – углы тангажа, наклона траектории и атаки;

$H$  – высота полета;

$\Omega$  – угловая скорость вращения несущего винта;

$M_d$  – момент, развиваемый двигателем;

$M_p$  – реактивный момент несущего винта.

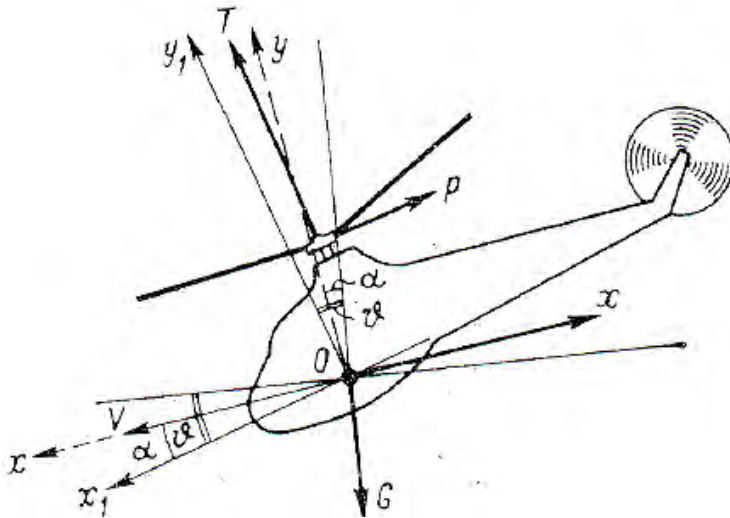


Рис. 17.25. К выводу уравнений движения одновинтового вертолета



Линеаризуем эти уравнения, взяв в качестве невозмущенного движения прямолинейный полет, для чего учтем зависимость сил  $T, P, X$  и моментов  $M_z, M_p, M_d$  от параметров:

$$\left. \begin{aligned} T &= T(\alpha, V, \Omega, \varphi, \varkappa); & P &= P(\alpha, V, \Omega, \varphi, \varkappa); \\ X &= X(\alpha, V); & M_z &= M_z(\alpha, V, \varkappa); \\ M_p &= M_p(\alpha, V, \varphi); & M_d &= M_d(\Omega, \delta_p), \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

где  $\varphi$  – угол установки (шаг) лопасти несущего винта;

$\varkappa$  – угол продольного отклонения кольца автомата перекоса относительно фюзеляжа;

$\delta_p$  – угол перемещения сектора газа двигателя.

Разлагая характеристики (17.4) в ряды по малым приращениям соответствующих параметров, подставляя полученные выражения в уравнения (17.3) и производя преобразования, получим

$$\left. \begin{aligned} (\rho + n_{11})\upsilon + n_{12}\alpha + n_{13}\vartheta + n_{14}\omega &= n_{1\varphi}\varphi + n_{1\varkappa}\varkappa + f_1(t, V, \delta_p); \\ n_{21}\upsilon + (p + n_{22})\alpha + (p + n_{23})\vartheta + n_{24}\omega &= n_{2\varphi}\varphi + n_{2\varkappa}\varkappa + \\ &+ f_2(t, V, \delta_p); \\ n_{31}\upsilon + (n_0 p + n_{32})\alpha + (p^2 + n_{33}p)\vartheta &= n_{3\varkappa}\varkappa + n_{\varkappa} p \varkappa + f_3(t, V); \\ n_{41}\upsilon + n_{42}\alpha + (p + n_{44})\omega &= n_p \delta_p + n_{4\varphi}\varphi + f_4(t, V, \varkappa); \\ ph &= \vartheta - \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

Здесь

$$p = \frac{d}{dt}; \quad \upsilon = \frac{\Delta V}{V}; \quad \omega = \frac{\Delta \Omega}{\Omega}; \quad h = \frac{\Delta H}{\tau_a V};$$

$n$  с соответствующими индексами – постоянные коэффициенты;  
 $f_1, f_2, f_3, f_4$  – возмущения, зависящие от времени и режимов полета вертолета.

Линеаризованные уравнения продольного движения вертолета (17.5) представлены в той же форме, что и аналогичные уравнения движения дрона самолетного типа в главе 10. Однако входящие в уравнения (17.5) коэффициенты  $n_{ik}$  не равны соответствующим коэффициентам в уравнениях дрона. Эти коэффициенты должны подсчитываться для вертолета по формулам, включающим характеристики (17.4) и их частные производные.

Уравнения (17.3) описывают линейную математическую модель продольного движения вертолета как объекта управления. Они связывают регулируемые величины  $\vartheta, h, \omega, \nu$  и  $\alpha$  с регулирующими факторами  $\varkappa, \varphi, \delta_p$  и возмущениями  $f_i (i=1, \dots, 4)$ . Из пяти величин  $\vartheta, h, \omega, \nu$  и  $\alpha$  регулируются первые три, при этом используются следующие воздействия регулирующих факторов на регулируемые величины:  $\varkappa \rightarrow \vartheta, \varphi \rightarrow h, \delta_p \rightarrow \omega$ .

Линеаризованные уравнения бокового движения вертолета приведем без вывода:

$$\left. \begin{aligned} (\rho + n_{11})\beta + (n_{12}p + n_{14})\gamma + n_{13}p\psi &= F_1(t, V, \alpha, \Omega, \varphi, \eta, \varphi_p); \\ n_{21}\beta + (p + n_{22})p\gamma + n_{23}p\psi &= \eta_\eta \eta + F_2(t, V, \alpha, \Omega, \varphi, \varphi_p); \\ n_{31}\beta + n_{32}p\gamma + (\rho + n_{33})p\psi &= n_\varphi \varphi_p + F_3(t, V, \alpha, \Omega, \varphi, \eta). \end{aligned} \right\} (17.6)$$

Эти уравнения представлены в той же форме, что и уравнения бокового движения дрона самолетного типа. Следует помнить, что, как и в случае дрона, коэффициенты в левых частях уравнений (17.5) и (17.6) имеют различный смысл. В правых частях уравнений (17.6):

$\eta$  – угол поперечного отклонения кольца автомата-перекоса относительно фюзеляжа;

$\varphi_p$  – угол установки (шаг) хвостового винта;

$F_1, F_2$  и  $F_3$  – возмущения, зависящие от времени, режимов полета и параметров продольного движения вертолета.

Из уравнений видно, что боковое движение вертолета не может быть реализовано независимым от продольного движения.

В боковом движении реализуются углы крена  $\gamma$  и рыскания  $\psi$  изменением соответственно угла поперечного отклонения кольца автомата-перекоса  $\eta$  и шага хвостового винта  $\varphi_p$ , т. е. применяется способ регулирования:

$$\eta \rightarrow \gamma, \quad \varphi_p \rightarrow \psi.$$

Для вертолетов являются характерными сильные связи между регулируемыми параметрами  $\gamma, \psi, \vartheta, h$  и  $\omega$ . Это обстоятельство, как правило, приводит к тому, что в вертолете труднее обеспечить хорошее качество переходного процесса и получить автономное управление отдельными параметрами.

### ***17.6.2. Принципы проектирования автопилота одновинтового вертолета***

На вертолетах применяются трех-, четырех- и пятиканальные автопилоты. Первые обеспечивают управление углами рыскания  $\psi$ , крена  $\gamma$  и тангажа  $\vartheta$ , во-вторых, к этим параметрам добавляется высота  $h$ , а в-третьих, – еще скорость вращения несущего винта  $\omega$ .

Для управления вертолетом могут применяться статические и астатические автопилоты. В настоящее время преимущественное распространение получили первые автопилоты. В таблице приведены данные о регулируемых параметрах и регулирующих факторах, законах управления, движущих силах и моментах и характере движения вертолета. Астатический закон управления отличается от статического интегральным членом, который записан в шестом столбце.

Курсовой угол  $\psi$ , входящий в закон управления, измеряется курсовой системой автопилота, а сигналы углов крена  $\gamma$  и тангажа  $\vartheta$  снимаются с авиагоризонта. Для получения сигнала высоты  $h$  применяют высотный корректор, аналогичный соответствующему прибору в самолетных автопилотах. Для измерения угловых скоростей крена  $\omega_x$ , рыскания  $\omega_y$  и тангажа  $\omega_z$  применяется блок демпфирующих гироскопов. Угловая скорость вращения несущего винта  $\omega$  измеряется тахогенератором.

Регулирующие параметры и регулирующие факторы

Канал автопилота	Регулируемый параметр	Регулирующий фактор	Орган управления	Закон управления		Сила и моменты	Движение вертолета	
				статического автопилота	астиатического автопилота		угловое	линейное
$I$	2	3	4	5	6	7	8	9
Рыскания	$\psi$	$\varphi_p$	Хвостовой винт	$\varphi_p = k_\psi \psi + k_\psi \omega_y$	$+\int_0^t \psi dt$	$M_y$	$\psi$	—
Крена	$\gamma$	$\eta$	Автомат-перекос	$\eta = k_\gamma \gamma + k_\gamma \omega_x$	$+\int_0^t \gamma dt$	$M_x$ $T_z$	$\gamma$ —	— z
Тангажа	$\vartheta$	$z$	Автомат-перекос	$z = k_\vartheta \vartheta + k_\vartheta \omega_z$	$+\int_0^t \vartheta dt$	$M_z$ $T_x$	$\vartheta$ —	— x
Высоты	$h$	$\varphi$	Шаг несущего винта	$\varphi = k_h h + k_h p h$	$+\int_0^t h dt$	$T_y$	—	y
Скорость вращения	$\omega$	$\delta_p$	Сектор газа	$\delta_p = k_\omega \omega + k_\omega p \omega$	$+\int_0^t \omega dt$	$M_d$	—	—

Геликоптерные автопилоты обычно работают совместно с электромеханическими рулевыми агрегатами включенными в систему по дифференциальной схеме (рис. 17.26).

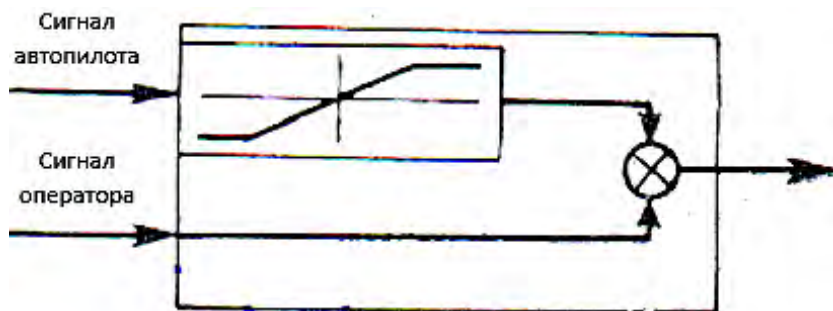


Рис. 17.26. Схема суммирования сигналов оператора и автопилота

Из схемы видно, что на органы управления геликоптера одновременно может воздействовать как оператор, так и автопилот. При этом автопилот воздействует на рулевой агрегат, представленный на схеме (см. рис. 17.26) прямоугольником с нелинейной характеристикой; этот цилиндр выполняет роль раздвижной тяги в системе управления, подобно тому, как это сделано в демпферах. Суммарное перемещение рулевого агрегата равно алгебраической сумме перемещений от воздействий оператора и автопилота.

### 17.7. Схемы и устройства автопилота геликоптера

Четырехканальный автопилот вертолета предназначен для управления курсовым углом путем воздействия на шаг хвостового винта, углами крена и тангажа путем воздействия на автомат-перекос соответственно в поперечном и продольном направлениях и высотой полета путем воздействия на общий шаг несущего винта.

В автопилоте реализованы следующие законы управления:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_p &= k_\varphi (\psi - \psi_3) + k_\psi \omega_y; \\ \eta &= k_\gamma (\gamma - \gamma_3 - \gamma_0) + k_\gamma \omega_x; \\ \varkappa &= k_\vartheta (\vartheta - \vartheta_3 - \vartheta_0) + k_\vartheta \omega_z; \\ \varphi &= k_h h. \end{aligned} \right\}$$

Здесь  $\psi_3$ ,  $\gamma_3$  и  $\vartheta_3$  – сигналы центровки;

$\gamma_0$  и  $\vartheta_0$  – сигналы компенсационных датчиков, передающих воздействие оператора на вход каналов крена и тангажа автопилота.

Сигналы  $\gamma_0$  и  $\vartheta_0$  необходимы для того, чтобы эффективность диспетчерского управления при включенном автопилоте оставалась неизменной. Сигналы центровки служат для компенсации постоянных возмущающих моментов.

В законе управления высотой полета отсутствует сигнал, пропорциональный скорости изменения высоты полета, поэтому переходные процессы по высоте полета получаются с колебаниями. Каналы курса и высоты автопилота при дистанционном управлении отключаются.

Если  $\varphi_{p \max}$ ,  $\eta_{\max}$ ,  $\chi_{\max}$  и  $\varphi_{\max}$  полные перемещения соответствующих регулирующих органов, то отклонения этих органов, вызываемые автопилотом, составляют соответственно

$$\begin{aligned} \varphi'_p &= 0,2 \varphi_{p \max}, & \eta' &= 0,2 \eta_{\max}, \\ \chi' &= 0,2 \chi_{\max}, & \varphi' &= 0,2 \varphi_{\max}. \end{aligned}$$

Эти ограничения, необходимые для безопасности управления при отказе автопилота, достигаются за счет нелинейности характеристики рулевого агрегата.

На рис. 17.29–17.29 показаны функциональные схемы включения автопилота и образования контура диспетчерского управления. Видно, что при диспетчерском управлении курсом и высотой полета курсовой канал и канал высоты автопилота отключаются, а каналы тангажа и крена остаются включенными. При этом, как указано выше, в целях сохранения одинаковой эффективности ручного управления в каналы тангажа и крена подаются сигналы через компенсационные датчики.

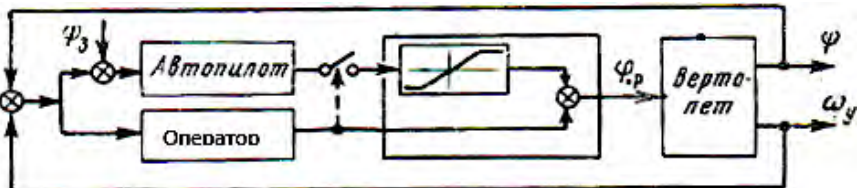


Рис. 17.27. Функциональная схема канала рыскания автопилота

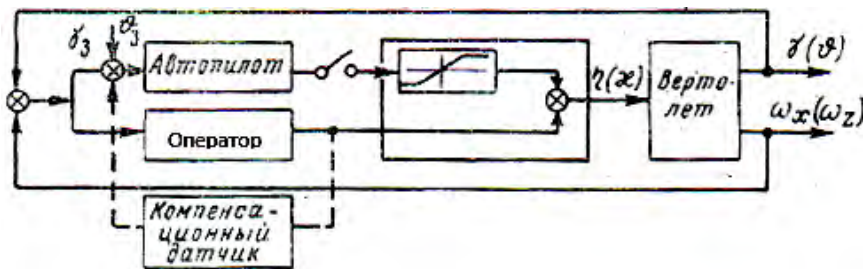


Рис. 17.28. Функциональная схема канала крена (тангажа) автопилота

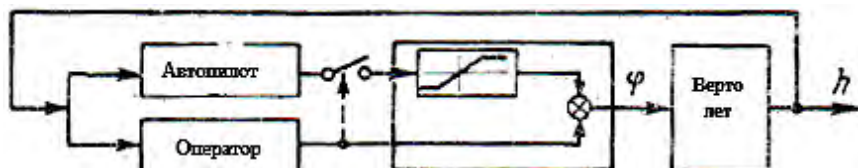


Рис. 17.29. Функциональная схема канала высоты автопилота

На рис. 17.30 показаны структурные схемы каналов автопилота, на которых:  $k_1 / p$  – передаточная функция контуров согласования (синхронизации);  $k_2$  – коэффициент усиления;  $k_3 / p$  – передаточные функции гидроагрегатов управления;  $k_5$  – коэффициенты усиления агрегатов;  $k_4$  – коэффициенты усиления обратных связей;  $k_6$  – коэффициенты усиления компенсационных датчиков;  $B_1$  и  $B_2$  – выключатели.

Когда автопилот работает в режиме согласования, то выключатели  $B_2$  замыкаются, а выключатели  $B_1$  – размыкаются. Сигналы ручного управления  $X_\psi$ ,  $X_\gamma$ ,  $X_\vartheta$  и  $X_h$  поступают непосредственно на электромеханические рулевые агрегаты и на соответствующие органы управления во всех четырех каналах управления, а сигналы  $X_\gamma$  и  $X_\vartheta$  подаются также в каналы автопилота через компенсационные датчики.

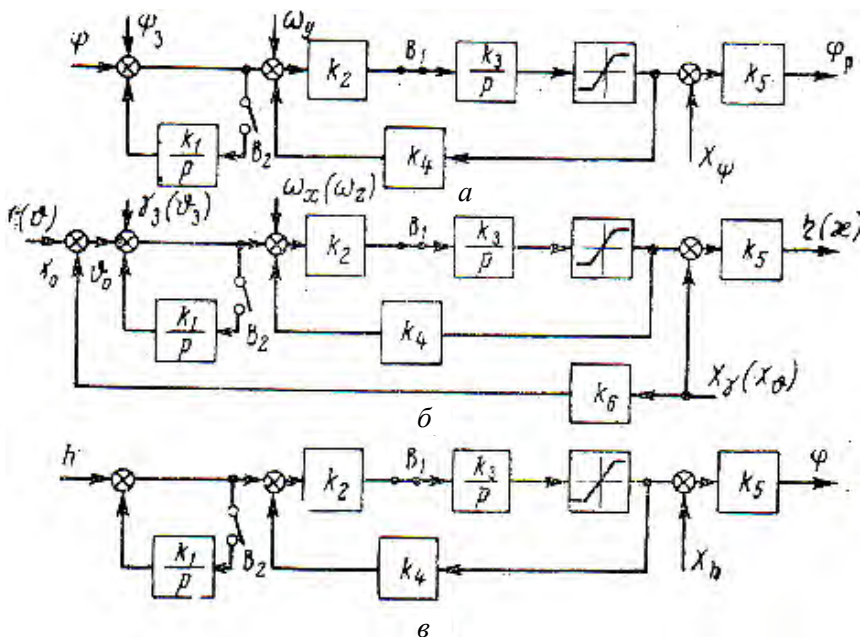


Рис. 17.30. Структурные схемы автопилота helicopters:  
*а* – канал рыскания; *б* – канал крена (тангажа); *в* – канал высоты

Представление о комплекте автопилота дает функциональная схема (рис. 17.31). В этой схеме:

КС и ГВ – бортовая курсовая система и гировертикаль, не входящие в комплект автопилота;

СП – сельсины-приемники;

КД – компенсационные датчики;

$У_1$  и  $У_2$  – усилители;

ДГ – двигатели-генераторы;

ДУС – датчики угловых скоростей helicopters;

РА – рулевые агрегаты, не входящие в комплект автопилота;

ПУ – пульт управления, включающий входящие в пунктирный прямоугольник элементы;

АУ – агрегат управления;

БП – блок питания;

КВ – корректор высоты;



ИН-4 – индикатор нулевой;  
 БУ – блок усилителей.

