

СЛОЖНЫЙ ИЗГИБ ГИБРИДНЫХ ДЕРЕВЯННЫХ БРУСЬЕВ**Немировский Ю.В., Болтаев А.И.***Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН*

Введение. Древесина широко используется в строительстве [1-3]. Этому способствуют такие её качества как [1]: низкий удельный вес - при средней плотности 550 кг/м^3 она в 14 раз легче стали и в 4,5 раза легче бетона; высокая удельная прочность - $25500 \text{ м}^2/\text{с}^2$ для древесины, $29500 \text{ м}^2/\text{с}^2$ для строительной стали и $5800 \text{ м}^2/\text{с}^2$ для бетона класса В25. Она также обладает малой теплопроводностью, высокой химической стойкостью и высокой технологичностью. И что немаловажно - является самовозобновляемым и экологически чистым материалом.

Основные недостатки древесины - пороки, неоднородность и анизотропность физико-механических свойств, пожароопасность, коробление, усушка и др. [1,3] могут быть в значительной степени устранены путём различных технологических и конструктивных приёмов, используемых при производстве современных деревянных конструкций. Кроме этого, современные технологии позволяют создавать клееные деревянные конструкции различных форм поперечных сечений и пролётов, что значительно расширяет их область применения.

Примерами эффективного использования древесины в строительстве могут служить: радиобашня в Польше высотой 118 м (1935 г.), деревобетонный мост в Австрии [4] пролётом 85 м (1993 г.), жилое здание в Канаде [5] высотой 53 м (2017 г.) и др.

Весьма эффективными оказываются комбинированные гибридные конструкции, сочетающие в своей структуре такие разнообразные материалы, как дерево, пластики, бетоны и металлы [6,7].

Следует отметить, что существующие нормативные методы расчёта деревянных конструкций [8,9] обладают рядом недостатков:

- не учитывают реальные диаграммы деформирования древесины;
- не позволяют проектировать неоднородные (состоящие из разных пород) конструкции, так как основаны на экспериментальных данных, полученных для однородных конструкций;
- накладывают ограничения на возможные формы поперечных сечений (прямоугольное, круглое, двутавровое и т.п.).

Стандартные методы расчёта физически нелинейных стержневых конструкций [10-15] рассматривают в основном однородные конструкции и не уделяют должного внимания особенностям работы древесины.

Следовательно, необходимо создание методики расчёта деревянных конструкций, учитывающей реальные диаграммы деформирования древесины и позволяющей рассчитывать и проектировать эффективные неоднородные конструкции.

1. Диаграммы деформирования древесины. Здесь и далее будем говорить о диаграммах, полученных при кратковременных испытаниях малых чистых образцов древесины на растяжение-сжатие вдоль волокон [16-18].

Для использования диаграмм деформирования в расчётах необходимо получить их аналитическую форму. Функция, описывающая диаграммы, должна удовлетворять двум основным критериям: достаточно точно описывать опытные данные и иметь, по возможности, простой вид. При этом оба условия являются взаимоисключающими - желание получить, как можно более точное совпадение с экспериментальными данными приводит к усложнению связи между напряжениями и деформациями.

Отметим, что не следует стремиться к идеальному совпадению экспериментальной диаграммы и аппроксимирующей её функции. Так как сами опытные диаграммы деформирования получаются путём осреднения целого набора диаграмм. При этом средние коэффициенты вариации механических свойств древесины: предел прочности, модуль упругости и др. лежат в пределах 13-20 % [19].

Для разработки теории расчёта физически нелинейных гибридных стержневых систем будем использовать два вида функций:

1. квадратная аппроксимация отдельно для растяжения и сжатия [20]

$$\sigma^{\pm}(\varepsilon) = E_1^{\pm}\varepsilon + E_2^{\pm}\varepsilon^2. \quad (1)$$

верхние знаки берутся при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^+$, нижние - при $\varepsilon_*^- \leq \varepsilon \leq 0$.

2. кубическая аппроксимация на всём диапазоне деформирования $\varepsilon_*^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^+$ [21]

$$\sigma(\varepsilon) = E_1\varepsilon + E_2\varepsilon^2 + E_3\varepsilon^3. \quad (2)$$

где $\varepsilon_*^+, \varepsilon_*^-$ - предельные значения продольных деформаций при растяжении и сжатии; E_i^{\pm}, E_j - коэффициенты аппроксимации диаграмм деформирования соответственно для квадратной и кубической функций.

Принятие в качестве аппроксимирующей функции степенных многочленов с одной стороны позволяет достаточно точно описать экспериментальные данные, с другой стороны данные функции имеют простой вид и являются одними из наиболее изученных в математике.

Связь между напряжениями и деформациями в форме (1) и (2) позволяет получать в пределе модели одномодульного и разномодульного линейно-упругого материала. Если в (1) принять $E_2^{\pm} = 0$, то приходим к модели разномодульного линейно-упругого материала. Далее, принимая $E_1^+ = E_1^- = E$, получим уравнение закона Гука. То же получим и в (2) при $E_2 = E_3 = 0$.

Для подтверждения возможности аппроксимации диаграмм деформирования функциями (1,2) используем экспериментальные данные для трёх пород древесины: сосны [16], ясеня [17] и ели [18]. И, на основе метода наименьших квадратов [22], вычислим коэффициенты аппроксимации E_i^{\pm}, E_j .

Оценку степени точности аппроксимации проводим с помощью коэффициента детерминации R^2 [22]:

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}}, \quad SS_{res} = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \hat{\sigma}_i)^2, \quad SS_{tot} = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \bar{\sigma}_i)^2, \quad \bar{\sigma}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i. \quad (3)$$

где σ_i - значения напряжений, взятые из опытных графиков; $\hat{\sigma}_i$ - значения напряжений, полученные непосредственно по формулам (1) или (2); n - количество точек взятых на экспериментальных диаграммах.

Результаты аппроксимации даны на рис.1-3, значения коэффициентов аппроксимации, а также коэффициентов детерминации приведены в табл. 1-2. На рис. 1-3 экспериментальные данные обозначены следующими значками: треугольниками для сосны, крестиками для ясеня и кружками для ели. Соответствующие им аппроксимирующие функции проведены сплошными линиями. В табл.1 коэффициенты детерминации отдельно приведены для диаграмм растяжения - R^{2+} и отдельно для диаграмм сжатия - R^{2-} . Величины σ_*^+, σ_*^- - максимальные нормальные напряжения при растяжении (+) и сжатии (-).