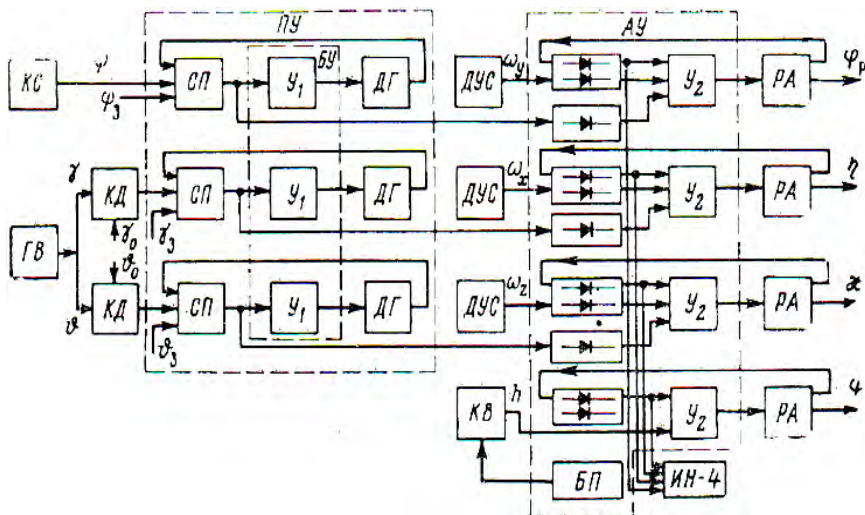


Рис. 17.31. Функциональная схема автопилота одновинтового вертолета

Двигатели-генераторы ДГ, включенные в схему согласования, служат для обнуления сигналов при включении автопилота.

Если вертолет отклоняется от заданного курсовой системой направления, то хвостовой винт под действием сигналов рулевого агрегата будет создавать силу тяги такого направления, чтобы вернуть вертолет к заданному направлению. Точность выдерживания заданного направления определяется в основном точностью курсовой системы.

Рассмотрим теперь работу канала автопилота в режиме согласования. Этот режим обеспечивает возможность включения автопилота при произвольном положении вертолета. Режим согласования состоит в том, что при включении автопилота сигнал, который может появиться, не поступает на рулевые органы, а обращается в нуль (обнуляется в начале схемы).

При работающем автопилоте оператор в любое время может вмешаться в управление вертолетом на пульте управления. При воздействии на рычаги управления можно осуществить изменение

управляемых параметров ( $\psi$ ,  $\gamma$ ,  $\vartheta$  и  $h$ ) на большие величины. С помощью же рычагов центровки можно ввести небольшие поправки к стабилизируемым параметрам  $\psi$ ,  $\gamma$ ,  $\vartheta$  (в пределах  $\pm 5^\circ$ ).

При переходе на дистанционное управление углами крена и тангажа соответствующие каналы автопилота не отключаются, хотя обнуление может происходить так же, как в случае канала рыскания. Компенсация влияния автопилота на дистанционное управление производится подачей в каналы крена и тангажа автопилота компенсационных сигналов.

## **Глава 18. АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГРУППАМИ ДРОНОВ**

### **18.1. Математическая модель строя как объекта управления**

При групповом применении дронов полет совершается строем. Существуют различные виды строя. Для звена из трех дронов можно указать три строя: *клин* (рис. 18.1), *пеленг* (рис. 18.2) и *кильватер* (цепочка) (рис. 18.3). При полете более крупных групп дронов применяются комбинированные строи, в частности, звенья в строю «клин», эскадрильи в строю «клин», «пеленг» или «кильватер» (рис. 18.4).

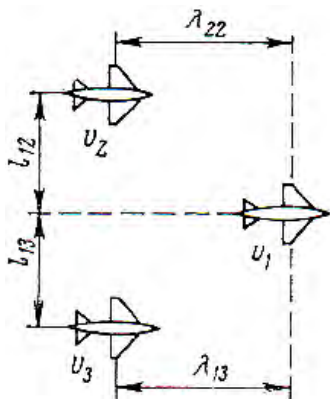


Рис. 18.1. Строй дронов типа «клин»

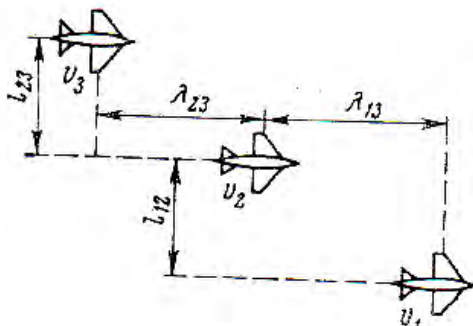


Рис. 18.2. Строй дронов типа «пеленг»

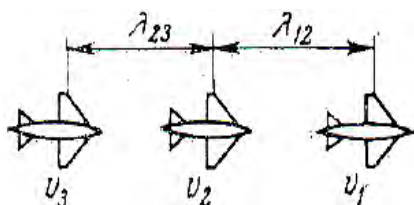


Рис. 18.3. Строй дронов типа «кильватер»

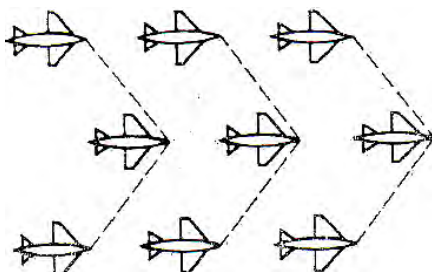


Рис. 18.4. Смешанный строй дронов

Для плотных строев дистанция между дронами бывает  $\lambda = 3L$ , где  $L$  – длина дрона, а интервал  $l = 3l_p$ , где  $l_p$  – размах крыльев дрона.

При полете в плохую погоду, а также ночью строи бывают менее плотными с целью исключения столкновения. В этих случаях дистанции значительно возрастают и могут достигать нескольких метров.

Полет дронов строем возможен только в случае равенства скоростей и ускорений. Если ведомый дрон отстает от ведущего, то для ликвидации отставания ведомый дрон должен иметь запас по скорости полета. Этот запас можно получить только при условии, что скорость полета строя меньше максимальной скорости одиночного дрона. Опыт показывает, что запас по скорости должен быть не менее 3 % на одну связь. Если имеются две связи, то запас по скорости полета должен быть не менее 6 %.

Движение ведомых дронов в строю будет неравномерным даже при равномерном движении ведущего дрона. Объясняется это трудностью автоматического пилотирования и возмущениями, действующими на дроны строя. Ведомые дроны обычно совершают колебания, накладываемые на поступательное движение.

Обеспечение полета строем в сложных метеоусловиях и ночью производится путем измерения дистанций, интервалов и превышений и использования полученных данных для управления положением дронов в строю. В качестве измерительных устройств применяются радиотехнические средства, с помощью которых измеряются дальности до других самолетов строя и определяются направления на них. Эти средства обеспечивают навигацию. Если

измеренные значения дистанций, интервалов и превышений подать в систему управления двигателем и в автопилот, то можно осуществить автоматическое управление строем, при этом команды на выполнение того или иного маневра можно задавать на ведущем дроне. Ведомые дроны будут автоматически повторять эти команды.

Динамические свойства строя дронов определяются видом строя, динамическими свойствами дронов, входящих в строй, и действующими на дроны возмущениями. Рассмотрим динамику строя, состоящего из однотипных дронов, имеющих одинаковые передаточные функции, но отличающихся скоростями полетов, тягами двигателей и действующими на каждый дрон возмущениями.

Обозначим дистанцию между дронами строя, имеющими скорости  $v_1$  и  $v_2$ , через  $\lambda_{12}$ , интервал – через  $l_{12}$  (см. рис. 18.1–18.3) и превышение – через  $h_{12}$ .

Для трех дронов, летящих строем «пеленг» или «кильватер», можно написать следующую систему кинематических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} p\lambda_{12} &= v_1 - v_2; \\ p\lambda_{23} &= v_2 - v_3; \end{aligned} \right\} \quad (18.1)$$

$$\left. \begin{aligned} pl_{12} &= v_0 [\psi_1 - \beta_1 - (\psi_2 - \beta_2)]; \\ pl_{23} &= v_0 [\psi_2 - \beta_2 - (\psi_3 - \beta_3)], \end{aligned} \right\} \quad (18.2)$$

где  $\psi$  и  $\beta$  – углы рыскания и скольжения;

$v_0$  – скорость полета строя при установившемся полете.

Для строя типа «клин» уравнения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} p\lambda_{12} &= v_1 - v_2; \\ p\lambda_{13} &= v_1 - v_3; \end{aligned} \right\} \quad (18.3)$$

$$\left. \begin{aligned} pl_{12} &= v_0 [\psi_1 - \beta_1 - (\psi_2 - \beta_2)]; \\ pl_{13} &= v_0 [\psi_1 - \beta_1 - (\psi_3 - \beta_3)]. \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

Если строй состоит из двух или нескольких ярусов дронов, то необходимо учитывать изменение превышения, т. е.

$$ph_{12} = v_0 (\vartheta_1 - \alpha_1 - (\vartheta_2 - \alpha_2)). \quad (18.5)$$

При выводе этих уравнений предполагалось, что вследствие малости углов:

$$\sin(\vartheta - \alpha) \approx \vartheta - \alpha;$$

$$\cos(\vartheta - \alpha) \approx 1;$$

$$\sin(\psi - \beta) \approx \psi - \beta;$$

$$\cos(\psi - \beta) \approx 1.$$

Кроме того, при рассмотрении бокового движения (изменение интервала) и движения по вертикали (изменение превышения) скорость полета принимается постоянной.

Обычно для управления дистанцией используют изменение тяги двигателей, для управления интервалом – крен дрона и для управления превышением – отклонение руля высоты. Поэтому, пользуясь выражениями

$$\left. \begin{aligned} v &= W_V(\rho)\delta_p + F_V; \\ \vartheta - \alpha &= W_0(\rho)\delta_B + F_0; \\ \psi - \beta &= W_\psi(\rho)\delta_\psi + F_\psi \end{aligned} \right\}, \quad (18.6)$$

вытекающими из уравнений, подставляя их в уравнения (18.1)–(18.5), найдем

$$\left. \begin{aligned} p\lambda_{12} &= W_V(\rho)(\delta_{p1} - \delta_{p2}) + F_{V12}; \\ p\lambda_{23} &= W_V(\rho)(\delta_{p2} - \delta_{p3}) + F_{V23}; \end{aligned} \right\} \\ p\lambda_{13} &= v_0 (W_\psi(\rho)(\delta_{\psi1} - \delta_{\psi2}) + F_{\psi12}); \quad (18.7)$$

$$pl_{23} = v_0 (W_{\psi}(\rho)(\delta_{32} - \delta_{33}) + F_{\psi 23}); \quad (18.8)$$

$$pl_{12} = v_0 (W_{\theta}(\rho)(\delta_{31} - \delta_{32}) + F_{\theta 12}). \quad (18.9)$$

Выражения (18.6)–(18.8) являются *дифференциальными уравнениями строя дронов как объекта управления*. Строй дронов является нейтральной системой по отношению к величинам  $\lambda$ ,  $l$  и  $h$ . Такая система не может существовать без системы управления.

Кинематические уравнения (18.1)–(18.5) записаны для воздушных скоростей дронов, хотя общая структура уравнений не изменится, если вместо воздушных взять путевые скорости. При этом предполагается, что снос всех дронов строя одинаков. При решении задач организации строя безразлично, в каком виде записаны кинематические уравнения. Однако если полет строя дронов необходимо увязать с заданной траекторией в земной системе координат, то необходимо учитывать снос дронов.

### 18.1.1. Измерения местоположения дронов в группе

В качестве устройств для измерения местоположения дронов в строю наибольшее распространение получили радиолокационные системы, обеспечивающие измерение дальности до дрона и направления на него. Система (рис. 18.5) включает индикатор кругового обзора 2, антенну 7, передатчик 5, приемник 4, блок видеочастот 3, кварцевый генератор (часы) 6, усилитель 1 и блок питания.

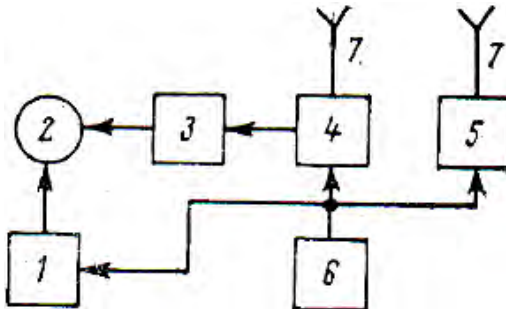


Рис. 18.5. Функциональная схема системы определения местоположения

Принцип действия системы состоит в следующем. Передатчик каждого дрона всенаправленно и в строго отведенный ему отрезок времени передает два некодированных импульса. Передача в данный отрезок времени ведется только с одного дрона, по которому все другие дроны строя определяют свои дальности до него. Дальности определяются по времени прохождения парного сигнала от передатчика до приемника. В качестве эталона местного времени используются импульсы кварцевых генераторов (часов), настроенных по кварцевому генератору ведущего дрона. Направление на передатчик (т. е. на дрон, с которого ведется передача) находится автоматически по положению антенны в момент приема сигнала. Приемная антенна, расположенная на фюзеляже, осуществляет сканирование на  $360^\circ$  по азимуту с частотой 80–100 об/мин и по вертикали на  $30^\circ$ ; угол раствора луча  $6^\circ$ .

Система радиолокации обеспечивает контроль местоположения до 12 дронов; точность измерения дистанций и интервалов 5 %; точность измерения направления  $\pm 2^\circ$ .

Поскольку система позволяет измерять расстояние между самолетами  $D$  и угол  $\epsilon$  (рис. 18.6), то по этим данным можно определить дистанцию и интервал:

$$\lambda = D \cos \epsilon; \quad l = D \sin \epsilon. \quad (18.10)$$

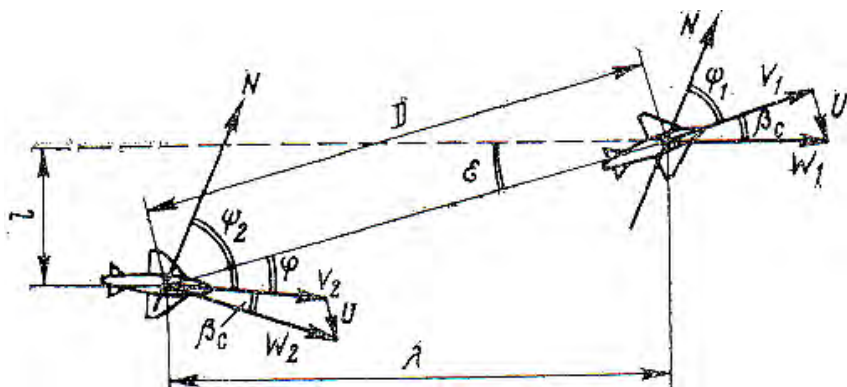


Рис. 18.6. Геометрические характеристики взаимного расположения дронов в группе

Угол  $\varepsilon$  можно выразить через курсы  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , курсовой угол  $\varphi$  ведомого самолета и угол сноса  $\beta_c$  (по предположению углы сноса всех дронов строя одинаковы):

$$\varepsilon = \psi_1 - \psi_2 + \varphi + \beta_c. \quad (18.11)$$

Следовательно, для получения угла  $\varepsilon$  необходимо измерить курсовой угол  $\varphi$  (угол между продольной осью ведомого дрона и направлением на ведущий дрон) с помощью системы контроля местоположения, угол сноса  $\beta_c$ , который получается с доплеровской системы, и курсы дронов  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , получаемые с курсовых систем.

### ***18.1.2. Полет группы дронов при телеуправлении***

Рассмотрим полет группы дронов при отсутствии на борту приборов для измерения дистанций и интервалов. В этом случае оператор на основании полученной информации оценивает расстояние между ведущим дроном и дронами группы и скорость изменения этого расстояния на основе опыта и зрительной памяти. Закон управления можно представить в виде

$$\lambda = \lambda_0 + \tau v,$$

где  $\lambda_0$  – заданная дистанция, поддерживаемая оператором;

$\tau$  – постоянная времени, характеризующая быстроту реагирования оператора.

Если полет осуществляется строями «пеленг» и «кильватер», то для  $k$ -го и  $(k+1)$ -го дронов можно написать

$$\lambda_{k,k+1} = \lambda_0 + \tau v_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Продифференцировав это выражение, получим

$$\frac{d\lambda_{k,k+1}}{dt} = \tau \frac{dv_{k+1}}{dt}$$



или, пользуясь уравнениями (18.1):

$$(\tau p + 1)v_{k+1} = v_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Это и есть искомое уравнение движения при телеуправлении дроном в строю. Преобразуем эти уравнения по Лапласу:

$$L[v(t)] = V(p).$$

Тогда

$$L[v(t)] = pV(p) - pv(0).$$

$$(\tau p + 1)V_{k+1} = V_k + \tau pv(0), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Предположим, что скорость первого дрона  $v_1(t)$  в момент времени  $t = 0$  известна. Преобразуя ее по Лапласу, получим  $V_1(p)$ .

Для случая четырех дронов строя при нулевых начальных условиях  $v_2(0) = v_3(0) = v_4(0) = 0$  находим

$$V_2(p) = \frac{V_1(p)}{\tau p + 1}; \quad V_3(p) = \frac{V_1(p)}{(\tau p + 1)^2}; \quad V_4(p) = \frac{V_1(p)}{(\tau p + 1)^3}. \quad (18.12)$$

Рассмотрим частные случаи. Пусть  $v_1(t)$  – единичная функция, т. е.

$$v_1(t) = \begin{cases} V_m & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (18.13)$$

Используя соотношение (18.13) и производя обратные преобразования Лапласа уравнений (18.12), найдем

$$\left. \begin{aligned}
 v_1(t) &= V_m; \\
 v_2(t) &= V_m \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \\
 v_3(t) &= V_m \left( 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \\
 v_4(t) &= V_m \left( 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} + \frac{1}{3} + \frac{t^2}{\tau^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (18.14)$$

На рис. 18.7 представлены графики функций, определяемых уравнениями (18.14). Видно, что чем дальше ведомый дрон отстоит от ведущего, тем больше он запазывает в своем движении. Другими словами, если скорость ведущего дрона изменится мгновенно, то ведомые дроны будут отставать (или нагонять). Это отставание не обусловлено замедленным реагированием оператора на изменение скорости.

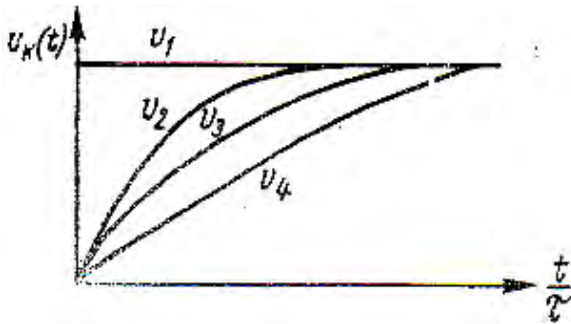


Рис. 18.7. Переходные процессы при полете строем

Из уравнений (18.10) видно, что каждый дрон в строю описывается инерционным звеном, причем эти звенья соединены последовательно. Сигнал от ведущего дрона передается на последний ведомый через все предыдущие ведомые. Это обстоятельство при учете динамики движений самолетов (до сих пор учитывалась только кинематика) приводит к появлению колебаний ведомых дронов по

отношению к среднему расстоянию между дронами. Такие колебания наблюдаются и в действительности.