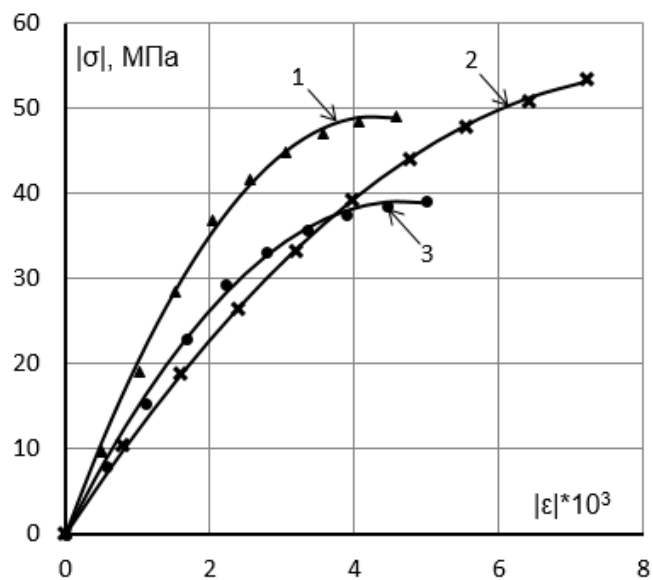


Рис. 1. Квадратная аппроксимация диаграмм сжатия древесины. 1 – сосна, 2 – ясень, 3 – ель. Способ 1

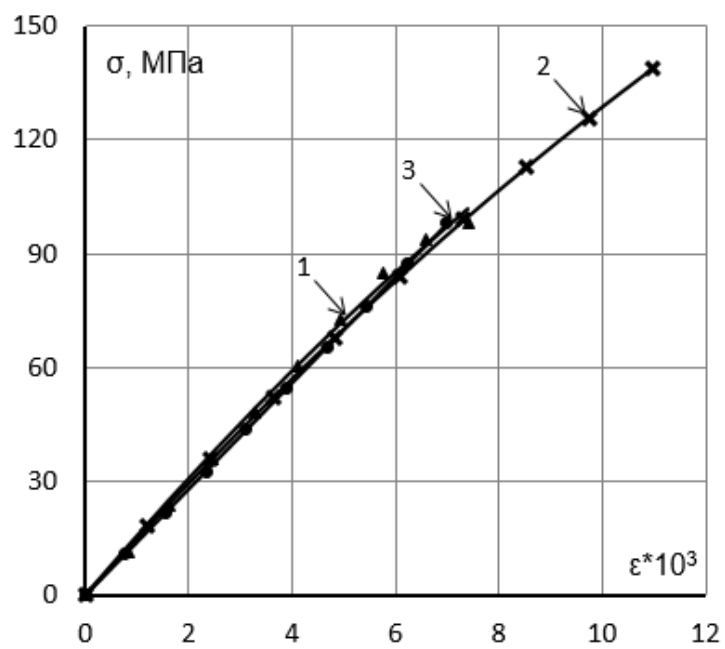


Рис. 2. Квадратная аппроксимация диаграмм растяжения древесины. 1 – сосна, 2 – ясень, 3 – ель. Способ 1

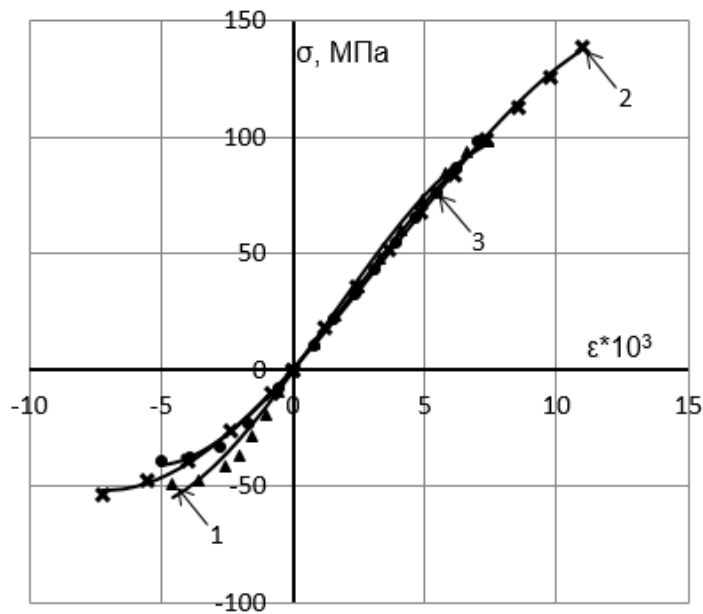


Рис. 3. Кубическая аппроксимация диаграмм деформирования древесины. 1 – сосна, 2 – ясень, 3 – ель. Способ 1

Анализ экспериментальных диаграмм деформирования показывает, что при растяжении древесина деформируется линейно практически до самого разрушения, а при сжатии уже в области средних напряжений начинает проявляться физическая нелинейность, которая возрастает по мере увеличения нагрузки. Для одной и той же породы древесины пределы прочности на растяжение и сжатие различаются до 2,6 раз, максимальные деформации - до 1,6 раз.

Таблица 1 – Характеристики диаграмм деформирования для квадратной аппроксимации. Способ 1

№	Характеристики Порода	E_1^+	E_1^-	E_2^+	E_2^-	ε_1^+	ε_1^-	σ_1^+	σ_1^-	R^{2+}	R^{2-}
		10^3 МПа	10^3 МПа	10^6 МПа	10^6 МПа	10^{-3}	10^{-3}	МПа	МПа		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Сосна	15,97	22,82	-0,303	2,65	7,4	-4,6	101,6	-48,9	0,9967	0,9975
2	Ясень	15,21	12,94	-0,233	0,773	11,0	-7,2	138,7	-53,2	0,9999	0,9998
3	Ель	14,01	16,74	0	1,789	7,0	-5,0	98,1	-39,0	0,9999	0,9980

Таблица 2 – Характеристики диаграмм деформирования для кубической аппроксимации. Способ 1

№	Характеристики	E_1	E_2	E_3	ϵ_+^*	ϵ_-^*	σ_+^*	σ_-^*	R^2
	Порода	10^3 МПа	10^6 МПа	10^9 МПа	10^{-3}	10^{-3}	МПа	МПа	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Сосна	15,55	0.373	-0,094	7,4	-4,6	97.6	-54.4	0.9951
2	Ясень	12.60	0.451	-0,042	11,0	-7,2	137.4	-51.8	0.9995
3	Ель	13.24	0.610	-0.078	7,0	-5,0	95.9	-41.2	0.9988

Из рис.1-3 видно, что функции (1) и (2) достаточно хорошо аппроксимируют экспериментальные диаграммы деформирования древесины. При этом квадратная аппроксимация немного точнее кубической. Коэффициент детерминации для квадратной аппроксимации изменяется от 0,9975 до 0,9999, для кубической - от 0,9951 до 0,9995, см. табл. 1-2.

При определении коэффициентов диаграмм деформирования E_i^\pm, E_j использовались экспериментальные графики. Однако число таких графиков сильно ограничено. В основном в литературе приводятся данные по модулю упругости при изгибе E_u и σ_*^\pm [23,24], реже можно найти модули упругости при растяжении E^+ и сжатии E^- [24]. Значения предельных деформаций ϵ_*^\pm практически отсутствуют.

Одно из важных свойств, которому по возможности должны удовлетворять диаграммы деформирования, заключается в том, чтобы их коэффициенты определялись через известные величины $\sigma_*^\pm, \epsilon_*^\pm$ и E^\pm . С одной стороны это позволит по известным данным получить большое количество диаграмм деформирования для различных пород. С другой стороны, что более важно, даст возможность учитывать влияние различных факторов (температуры, влажности, времени, скорости нагружения, изменчивости свойств и т.д.) на диаграммы деформирования через накопленную информацию о влиянии этих факторов на $\sigma_*^\pm, \epsilon_*^\pm$ и E^\pm [1,3,8,16,23,24].