## 18.2. Синтез автоматических систем управления группой дронов

Рассмотрим сначала случай строя из двух дронов, когда угол  $\varepsilon$ , характеризующий величину интервала, мал. Тогда выражения (18.10) принимают вид

$$\lambda = D; \quad l = D\varepsilon, \quad (18.15)$$

где в этом случае контур управления интервалом можно рассматривать как автономный.

Выведем уравнения движения рассматриваемого строя. Пренебрегая углом скольжения, можем написать выражение, связывающее углы рыскания  $\psi_2$  и крена  $\gamma$ :

$$\psi_2 = \frac{n_{14}}{\tau_a \rho} \gamma, \quad (18.16)$$

где  $n_{14}$  – постоянный коэффициент;

$\tau_a$  – аэродинамическая постоянная времени.

Будем полагать, что движение по крену безынерционно. Сигнал управления возьмем в виде

$$\gamma_3 = k_\varphi (\varphi_3 - \varphi - \beta_c), \quad (18.17)$$

где  $\varphi_3$  – заданный курсовой угол ведомого самолета;

$\beta_c$  – угол сноса,

полагая, что заданный угол крена  $\gamma_3$  пропорционален сигналу управления.

Сигнал управления (18.17) формируется на основе измеренных значений курсового угла  $\varphi$  и угла сноса  $\beta_c$ . Эти сигналы, получаемые с радиотехнических измерительных систем, могут содержать значительные высокочастотные помехи. Кроме того, сигнал  $\varphi$  вы-

дается в дискретном виде. Поэтому целесообразно сигнал  $\gamma_3$  пропускать через сглаживающий фильтр с передаточной функцией типа

$$W_{\Phi}(p) = \frac{1}{T_{\Phi}p + 1}.$$

Движение строя будем характеризовать кинематическим уравнением (18.10), которое запишем в виде

$$l = l_0 + \frac{v_0}{p}(\psi_1 - \psi_2), \quad (18.18)$$

где  $l_0$  – заданный интервал.

Преобразуем это уравнение, воспользовавшись вторым выражением (18.15):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{1}{T_p}(\psi_1 - \psi_2), \quad (18.19)$$

где  $T = \frac{D}{v_0}$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{l_0}{D}$  – заданное значение угла  $\varepsilon$ .

Легко видеть, что в установившемся режиме  $\varepsilon_0 = \varphi_3$ .

К уравнениям (18.16), (18.17) и (18.18), описывающим поведение системы управления интервалом между двумя дронами, необходимо добавить уравнение (18.11), а также уравнение сигнала рассогласования

$$\Delta\gamma = \gamma_3 - \gamma, \quad (18.20)$$

который обрабатывается или оператором с помощью пульта управления, или автопилотом. Будем полагать, что как оператор, так и автопилот обеспечивают  $\Delta\gamma = 0$ , т. е.

$$\gamma_3 = \gamma. \quad (18.21)$$

Такое предположение возможно, поскольку процессы управления угловыми движениями при управлении интервалом и дистанцией можно принять безынерционными.

Решая совместно уравнения (18.16)–(18.21), получим

$$\varphi - \varphi_3 = -\beta_c - \frac{1}{T} \frac{T_p + 1}{N(p)} \psi_1, \quad (18.22)$$

где

$$\left. \begin{aligned} N(p) &= p^2 + 2d\Omega_0 p + \Omega_0^2 \\ 2d\Omega_0 &= \frac{n_{14}k_\varphi}{\tau_a}; \quad \Omega_0^2 = \frac{n_{14}k_\varphi}{\tau_a T} \end{aligned} \right\}. \quad (18.23)$$

Из уравнения (18.22) и из эквивалентной ему структурной схемы (рис. 18.8) видно, что отклонение курса ведущего дрона  $\psi_1$  и угол сноса  $\beta_c$  можно рассматривать как возмущения на строй дронов. При этом введение угла сноса  $\beta_c$  в закон управления позволяет осуществить необходимый доворот дрона с целью привязки строя к заданной траектории полета.

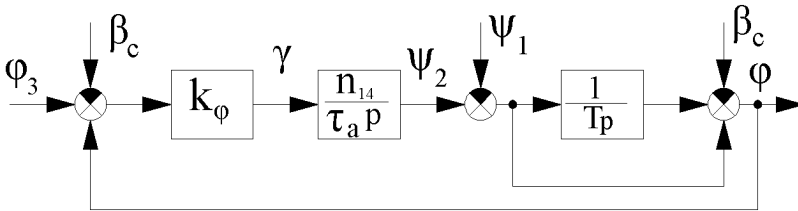


Рис. 18.8. Структурная схема системы управления курсовым углом ведомого дрона

Из соотношений (18.23) при заданном коэффициенте затухания  $d$  (как указывалось выше,  $d = 0,7-1$ ) получаем передаточное число контура управления:

$$k_\varphi = \frac{4d^2 \tau_a}{n_{14} T}. \quad (18.24)$$

Из анализа выражения (18.24) видно, что с уменьшением дистанции между дронами и увеличением скорости полета уменьшается постоянная времени  $T = \frac{D}{v_0}$ , что приводит к увеличению коэффициента усиления  $k_\varphi$  и, следовательно, к ускорению процессов управления.

При более точном рассмотрении задачи необходимо учитывать динамику управления углом крена дрона. Для этого вместо предположения  $\Delta\gamma \equiv 0$  следует положить

$$\delta_\gamma = i\Delta\gamma + \gamma', \quad (18.25)$$

где  $i$  – передаточное число.

В (18.2)

$$\gamma' = (k_\gamma + k_{\dot{\gamma}}p)\gamma,$$

где  $k_\gamma$  и  $k_{\dot{\gamma}}$  – передаточные числа канала крена.

Наконец, уравнение дрона можно взять в виде

$$\gamma = \frac{n_\gamma}{p(p + n_{22})} \delta_\gamma.$$

На рис. 18.9 дана структурная схема системы управления курсовым углом ведомого дрона, в которой показано влияние динамики канала крена на процессы управления.

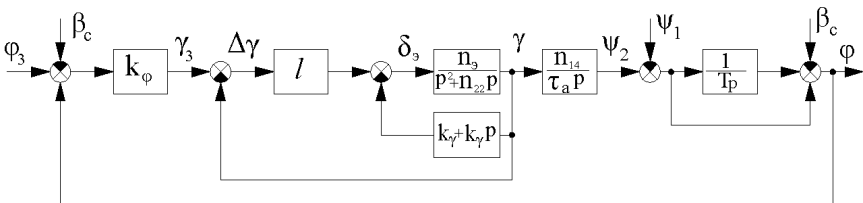


Рис. 18.9. Структурная схема системы управления курсовым углом ведомого дрона

Управление дистанцией между дронами строя можно осуществлять в двух вариантах: можно управлять позиционной дистанцией  $\lambda$  или временной дистанцией  $T_\lambda = \frac{\lambda}{v}$  ( $T_\lambda$  – промежуток времени между прохождением одной и той же точки пространства двумя дронами). В том случае когда полет происходит с маневрированием по курсу или по высоте, управление временной дистанцией оказывается более приемлемым.

Для управления дистанцией необходимо воздействовать на тягу двигателей ведомых дронов автоматически, когда сигнал рассогласования подается на автомат тяги.

Контур управления дистанцией включает динамику двигателя дрона, устройства для измерения дистанции и скорости полета дрона, кинематические соотношения для строя и устройства формирования сигналов закона управления.

Пусть динамика изменения тяги двигателя  $P$  при изменении сигнала управления  $\delta_p$  описывается уравнением

$$P = \frac{k_d}{T_d p + 1} \delta_p,$$

где  $T_d$  и  $k_d$  – постоянная времени и коэффициент усиления двигателя как объекта управления.

Уравнение движения дрона при пренебрежении зависимостью тяги от скорости полета можно представить в виде

$$v = \frac{k_c}{T_c p + 1} P,$$

где  $T_c$  и  $k_c$  – постоянная времени и коэффициент усиления дрона как объекта управления по скорости полета.

Уравнение дистанции (для ведомого и ведущего дронов)

$$\lambda = \frac{1}{p} (v_1 - v_2),$$

где  $v_1$  и  $v_2$  – путевые или воздушные скорости.

Приборы для измерения скорости и дистанции будем считать безынерционными.

Вследствие того что управление дистанцией осуществляется изменением тяги двигателя, а при изменении тяги непосредственно меняется продольное ускорение дрона, сигнал управления можно представить в виде

$$\delta_c = i(\dot{v}_3 - \dot{v}),$$

где  $\delta_c$  – сигнал рассогласования между требуемым  $\dot{v}_3$  и действительным  $\dot{v}$  ускорениями, который может быть подан на автомат дистанции;

$i$  – передаточное число.

Сигнал  $\dot{v}_3$  для управления временной дистанцией возьмем в виде

$$\dot{v}_3 = -\frac{1}{T_\phi p + 1} (k_\lambda \lambda + W(p) v), \quad (18.26)$$

где  $k_\lambda$  – передаточное число;

$W(p)$  – передаточная функция корректирующего фильтра;

$T_\phi$  – постоянная времени сглаживающего фильтра.

Постоянная времени двигателя обычно более чем на порядок меньше постоянной времени дрона, поэтому инерцией двигателя можно приближенно пренебречь. Тогда движение системы будет описываться уравнением второго порядка. В таком случае закон управления дистанцией будет

$$-\dot{v}_3 = (2d\Omega_0 p + \Omega_0^2) \lambda, \quad (18.27)$$

где  $\Omega_0$  и  $d$  – частота колебаний и коэффициент затухания.

Полагая  $p\lambda = v$  (равномерное движение ведущего дрона) и приравнивая выражения (18.26) и (18.27), найдем

$$2d\Omega_0 T_\phi p^2 + (2d\Omega_0 + \Omega_0^2 T_\phi) p + \Omega_0^2 = k_\lambda + W(p) p. \quad (18.28)$$



Из (18.28) следует, что передаточная функция  $W(p)$  имеет вид

$$W(p) = k(T_p + 1). \quad (18.29)$$

Из уравнений (18.28) и (18.29), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $p$ , находим

$$k_\lambda = \Omega_0^2; \quad k = \Omega_0(2d + T_\Phi \Omega_0); \quad T = \frac{2dT_\Phi}{2d + T_\Phi \Omega_0}.$$

Выразим частоту системы  $\Omega_0$  через временную дистанцию  $T_\lambda$ , учитывая

$$T_\lambda = \frac{k}{k_\lambda} = \frac{2d + T_\Phi \Omega_0}{\Omega_0}. \quad (18.30)$$

Из (18.30) получим

$$\Omega_0 = \frac{2d}{T_\lambda - T_\Phi}.$$

Таким образом, частота системы тем больше, чем меньше временная дистанция. Также должно выполняться условие  $T_\lambda > T_\Phi$ . Постоянная времени сглаживающего фильтра  $T_\Phi$  выбирается из условия допустимых помех в сигнале управления. Если помехи велики, то постоянная времени  $T_\Phi$  также должна быть достаточно большой, что ограничивает возможность выдерживания малых временных дистанций.

На рис. 18.10 дана структурная схема системы управления временной дистанцией.

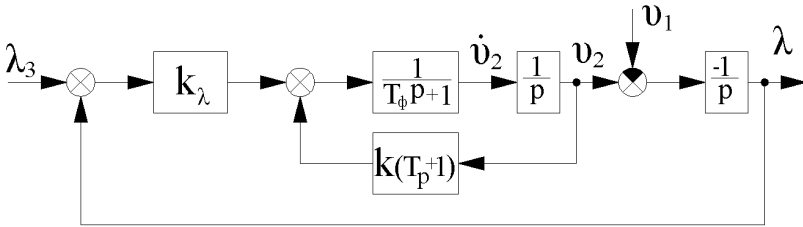


Рис. 18.10. Структурная схема системы управления временной дистанцией

При управлении позиционной дистанцией заданное ускорение  $\ddot{v}_3$  в выражении (18.26) можно брать в двух вариантах:

$$\ddot{v}_3 = \frac{1}{T_\phi p + 1} (k_0 (\lambda - \lambda_3) - k_1 v_2); \quad (18.31)$$

$$\ddot{v}_3 = \frac{1}{T_\phi p + 1} (k_0 (\lambda - \lambda_3) - k_1 p \lambda), \quad (18.32)$$

где  $k_0$  и  $k_1$  – передаточные числа.

Закон управления (18.31) формируется на основе измерения дистанции  $\lambda$  и скорости полета  $v_2$  ведомого дрона. На рис. 18.11 дана структурная схема системы управления позиционной дистанцией для случая измеренных  $\lambda$  и  $v_2$  при отсутствии сглаживающего фильтра ( $T_\phi = 0$ ).

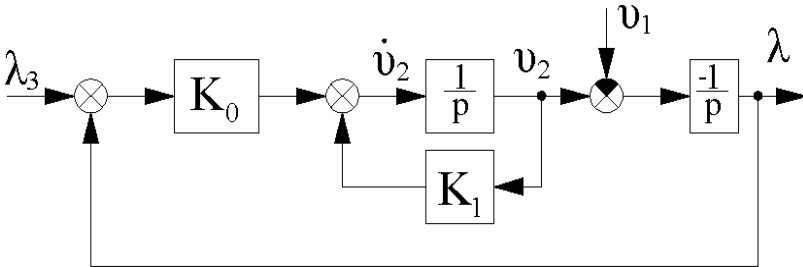


Рис. 18.11. Структурная схема системы управления позиционной дистанцией

Из структурной схемы получим

$$(p^2 + 2d\Omega_0 p + \Omega_0^2)\lambda = \Omega_0^2 \lambda_3 + (p + 2d\Omega_0)v_1, \quad (18.33)$$

где  $2d\Omega_0 = k_1$ ;  $\Omega_0^2 = k_0$ .

Передаточные числа  $k_0$  и  $k_1$  выбираются из условия получения заданных значений частоты  $\Omega_0$  и коэффициента затухания  $d$ .

Системе (18.32) свойственна статическая ошибка, определяемая главным образом членом  $2d\Omega_0 v_1$ .

При формировании закона управления (18.31) используется измеренное значение дистанции  $\lambda$ , а производная  $p\lambda$  может быть получена дифференцированием сглаженного сигнала  $\lambda$ . Из структурной схемы (рис. 18.12) имеем уравнение

$$(p^2 + 2d\Omega_0 p + \Omega_0^2)\lambda = \Omega_0^2 \lambda_3 + p v_1.$$

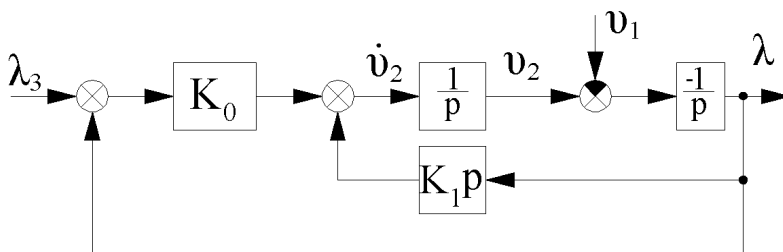


Рис. 18.12. Структурная схема системы управления позиционной дистанцией

В этой системе статическая погрешность возникает только при полете с ускорением, однако эта погрешность незначительна.

### 18.3. Динамика систем автоматического управления группой

При выборе законов управления дистанцией и интервалом предполагалось, что измерительные и исполнительные устройства автоматов строя безынерционны, а динамикой авиадвигателей можно пренебречь. Это позволило сравнительно просто выбрать структуру

законов управления и установить необходимые значения передаточных чисел. Для исследования динамики переходных процессов необходимо учитывать действительные динамические характеристики элементов, входящих в замкнутый контур управления.

Рассмотрим некоторые случаи автоматического управления дистанцией между четырьмя дронами в строю при условии, что тяга двигателя устанавливается в соответствии с законом управления без запаздывания. Пусть дрона движутся строем «кильватер» и последующий дрон ориентируется в строю по предыдущему. Тогда уравнения строя в соответствии с системой (18.6)–(18.9) будут

$$\left. \begin{aligned} p\lambda_{12} &= W_V(p)(\delta_{p1} - \delta_{p2}) + f_{12}; \\ p\lambda_{23} &= W_V(p)(\delta_{p2} - \delta_{p3}) + f_{23}; \\ p\lambda_{34} &= W_V(p)(\delta_{p3} - \delta_{p4}) + f_{34}, \end{aligned} \right\} \quad (18.34)$$

где  $f_{12} = F_{V12}$  и т. д.

Уравнение автомата тяги (автомата дистанции) возьмем в виде

$$\delta_p = W(p)\lambda - k_0'(p)\lambda_3, \quad (18.35)$$

где

$$W(p) = k_d \frac{k_0 + k_1 p + k_2 p^2}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}, \quad k_0' = k_0 k_d \quad (18.36)$$

для статического регулятора и

$$W(p) = \frac{k_d}{p} \frac{k_0 + k_1 p + k_2 p^2}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}, \quad k_0' = \frac{k_d}{p} k_0 \quad (18.37)$$

для астатического регулятора;

$k_d$  – коэффициент усиления;

$k_0, k_1, k_2$  – периодические числа;

$\tau_1$  и  $\tau_2$  – постоянные времени, характеризующие несовершенство измерительных и исполнительных устройств автомата дистанции, т. е. передачу полезных сигналов через инерционные звенья.

Будем полагать, что дистанция  $\lambda$  измеряется, а производные  $p\lambda$  и  $p^2\lambda$  получаются дифференцированием сигнала  $\lambda$ .

Если в структуре закона управления взять сигналы, пропорциональные  $\lambda$  и  $p\lambda$ , тогда, учитывая наличие погрешностей  $\tau_1$  и  $\tau_2$  в образовании закона управления, а также других динамических погрешностей в замкнутом контуре управления, рассмотрим более общий закон управления (18.35). Заметим, что уравнение (18.35) должно быть записано для двигателей всех дронов строя.

Решая совместно уравнения (18.34) и (18.35), найдем

$$\left. \begin{aligned} \Delta\lambda_{12} &= \chi + f_{12}; \\ \Delta^2\lambda_{23} &= W_V W (\chi + f_{12}) + \Delta f_{23}; \\ \Delta^3\lambda_{34} &= W_V^2 W^2 (\chi + f_{12}) + W_V W \Delta_{23} + \Delta^2 f_{34}, \end{aligned} \right\} \quad (18.38)$$

где  $\Delta = p + W_V W$ ;  $\chi = W_V (\delta_{p1} + k_0 k_d \lambda_3)$ .

Из уравнений (18.38) следует, что возмущения, вносимые в систему управления изменением силы тяги ведущего дрона  $\delta_{p1}$  или перенастройкой регулятора  $\lambda_3$ , передаются через систему как через фильтр, состоящий из одинаковых ячеек. Заметим, что заданная дистанция  $\lambda_3$  может быть установлена и изменена только на ведущем дроне.

Уравнения (18.38) являются чрезвычайно сложными и их аналитическое решение затруднено. На рис. 18.13–18.17 приводятся графики переходных процессов, полученные моделированием этих уравнений.