В связи с этим на опытных диаграммах растяжения-сжатия сосны, ясеня и ели [16-18] были проанализированы различные варианты определения коэффициентов E_i^\pm, E_j через значения $\sigma_*^\pm, \epsilon_*^\pm, E^\pm$ - табл.3-4. В табл.3-4 коэффициенты детерминации приведены для трёх пород древесины. Первой строке соответствует сосна, второй - ясень, и третьей - ель. Значения E^\pm взяты из табл.1 - $E^\pm = E_1^\pm$.

Таблица 3 – Методы определения коэффициентов для квадратной аппроксимации

№	Определяющие уравнения	Коэффициенты диаграмм деформирования	R^{2+}	R^{2-}
1	2	3	4	5
1	$\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = E^\pm,$ $\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=\varepsilon_*^\pm} = 0.$	$E_1^\pm = E^\pm,$ $E_2^\pm = -\frac{E^\pm}{2\varepsilon_*^\pm}.$	0.6085	0.9880
			0.6355	0.9671
			0.4263	0.9869
2	$\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = E^\pm,$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$	$E_1^\pm = E^\pm,$ $E_2^\pm = \frac{\sigma_*^\pm - E^\pm \varepsilon_*^\pm}{\varepsilon_*^{\pm 2}}.$	0.9941	0.9974
			0.9999	0.9997
			1.0000	0.9979
3	$\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=\varepsilon_*^\pm} = 0,$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$	$E_1^\pm = 2\frac{\sigma_*^\pm}{\varepsilon_*^\pm},$ $E_2^\pm = -\frac{\sigma_*^\pm}{\varepsilon_*^{\pm 2}}.$	0.8487	0.9934
			0.8119	0.9787
			0.7055	0.9940
4	$\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = E^\pm,$ $\left. \frac{d\sigma^\pm}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=\varepsilon_*^\pm} = 0,$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$	$E_1^\pm = E^\pm,$ $E_2^\pm = -\frac{E^{\pm 2}}{4\sigma_*^\pm},$ $\varepsilon_*^\pm = 2\frac{\sigma_*^\pm}{E^\pm}.$	0.9190	0.9975
			0.9423	0.9996
			0.8566	0.9980

Таблица 4 – Методы определения коэффициентов для кубической аппроксимации

№	Определяющие уравнения	Коэффициенты диаграмм деформирования	R^2
1	2	3	4
1	$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = \min(E^+; E^-),$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$	$E_1 = \min(E^+; E^-),$ $E_2 = \frac{\sigma_*^+ - E_1 \varepsilon_*^+ - E_3 \varepsilon_*^{+3}}{\varepsilon_*^{+2}},$ $E_3 = \frac{E_1}{\varepsilon_*^+ \varepsilon_*^-} + \frac{\sigma_*^+}{\varepsilon_*^{+2} (\varepsilon_*^+ - \varepsilon_*^-)} - \frac{\sigma_*^-}{\varepsilon_*^{-2} (\varepsilon_*^+ - \varepsilon_*^-)}.$	0.9934
			0.9991
			0.9970

2	$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = \min(E^+; E^-),$ $\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=\varepsilon_*^\pm} = 0.$	$E_1 = \min(E^+; E^-),$ $E_2 = -E_1 \frac{\varepsilon_*^- + \varepsilon_*^+}{2\varepsilon_*^+ \varepsilon_*^-},$ $E_3 = \frac{E_1}{3\varepsilon_*^+ \varepsilon_*^-}.$	0.9897
			0.9749
			0.9713
3	$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = \min(E^+; E^-),$ $\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=\varepsilon_*^\pm} = 0,$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$	$E_1 = \min(E^+; E^-),$ $E_2 = \frac{3\sigma_*^+ - 2E_1\varepsilon_*^+}{\varepsilon_*^{+2}},$ $E_3 = \frac{E_1\varepsilon_*^+ - 2\sigma_*^+}{\varepsilon_*^{+3}}.$ <p>ε_*^\pm находим из решения системы:</p> $\sigma_*^- 3(k^2 - a) = 2E_1\varepsilon_*^- k(k-1)$ $E_1\varepsilon_*^- k(k^2 - 1) = 2\sigma_*^-(k^3 - a)$ <p>где $k = \frac{\varepsilon_*^+}{\varepsilon_*^-}$ $a = \frac{\sigma_*^+}{\sigma_*^-}$.</p>	0.9932
			0.9863
			0.9978
4	$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=\varepsilon_*^-} = 0,$ $\sigma(\varepsilon_*^\pm) = \sigma_*^\pm.$		0.9869
			0.9993
			0.9981

Будем считать аппроксимацию хорошо совпадающей с экспериментальными данными при $R^2(R^{2\pm}) \geq 0.990$. Исходя из этого, для квадратной аппроксимации наилучшим является вариант в строке 2 табл.3. Для кубической аппроксимации наилучший вариант расположен в строке 1 табл.4. Покажем графики деформирования для каждого из этих вариантов - рис.4-6. На рис.4-6 аппроксимирующие функции проведены сплошными линиями, а экспериментальные данные обозначены треугольниками для сосны, крестиками для ясеня и кружками для ели.

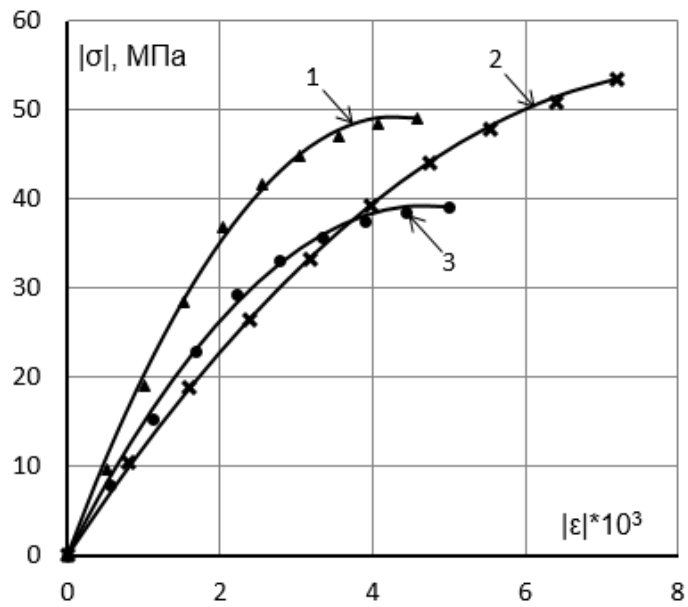


Рис. 4. Квадратная аппроксимация диаграмм сжатия древесины. 1 – сосна, 2 – ясень, 3 – ель.
Способ 2