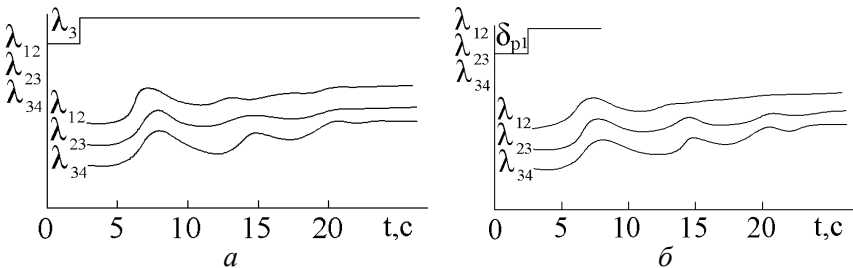


Рис. 18.13. Графики переходных процессов в статической системе управления при возмущении перенастройкой (а) и тягой (б)

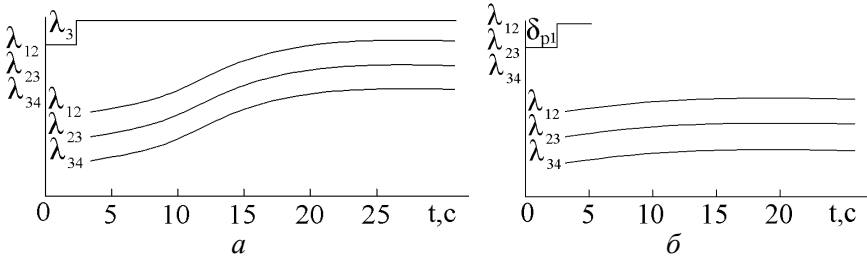


Рис. 18.14. Графики переходных процессов в статической системе управления при возмущении перенастройкой (а) и тягой (б)

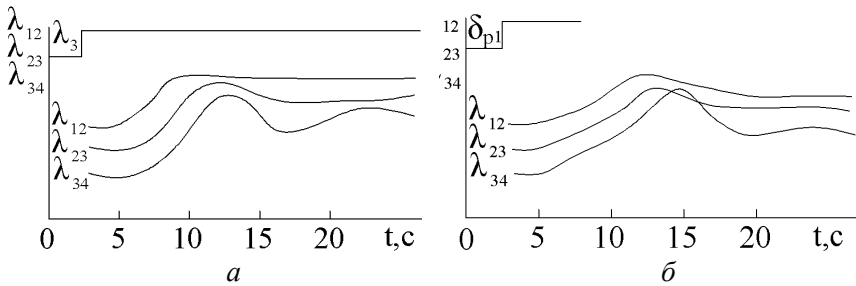


Рис. 18.15. Графики переходных процессов в статической системе управления при возмущении перенастройкой (а) и тягой (б)

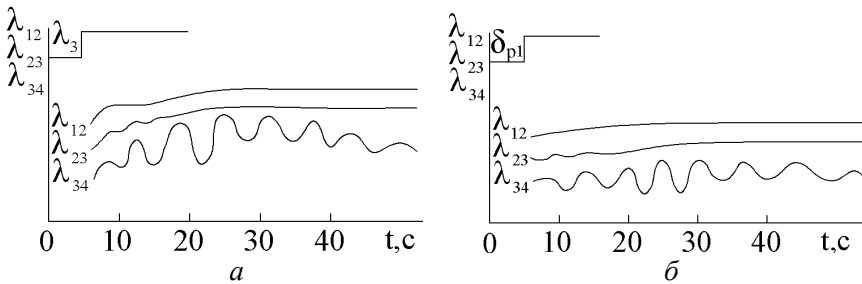


Рис. 18.16. Графики переходных процессов в статической системе управления при возмущении перенастройкой (а) и тягой (б)

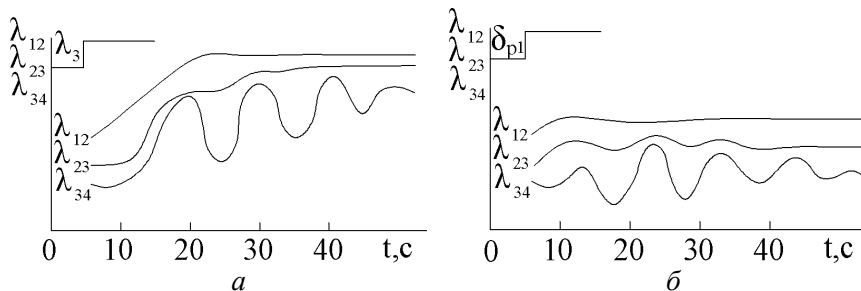


Рис. 18.17. Графики переходных процессов в статической системе управления при возмущении перенастройкой (а) и тягой (б)

При моделировании уравнений менялись передаточные числа  $k_0$ ,  $k_1$  и  $k_2$  закона управления с целью выбора приемлемых значений. Переходные процессы построены для дронов строя, имеющих  $T_c = 50$  с,  $k_c = 0,5$ . Постоянные времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  приняты  $\tau_1 = \tau_2 = 0,2$  с. Графики построены для статической системы (см. рис. 18.13–18.15) с законом управления (18.36) и астатической системы (см. рис. 18.16 и 18.17) с законом управления (18.37). Значения передаточных чисел  $k_0$ ,  $k_1$  и  $k_2$ , для которых построены графики, даны в табл. 18.1 (статическая система) и табл. 18.2 (астатическая система).

Таблица 18.1

Передаточные числа для статической системы

Рисунок	$k_0$	$k_1$ , с	$k_1$ , с <sup>2</sup>
Рис. 18.13	2	8	8
Рис. 18.14	1	2	0
Рис. 18.15	1	4	0

Таблица 18.2

Передаточные числа для статической системы

Рисунок	$k_0$ , с <sup>-1</sup>	$k_1$	$k_2$ , с <sup>2</sup>
Рис. 18.16	1	4	4
Рис. 18.18	0,5	2	2

Проанализируем графики, характеризующие переходные процессы в системе управления строем дронов.

В статической системе управления (см. рис. 18.13–18.15) имеется статическая ошибка, которую можно уменьшить путем увеличения передаточного числа  $k_0$ . Процессы в системе при перенастройке автомата на новую дистанцию  $\lambda_3$  и при возмущении тягой  $\delta_{p1}$  ведущего дрона могут быть неколебательными (см. рис. 18.13), если передаточное число по позиционному сигналу  $k_0 \leq 2$  при значительных передаточных числах по скорости  $k_1 = 8$  и ускорению  $k_2 = 8$ . Реализовать такие большие передаточные числа по скорости и ускорению затруднительно из-за помех.

В статической системе управления с одной производной (см. рис. 18.14 и 18.15) переходный процесс становится колебательным, причем чем дальше ведомый дрон отстает от ведущего, тем больше колебания. Для устранения колебаний постоянная времени  $T = k_1 / k_0$  должна быть  $T \geq 10$  с.

Астатическая система управления при прочих равных условиях более склонна к колебаниям (см. рис. 18.16 и 18.17), чем статическая, что в общем случае объяснимо. При увеличении передаточного числа  $k_0$  амплитуда колебаний уменьшается, а частота возрастает. Здесь характерным является то, что при возмущении перенастройкой  $\lambda_3$  и изменением тяги ведущего дрона дистанция между ведущим и первым ведомым дронами меняется без колебаний, дистанция между первым и вторым ведомым дронами изменяется с небольшими колебаниями, но зато дистанция между последующими ведомыми дронами меняется с большими колебаниями.

Проблема создания систем автоматического управления строем дронов является актуальной, однако она еще не получила полного решения ввиду технических и принципиальных трудностей.



## Глава 19. ДИНАМИКА КОЛЕСНЫХ МИНИАТЮРНЫХ РОБОТОВ

### 19.1. Динамика модели трехколесного миниатюрного робота

Рассмотрим модель трехколесной платформы робота, изображенную на рис. 19.1. Движение рассматривается в плоскости  $OXY$ . Робот со смонтированным на платформе оборудованием моделируется однородной прямоугольной пластиной, главные оси инерции которой совпадают с геометрическими главными центральными осями.

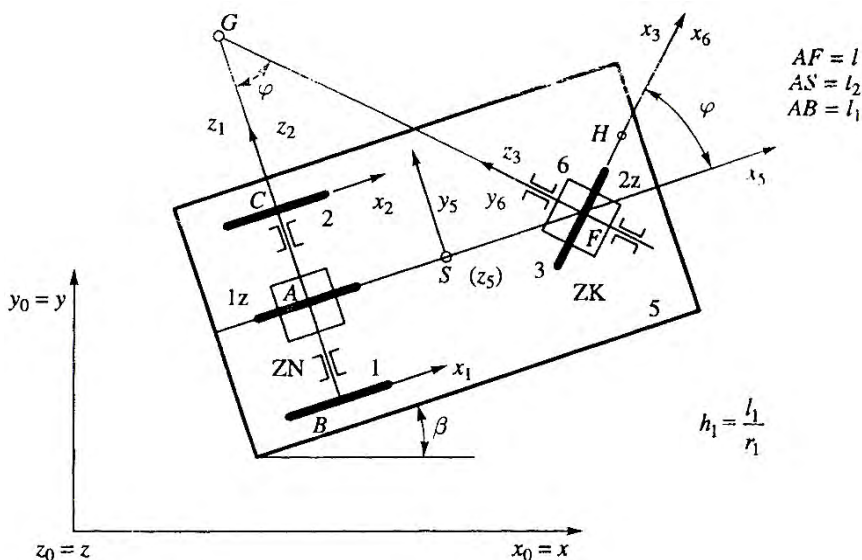


Рис. 19.1. Модель трехколесного робота

Колеса 1 и 2 действительной конструкции заменим эффективным колесом  $Iz$ , расположенным в точке  $A$ , середине оси. Колесо 3 обозначим колесом  $2z$ .

Обобщенными координатами, описывающими движение платформы являются  $x_A, y_A, \beta, \Psi, \alpha, \varphi$ , где  $x_A, y_A$  – координаты точки  $A$ , расположенной на оси посередине между двумя колесами, и проходят точках  $B, C$ .

Поворотное колесо с центром в точке  $F$  характеризуется углами  $\varphi$  и углом  $\beta$ , вращение рулевого колеса характеризуется углом  $\alpha$ , а ведомых колес – углом  $\Psi$ .

Кинематические соотношения для неголономных связей имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_A - r_1 \dot{\Psi} \cos \beta &= 0; \\ \dot{y}_A - r_1 \dot{\Psi} \sin \beta &= 0; \\ \dot{x}_A - l \dot{\beta} \sin \beta - r_3 \dot{\alpha} \cos(\beta + \varphi) &= 0; \\ \dot{y}_A + l \dot{\beta} \cos \beta - r_3 \dot{\alpha} \sin(\beta + \varphi) &= 0. \end{aligned} \tag{19.1}$$

Уравнения (19.1) выражают условия отсутствия проскальзывания, буксования, бокового смещения колес. При связях (19.1) только две из введенных координат независимые, таким образом, модель имеет две степени свободы.

Уравнения Лагранжа II рода динамики неголономной системы запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial E}{\partial q} \right)^T = \bar{Q} + J^T(\bar{q}) \bar{\lambda}, \tag{19.2}$$

где  $\bar{q} = [x_A, y_A, \beta, \alpha, \Psi, \varphi]$  вектор обобщенных координат;

$\bar{Q}$  – вектор обобщенных сил;

$J(\bar{q})$  – реакции связей;

$\bar{\lambda}$  – вектор множителей Лагранжа,

которые являются силами трения, лежащими в плоскостях контакта колес с плоскостью.

Кинематическая энергия  $T$  имеет вид

$$E = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} Tr(\dot{T}_{i0} B_i \dot{T}_{i0}^T),$$

где  $B$  – матрица инерции  $i$ -й части;

$\dot{T}_{i0}$  – матрица преобразования локальной  $i$ -й системы координат к основной  $O_{xyz}$ .

Уравнения неголономных связей запишем в виде

$$J(q)\dot{q} = 0,$$

где  $J(q)$  имеет вид

$$J(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -r \cos \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -r \sin \beta & 0 \\ 1 & 0 & -l \sin \beta & -r \cos(\beta + \varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \cos \beta & -r \sin(\beta + \varphi) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (19.3)$$

Вектор обобщенных сил  $Q$  определяется соотношениями

$$Q_j \delta q_j = \sum_{i=1}^6 F_i^T \begin{bmatrix} \delta r_i \\ \cdots \\ \delta \varphi_i \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, 6,$$

где  $\bar{F}_i$  – вектор сил, действующих на  $i$ -й член, редуцированных к точке начала  $i$ -й системы;

$\delta \bar{r}_i$  – вектор виртуального перемещения, являющегося началом  $i$ -й системы;

$\delta \bar{\varphi}_i$  – вектор виртуального вращения  $i$ -й части.

Зависимость между векторами  $\delta \bar{r}_i$ , а также виртуального вращения  $\delta \bar{\varphi}_i$  соответствующими обобщенными перемещениями, вытекающим из разложения скоростей точек  $A, B, C$ , которые определяют зависимость между соответствующими угловыми скоростями:

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\Psi} + h_1 \dot{\beta};$$

$$\dot{\alpha}_2 = \dot{\Psi} - h_1 \dot{\beta}.$$

По выполнению необходимых математических операций, вытекающих из уравнения Лагранжа II рода, движение анализируемой модели описывает систему дифференцируемых уравнений

$$\begin{aligned}
 & (m_1 + m_2 + m_3 + m_5)\ddot{x}_A + (m_1 - m_2)l_1(\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) - \\
 & \quad - (m_3l + m_5l_2)(\ddot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}^2 \cos \beta) = +\lambda_1 + \lambda_3; \\
 & (m_1 + m_2 + m_3 + m_5)\ddot{y}_A + (m_1 - m_2)l_1(\ddot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}^2 \cos \beta) + \\
 & \quad + (m_3l + m_5l_2)(\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) = +\lambda_2 + \lambda_4; \\
 & (m_1 - m_2)(\ddot{x}_A \cos \beta + \ddot{y}_A \sin \beta)l_1 + \left( (m_1 + m_2)l_1^2 + m_3l^2 + m_5l_2^2 \right) \ddot{\beta} + \\
 & \quad + (m_3l + m_5l_2)(-\ddot{x}_A \sin \beta + \ddot{y}_A \cos \beta) + \\
 & + \left( I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + I_{z5} + (I_{z1} + I_{z2})h_1^2 \right) \ddot{\beta} + (I_{z1} - I_{z2})h_1\ddot{\Psi} + I_{x3}\ddot{\phi} = \\
 & \quad = M_s - M_0 \operatorname{sgn} \dot{\phi} - \lambda_3l \sin \beta + \lambda_4l \cos \beta; \\
 & I_{z3}\ddot{\alpha} = -N_3f_3 - \lambda_3r \cos(\beta + \varphi) - \lambda_4r \sin(\beta + \varphi); \\
 & (I_{z1} + I_{z2})\ddot{\Psi} + (I_{z1} - I_{z2})h_1\ddot{\beta} = M_N - N_1f_1 - N_2f_2 - \\
 & \quad - \lambda_1r \cos \beta - \lambda_2r \sin \beta; \\
 & I_{x3}(\ddot{\beta} + \ddot{\phi}) = M_s - M_0 \operatorname{sgn} \dot{\phi},
 \end{aligned} \tag{19.4}$$

где  $m_1, m_2, m_3, m_5$  – массы соответствующих частей;

$m_3$  – масса колеса 3, актуатора б;

$I_{x1}, I_{x2}, I_{x3}, I_{z1}, I_{z2}, I_{z3}, I_{z5}$  – моменты инерции соответствующих частей осей;

$I_{x3}$  – учитывает момент инерции актуатора б, определенным относительно оси  $z_a$ ;

$N_1, N_2, N_3$  – силы движения колес;

$f_1 - f_2 - f_3 = f$  – коэффициенты трения колес;

$M_N$  – момент, вращающий колесо  $1z$ ;

$M_5$  – момент управляющий колесом  $2z$ ;

$M_0$  – момент сопротивления в паре трения «колесо-дорога», возникающего при повороте колеса  $2z$ ;

$l, l_1, l_2$  – соответствующее расстояние, вытекающее из геометрии системы;

$r_1 = r_2 = r_3 = r$  – радиусы соответствующих колес.

Динамический анализ проведем на основе уравнения

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = B(q)\tau + J^T(q)\lambda. \quad (19.5)$$

Выступающие в (19.5) матрицы  $M, C, B$  следуют из уравнения (19.4). Далее принимаем, что  $m$  первых столбцов матрицы  $J(q)$  (19.3) образуют матрицу  $J_1(q)$  размером  $m \times m$ . Разложим вектор координат  $\bar{q}$ :

$$q = [q_1, q_2]^T,$$

где  $q_1 \in R^m, q_2 \in R^{n-m}$ .

Тогда уравнения связей запишем в виде

$$[J_1(q), J_2(q)] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = 0, \quad \det J_1(q) \neq 0,$$

откуда следует

$$\dot{q}_1 = J_{12}(q)\dot{q}_2,$$

где

$$J_{12}(q) = -J_1^{-1}(q)J_2(q) = \begin{bmatrix} r \cos \beta, & 0 \\ r \sin \beta, & 0 \\ \frac{r}{l} \operatorname{tg} \varphi, & 0 \\ \cos^{-1} \varphi, & 0 \end{bmatrix},$$

Тогда

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} J_{12}(q) \\ I_{n-m} \end{bmatrix} \dot{q}_2,$$

где  $I_{n-m}$  – единичная матрица.

Векторы скорости и ускорения можно также записать в виде

$$\dot{q} = T(q) E_2 \dot{q}_2;$$

$$\ddot{q} = T(q) E_2 \ddot{q}_2 + \dot{T}(q, \dot{q}) E_2 \dot{q}_2;$$

$$T(q) = \begin{bmatrix} I_m & J_{12}(q) \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}.$$

Используя также зависимости, вытекающие из проведенных преобразований, запишем уравнения (19.5) в виде

$$M_{12}(q)\ddot{q}_2 + C_{12}(q, \dot{q}_2)\dot{q}_2 = B_1(q)\tau + J_1^T(q)\lambda; \quad (19.6)$$

$$M_{22}(q)\ddot{q}_2 + C_{22}(q, \dot{q}_2)\dot{q}_2 = B_2(q)\tau; \quad (19.7)$$

$$\dot{q}_1 = J_{12}(q)\dot{q}_2,$$

где

$$M_{12} = E_1^T T^T M T E_2; \quad C_{12} = E_1^T (T^T M \dot{T} + T^T C T) E_2;$$

$$M_{22} = E_2^T T^T M T E_2; \quad C_{22} = E_2^T (T^T M \dot{T} + T^T C T) E_2;$$

$$B_1 = E_1^T T^T B; \quad B_2 = E_2^T T^T B;$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{n \times m}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-m} \end{bmatrix} \in R^{n \times (n-m)}.$$

Матрица  $J_m$  – единичная.

Рассмотренные выше методы позволяют решать прямые и обратные задачи динамики.