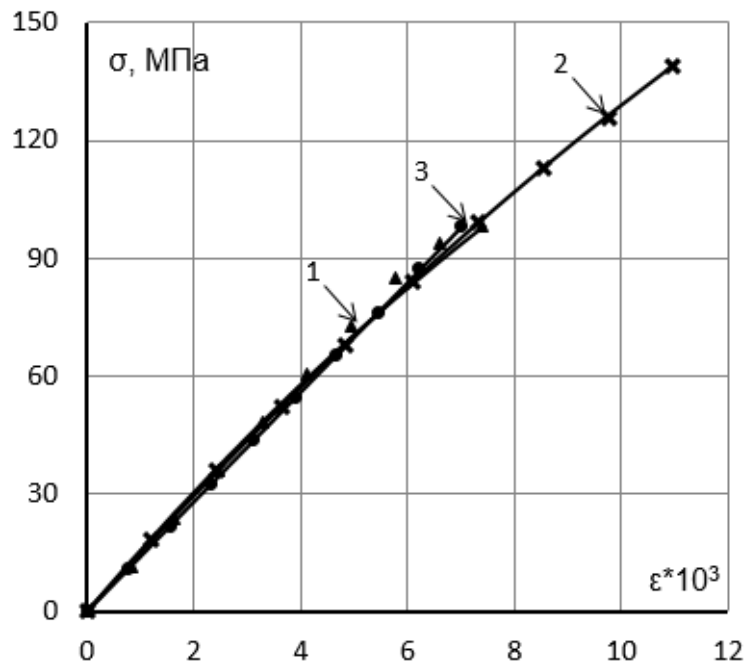


Рис. 5. Квадратная аппроксимация диаграмм растяжения древесины. 1 – сосна, 2 – ясень,
3 – ель. Способ 2

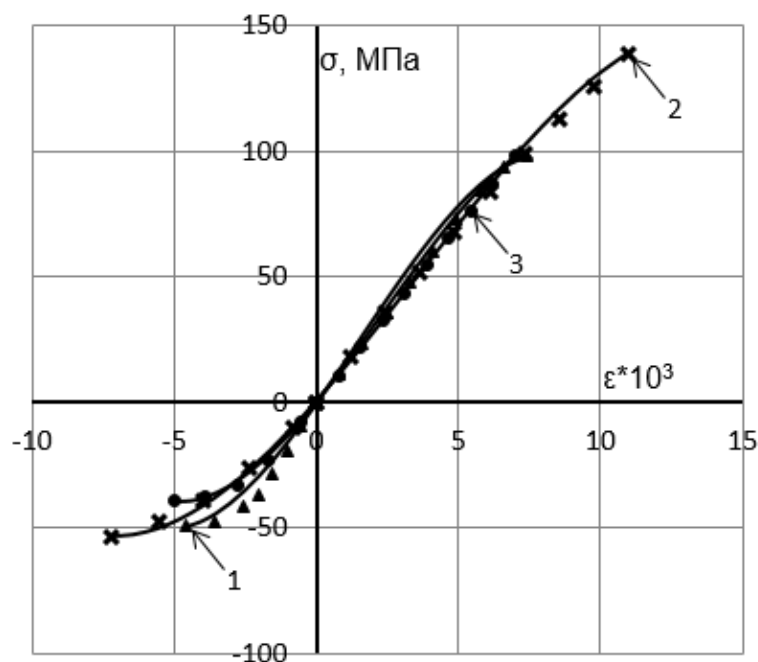


Рис. 6. Кубическая аппроксимация диаграмм деформирования древесины. 1 – сосна, 2 – ясень, 3 – ель. Способ 2

Данные рисунки свидетельствуют об успешной возможности аппроксимации диаграмм деформирования с использованием основных механических характеристик древесины - σ_*^\pm , ε_*^\pm и E^\pm .

Оба выбранных варианта аппроксимации требуют знания предельных продольных деформаций ε_*^\pm . Однако, их сложно найти в литературе. Поэтому можно предложить следующий способ определения ε_*^\pm : ε_*^+ находим с использованием закона Гука, так как при растяжении диаграмма деформирования практически линейна вплоть до разрушения; ε_*^- определяем из формул строки 4 табл.3, так как данный в ней метод определения E_i^- даёт хорошие совпадения с опытом. В итоге, при отсутствии опытных данных о ε_*^\pm , можно приближённо принять:

$$\varepsilon_*^+ = \frac{\sigma_*^+}{E^+}, \quad \varepsilon_*^- = 2 \frac{\sigma_*^-}{E^-}. \quad (4)$$

Вычислим ε_*^\pm по формулам (4) и сравним с предельными деформациями, взятыми из диаграмм деформирования сосны, ясеня и ели [16-18]. Максимальная разница для сосны составляет 17,0 %, для ясеня - 16,6 % и для ели - 6,2 %.

Используя формулы (4) и данные о σ_*^\pm , E^\pm из [24], вычислим коэффициенты аппроксимации для различных пород древесины - табл.5. Коэффициенты E_i^\pm определяем по формулам строки 2 табл.3, а E_j - по формулам строки 1 табл.4.

Таблица 5 – Характеристики диаграмм деформирования. Способ 2

№	Характеристики Порода	E_1^+	E_1^-	E_2^+	E_2^-	E_3	E_4	E_5	ϵ_1^+	ϵ_1^-	σ_1^+	σ_1^-
		10^3 МПа	10^3 МПа	10^6 МПа	10^6 МПа	10^3 МПа	10^6 МПа	10^9 МПа	10^{-3}	10^{-3}	МПа	МПа
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	Берёза даурская	18,4	16,1	0	1,325	16,1	0,922	-0,066	10,65	-6,07	196	-48,9
2	Граб кавказский	14,8	12,4	0	0,523	12,4	0,387	-0,011	8,18	11,85	121	-73,5
3	Дуб красный	14,2	14,2	0	0,818	14,2	0,395	-0,049	8,10	-8,68	115	-61,6
4	Ива ломкая	11,1	11,5	0	0,808	11,1	0,408	-0,048	8,42	-7,11	93,5	-40,9
5	Лиственница сибирская	14,7	14,2	0	0,804	14,2	0,418	-0,044	8,16	-8,83	120	-62,7
6	Ольха черная	12,1	13,0	0	0,969	12,1	0,467	-0,055	8,51	-6,71	103	-43,6
7	Осина	15,6	12,8	0	0,916	12,8	0,652	-0,038	8,53	-6,98	133	-44,7
8	Пихта кавказская	12,7	12,7	0	0,894	12,7	0,497	-0,056	8,90	-7,10	113	-45,1
9	Тополь сереющий	9,05	10,1	0	0,630	9,05	0,293	-0,026	11,38	-8,02	103	-40,5
10	Тополь черный	12,4	13,9	0	0,992	12,4	0,436	-0,049	8,95	-7,01	111	-48,7
11	Ясень маньчжурский	15,8	12,6	0	0,781	12,6	0,579	-0,025	9,24	-8,06	146	-50,8
12	Ясень обыкновенный	14,2	15,2	0	1,144	14,2	0,593	-0,060	9,86	-6,64	140	-50,5

Анализируя данные табл.5 можно выявить следующие особенности диаграмм деформирования древесины:

1. Модули упругости древесины при растяжении и сжатии отличаются максимум на 20,2 %, причём для половины пород эта разница лежит в пределах 7%.

2. Предельные деформации растяжения практически всегда больше предельных деформаций сжатия. Для берёзы даурской ε_*^+ больше ε_*^- в 1,75 раза, а для граба кавказского ε_*^- больше ε_*^+ в 1,45 раза.

3. Предел прочности на растяжение больше предела прочности на сжатие в среднем в 2,5 раза. Для берёзы даурской σ_*^+ больше σ_*^- в 4,0 раза, для граба кавказского σ_*^+ больше σ_*^- в 1,6 раза.