В дальнейшем анализе полагаем

$$q_1 = [x_A, y_A, \beta, \alpha]^T,$$

$$q_2 = [\Psi, \varphi]^T,$$

тогда уравнение (19.7) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \left( (m_1 + m_2 + m_3 + m_5)r^2 + I_{z1} + I_{z2} + I_{z3} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) \ddot{\Psi} + I_{x3} \frac{r}{l} \ddot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi + \\ & + \left( I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + 2I_{z1}h_1^2 + I_{z5} + (m_1 + m_2)l_1^2 + m_3l^2 + m_5l_2^2 \right) \frac{r^2}{l^2} \ddot{\Psi} \operatorname{tg}^2 \varphi + \\ & + \left( \left( I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + 2I_{z1}h_1^2 + I_{z5} + (m_1 + m_2)l_1^2 + m_3l^2 + m_5l_2^2 \right) \frac{r^2}{l^2} + I_{z3} \right) \times \\ & \times \dot{\varphi} \dot{\Psi} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos^2 \varphi} = M_N - N_1 f_1 - N_2 f_2 - N_3 f_3 \frac{1}{\cos \varphi} + (M_s - M_0 \operatorname{sgn} \dot{\varphi}) \frac{r}{l} \operatorname{tg} \varphi; \end{aligned} \quad (19.8)$$

$$I_{x3} \frac{r}{l} \ddot{\Psi} \operatorname{tg} \varphi + I_{x3} \ddot{\varphi} + I_{x3} \frac{r}{l} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \dot{\varphi} \dot{\Psi} = M_s - M_0 \operatorname{sgn} \dot{\varphi}, \quad (19.9)$$

уравнения (19.8), а также (19.9) позволяют провести анализ прямых и обратных задач динамики без знания множителей Лагранжа. Уравнения же (19.6) запишем в следующей форме:

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2 + m_3 + m_5)r \left( \ddot{\Psi} \cos \beta - \frac{r}{l} \dot{\Psi}^2 \operatorname{tg} \varphi \sin \beta \right) - (m_3l + m_5l_2) \times \\ & \times \frac{r}{l} \left( \ddot{\Psi} \operatorname{tg} \varphi \cos \beta - \frac{r}{l} \dot{\Psi}^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin \beta + \dot{\Psi} \dot{\varphi} \frac{\sin \beta}{\cos^2 \varphi} \right) = \lambda_1 + \lambda_3; \end{aligned} \quad (19.10)$$

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2 + m_3 + m_5)r \left( \ddot{\Psi} \sin \beta + \frac{r}{l} \dot{\Psi}^2 \operatorname{tg} \varphi \cos \beta \right) + (m_3l + m_5l_2) \times \\ & \times \frac{r}{l} \left( \ddot{\Psi} \operatorname{tg} \varphi \cos \beta - \frac{r}{l} \dot{\Psi}^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin \beta + \dot{\Psi} \dot{\varphi} \frac{\cos \beta}{\cos^2 \varphi} \right) = \lambda_2 + \lambda_4; \end{aligned} \quad (19.11)$$

$$\begin{aligned} & \left( I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + 2I_{z1}h_1^2 + I_{z5} + (m_1 + m_2)l_1^2 + m_3l^2 + m_5l_2^2 \right) \times \\ & \times \left( \ddot{\Psi} + \frac{r}{l} \dot{\Psi} \dot{\phi} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) + I_{x3} \ddot{\phi} + (m_3l + m_5l_2) \frac{r^2}{l} \dot{\Psi}^2 \operatorname{tg} \varphi = \end{aligned} \quad (19.12)$$

$$= M_s - M_0 \operatorname{sgn} \dot{\phi} - \lambda_3 l \sin \beta + \lambda_4 l \cos \beta;$$

$$\begin{aligned} I_{z3} \ddot{\Psi} \frac{1}{\cos \varphi} + I_{z3} \dot{\phi} \dot{\Psi} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = & -N_3 f_3 - r \lambda_3 \cos(\beta + \varphi) - \\ & - r \lambda_4 \sin(\beta + \varphi). \end{aligned} \quad (19.13)$$

Из системы уравнения (19.10)–(19.13) можно определить множители Лагранжа, т. е. определить, как в течение анализируемого состояния изменяются составляющие сил сухого трения, возникающих в плоскостях взаимодействия колес и поверхности.

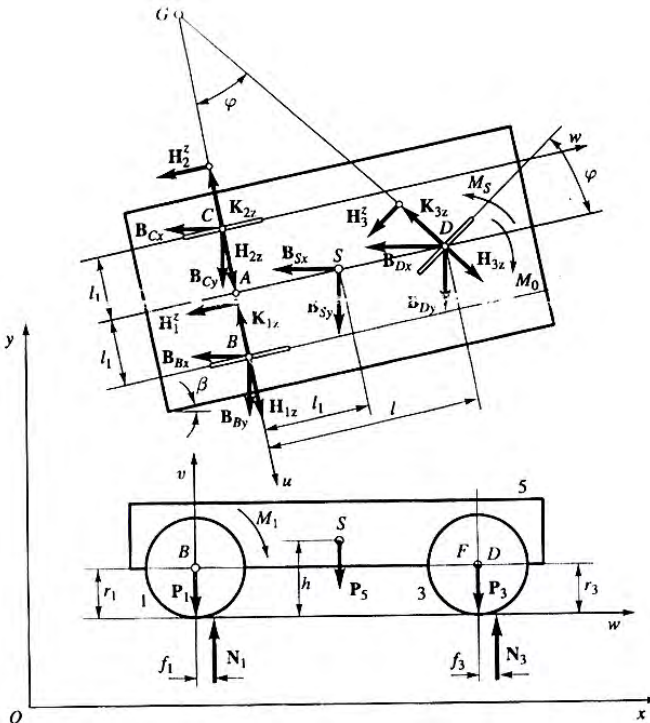


Рис. 19.2. Модель трехколесного робота: вид сверху и сбоку



## 19.2. Динамика модели четырехколесного миниатюрного робота

Рассмотрим модель четырехколесного мини-робота, изображенного на рис. 19.3. Два передних колеса 3 и 4 и задних 1, 2 заменяем эффективными колесами  $2z$  и  $1z$  соответственно, расположенными посередине осей в точках  $A$  и  $F$ . В качестве обобщенных координат берем, как и в случае трехколесного робота:  $x_A, y_A, \beta, \alpha, \Psi, \varphi$ . Уравнения неголономных связей, наложенных на робот, имеют вид (19.1). Уравнения Лагранжа II рода записываются в виде (19.2). Определение обобщенных сил  $\bar{Q}$ , кинетической и потенциальной энергии также проводится аналогично случаю трехколесного робота. Предположим, что  $m_1 = m_2, m_3 = m_4, I_{x1} = I_{x2}, I_{x3} = I_{x4}, I_{z1} = I_{z2} = I_{z3} = I_{z4}, M_{03} = M_{04}$  – моменты сопротивления при повороте рулевых колес 3 и 4.

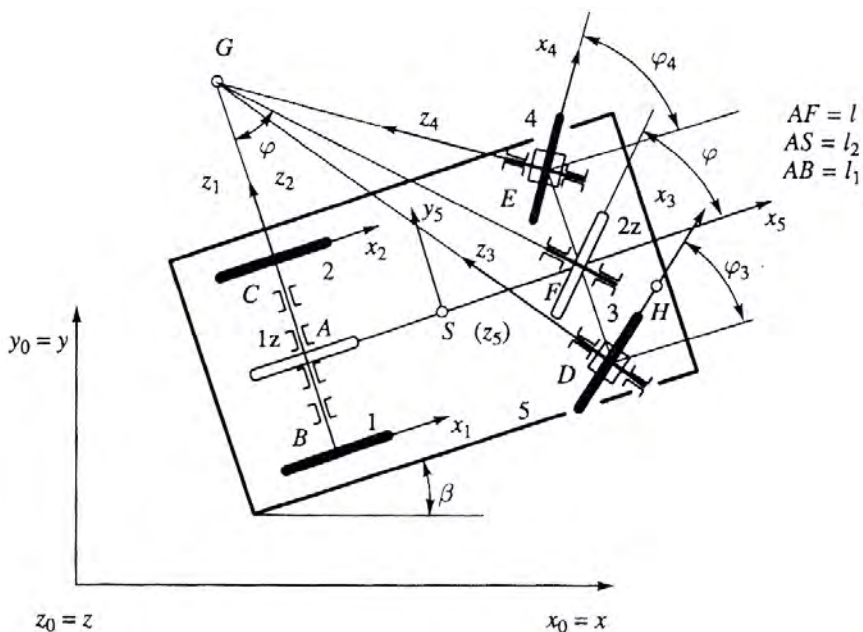


Рис. 19.3. Модель четырехколесного робота

Уравнения динамики четырехколесного робота имеют вид

$$2(m_1 + m_3 + \frac{1}{2}m_5)\ddot{x}_A - (2m_3l + m_5l_2)(\ddot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}^2 \cos \beta) = \lambda_1 + \lambda_3; \quad (19.14)$$

$$2(m_1 + m_3 + \frac{1}{2}m_5)\ddot{y}_A + (2m_3l + m_5l_2)(\ddot{\beta} \sin \beta - \dot{\beta}^2 \cos \beta) = \lambda_2 + \lambda_4.$$

В реальной конструкции колеса 3 и 4 снабжены отдельными приводами (актуаторами) так, что моменты  $M_3, M_4$ , прикладываемые к ним, различные. Предположим, что мощности двигателей актуаторов равны и имеет место равенство

$$M_3\dot{\lambda}_3 = M_4\dot{\lambda}_4. \quad (19.15)$$

Учитывая зависимости, следующие из кинематики робота:

$$\dot{\lambda}_1 = \dot{\Psi} + h_1\dot{\beta}_1; \quad \dot{\lambda}_2 = \dot{\Psi} - h_1\dot{\beta}_1; \quad h_1 = \frac{r_1}{l_1} = \frac{r_2}{l_2};$$

$$\dot{\lambda}_3 = \frac{\dot{\lambda}}{l} \sqrt{l^2 + l_1(l_1 \sin \varphi + 2l \cos \varphi) \sin \varphi};$$

$$\dot{\lambda}_4 = \frac{\dot{\lambda}}{l} \sqrt{l^2 + l_1(l_1 \sin \varphi - 2l \cos \varphi) \sin \varphi}; \quad (19.16)$$

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{l^2 \dot{\varphi}}{(l^2 + l_1(l_1 \sin \varphi + 2l \cos \varphi) \sin \varphi)};$$

$$\dot{\varphi}_4 = \frac{l^2 \dot{\varphi}}{(l^2 + l_1(l_1 \sin \varphi - 2l \cos \varphi) \sin \varphi)}$$

и подставляем  $\dot{\lambda}_3, \dot{\lambda}_4$  из (19.16) в (19.15), получим

$$M_4 = M_3 \sqrt{\frac{W_3}{W_4}}. \quad (19.17)$$

В реальной конструкции колёса также управляются независимыми двигателями актуаторов. Моменты, управляющие этими колёсами обозначаются  $M_{35}, M_{45}$ . Полагаем, что мощности двигателей одинаковые, тогда, пренебрегая потерями энергии при передаче, получим зависимость

$$M_{35}\dot{\phi}_3 = M_{45}\dot{\phi}_4. \quad (19.18)$$

С учетом уравнений (19.16) из (19.18) получим соотношение

$$M_{45} = M_{35} \frac{W_1}{W_2}. \quad (19.19)$$

Предполагаем, что давление на колеса, взаимодействующие с опорной поверхностью, имеет статический характер и определено при предположении, что давление на передние колеса равно давлению на задние (давления на оси). Решая системы уравнений (19.14)–(19.19), можем проводить анализ прямых и обратных задач динамики мини-робота.

Характеризуя обратные задачи динамики, т. е. зная параметры движения, интерпретируем значения моментов вращающихся и управляющих. Как видно из уравнений (19.14), их решение представляет трудности, поэтому, как и в случае трехколесного робота, запишем (19.14) в векторно-матричном виде:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} = B(q) \tau + J^T(q) \lambda. \quad (19.20)$$

Вид матриц  $M, C, B, J$  вытекает из уравнений (19.14). Проводя аналогично тому, как это было сделано для трехколесного робота, преобразования, отделяющие множители Лагранжа от моментов, запишем уравнение (19.20) в виде

$$M_{12}(q)\ddot{q}_2 + C_{12}(q, \dot{q}_2)\dot{q}_2 = B_1(q)\tau + J_1^T(q)\lambda; \quad (19.21)$$

$$M_{22}(q)\ddot{q}_2 + C_{12}(q, \dot{q}_2)\dot{q}_2 = B_2(q)\tau;$$

$$\dot{q}_1 = J_{12}(q)\dot{q}_2;$$

$$q_1 = [x_A, y_A, \beta, \Psi]^T;$$

$$q_2 = [\alpha, \varphi]^T.$$

Расписывая уравнения (19.20), (19.21) в координатах аналогично тому, как это было сделано для трехколесного робота, получим для (19.20)

$$\begin{aligned} & \left( (2m_1 + 2m_3 + m_5)r^2 + 2I_{z1} \right) \ddot{\alpha} \cos^2 \varphi + 2I_{z1} \ddot{\alpha} + \\ & + \left( \left( 2I_{x1} + 2I_{x3} + 2I_{z1}h_1^2 + I_{z5} + 2m_1l_1^2 + 2m_3(l^2 + l_1^2) + m_5l_2^2 \right) \frac{r^2}{l^2} + \right. \\ & + \left. 2I_{z3} \frac{l_1^2}{l^2} \right) \ddot{\alpha} \sin^2 \varphi + (I_{x3}lr(w_1 + w_2) \sin \varphi) \ddot{\varphi} + \left( -(2m_1 + 2m_3 + m_5) r^2 - \right. \\ & - 2I_{z1} \left. \right) \dot{\alpha} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \left( 2I_{x1} + 2I_{x3} + 2I_{z1}h_1^2 + I_{z5} + 2m_1l_1^2 + \right. \\ & + \left. 2m_3(l^2 + l_1^2) + m_5l_2^2 \right) \frac{r^2}{l^2} \dot{\alpha} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + 2I_{z3} \frac{l_1^2}{l^2} \dot{\alpha} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \\ & 2I_{x3} l l_1 r \dot{\varphi}^2 (w_1^2 w_3 + w_2^2 w_4) \sin \varphi = (M_3 - N_3 f_3) \frac{1}{l \sqrt{w_1}} + \\ & + (M_4 - N_4 f_4) \frac{1}{l \sqrt{w_2}} - (N_1 f_1 + N_2 f_2) \cos \varphi + \\ & + \left( (M_{3s} - M_{30} \operatorname{sgn} \dot{\varphi}) l^2 w_1 + (M_{4s} - M_{40} \operatorname{sgn} \dot{\varphi}) l^2 w_2 \right) \frac{r}{l} \sin \varphi; \end{aligned} \quad (19.22)$$

$$\begin{aligned} & I_{x3} l r \ddot{\alpha} (w_1 + w_2) \sin \varphi + I_{x3} l_4 \ddot{\varphi} (w_1^2 + w_2^2) - \\ & - 2I_{z3} \frac{l_1^2}{l^2} \dot{\alpha}^2 \sin \varphi \cos \varphi + I_{x3} l r (w_1 + w_2) \dot{\alpha} \dot{\varphi} \cos \varphi - \\ & - 2I_{x3} l^4 l_1 \dot{\varphi}^2 (w_1^3 w_3 + w_2^3 w_4) = \\ & = (M_{3s} - M_{30} \operatorname{sgn} \dot{\varphi}) l^2 w_1 + (M_{4s} - M_{40} \operatorname{sgn} \dot{\varphi}) l^2 w_2. \end{aligned} \quad (19.23)$$

Для уравнения (19.37) получим соответственно

$$\begin{aligned} & \left( (2m_1 + 2m_3 + m_5)r \cos \beta \cos \varphi - (2m_3l + m_5l_2) \frac{r}{l} \sin \beta \sin \varphi \right) \ddot{\alpha} + \\ & + (2m_1 + 2m_3 + m_5)r (-\dot{\beta} \sin \beta \cos \varphi - \dot{\varphi} \cos \beta \sin \varphi) \dot{\alpha} - \\ & - (2m_3l + m_5l_2) \frac{r}{l} (\dot{\beta} \cos \beta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \beta \cos \varphi) \dot{\alpha} = \lambda_1 + \lambda_3; \end{aligned} \quad (19.24)$$

$$\begin{aligned} & \left( (2m_1 + 2m_3 + m_5)r \sin \beta \cos \varphi + (2m_3l + m_5l_2) \frac{r}{l} \cos \beta \sin \varphi \right) \ddot{\alpha} + \\ & + (2m_1 + 2m_3 + m_5)r (\dot{\beta} \cos \beta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \beta \sin \varphi) \dot{\alpha} + \\ & + (2m_3l + m_5l_2) \frac{r}{l} (\dot{\varphi} \cos \beta \sin \varphi - \dot{\beta} \sin \beta \sin \varphi) \dot{\alpha} = \lambda_2 + \lambda_4; \end{aligned} \quad (19.25)$$

$$\begin{aligned} & \left( 2I_{x1} + 2I_{x3} + 2I_{z1}h_1^2 + I_{z5} + 2m_1l_1^2 + 2m_3(l^2 + l_1^2) + m_5l_2^2 \right) \times \\ & \times \frac{r}{l} \ddot{\alpha} \sin \varphi + I_{x3}l^2(w_1 + w_2)\ddot{\varphi} + (2m_3l + m_5l_2)r\dot{\beta}\dot{\alpha} \cos \varphi + \\ & + \left( 2I_{x1} + 2I_{x3} + 2I_{z1}h_1^2 + m_1l_1^2 + 2m_3(l^2 + l_1^2) + m_5l_2^2 \right) \frac{r}{l} \dot{\alpha} \dot{\varphi} \cos \varphi - \\ & - 2I_{x3}l^2l_1\dot{\varphi}^2(w_1^2w_3 + w_2^2w_4) = (M_{3s} - M_{30} \operatorname{sgn} \dot{\varphi})l^2w_1 + \\ & + (M_{4s} - M_{40} \operatorname{sgn} \dot{\varphi})l^2w_2 - \lambda_3l \sin \beta + \lambda_4l \cos \beta; \end{aligned} \quad (19.26)$$

$$2I_{z1}\ddot{\alpha} \cos \varphi - 2I_{z1}\dot{\alpha} \dot{\varphi} \sin \varphi = -N_1f_1 - N_2f_2 - \lambda_1r \cos \beta - \lambda_2r \sin \beta.$$

Структура уравнений (19.22) и (19.23) с учетом (19.18), (19.19) позволяет анализировать прямые и обратные задачи динамики. Из уравнений (19.24), (19.25), (19.26) определяем значения множителей Лагранжа, т. е. составляющие сил сухого трения, действующие в плоскостях касания колес  $l_z$  и  $2z$  с покрытием, чтобы реализовать программное движение мобильного колесного мини-робота:

$$\begin{aligned}
& \left( 2m_1 l_1^2 + 2m_3 (l^2 + l_1^2) + m_5 l_2^2 + 2I_{x1} + 2I_{z1} h_1^2 + 2I_{x3} + I_{z5} \right) \ddot{\beta} + (2m_3 l + m_5 l_2) \times \\
& \quad \times (-\ddot{x}_A \sin \beta + \ddot{y} \cos \beta) + I_{x3} l^2 \ddot{\varphi} (w_1 + w_2) - 2I_{x3} l^2 l_1 \dot{\varphi}^2 (w_1^2 w_3 + w_2^2 w_4) = \\
& = (M_{3s} - M_{30} \operatorname{sgn} \dot{\varphi}) w_1 l^2 + (M_{4s} - M_{40} \operatorname{sgn} \dot{\varphi}) w_2 l^2 - \lambda_3 l \sin \beta + \lambda_4 l \cos \beta;
\end{aligned}$$

$$2I_{z1} \ddot{\Psi} = -N_1 f_1 - N_2 f_2 - \lambda_1 r \cos \beta - \lambda_2 r \sin \beta;$$

$$\begin{aligned}
2I_{z3} \ddot{\alpha} \frac{l^2 + l_1^2 \sin^2 \varphi}{l^2} + 4I_{z3} \dot{\alpha} \dot{\varphi} \frac{l_1^2}{l^2} \sin \varphi \cos \varphi &= (M_3 - N_3 f_3) \frac{1}{l \sqrt{w_1}} + \\
+ (M_4 - N_4 f_4) \frac{1}{l \sqrt{w_2}} - \lambda_3 r \cos(\beta + \varphi) - \lambda_4 r \sin(\beta + \varphi);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{x3} (\ddot{\beta} + l^2 \ddot{\varphi} w_1 - 2l^2 l_1 \dot{\varphi}^2 w_1^2 w_3) w_1 l^2 + I_{x3} (\ddot{\beta} + l^2 \ddot{\varphi} w_2 - 2l^2 l_1 \dot{\varphi}^2 w_2^2 w_4) w_2 l^2 - \\
- 2I_{z3} \frac{l_1^2}{l^2} \dot{\alpha}^2 \sin \varphi \cos \varphi = (M_{3s} - M_{30} \operatorname{sgn} \dot{\varphi}) w_1 l^2 + (M_{4s} - M_{40} \operatorname{sgn} \dot{\varphi}) w_2 l^2;
\end{aligned}$$

$$w_1 = \left( l^2 + l_1 (l_1 \sin \varphi + 2l \cos \varphi) \sin \varphi \right)^{-1};$$

$$w_2 = \left( l^2 + l_1 (l_1 \sin \varphi - 2l \cos \varphi) \sin \varphi \right)^{-1};$$

$$w_3 = -l + (l_1 \sin \varphi + 2l \cos \varphi) \cos \varphi;$$

$$w_4 = l + (l_1 \sin \varphi - 2l \cos \varphi) \cos \varphi.$$

### 19.3. Динамика модели двухколесного миниатюрного робота

Модель двухколесного робота может иметь конструкцию с двумя ведущими колесами и опорным колесом, свободно устанавливающимся колесом или без него, если имеется система стабилизации, а также расположенных в одной плоскости (типа велосипеда).