Из табл.5 видно, что модули упругости при растяжении и сжатии в основном не сильно отличаются друг от друга. В работе [8] показано, что можно с небольшой погрешностью принять $E^+ = E^- = E_u$. Тогда, используя данные из [23,24] с учётом (4) можно получить коэффициенты диаграмм деформирования для сотен различных пород древесины по вышеописанному алгоритму.

2. Напряженно-деформированное состояние бруса. Схема бруса в декартовой прямоугольной системе координат xuz представляет собой стержень, состоящий из нескольких слоёв. Слои могут быть выполнены из различных материалов и могут располагаться как горизонтально, так и вертикально (рис.7). Общее число слоёв принципиально не ограничено. Условия контакта слоёв считаются совершенными - отсутствуют взаимные смещения любого направления в плоскости контакта.

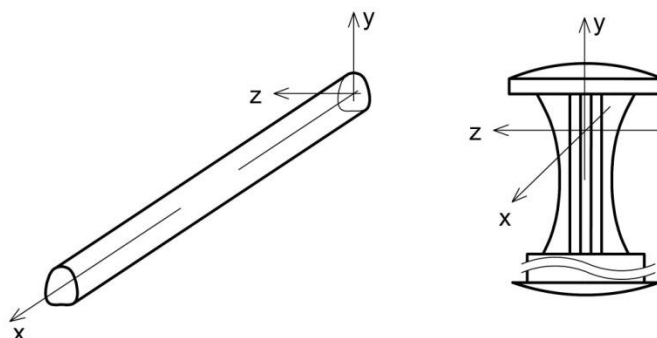


Рис. 7. Общий вид и форма поперечного сечения слоистого стержня

Начало системы координат xuz помещаем в левый конец стержня. Ось x совпадает с продольной осью стержня и имеет определённую геометрическую привязку к поперечному сечению.

Для упрощения получающихся в дальнейшем решений, будем считать, что структуры гибридных стержней и распределений внешних нагрузок согласованы так, что они в процессе нагружения либо вовсе не вызывают эффектов закручивания, либо они столь незначительны, что ими можно пренебречь. В общем случае стержень испытывает изгиб в плоскостях xu и uz с растяжением-сжатием. Все нагрузки приведены к продольной оси стержня - оси x .

Деформации и перемещения будем считать малыми. Это позволит записывать уравнения равновесия для недеформированного состояния:

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q_y - \frac{dm_z}{dx}, \quad \frac{d^2 M_y}{dx^2} = q_z - \frac{dm_y}{dx}, \quad \frac{dN}{dx} = -q_x. \quad (5)$$

Здесь N - проекция вектора внутреннего усилия на ось x , M_z, M_y - проекции вектора внутреннего момента на оси z и y . Точка приложения вектора внутренних усилий лежит на оси стержня. Величины q_x, q_y, q_z - проекции вектора распределённой нагрузки, приложенной к оси стержня, m_z, m_y - проекции вектора распределённого момента на оси z и y .

Интегрируя уравнения (5), получим выражения для внутренних усилий:

$$\begin{aligned}
 N(x) &= N(0) - \int_0^x q_x dx, \\
 M_z(x) &= M_z(0) - Q_y(0)x - \int_0^x m_z dx + \int_0^x \left(\int_0^x q_y dx \right) dx, \\
 M_y(x) &= M_y(0) - Q_z(0)x - \int_0^x m_y dx + \int_0^x \left(\int_0^x q_z dx \right) dx.
 \end{aligned} \tag{6}$$

В случае если стержень статически определимый, то значения внутренних усилий в начале координат определяем из условий равновесия узлов. Иначе, необходимо составлять дополнительные условия совместности деформаций.

Принимается справедливой теория плоских сечений Бернулли и упрощённое выражение кривизны плоской кривой. В соответствие с данными ограничениями связь между деформациями и перемещениями стержня выражается следующими известными соотношениями:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(x, y, z) &= \varepsilon_0 - y \cdot \kappa_z - z \cdot \kappa_y, \\
 \varepsilon_0(x) &= \frac{du_0}{dx}, \quad \kappa_y = \frac{d^2 v_0}{dx^2}, \quad \kappa_z = \frac{d^2 w_0}{dx^2}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $\varepsilon_0, \kappa_z, \kappa_y$ - продольная деформация на уровне оси стержня и изменение кривизны оси стержня в проекции на оси z и y , $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ - компоненты перемещений точек на выбранной осевой линии. Интегрируя соотношения (7) получим:

$$\begin{aligned}
 u_0(x) &= u_0(0) + \int_0^x \varepsilon_0 dx, \\
 v_0(x) &= v_0(0) + \varphi_y(0) \cdot x + \int_0^x \left(\int_0^x \kappa_y dx \right) dx, \quad \varphi_y(x) = \varphi_y(0) + \int_0^x \kappa_y dx, \\
 w_0(x) &= w_0(0) + \varphi_z(0) \cdot x + \int_0^x \left(\int_0^x \kappa_z dx \right) dx, \quad \varphi_z(x) = \varphi_z(0) + \int_0^x \kappa_z dx.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Величины $u_0(0), v_0(0), w_0(0), \varphi_y(0)$ и $\varphi_z(0)$ находим из условий закрепления стержня.

Связь между нормальными напряжениями и деформациями m -го слоя выражается степенным многочленом вида (2):

$$\sigma_m = \sum_{n=1}^3 E_{nm} \varepsilon_m^n, \quad -\varepsilon_{m^*}^- \leq \varepsilon_m \leq \varepsilon_{m^*}^+ \tag{9}$$

где E_{nm} - константы, зависящие от механических свойств m -го слоя стержня, $\varepsilon_{m^*}^\pm$ - предельно допустимые продольные деформации m -го слоя при растяжении (+) и сжатии (-).

3. Система разрешающих уравнений. Вариант 1. Выразим интегральные внутренние силовые факторы N, M_y и M_z через продольные напряжения σ_m :

$$N = \sum_{m=1}^{n_{cl}} \int \sigma_m dF_m, \quad M_y = \sum_{m=1}^{n_{cl}} \int \sigma_m \cdot z dF_m, \quad M_z = \sum_{m=1}^{n_{cl}} \int \sigma_m \cdot y dF_m. \tag{10}$$

В (10) интегрирование ведётся по площади поперечного сечения m -го слоя стержня. Количество слоёв задаётся параметром n_{cl} .

Подставляем в (10) связь между напряжениями и деформациями в виде (9) и первое уравнение из (7). После преобразований получим систему из трёх нелинейных алгебраических уравнений 3-ей степени относительно трёх неизвестных - κ_y , κ_z и ε_0 :

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=1}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} \kappa_y^{t-1} D_{nkt} - N = F_1(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=1}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} \kappa_y^{t-1} D_{nk(t+1)} + M_y = F_2(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=1}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} \kappa_y^{t-1} D_{n(k+1)t} + M_z = F_3(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$D_{nkt} = \sum_{m=1}^{n_{cl}} E_{nm} d_{mkt}, \quad d_{mkt} = \int_{F_m} y^{k-t} z^{t-1} dF_m, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (12)$$

Система (11) обладает следующими характерными особенностями:

1. Структура каждого уравнения системы (11) подобна, и отличается только коэффициентами D_{nkt} .

2. Геометрия поперечного сечения полностью описывается коэффициентами d_{mkt} , характеристики диаграммы деформирования - коэффициентами E_{nm} . Коэффициенты D_{nkt} полностью включают в себя геометрические и механические характеристики слоёв.

3. Приняв $E_{nm} = 0 (n = 2, 3)$, получим определяющие уравнения для слоистого, линейно-упругого стержня. Если при этом $n_{cl} = 1$, то приходим к уравнениям технической теории изгиба стержней [25].

Условие прочности задаётся соотношением

$$|\varepsilon_{m,max}^{\pm}| \leq \varepsilon_{m*}^{\pm} \quad (m = 1 \dots n_{cl}), \quad (13)$$

где $\varepsilon_{m,max}^{\pm}$ - максимальные продольные деформации растяжения (+) и сжатия (-) m -го слоя. Проверка выполнения условия прочности осуществляется в каждом слое поперечного сечения. Так как функция продольных деформаций $\varepsilon(x, y, z)$ в пределах определённого поперечного сечения линейная (гипотеза плоских сечений), то экстремальные значения она будет принимать на контуре поперечного сечения слоя. Задача определения области возможных значений κ_y , κ_z и ε_0 представляет собой отдельный интерес. В случае прямого поперечного изгиба она сводится к решению задачи линейного программирования [26].

4. Решение системы разрешающих уравнений (11). Система нелинейных уравнений (11) такова, что можно легко получить аналитическое выражение производных входящих в неё функций по основным неизвестным - κ_y , κ_z и ε_0 . Поэтому для её решения будем использовать метод Ньютона [27]. Полагаем, что задача статически определима и, следовательно, внутренние усилия определены из (6).

Для произвольного поперечного сечения запишем систему уравнений (11) в виде:

$$\bar{F}(\bar{x}) = 0. \quad (14)$$

Тогда решение строится посредством рекуррентной формулы:

$$\bar{x}^{j+1} = \bar{x}^j - J^{-1}(\bar{x}^j) \cdot \bar{F}(\bar{x}^j). \quad (15)$$

где $J(\bar{x})$ - матрица Якоби системы (14), \bar{x}^j - вектор неизвестных на j -ом шаге. Каждый её член представляет собой нелинейный алгебраический многочлен:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon_0} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (n-k+1) C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k} \sum_{t=1}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} \kappa_y^{t-1} D_{nkt}, \\
\frac{\partial F_1}{\partial \kappa_y} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=2}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} (t-1) \kappa_y^{t-2} D_{nkt}, \\
\frac{\partial F_1}{\partial \kappa_z} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=1}^{k-1} C_{k-1}^{t-1} (k-t) \kappa_z^{k-t-1} \kappa_y^{t-1} D_{nkt}, \\
\frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon_0} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (n-k+1) C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k} \sum_{t=1}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} \kappa_y^{t-1} D_{nk(t+1)}, \\
\frac{\partial F_2}{\partial \kappa_y} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=2}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} (t-1) \kappa_y^{t-2} D_{nk(t+1)}, \\
\frac{\partial F_2}{\partial \kappa_z} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=1}^{k-1} C_{k-1}^{t-1} (k-t) \kappa_z^{k-t-1} \kappa_y^{t-1} D_{nk(t+1)}, \\
\frac{\partial F_3}{\partial \varepsilon_0} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (n-k+1) C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k} \sum_{t=1}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} \kappa_y^{t-1} D_{n(k+1)t}, \\
\frac{\partial F_3}{\partial \kappa_y} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=2}^k C_{k-1}^{t-1} \kappa_z^{k-t} (t-1) \kappa_y^{t-2} D_{n(k+1)t}, \\
\frac{\partial F_3}{\partial \kappa_z} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} \varepsilon_0^{n-k+1} \sum_{t=1}^{k-1} C_{k-1}^{t-1} (k-t) \kappa_z^{k-t-1} \kappa_y^{t-1} D_{n(k+1)t}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Выражения частных производных $\frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon_0}$ отличаются только коэффициентами D_{nkt} , как и выражения для $\frac{\partial F_i}{\partial \kappa_y}$, а также для $\frac{\partial F_i}{\partial \kappa_z}$. Также необходимо отметить, что в (16) изменились пределы суммирования по сравнению с (11).

Начальное приближение \bar{x}^1 можно взять в виде нулевого вектора, что будет соответствовать недеформированному состоянию стержня. С другой стороны его можно определить из решения системы (11) при $E_{nm} = 0 (n = 2, 3)$, что равносильно переходу к физически линейной задаче. В этом случае система (11) переходит в систему трёх линейных уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 D_{111} - \kappa_y D_{122} - \kappa_z D_{121} - N = 0, \\ \varepsilon_0 D_{112} - \kappa_y D_{123} - \kappa_z D_{122} + M_y = 0, \\ \varepsilon_0 D_{121} - \kappa_y D_{132} - \kappa_z D_{131} + M_z = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Выпишем решение системы (17):

$$\bar{x}^1 = A^{-1} \cdot \bar{B} \tag{18}$$

$$\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} D_{111} & -D_{122} & -D_{121} \\ D_{112} & -D_{123} & -D_{122} \\ D_{121} & -D_{132} & -D_{131} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} N \\ -M_y \\ -M_z \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Примем следующие критерии останова для итерационного процесса (15) [29]:

$$\bar{F}(\bar{x}^j) - \bar{F}(\bar{x}^{j+1}) \leq \tau_F (1 + \bar{F}(\bar{x}^{j+1})), \tag{20}$$

$$\bar{x}^j - \bar{x}^{j+1} \leq \sqrt{\tau_F} (1 + \bar{x}^{j+1}).$$

Оба неравенства являются признаками близости последовательностей $\bar{F}(\bar{x}^j)$ и \bar{x}^j к своим пределам. Параметр τ_F имеет смысл желаемой точности решения - чем он меньше, тем выше точность. Его величина задаётся непосредственно в расчёте и может изменяться в зависимости от полученных результатов. В неравенствах (20) используется евклидова норма.

Область возможных значений вектора неизвестных \bar{x} ограничена условием прочности (13).

5. Система разрешающих уравнений. Вариант 2. Подставляем выражения внутренних усилий (11) в дифференциальные уравнения равновесия (5):

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{nkt} \frac{d}{dx} (\varepsilon_0^{n-k+1} \kappa_y^{t-1} \kappa_z^{k-t}) + q_x = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{nk(t+1)} \frac{d^2}{dx^2} (\varepsilon_0^{n-k+1} \kappa_y^{t-1} \kappa_z^{k-t}) - \frac{dm_y}{dx} + q_z = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{n(k+1)t} \frac{d^2}{dx^2} (\varepsilon_0^{n-k+1} \kappa_y^{t-1} \kappa_z^{k-t}) - \frac{dm_z}{dx} + q_y = 0. \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} D'_{nkt} &= (-1)^{k-1} C_n^{k-1} C_{k-1}^{t-1} D_{nkt}, \quad D'_{nk(t+1)} = (-1)^{k-1} C_n^{k-1} C_{k-1}^{t-1} D_{nk(t+1)}, \\ D'_{n(k+1)t} &= (-1)^{k-1} C_n^{k-1} C_{k-1}^{t-1} D_{n(k+1)t}. \end{aligned} \quad (22)$$

Далее переходим от обобщённых деформаций ε_0, κ_y и κ_z к компонентам вектора перемещений точек оси стержня u_0, v_0 и w_0 . Для этого подставляем (7) в (21):

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{nkt} \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{du_0}{dx} \right)^{n-k+1} \cdot \left(\frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^{t-1} \cdot \left(\frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^{k-t} \right) + q_x = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{nk(t+1)} \frac{d^2}{dx^2} \left(\left(\frac{du_0}{dx} \right)^{n-k+1} \cdot \left(\frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^{t-1} \cdot \left(\frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^{k-t} \right) - \frac{dm_y}{dx} + q_z = 0, \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{t=1}^k D'_{n(k+1)t} \frac{d^2}{dx^2} \left(\left(\frac{du_0}{dx} \right)^{n-k+1} \cdot \left(\frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^{t-1} \cdot \left(\frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^{k-t} \right) - \frac{dm_z}{dx} + q_y = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Выражения (21), как и (23) являются системой из трёх нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Вместе с граничными условиями они представляют собой краевую задачу, решение которой полностью определяет напряжённо-деформированное состояние стержня.