Рассмотрим модель, когда два колеса 1 и 2 расположены на одной оси, а третье опорное 3, как в схеме трехколесного робота, рис. 19.4.

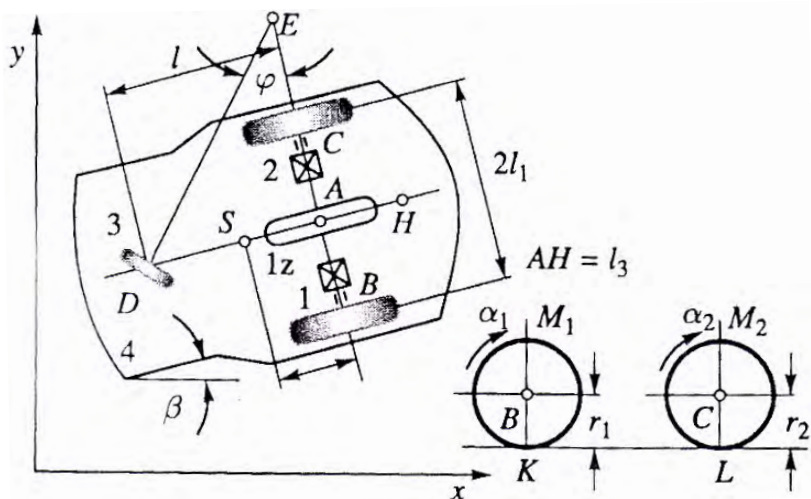


Рис. 19.4. Схема двухколесного робота

Платформа робота 4, как и ранее, см. рис. 19.2, считается однородной пластиной, ведущие колеса 1, 2 имеют ось, не меняющую своего положения, опорное саморегулирующееся колесо 3. Колеса 1 и 2 имеют отдельные приводы, углы поворота соответственно  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , радиусы  $r_1$  и  $r_2$ , причем  $r_1 = r_2 = r$ , центры ведущих колес обозначены  $B$  и  $C$ , свободного колеса  $D$ , а его радиус  $r_3$ , причем  $r_3 < r_1$ ,  $M_1, M_2$  – вращающиеся моменты колес 1 и 2. Через  $S$  обозначен центр масс платформы, точка  $A$  расположена посередине между точками  $B$  и  $C$ ;  $H$  является точкой, принадлежащей платформе, и движется по заданному пути робота. Точка  $E$  является мгновенным центром скоростей платформы, угол  $\beta$  – характеризует мгновенный поворот платформы вследствие разности скоростей вращения колес 1 и 2. Проекции вектора скорости точка  $A$  связаны между собой соотношением

$$\dot{y}_A = \dot{x}_A \operatorname{tg} \beta,$$

которое показывает, что на вектор скорости точке  $A$  положены ограничения, т. е. связи, которые являются неголономными. Из

рис. 19.5 следует представления о векторах в точках  $A, B, C, D, H$  и связях между ними:

$$x_H = x_A + l_3 \cos \beta, \quad y_H = y_A + l_3 \sin \beta. \quad (19.27)$$

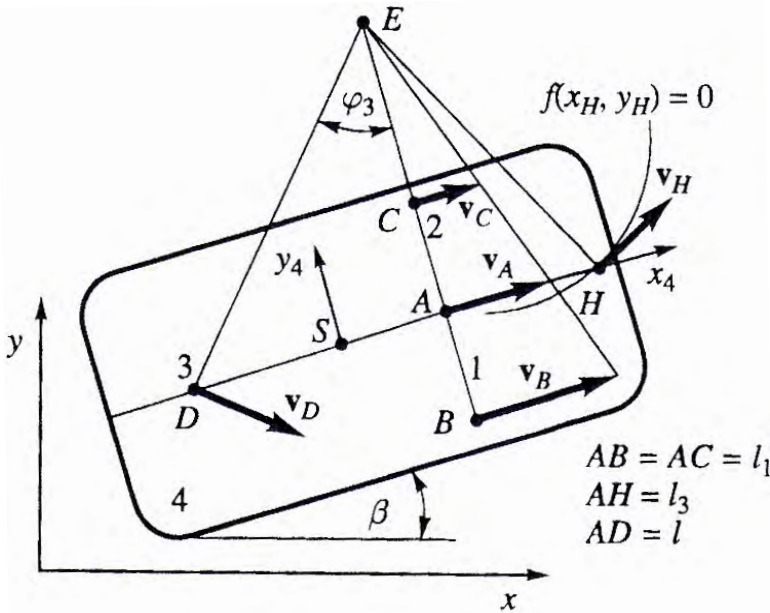


Рис. 19.5. Схема скоростей характерных точек робота

Дифференцируя (19.27), получим

$$\dot{x}_H = \dot{x}_A + l_3 \dot{\beta} \sin \beta, \quad \dot{y}_H = \dot{y}_A + l_3 \dot{\beta} \cos \beta. \quad (19.28)$$

Если известны  $\bar{V}_A$  – значения скорости точки  $A$ , то проекции вектора  $\bar{V}_A$  на оси координат

$$\dot{x}_A = V_A \cos \beta, \quad \dot{y}_A = V_A \sin \beta. \quad (19.29)$$



Соотношения (19.28) с учетом (19.29) имеют вид

$$\dot{x}_H = V_A \cos \beta - l_3 \dot{\beta} \sin \beta, \quad \dot{y}_H = V_A \sin \beta + l_3 \dot{\beta} \cos \beta.$$

Условие движения точки  $H$  по заданному пути записывается в виде

$$f(x_H, y_H) = 0. \quad (19.30)$$

Дифференцируя (19.30), получим

$$\dot{f}(x_H, y_H) = 0. \quad (19.31)$$

Из (19.29), (19.30) следует

$$\beta = \beta(t), \quad x_H = x_H(t), \quad y_H = y_H(t). \quad (19.32)$$

Зная (19.31), можем найти скорость в точке  $B$ :

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}.$$

Проецируя (19.32) на ось  $x$ , получим

$$V_B = V_A + V_{BA}.$$

Так как колеса катятся без проскальзывания, то имеем

$$V_B = \omega_1 r_1 = \dot{\alpha}_1 r_1.$$

Соответственно скорость точки  $B$  относительно  $A$  определим из зависимости

$$V_{BA} = \omega_4 l_1 = \dot{\beta} l_1. \quad (19.33)$$

Выражение (19.33) определяет значение угловой скорости ведущего колеса  $I$ .

Кроме того, имеют место соотношения

$$\bar{V}_C = \bar{V}_A + \bar{V}_{CA};$$

$$V_C = V_A - V_{CA};$$

$$V_C = \omega_2 r_2 = \dot{\alpha}_2 r_2;$$

$$V_{CA} = \omega_4 l_1 = \dot{\beta} l_1.$$

Угловая скорость ведущего колеса 2 определяется формулой

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{V_A}{r_2} - \dot{\beta} \frac{l_1}{r_2}.$$

Из рис. 19.4 видно, что скорость свободного колеса 3 в точке  $D$  вычисляется по формуле

$$V_D = DE \dot{\beta} = \sqrt{\partial_2 + AE^2} \dot{\beta} = \dot{\alpha}_3 r_3; \quad (19.34)$$

$$\frac{V_B}{AE + l_1} = \frac{V_C}{AE - l_1}. \quad (19.35)$$

Из (19.35) с учетом (19.34) получим

$$AE = \frac{V_A}{\dot{\beta}}.$$

Тогда имеем

$$\dot{\alpha}_3 = (r_3)^{-1} \sqrt{(V_A)^2 + (l_1 \dot{\beta})^2}$$

и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{AE} = \frac{\dot{\beta}}{V_A}.$$

Далее в аккумулируемой модели ведущее колесо  $I$  находится в середине оси  $BC$ , имеет радиус  $r$ . Обобщенными координатами, описывающими движения, являются  $x_A, y_A, \beta, \alpha$ . В предположении, что колесо в точке  $A$  взаимодействует с опорной поверхностью без скольжения, обозначая угол вращения  $\alpha$ , получим

$$V_A = \dot{\alpha}r. \quad (19.36)$$

Кроме того известно, что скорости точек  $B$  и  $C$  находятся из соотношений

$$V_B = V_A + \partial_1 \dot{\beta} = r_1 \dot{\alpha}; \quad (19.37)$$

$$V_C = V_A - \partial_1 \dot{\beta} = r_2 \dot{\alpha}_2.$$

Таким образом, из уравнений (19.36), (19.37) получим зависимости между величинами скоростей ведущих колес  $I$  и  $2$ , заменяемых эффективным колесом  $I$ :

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha} + h_1 \dot{\beta};$$

$$\dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha} - h_1 \dot{\beta}.$$

Так как  $r_1 = r_2 = r$ , тогда  $h_1 = \frac{l_1}{r_1} = \frac{l_0}{r_2}$ .

Необходимо обратить внимание на то, что в то время, когда точка  $H$  перемещается по заданному пути и переходит на другую заданную траекторию, отсутствует аналитичность функции, описывающей границу траекторий. Тогда необходимо описывать движение в переходной области. В той области угловые скорости приводных колес можно соответственно аппроксимировать дополнительными аналитическими функциями.

Пусть точке  $H$  переходит с круговой траектории на прямолинейную, тогда угловые скорости приводных колес можно описать зависимостями

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_{10} - \left( \dot{\alpha}_{10} - \frac{V_A}{r} \right) (1 - e^{-\gamma t});$$

$$\dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_{20} - \left( \frac{V_A}{r} - \dot{\alpha}_{20} \right) (1 - e^{-\gamma t}),$$

где  $\dot{\alpha}_{10}, \dot{\alpha}_{20}$  – величины угловых скоростей в начале переходной области,

$\gamma$  – постоянная аппроксимации переходных кривых.

Введение такой аппроксимации позволяет реализовать движение с гладкими сменами параметров скорости и ускорения.

В силу неголономности системы координаты связаны условиями, наложенными на скорости:

$$\dot{x}_A - r\dot{\alpha} \cos \beta = 0, \quad \dot{y}_A - r\dot{\alpha} \sin \beta = 0. \quad (19.38)$$

Условие (19.38) определяет отсутствие скольжения колеса  $I$ . В векторно-матричном виде (19.38) записывается в классическом виде:

$$J(q)\dot{q} = 0, \quad q = [x_A, y_A, \beta, \alpha], \quad (19.39)$$

где якобиан  $J(\bar{q})$  имеет вид

$$J(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r \cos \beta \\ 0 & 1 & 0 & -r \sin \beta \end{bmatrix}.$$

Для рассматриваемой неголономной системы уравнения Лагранжа II рода записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial E}{\partial q} \right)^T = Q + J^T(q)\lambda. \quad (19.40)$$

Проецируя (19.40) на оси координат, получим

$$\begin{aligned}
 & (m_1 + m_2 + m_4) \ddot{x}_A + ((m_1 - m_2)l_1 \cos \beta + m_4 l_2 \sin \beta) \ddot{\beta} + \\
 & \quad + ((-m_1 + m_2)l_1 \sin \beta + m_4 l_2 \cos \beta) (\dot{\beta})^2 = \lambda_1; \\
 & (m_1 + m_2 + m_4) \ddot{y}_A + ((m_1 - m_2)l_1 \sin \beta - m_4 l_2 \cos \beta) \ddot{\beta} + \\
 & \quad + ((-m_1 - m_2)l_1 \cos \beta + m_4 l_2 \sin \beta) (\dot{\beta})^2 = \lambda_2; \\
 & ((m_1 - m_2)l_1 \cos \beta + m_4 l_2 \sin \beta) \ddot{x}_A + ((m_1 - m_2)l_1 \sin \beta - \\
 & - m_4 l_2 \cos \beta) \ddot{y}_A + ((m_1 + m_2)l_1^2 + m_4 l_2^2 + I_{z4} + I_{x1} + I_{x2} + \\
 & \quad + (I_{z1} + I_{z2})h_1^2) \ddot{\beta} + (I_{z1} - I_{z2})h_1 \ddot{\alpha} = \\
 & \quad (M_1 - M_2 - N_1 f_1 + N_2 f_2) h_1; \\
 & (I_{z1} + I_{z2}) \ddot{\alpha} + (I_{z1} - I_{z2}) h_1 \ddot{\beta} = M_1 + M_2 - N_1 f_1 + N_2 f_2 - \\
 & \quad - \lambda_1 r \cos \beta - \lambda_2 r \sin \beta,
 \end{aligned} \tag{19.41}$$

где  $m_1 = m_2$ ,  $m_4$  – массы колес 1, 2 и платформы соответственно;

$J_{x1}$ ,  $J_{x2}$  – моменты инерции колес 1, 2, округлены относительно осей  $x_1$  и  $x_2$ , связанных с этими колесами;

$J_{z1}$ ,  $J_{z2}$  – моменты инерции относительно оси вращения этих колес;

$J_{z4}$  – момент инерции платформы относительно оси  $z_4$ , связанной с платформой. Считается, что оси системы являются главными центральными осями;

силы же  $N_1$ ,  $N_2$  – силы давления на соответствующие колеса;

$f_1$ ,  $f_2$  – коэффициенты трения качения соответствующих колес;

$M_1, M_2$  – моменты привода колес;

$l$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ ;  $h_1 = r_1 l_1^{-1}$  – расстояния, указанные на схеме системы;

$r_1 = r_2 = r$  – радиусы колес.

В уравнениях (19.41) не учитываются масса колеса  $3$  и сопротивление его качению.

При решении обратной задачи динамики из уравнений (19.41) можно определить величины моментов приводов и множителей при заданном законе движения.

Преобразуем уравнения (19.41) к виду, более удобному для анализа, для чего, как и ранее, запишем систему (19.41) в виде

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = B(\mathbf{q})\tau + J^T(\mathbf{q})\lambda. \quad (19.42)$$

Представим

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]^T, \quad \mathbf{q} \in R^n, \quad \mathbf{q}_1 \in R^m, \quad \mathbf{q}_2 \in R^{n-m},$$

тогда условия связей (19.39) запишутся в виде

$$[J_1(\mathbf{q}), J_2(\mathbf{q})] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} = 0, \quad \det J_1(\mathbf{q}) \neq 0.$$

Вектор  $\mathbf{q}_2$  выбираем так, чтобы его размер был равен числу степеней свободы, а  $\det J_1(\bar{\mathbf{q}}) \neq 0$ , тогда

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} J_{12}(\mathbf{q}) \\ I_{n-m} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_2 = T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_2, \quad \ddot{\mathbf{q}} = T(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_2 + T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_2,$$

где  $J_{12} = -J_1^{-1}(\bar{\mathbf{q}})J_2(\bar{\mathbf{q}})$ ,  $I_{n-m}$  – единичная матрица.

Уравнения (19.42) можно записать в виде

$$M_{12}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_2 + C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_2 = B_1(\mathbf{q})\tau + J_1^T(\mathbf{q})\lambda; \quad (19.43)$$

$$M_{22}(\mathbf{q}_2)\ddot{\mathbf{q}}_2 + C_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2)\dot{\mathbf{q}}_2 = B_2(\mathbf{q}_2)\tau.$$

Уравнения (19.43) представляют редуцированную форму описания движения с неголономными связями. Полагая  $\bar{q}_2 = [\beta, \alpha]^T$ , расписывая уравнения (19.43) в проекциях на оси координат, получим

$$\begin{aligned}
 m_4 l_2 \left( \ddot{\beta} \sin \beta + (\dot{\beta})^2 \cos \beta \right) + (2m_1 + m_4) r (\ddot{\alpha} \cos \beta - \\
 - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta) &= \lambda_1; \\
 m_4 l_2 \left( -\ddot{\beta} \cos \beta + (\dot{\beta})^2 \sin \beta \right) + (2m_1 + m_4) r (\ddot{\alpha} \sin \beta - \\
 - \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta) &= \lambda_2; \tag{19.44} \\
 \left( 2m_1 l_1^2 + m_4 l_2^2 + I_{z_4} + 2I_{x_1} + 2I_{z_1} h_1^2 \right) \ddot{\beta} - m_4 l_2 r \ddot{\alpha} \dot{\beta} &= \\
 = (M_1 - M_2 - N_1 f_1 + N_2 f_2) h_1; \\
 \left( (2m_1 + m_4) r^2 + 2I_{z_1} \right) \ddot{\alpha} + m_4 l_2 r (\dot{\beta})^2 &= M_1 + M_2 - \\
 - N_1 f_1 + N_2 f_2.
 \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа II рода описывают динамику двухколесного робота, в форме (19.44) позволяют более эффективно анализировать прямые и обратные задачи, находить их решения.

## **Глава 20. ДИНАМИКА ШАГАЮЩЕГО МИНИАТЮРНОГО РОБОТА**

### **20.1. Основные уравнения математической модели динамики робота**

Мини-робот представляет собой абсолютно твердое тело (платформа, корпус), на котором монтируются двигатель, аккумуляторы, сенсоры, актуаторы, конечности, контактирующие с опорной поверхностью. Будем выделять корпус с жестко закрепленными на нем элементами как единое целое, конечности – как твердые тела (стержни), скрепленные через шарниры с корпусом, и, при необходимости учета их влияния на общую динамику робота, движущиеся элементы в корпусе робота (гироскопы, роторы). Геометрия масс описывается координатами центра масс, моментов инерции, центробежных моментов корпуса и геометрии масс каждой ноги соответственно, а также центра масс, моментов инерции и центробежных моментов всего робота. При этом надо иметь в виду конструкции корпуса и ног.

Если корпус при движении не меняет своей геометрии (экзоскелет), то центр масс и его геометрические моменты – постоянные величины. В биомеханике – это, например, жуки.