6. Решение системы разрешающих уравнений (23). Решение системы (23) в общем виде представляет определённые математические трудности и представляет собой отдельное исследование. Поэтому, здесь рассмотрим решение одной частной задачи методом Галёркинского типа [28].

Примем стержень с жёстко закреплёнными краями, тогда приближённое решение уравнений (23) можно представить в виде:

$$\begin{cases} u_0 = a(\sin(\pi x/l))^2, \\ v_0 = b(\sin(\pi x/l))^2, \\ w_0 = c(\sin(\pi x/l))^2. \end{cases} \quad (24)$$

где l - длина стержня, a, b, c - коэффициенты подлежащие определению. Как не сложно проверить, в таком виде решение точно удовлетворяет краевым условиям: $u_0(0) = u_0(l) = v_0(0) = v_0(l) = w_0(0) = w_0(l) = 0$; $\frac{dv_0}{dx}(0) = \frac{dv_0}{dx}(l) = \frac{dw_0}{dx}(0) = \frac{dw_0}{dx}(l) = 0$.

Подставляем (24) в (23) и интегрируем по переменной x в пределах длины стержня. После преобразований получим систему трёх нелинейных уравнений относительно коэффициентов a, b, c .

$$\begin{cases} -D'_{111} \frac{\pi^2}{2l} a + D'_{311} \frac{3\pi^4}{8l^3} a^3 - D'_{331} \frac{\pi^6}{2l^5} ac^3 + D'_{332} \frac{\pi^6}{2l^5} abc - D'_{333} \frac{\pi^6}{2l^5} ab^2 + \int_0^l q_x \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = 0, \\ \frac{2\pi^4}{l^3} (D'_{122} b + D'_{123} c) + \frac{\pi^6}{2l^5} a^2 (D'_{322} b + D'_{323} c) + \frac{6\pi^8}{l^7} (b^2 (D'_{345} b + D'_{344} c) + c^2 (D'_{343} b + D'_{342} c)) - \\ - \int_0^l \left(\frac{dm_y}{dx} - q_z\right) \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = 0, \\ \frac{2\pi^4}{l^3} (D'_{122} b + D'_{123} c) + \frac{\pi^6}{2l^5} a^2 (D'_{322} b + D'_{323} c) + \frac{6\pi^8}{l^7} (b^2 (D'_{345} b + D'_{344} c) + c^2 (D'_{343} b + D'_{342} c)) - \\ - \int_0^l \left(\frac{dm_z}{dx} - q_y\right) \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Систему (25) решаем методом Ньютона по формуле, аналогичной формуле (15).

7. Примеры расчётов. Определение напряжённо-деформированного состояния балки осуществлялось путем решения разрешающей системы уравнений (11) методом Ньютона. Определив обобщённые деформации поперечных сечений балки, перемещения точек оси находим по формулам (8), а продольные напряжения в слоях по (9).

Для расчёта возьмём однопролётную балку рис.8а. На рисунке все размеры даны в миллиметрах.

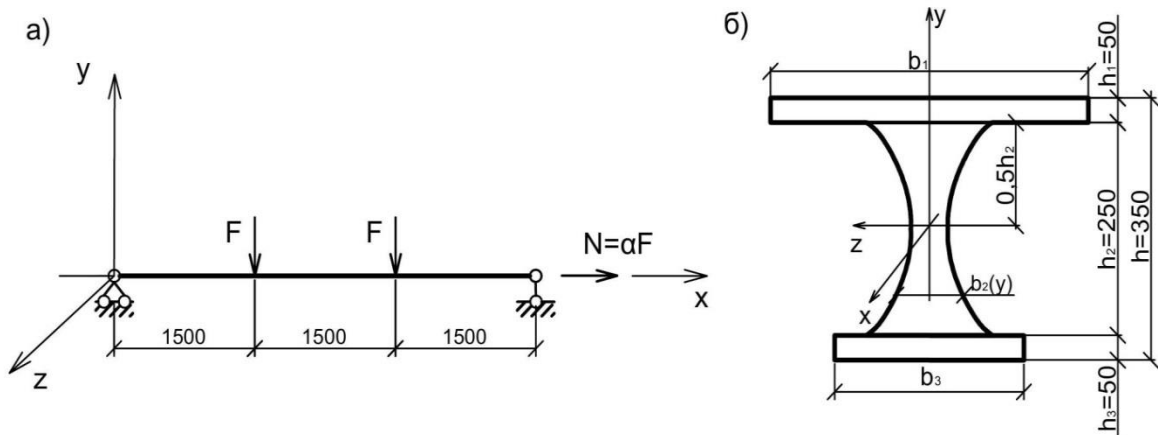


Рис. 8. К расчёту деревянной балки: а) расчётная схема балки; б) поперечное сечение балки

Поперечное сечение балки состоит из трёх слоёв - рис.8б. Каждый слой может быть выполнен из различных пород древесины. Образующие второго слоя представля-

ют собой квадратные параболы, описываемые выражениями $z(y) = \pm(25 + y^2 / 625)$ мм. Тогда ширина второго слоя задаётся соотношением $b_2(y) = 50 + 2y^2 / 625$ мм.

Пример 1. Примем 1 и 3 слои из лиственницы сибирской, 2 слой из берёзы даурской, коэффициент $\alpha = 1$. Проведём серию расчетов, в которых будем изменять ширину верхнего и нижнего слоёв. Введём дополнительное условие на ширину слоёв: $b_1 + b_3 = 400$ мм. Данное условие позволит сохранять неизменными как объём балки, так и стоимость материалов. При другом распределении пород в слоях стоимость материалов будет изменяться. Загружаем балку, увеличивая величину силы F до тех пор, пока в каком-либо слое не выполнится условие прочности (13) со знаком равенства. Результаты расчётов даны в табл.6.

Таблица 6 – Результаты расчёта 1

№	b_1 [см]	b_3 [см]	F_{max} [кН]	w_{max} [см]	θ_{max} 10^{-2} [рад]	Номер слоя, в котором достигнуты предельные деформации	Характер начала разрушения: растяжение (+), сжатие (-)	Степень нагружения нижних волокон, [%]
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	300	122	6,7	4,5	2	-	45,0
2	150	250	148	7,3	5,0	2	-	56,3
3	200	200	173	8,2	5,6	2	-	71,2
4	250	150	194	9,2	6,3	2	-	90,0
5	300	100	190	9,0	6,2	3	-	100,0

В столбце 4 приведена величина предельно допустимой нагрузки F_{max} . В столбцах 5 и 6 максимальное значение прогиба и угла поворота при $F = F_{max}$. Степень нагружения крайних нижних волокон (столбец 9) равна $\max(\epsilon(x, -0.5h)) / \epsilon_{3*}^+$.