Если корпус меняет свою геометрию в процессе ходьбы (эндоскелет), то центр масс и его моменты меняются за счет изменения геометрии. В биомеханике – это, например, позвоночные.

Второй случай труднее моделировать математически и технически, поэтому будем рассматривать первый случай. В простых моделях конечности могут представлять собой прямые стержни, криволинейные стержни, в более сложных – кинематические пары. Для корпуса типа экзоскелета движение состоит из поступательного перемещения центра масс и вращательных движений под действием сил, приложенных со стороны конечностей в точках их крепления. Динамика составных конечностей представляет собой движения манипуляторов, в которых схват и крепление периодически меняются местами. При перемещении объектов с помощью ног выделяют две основные фазы движения конечности:

- 1) переносная;
- 2) опорная.



В переносной фазе нога движется как манипулятор с точкой закрепления на корпусе. В этой фазе конечность представляет собой разомкнутую систему, если выполняет движение по заданной программе ноги манипулятор программного робота. В случае шагающего робота перемещение конечности происходит под контролем сенсорных систем, осуществляющих получение информации различными способами и через обратную связь использующими ее для корректировки ходьбы. В простом случае программной ходьбы по плоской поверхности можно в первом приближении не учитывать наличие обратной связи. В опорной фазе стопа ставится на поверхность (неудерживающая связь), закрепляется на ней за счет силы трения и действует как манипулятор, переносящий груз (корпус). Далее процесс повторяется. Очевидно, что перемещение с помощью нескольких ног требует скоординированной, синхронной работы нескольких конечностей.

Математические модели шагающих роботов получают на основе методов теоретической механики, в частности, уравнений Лагранжа второго рода, применяемых для вывода как уравнений движения корпуса, так и конечностей. В качестве обобщенных координат выбираются координаты центра масс корпуса или всей системы, углы Эйлера. В кёнинговой системе координат, связанной с корпусом, положения звеньев, конфигурацию ног можно описать с помощью углов (косинусов углов). В дальнейшем ограничимся моделью двухзвенных конечностей, в которой стопа не учитывается.

Пусть робот имеет  $n$  двухзвенных ног, скрепленных с корпусом. Верхняя часть ноги – бедро – имеет две степени свободы, так как соединено с корпусом с помощью шарнира с двумя степенями свободы. Нижняя часть ноги – голень имеет одну степень свободы, так как скреплена с бедром посредством одностепенного шарнира. Опорная фаза характеризуется: вначале – ударной постановкой конца голени на поверхность, причем удар является абсолютно неупругим, в конце отрыв ноги (разрыв неудерживающей связи) также носит квазиударный характер. В биомеханике конечности поверхность обладает вязкоупругими свойствами и резкость ударов носит сглаженный характер. Выражение для  $T$  – кинетической энергии – имеет вид

$$T = T_{\text{кор}} + \sum_{i=1}^n T_i,$$

где  $T_{\text{кор}}$  – кинетическая энергия собственного корпуса;

$T_i$  – кинетическая энергия  $i$ -й конечности.

Тогда

$$T_{\text{корп}} = T_0 + T_{\text{вр}}, \quad T_0 = \frac{1}{2} m_k \bar{V}_0^2, \quad T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} (A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2),$$

где  $m_k$  – масса корпуса;

$V_0$  – скорость тоски 0;

$A, B, C$  – главные моменты инерции;

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор мгновенной угловой скорости корпуса

в главных центральных осях корпуса.

Для  $i$ -й конечности

$$T_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij}, \quad T_{ij} = T_{ij}^{(o)} + T_{ij}^{(ep)};$$

$$T_{ij}^{(o)} = \frac{1}{2} m_{ij} V_{ij}^2;$$

$$T_{ij}^{(ep)} = \frac{1}{2} \left( A_{ij} (\omega_{ij}^1)^2 + B_{ij} (\omega_{ij}^2)^2 + C_{ij} (\omega_{ij}^3)^2 \right),$$

где  $T_{ij}$  – кинетическая энергия  $j$ -го звена  $i$ -й ноги;

$\omega_{ij}^k$  –  $k$ -я координата вектора  $\omega_{ij} = (\omega_{ij}^1, \omega_{ij}^2, \omega_{ij}^3)$  в главных осях соответствующего звена.

Силы, которые действуют на робота, делятся на потенциальные, учитывающие гравитацию, и контактные (реакции) в точках контакта конечностей с поверхностью. Потенциальные силы выражаются через потенциальную энергию  $\Pi$  (или потенциал, силовую функцию  $U$ ) и включаются в функцию Лагранжа  $L$ , контактные взаимодействия входят в обобщенные силы  $Q$  и входят в правую часть уравнений Лагранжа.

Потенциальная энергия  $\Pi$  складывается из потенциальной энергии корпуса и ног. Аналогично и потенциалы, так как  $\Pi = -U$ :

$$U = U_{\text{кор}} + \sum_{i=1}^n U_i; \quad (20.1)$$

$$U_{\text{кор}} = -mg \left( \zeta + a_{13}\rho_x + a_{23}\rho_y + a_{33}\rho_z \right);$$

$$U_i = -g \sum_{j=1}^2 m_{ij} \left( \zeta + a_{13}r_{ij}^x + a_{23}r_{ij}^y + a_{33}r_{ij}^z \right),$$

где  $m$  – масса корпуса;

$g$  – ускорение свободного падения;

$\zeta$  – координата в неподвижно ориентированной системе координат;

$r_{ij}$  – вектор, соединяющий в точки  $O$  с центром массового звена

$i$ -й ноги:  $r_{ij} = (r_{ij}^x, r_{ij}^y, r_{ij}^z)$ ;

$\bar{\rho}$  – радиус-вектор из точки  $O$  до центра масс корпуса:

$$\bar{\rho} = (\rho_x, \rho_y, \rho_z);$$

$$a_{13} = -\sin \theta;$$

$$a_{23} = \cos \theta \sin \gamma;$$

$$a_{33} = \cos \theta \cos \gamma, \text{ рис. 20.1.}$$

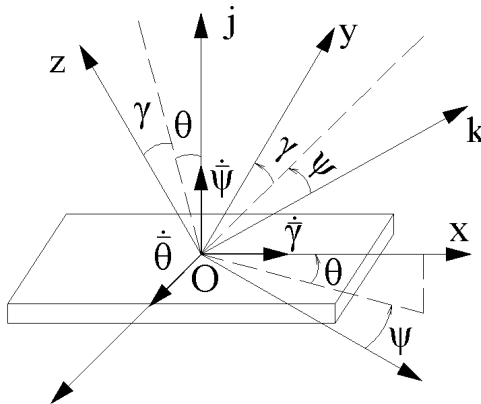


Рис. 20.1. Модель плоской платформы робота

Если в начальный момент вращения система координат подвижная и ориентированно-неподвижная совпадали, то в дальнейшем по неплоской поверхности вращательное движение корпуса робота описывается тремя углами Эйлера. Если ось  $Ox$  – главная центральная продольная ось, через оси  $Ox$  и  $Oz$  проходит сагиттальная плоскость, в которой угол  $\theta$  между  $O\xi$  и проекцией  $Ox$  на плоскость и  $O\xi\eta$  является углом тангажа, угол  $\gamma$  вращения вокруг оси  $Ox$  является углом крена корпуса при движении робота вдоль  $Ox$  и вращения вокруг, угол рыскания  $\psi$  – это угол между осью  $O\xi$  и проекцией  $Ox$  на плоскость  $O\xi\eta$ . Считаем все конечности идентичны, системы координат и обозначений, связанных с  $i$ -й ногой, изображены на рис. 20.2.

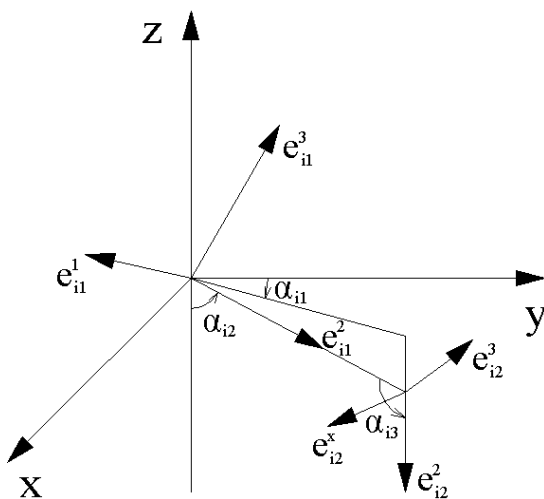


Рис. 20.2. Схема конечности робота

Точка  $P_i$  – точка крепления  $i$ -й ноги с корпусом;  $r_i^P$  – радиус-вектор точки  $P_i$ , соединяющий точки  $O$  с точкой  $P_i$ ,  $\alpha_{i1}$ ,  $\alpha_{i2}$ ,  $\alpha_{i3}$  – углы между бедром (стержнем) и осями  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Считаем, что вертикальная плоскость, в которой находятся стержни ног, перпендикулярна горизонтальной плоскости  $Oxy$  и во времени  $0 < t$ .

Динамика звеньев ног описывается как поступательное движение центра масс звена и вращательное движение вокруг него. Центр масс звеньев для однородного стержня обычно располагается в их геометрических центрах. В общем случае будем считать, что центр масс  $i$ -го звена «бедро» находится на расстоянии  $l_{i1}^c$  от точки крепления  $P_i$ , а центр тяжести  $i$ -го звена «голень» – на расстоянии  $l_{i2}^c$  от шарнира;  $l_{ij}$  – длина  $j$ -го звена  $i$ -й ноги.

Вводя функцию  $L = T + U = T - \Pi$ , запишем уравнения Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, 6, 3n}, \quad (20.2)$$

где  $q_i$  – обобщенные координаты:  $q_1 = \xi$ ,  $q_2 = \eta$ ,  $q_3 = \zeta$ ,  $q_4 = \psi$ ,  $q_5 = \theta$ ,  $q_6 = \gamma$ ,  $q_k = \alpha_{ij}$ ,  $k = \overline{7, 3n}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = 1, 2$ .

Уравнения (20.2) содержат  $6 + 3n$  уравнений относительно  $6 + 3(n + k)$  неизвестных, среди которых  $6 + 3n$  вторых производных от обобщенных координат и  $3k$  координат опорных реакций, когда число ног, контактирующих в данный момент с поверхностью, равно  $k$ .

В местах контакта могут быть сформулированы  $3k$  условия неподвижности точки опоры в опорной фазе в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 + \ddot{\mathbf{r}}_{lm}^f = 0, \quad m = \overline{1, k}, \quad (20.3)$$

где  $\ddot{\mathbf{r}}_{lm}^f$  – вектор, соединяющий точку 0 с  $i_m$  – точкой контакта.

Системы уравнений (20.2), (20.3) образуют полную систему уравнений относительно всех неизвестных.

Вместо условий (20.3) можно сформулировать условия сохранения импульса и момента импульса при постановке конечности на поверхность (связь).

Обобщенные силы  $Q_i$ , входящие в (20.2), связаны с силами и моментами сил реакций в точках опоры.

Обозначим  $N$  – главный вектор,  $M$  – главный момент сил реакции в точках опоры:

$$N = \sum_{i=1}^k N_i, \quad M = \sum_{i=1}^k \bar{r}_i^f N_i.$$

Используя выражения для элементарных работ сил и моментов  $N$  и  $M$ , полученные в теоретической механике, обычным образом находим выражения для обобщенных непотенциальных сил. Для корпуса получим

$$Q_\xi = N_\xi, \quad Q_\eta = N_\eta, \quad Q_\rho = N_\rho, \quad Q_\psi = M_\xi, \quad Q_\gamma = M_x,$$

$$Q_0 = M_\eta \cos \psi - M_\xi \sin \psi.$$

Для опорных конечностей находим

$$Q_{i1}^\alpha = M_{i1} + \left( N_x^i \cos \alpha_{i1} - N_y^i \sin \alpha_{i1} \right) L_i^{SS};$$

$$Q_{i2}^\alpha = M_{i2} + \left( N_x^i \sin \alpha_{i1} - N_y^i \cos \alpha_{i1} \right) L_i^{CC} + N_z^i L_i^{SS};$$

$$Q_{i3}^\alpha = M_{i3} + \left( N_x^i \sin \alpha_{i1} - N_y^i \cos \alpha_{i1} \right) L_i^C + N_z^i L_i^S.$$

Для переносимых конечностей получим

$$Q_{i1}^\alpha = M_{i1}, \quad Q_{i2}^\alpha = M_{i2}, \quad Q_{i3}^\alpha = M_{i3},$$

$$L_i^{SS} = l_{i1} \sin \alpha_{i2} + l_{i2} \cos \varphi_i, \quad L_i^S = l_{i2} \sin \varphi_i,$$

$$L_i^{CC} = l_{i1} \cos \alpha_{i2} + l_{i2} \cos \varphi_i, \quad L_i^C = l_{i2} \cos \varphi_i.$$

Рассмотрим более детально структуру уравнений (20.2), описывающих динамику робота.

Первые три уравнения описывают поступательное перемещение центра масс корпуса. Уравнения (20.1), (20.2), (20.3) описывают вращательные движения корпуса в кёнинговой системе координат.

Остальные уравнения системы (20.2) распадаются на  $n$  независимых друг от друга групп, для каждой из которых уравнения (20.2) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_{ij}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_{ij}} = Q_{ij}^{\alpha}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (20.4)$$

Левые части содержат вторые производные от обобщенных координат корпуса и  $i$ -й ноги, а правые содержат задаваемые управляющие моменты, а для опорных конечностей – еще и реакций опоры.

Рассмотрим связь между ускорениями корпуса робота и обобщенными ускорениями опорной ноги. Используя условия (20.3) неподвижности опорной точки относительно поверхности, запишем его в виде

$$\boldsymbol{\omega}_i^f \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i^f + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^f) + 2\boldsymbol{\omega} * \mathbf{V}_i^f = 0, \quad (20.5)$$

где  $\mathbf{V}_i^f$  – скорость опорной точки относительно корпуса.

Проецируя (20.5) на оси координат, получим три линейных уравнения относительно обобщенных ускорений опорных ног. Угловые ускорения  $\ddot{\alpha}_{im}$  могут быть найдены из полученной системы в виде

$$\begin{pmatrix} \ddot{\alpha}_{11} \\ \ddot{\alpha}_{12} \\ \ddot{\alpha}_{13} \end{pmatrix} = C^i \mathbf{q} + \begin{pmatrix} c_i^{17} \\ c_i^{27} \\ c_i^{37} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_6), \quad (20.6)$$

где компоненты матрицы  $C^i = \{c_{jk}^i\}$  и столбца свободных членов находятся по формулам

$$c_{1k}^i = (u_{xk}^i \cos \alpha_{i1} - u_{yk}^i \sin \alpha_{i1}) / L_i^{ss};$$

$$c_{2k}^i = ( ) \left( u_{xk}^i \sin \alpha_{i1} - u_{yk}^i \cos \alpha_{i1} \right) L_i^s - u_{zk}^i L_i^c / L_i;$$

$$c_{3k}^i = \left( - \left( u_{xk}^i \sin \alpha_{i1} - u_{yk}^i \cos \alpha_{i1} \right) L_i^{ss} + u_{zk}^i L_i^{cc} \right) / L_i, \quad k = \overline{1, 7},$$

где  $L_i = l_{i1}$ ,  $l_{i2} \sin \alpha_{i3}$ ,  $u_{xk}^i$ ,  $u_{yk}^i$ ,  $u_{zk}^i$ ,  $k = \overline{1, 6}$  – коэффициенты при ускорениях обобщенных координат корпуса в уравнениях (20.5), спроецированных на оси координат  $Oxyz$ ;

$u_{x7}^i$ ,  $u_{y7}^i$ ,  $u_{z7}^i$  – члены, не зависящие от ускорений.

Соотношения (20.6) связывают опорные реакции и ускорения корпуса. Подставляя  $\ddot{\alpha}_{i1}$ ,  $\ddot{\alpha}_{i2}$ ,  $\ddot{\alpha}_{i3}$  из (20.6) в соответствующую группу уравнений (20.4), получим линейные уравнения, выражающие обобщенные силы через ускорения корпуса и реакцию в  $i$ -й стопе:

$$\begin{pmatrix} Q_{j1}^\alpha \\ Q_{j2}^\alpha \\ Q_{j3}^\alpha \end{pmatrix} = D^j \mathbf{q} + \begin{pmatrix} d_1^j \\ d_2^j \\ d_3^j \end{pmatrix}, \quad (20.7)$$

где элементы матрицы  $D^j = \{d_{mk}^j\}$  порядка  $3 \times 6$  зависят только от фазовых координат робота. Разрешая уравнения (20.7) относительно опорных реакций, получим

$$\begin{pmatrix} N_x^j \\ N_y^j \\ N_z^j \end{pmatrix} = K^j \mathbf{q} + \begin{pmatrix} k_{17}^j \\ k_{27}^j \\ k_{37}^j \end{pmatrix}, \quad (20.8)$$

где элементы матрицы  $k^l = \{k_{jp}^l\}$  и столбец свободных членов  $k_{17}^l$ ,  $k_{27}^l$ ,  $k_{37}^l$  выражаются через компоненты матрицы  $D$ :





$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (20.11)$$

Для вычисления проекций  $\omega_{ij}$  на главные центральные оси инерции соответствующего звена введем матрицы перехода  $D_{ij}$  от системы  $Oxuz$  к осям  $e_{ij}^1, e_{ij}^2, e_{ij}^3$ , см. рис. 20.3:

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{i1} & \sin \alpha_{i1} & 0 \\ -\sin \delta_{ij} \sin \alpha_{i1} & \sin \delta_{ij} \sin \alpha_{i1} & -\cos \delta_{ij} \\ -\cos \delta_{ij} \sin \alpha_{i1} & \cos \delta_{ij} \cos \alpha_{i1} & \sin \delta_{ij} \end{pmatrix}; \quad (20.12)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \alpha_{i2}, & \text{если } j = 1; \\ \varphi_i = \alpha_{i2} + \alpha_{i3} - \pi, & \text{если } j = 2. \end{cases}$$

Координаты вектора  $\omega_{ij}$  в осях  $e_{ij}^1, e_{ij}^2, e_{ij}^3$  даются выражением

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{ij}^1 \\ \tilde{\omega}_{ij}^2 \\ \tilde{\omega}_{ij}^3 \end{pmatrix} = D_{ij} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\delta}_{ij} \\ -\dot{\alpha}_{i1} \cos \delta_{ij} \\ \dot{\alpha}_{i1} \sin \delta_{ij} \end{pmatrix}, \quad (20.13)$$

где точка над буквой означает дифференцирование по времени.

Проекции  $(\omega_{ij}^1, \omega_{ij}^2, \omega_{ij}^3)$  находим по формуле

$$\begin{pmatrix} \omega_{ij}^1 \\ \omega_{ij}^2 \\ \omega_{ij}^3 \end{pmatrix} = \Omega^{ij} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{ij}^1 \\ \tilde{\omega}_{ij}^2 \\ \tilde{\omega}_{ij}^3 \end{pmatrix}. \quad (20.14)$$

Для вычисления скорости  $\mathbf{v}_{ij}$  воспользуемся равенством

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{v}_{от}^{ij},$$

в котором  $\mathbf{v}_0$  – скорость точки 0;

$\mathbf{r}_{ij}$  – вектор, соединяющий точку 0 с центром масс  $j$ -го звена  $i$ -й ноги.

Проекции  $\mathbf{r}_{ij}$  на оси  $Oxyz$  определяются соотношениями

$$r_{i1}^x = r_{ix}^p + l_{i1}^c \sin \alpha_{i2} \sin \alpha_{i1} \quad r_{i2}^x = r_{ix}^p + \\ + \left( l_{i1} \sin \alpha_{i2} + l_{i2}^c \sin \varphi_i \right) \sin \alpha_{i1};$$

$$r_{i1}^y = r_{iy}^p + l_{i1}^c \sin \alpha_{i2} \cos \alpha_{i1}, \quad r_{i2}^y = r_{iy}^p + \quad (20.15) \\ + \left( l_{i1} \sin \alpha_{i2} + l_{i2}^c \sin \varphi_i \right) \cos \alpha_{i1};$$

$$r_{i1}^z = r_{iz}^p + l_{i1}^c \cos \alpha_{i2}, \quad r_{i2}^z = r_{iz}^p - l_{i1} \cos \alpha_{i2} - l_{i2}^c \cos \varphi_i.$$

Координаты вектора  $\mathbf{v}_{от}^{ij}$  в осях  $Oxyz$  получаются дифференцированием формул (20.15).

Чтобы найти проекции вектора  $\mathbf{v}_0$  на оси  $Oxyz$ , воспользуемся матрицей перехода  $\tilde{A} = \{a_{ij}\}$  от осей  $O\xi\eta\zeta$ :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \sin \psi & -\sin \vartheta \\ -\sin \psi \cos \gamma + \sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma & \cos \psi \cos \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma & \cos \vartheta \sin \gamma \\ \sin \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma & -\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma & \cos \vartheta \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (20.16)$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_0 \\ \dot{\eta}_0 \\ \dot{\zeta}_0 \end{pmatrix}. \quad (20.17)$$

Скорость центра масс корпуса  $v$  выражается формулой, аналогичной (20.14):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}. \quad (20.18)$$

Соотношения (20.10)–(20.18), будучи подставлены в (20.7), дадут выражения для коэффициентов кинетической энергии аппарата через обобщенные координаты.

Уравнения (20.2) нелинейные и в общем случае аналитически не решаются, поэтому целесообразно вкратце рассмотреть численное определение закона движения для рассмотренной модели робота:

$$B\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}, \quad (20.19)$$

где коэффициенты матрицы  $B = \{b_{kl}\}$  и векторов  $\mathbf{b} = (b_{17}, \dots, b_{67})$ ,  $\bar{q}$  определяются из (20.2).

Систему (20.19) можно разрешить, выразив ускорения корпуса через фазовые координаты и управления в шарнирах ног.

Опишем процедуру численного определения закона движения модели шагающего аппарата. Сначала по конечным формулам вычисляются все коэффициенты, зависящие от фазовых координат и управлений, необходимые для подсчета элементов матриц  $B$  и вектора  $\mathbf{b}$ . После этого рассчитываются ускорения корпуса.

Вычисленная реакция может оказаться направленной внутрь несущей поверхности. Тогда соответствующая нога считается неопорной, и для нее производится пересчет коэффициентов матрицы  $C^l$  и  $c_{17}, c_{27}, c_{37}$ , после чего корректируются матрица  $B$  и вектор  $\mathbf{b}$ .

При пересчете  $B$  и  $\mathbf{b}$  целесообразно воспользоваться аддитивностью членов, зависящих от номера ноги. Вычитаются лишь слагаемые, имеющие отношение к ноге, оказавшейся неопорной, и добавляются новые, полученные в предположении, что эта нога свободна. Такой прием способствует увеличению скорости счета задачи.

Описанная ситуация, как правило, возникает в тех случаях, когда алгоритм управления вырабатывает шарнирные моменты, необходимые для отделения ноги от поверхности. После подсчета ускорений всех обобщенных координат проводится численное интегрирование уравнений движения.

Для определения момента времени соприкосновения ноги с поверхностью происходит вычисление на каждом шаге интегрирования координат стоп неопорных ног и осуществляется проверка условия пересечения их траекторий с поверхностью. Нога считается опорной, если в некоторый момент времени координаты ее стопы удовлетворяют уравнению поверхности. Скорость стопы этой ноги в момент соприкосновения скачком падает до нуля.

Математически условие касания стопы ноги с поверхностью означает появление новой связи. При этом скачком меняются обобщенные скорости не только опускаемой ноги, но также корпуса и всех остальных ног. Обозначим через  $V_i^f$  скорость  $i$ -й стопы непосредственно перед ударом. Пусть число опустившихся на поверхность ног равно  $k_1$ ,  $k$  – число опорных ног до удара. Приращенные скорости удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\sum_{s=1}^6 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_s} \Delta \dot{q}_s + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{\alpha}_{ij}} \Delta \dot{\alpha}_{ij} = \Delta Q_1; \quad (20.20)$$

$$\sum_{s=1}^6 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\alpha}_{ij} \partial \dot{q}_s} \Delta \dot{q}_s + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\alpha}_{ij} \partial \dot{\alpha}_{is}} \Delta \dot{\alpha}_{is} = \Delta Q_{ij}^\alpha,$$

где  $\Delta \dot{q}_s$ ,  $\Delta \dot{\alpha}_{ij}$  – приращения обобщенных скоростей корпуса и ног.

Величины  $\Delta Q_1$  и  $\Delta Q_{ij}$  выражаются через ударные импульсы реакций  $p^l$  в опорных точках:

$$\Delta Q_{11} = \left( P_x^l \cos \alpha_{l1} - P_y^l \sin \alpha_{l1} \right) L_l^{ss};$$

$$\Delta Q_{12} = \left( P_x^l \sin \alpha_{l1} - P_y^l \cos \alpha_{l1} \right) L_l^{cc} + P_z^l L_l^{ss};$$

$$\Delta Q_{13} = \left( P_x^l \sin \alpha_{l1} - P_y^l \cos \alpha_{l1} \right) L_l^c + P_z^l L_l^s.$$

После подсчета элементов матрицы  $B$  и вектора  $b$  определяют приращения обобщенных скоростей корпуса, находятся прира-

шения обобщенных скоростей ног и ударные импульсы реакций. Если ударный импульс направлен внутрь несущей поверхности, то соответствующая нога считается неопорной, пересчитываются элементы матрицы  $C^i$  и  $c_{17}^i, c_{27}^i, c_{37}^i$  и вносятся поправки в компоненты матрицы  $B$  и вектора  $b$ .

Из приведенных формул и рассуждений следует, что удар можно рассчитывать фактически по тем же самым формулам, что и безударное движение. Это упрощает задачу программирования модели и экономит время вычислений.

Таким образом, задача передвижения аппарата по поверхности при заданных управляющих шарнирных моментах сводится к интегрированию дифференциальных уравнений (20.2) с учетом (20.3) и пересчету обобщенных скоростей аппарата в отдельные моменты времени в соответствии с (20.20).

Рассмотрим случаи вырождения. Они возникают, когда для какого-нибудь номера  $i$  обращаются в нуль знаменатели  $L_i, L_i^{SS}$  соответствующих выражений. Предположим, что  $L_i^{SS} = 0$ . Тогда точка подвеса ноги и точка опоры расположены на прямой, параллельной оси  $P_z$  шарнира в точке подвеса. При этом относительное ускорение стопы никак не влияет на величину  $\ddot{\alpha}_{i1}$ , а реакция опоры не создает момента относительно  $P_z$ . Вторую производную  $\ddot{\alpha}_{i1}$  следует определять из соответствующего для этой координаты динамического уравнения Лагранжа, куда не войдут неизвестные компоненты реакций.

При фиксированных значениях  $Q_{ij}^\alpha$  и  $L_i^{SS} = 0$  реакции  $N_x^i$  и  $N_y^i$  определяются неоднозначно и позволяют найти лишь сумму

$$N_\tau^i = N_x^i \cos \alpha_{i1} - N_y^i \sin \alpha_{i1}.$$

Проекция на перпендикуляр к плоскости ноги не влияет на движение в данном случае, так как полностью компенсируется реакцией шарнира даже при отсутствии управляющих моментов. Относительное перемещение стопы в направлении, перпендикулярном плоскости ноги, оказывается невозможным, что, по существу, представляет собой наложение дополнительной связи на систему.

Обратимся к случаю вырождения, соответствующему  $L_i = 0$ . Он имеет место лишь, когда  $\sin \alpha_{i3} = 0$ , т. е.  $\alpha_{i3} = 0$  или  $\alpha_{i3} = \pi$ . Другими словами, нога либо полностью согнута, либо полностью выпрямлена в колене. Тогда по относительному ускорению стопы величины  $\ddot{\alpha}_{i2}$  и  $\ddot{\alpha}_{i3}$  однозначно не определяются, и лишь в виде линейной комбинации

$$L_i^{cc} \ddot{\alpha}_{i2} + L_i^c \ddot{\alpha}_{i3}.$$

Аналогично и для реакций  $N_p$  и  $N_z$  можно найти линейную комбинацию

$$L_i^{cc} N_p^i + N_z^i L_i^{ss},$$

представляющую собой проекцию на плоскость, перпендикулярную плоскости ноги, момента силы реакции относительно точки подвеса.

Кинематический смысл рассматриваемого выражения состоит в том, что когда звенья ног принадлежат одной прямой, всякое относительное возможное перемещение стопы получается с помощью задания всего двух вариаций:  $\delta\alpha_{i1}$  и  $\delta\alpha_{i2}$  или  $\delta\alpha_{i3}$ . Вместе с тем момент любой силы реакции относительно точки подвеса оказывается пропорциональным моменту этой же силы относительно коленного шарнира. Поэтому управляющие шарнирные моменты  $M_{i2}^\alpha$  и  $M_{i3}^\alpha$  уже не могут быть независимыми, а должны соответствовать характеру отмеченной пропорциональности.

При численном моделировании процесса движения на компьютере следует избегать конфигураций аппарата, в которых существует опасность появления нулевых знаменателей. Как видно из проведенного анализа, для этого достаточно, чтобы никакая стопа не оказывалась на оси  $P_z$  шарнира подвеса соответствующей ноги и чтобы никакая нога не могла быть полностью выпрямлена или согнута в колене.

## 20.2. Некоторые приближенные модели динамики шагающих мини-роботов

Полученные уравнения динамики шагающего робота сложны не только для аналитических, но и численных исследований, поэтому представляют интерес различные приближения, позволяющие упростить решение задачи.

В теоретической механике теория возмущений излагается в гамильтоновой форме, согласно которой функция Гамильтона  $H$  связана с функцией Лагранжа преобразованием Лежандра по переменным  $\dot{q}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ):

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_j, \dot{q}_j, t); \quad (20.21)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Каноническая форма уравнений движения имеет вид

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (20.22)$$

В случае если силы, действующие в системе, потенциальные:

$$H = T + \Pi,$$

т. е. для натуральной склерономной системы с обычным потенциалом сил  $H$  полная механическая энергия сохраняется.

Если существует функция  $V(t, q_i, \dot{q}_i)$  такая, что

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i},$$



то  $V$  называется обобщенным потенциалом и зависит линейно от обобщенных скоростей

$$V = V_1 + V_0, \quad V_1 = \sum_{i=1}^n A_i \dot{q}_i,$$

где  $V_0, A_i$  – функции обобщенных координат и времени.

Если система склерономная,  $V_0$  не зависит от времени и  $\partial A_i / \partial t = 0$ , тогда  $T + V_0 = H_0$  остается постоянной, однако  $T + V = H \neq \text{const}$ .

Имеет место представление

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1 - V_1, \quad L_0 = T_0 - V_0.$$

Согласно классической теории возмущения в теоретической механике представим  $H$  в виде

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \dots, \quad (20.23)$$

где  $\varepsilon$  – безразмерный параметр, причем считается, что при  $\varepsilon = 0$  решение системы (20.22) может быть найдено.

Канонические сопряженные переменные  $q_i, p_i$  выбираются так, что  $H_0$  зависит только от импульсов  $p_i$ :

$$H_0 = H_0(p_1, \dots, p_n).$$

Переменные  $q_i, p_i$  в этом случае называют **переменные действия–угол**. Невозмущенная система (20.22) записывается в виде

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} = \omega_i(p_1, \dots, p_n), \quad \frac{dp_i}{dt} = 0. \quad (20.24)$$

Система (20.24) может быть проинтегрирована

$$p_i = p_{i0} = \text{const}, \quad q_i = \omega_i(p_{10}, \dots, p_{n0})t + q_{i0}.$$

Если  $\varepsilon$  мало и в (20.23) система считается обобщенно консервативной, тогда

$$H = H_0(p_i) + \varepsilon H_1(q_i, p_i) + \dots,$$

а для исследования динамики системы при малых  $\varepsilon$  применяется аппарат, основанный на методе канонических преобразований.

Пусть, например, мини-робот имеет экзоскелетную конструкцию (типа жука) так, что основную массу составляет корпус, а масса каждой из ног и всех вместе значительно меньше массы корпуса. Если к тому же скорости движения ног относительно невелики, то импульсы и моменты импульсов конечностей также малы.

Пусть решение невозмущенной системы

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (20.25)$$

найдено при помощи уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{dS}{dt} + H_0\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0, \quad (20.26)$$

где  $S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$  – полный интеграл уравнения (20.26).

Сделаем в уравнениях (20.25) каноническую замену переменных по формулам

$$\frac{dS}{dt} = p_i, \quad \frac{dS}{d\alpha_i} = -\beta_i \quad (i = \overline{1, n}),$$

и, принимая полный интеграл  $S$  за производящую функцию

$$\frac{dS}{dq_i} = p_i, \quad \frac{dS}{d\alpha_i} = -\beta_i \quad (i = \overline{1, n}), \quad (20.27)$$

перейдем к переменным  $\alpha_i, \beta_i$ , где роль новых координат играют величины  $\alpha_i$ , а новых импульсов –  $\beta_i$ . Тогда функция Гамильтона  $\mathcal{K}(\alpha_i, \beta_i, t)$  в новых переменных имеет вид

$$\mathcal{K} = H_0 + H_1 + \frac{\partial S}{\partial t},$$

а уравнения для  $\alpha_i, \beta_i$  имеют вид

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial H_1^*}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial H_1^*}{\partial \alpha_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (20.28)$$

где  $H_1^*$  – это функция  $H_1$ , в которой сделана замена переменных.

Алгоритм решения задачи:

1) из решения уравнения (20.27) находятся функции

$$q_i = q_i(\alpha_j, \beta_j, t), \quad p_i = p_i(\alpha_j, \beta_j, t), \quad i, j = \overline{1, n}; \quad (20.29)$$

2) находятся решения уравнений (20.28);

3) найденные  $\alpha_i, \beta_i$  подставляются в (20.29).

Рассмотрим еще один подход к упрощению уравнений динамики шагающего мини-робота.

Количество движения всего робота представим в виде

$$\mathbf{Q}_r = m(\mathbf{V}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{V}_i = \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_o; \quad (20.30)$$

$$\mathbf{Q}_3 = m_r \mathbf{V}_o + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n);$$

$$\mathbf{Q}_o = \sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^c + \mathbf{V}_i^{\text{от}}), \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^p + \mathbf{r}_i^c;$$

$$m_3 = m_{\text{от}} + \sum m_i, \quad \mathbf{r}_3 = \frac{m\boldsymbol{\rho} + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i^p}{m_r},$$

где  $\mathbf{r}_i^P$  – радиус-вектор, соединяющий начало координат 0 с точкой крепления  $i$ -й ноги;

$\mathbf{r}_i^c$  – радиус-вектор от точки крепления  $i$ -й ноги до центра масс  $i$ -й ноги.

Механический смысл выражения (20.30) состоит в том, что импульс  $\mathbf{Q}_k$  не зависит от перемещений звеньев ног относительно корпуса и совпадает с количеством движения твердого тела (эффективного корпуса), центр масс которого расположен в точке корпуса с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_3$ . Эта точка называется приведенным (эффективным) центром масс робота.

Аналогичным образом кинетический момент робота (момент импульса) можно представить в виде

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{K}_{\text{эф}} + \mathbf{K}_H + \mathbf{K}_I; \quad (20.31)$$

$$\mathbf{K}_3 = I\boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_n) \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_n)) + \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i^P - \mathbf{r}_H) \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i^P - \mathbf{r}_n));$$

$$\mathbf{K}_H = -m\boldsymbol{\rho}_n * \mathbf{V}_c + \sum_{i=1}^n m_i \left( (\mathbf{r}_i^P - \mathbf{r}_3) \times \mathbf{V}_i^H + (\mathbf{r}_i^c - \boldsymbol{\rho}_H) \times \mathbf{V}_i \right), \quad \mathbf{K}_I = I_i\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}_i^{\text{от}},$$

где  $\mathbf{K}_3$  – кинетический момент абсолютно твердого эффективного тела, состоящего из корпуса и скрепленных с ним в точках крепления точечных масс, равных массам ног. Центр масс эффективного тела совпадает с приведенным (эффективным) центром масс.

Считая, что

$$\mathbf{Q}_r = \mathbf{Q}^{(o)} + \varepsilon \mathbf{Q}^{(1)},$$

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{K}^{(o)} + \varepsilon \mathbf{K}^{(1)}.$$

В уравнениях (20.30), (20.31) выделяются две аддитивные части так, что  $\mathbf{Q}^{(o)}$ ,  $\mathbf{K}^{(o)}$  не учитывают перемещения ног (медленные движения), тогда для  $\mathbf{Q}^{(o)} = \mathbf{Q}_3$ ,  $\mathbf{K}^{(o)} = \mathbf{K}_3$  получаются уравнения

$$\mathbf{Q}_3 = \mathbf{F} + \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i, \quad \mathbf{Q}_3 \approx m_3 (\mathbf{V}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_3),$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{M}_3 + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i^f - \mathbf{r}_3) \times \mathbf{N}_i, \quad \mathbf{K}_3 \approx I_3 \boldsymbol{\omega},$$

где  $I_3$  – тензор инерции корпуса с закрепленными на нем точечными массами в точках крепления ног и имеющих их массу.

Таким образом, в первом приближении модели динамики робота динамика переносимых ног никак не влияет на его динамику. Конечности, контактирующие с поверхностью, создают реакции  $\mathbf{N}_i$ .

Учет возмущающих движений, обусловленных членами  $\mathbf{Q}^{(1)}$ ,  $\mathbf{K}^{(1)}$  зависит от отношения суммарной массы ног к массе робота, отношения расстояния от центра масс ног до точек их крепления к расстоянию от конца ноги оси, параллельной  $Oz$  и проходящей через общий центр масс, от отношения максимального ускорения конца ноги к ускорению силы тяжести. Если величины суммарной возмущающей силы и суммарного возмущающего момента – не более 10–15 % от суммы реакций опоры и суммы модулей их моментов относительно центра масс робота, то силами инерции звеньев конечностей можно пренебречь.

Использование упрощенной модели в динамике робота позволяет упростить алгоритмы управления, идентификации, стабилизации и тем самым повысить скорость обработки информации, выработки управляющих команд, но снижает точность позиционирования корпуса и конечностей.

Учебное издание

**ЧИГАРЕВ** Анатолий Власович

**МЕХАТРОНИКА  
И ДИНАМИКА МИНИ-РОБОТОВ**

Пособие для студентов специальности 1-55 01 03  
«Компьютерная мехатроника»

Редактор *Т. Н. Микулик*

Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой, Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 18.12.2017. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 29,06. Уч.-изд. л. 22,72. Тираж 100. Заказ 936.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.