Сильная степень разносопротивляемости древесины привела к тому, что наибольшая несущая способность достигается для несимметричного сечения. Также во всех случаях кроме последнего предельные деформации достигались во внутреннем слое сечения.

Пример 2. Расчётную схему балки и форму поперечного сечения возьмём из первого расчёта - рис.7. Примем $b_1 = b_3 = 150$ мм, $\alpha = 0$. Проведём несколько расчётов с неизменной геометрией сечения, но с разными породами слоёв. В первом расчёте (строка 1 табл.6) все слои выполним из граба кавказского. Во втором - в 1 слой поместим породу лучше всего сопротивляющуюся сжатию, а в 3 слой - лучше всего сопротивляющуюся растяжению. В третьем расчёте поменяем породы 1 и 3 слоёв из второго расчёта местами. В четвёртом расчёте 1 слой выполним из породы хуже всего работающей на сжатие, а в 3 слой - из породы хуже всего работающей на растяжение. В пятом расчёте поменяем породы 1 и 3 слоёв из четвёртого расчёта местами. Для каждого из расчётов 2-5 средний слой будем выполнять в двух вариантах: из древесины с низкой прочностью и малым значением E_1 - расчёты 2-5, и из древесины с высокой прочностью и большим значением коэффициента E_1 - расчёты 6-9. Загружаем балку до тех пор, пока в каком-либо слое не выполнится условие прочности (13) со знаком равенства. Результаты расчётов даны в табл.7.

Все породы берём из табл.5. Во втором столбце табл.7 дано распределение пород по слоям в соответствии с нумерацией табл.5. Так шифр 291 означает, что первый слой сделан из граба кавказского, второй - из тополя сереющего и третий - из берёзы даурской.

Таблица 7 – Результаты расчёта 2

№	Распределение пород	F_{max} [кН]	w_{max} [см]	θ_{max} 10^{-2} [рад]	Номер слоя, в котором достигнуты предельные деформации	Характер начала разрушения: растяжение (+), сжатие (-)	Степень нагружения нижних волокон, [%]
1	2	3	4	5	6	7	8
1	222	173	11,8	8,1	3	+	100
2	291	151	9,9	6,7	2	-	58,7
3	192	98	6,5	4,4	1	-	59,3
4	994	93	8,1	5,5	1	-	66,3
5	499	89	7,7	5,3	1	-	51,1
6	211	145	8,1	5,5	2	-	50,5
7	112	111	6,5	4,4	1	-	59,6
8	914	106	8,0	5,5	2	-	66,4
9	419	102	7,7	5,2	1	-	50,1

Анализируя данные табл.7 можно выделить следующие особенности деформирования и разрушения неоднородных деревянных конструкций:

1. В зависимости от распределения пород слоёв разрушение может начинаться как на внешней поверхности балки, так и во внутренних слоях. Иначе говоря, в слоистых конструкциях могут возникать скрытые механизмы разрушения.

2. Предельные деформации могут достигаться как в сжатых, так и в растянутых волокнах. При этом резко меняется характер разрушения [1,6]: достижение предельных деформаций в области сжатия обычно приводит к образованию складок, при этом конструкция сохраняет несущую способность; достижение предельных деформаций в области растяжения приводит к резкому разрушению конструкции.

3. Перераспределение пород значительно влияет на несущую способность и деформативность балки. Величина F_{max} изменяется от 89 до 173 кН, w_{max} - от 6,5 до 11,8 см и θ_{max} от $4,4 \cdot 10^{-2}$ до $8,1 \cdot 10^{-2}$ рад. Простая перестановка пород во внешних слоях (строки 2,3 табл.7) привела к снижению несущей способности в 1,54 раза.

4. Из сравнения расчётов с одинаковыми породами внешних слоёв и разными породами среднего слоя видно, что характеристики среднего слоя не сильно сказываются на несущей способности балки. Максимальное снижение F_{max} составило 1,15 раза. При этом площадь поперечного сечения среднего слоя в 2,23 раза больше площади наружного слоя.

5. Практически во всех расчётах предельные деформации достигались в сжатой зоне. При этом максимальные деформации растяжения составляли (50,1-66,4) % от предельных значений. Что является следствием сильной разносопротивляемости древесины.

*Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 15-01-00825.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арленинов Д.К., Буслаев Ю.Н., Игнатъев В.П., Романов П.Г., Чахов Д.К. Конструкции из дерева и пластмасс. М.: Издательство АСВ, 2002. 280 с.
2. Шмидт А.Б., Дмитриев П.А. Атлас строительных конструкций из клееной древесины и водостойкой фанеры. М.: Издательство АСВ, 2002. 292 с.
3. Porteous J., Kermani A. Structural timber design to Eurocode 5. John Wiley & Sons, 2013. 640 p.

4. Pischl R., Schickhofer G. *The Mur River wooden bridge, Austria // Structural Engineering International*. 1993. Vol. 3. No. 4. pp. 217-219.
5. Poirier E. *Design and construction of a 53-meter-tall timber building at the university of British Columbia // Proceedings of WCTE*. 2016.
6. Стоянов В.В., Окунь И.В. Усиление балочных конструкций методом послойного армирования // *Изв. вузов. Строительство*. - 2013. - №11-12. - С.44-47.
7. Немировский Ю.В., Болтаев А.И. Особенности расчёта деревожелезобетонного балочного моста // *Вестник СибАДИ*. 2016. №5. С. 114-124.
8. Коченов В.М. Несущая способность элементов и соединений деревянных конструкций. М.: Гос. изд. лит. по строительству и архитектуре, 1953. 320 с.
9. СП 64.13330.2011 *Деревянные конструкции*.
10. Ржаницын А.Р. Изгиб и сложное сопротивление прямоугольного сечения стержня при произвольной диаграмме работы материала // *Расчёт тонкостенных пространственных конструкций: сборник статей под ред. А.Р. Ржаницына*. М.: 1964. С. 7-22.
11. Геммерлинг А.В. *Расчет стержневых систем*. М.: Стройиздат, 1974. 208 с.
12. Лукаш П.А. *Основы нелинейной строительной механики*. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.
13. Шапиро Д.М., Агарков А.В., Мельничук Н.Н., Чан Тхи Тхюи Ван *Нелинейные методы расчёта в современном проектировании // Научный журнал строительства и архитектуры*. 2009. №3. С. 85-94.
14. Owen D.R., Hinton E. *Finite elements in plasticity: Theory and Practice*. Swansea, U.K.: John Wiley & Sons, 2013. 640 p.
15. McGuire W., Gallagher R. H., Ziemian R. D. *Matrix structural analysis*, 2014. 460 p.
16. *Исследование прочности и деформативности древесины. Сборник статей / Под ред. д-ра техн. наук проф. Г.Г. Карлсена*. М.: Госстройиздат, 1956. 172 с.
17. Немировский Ю.В., Гребенюк Г.И., Ажермачёв А.В. Расчёт ребристых деревянных конструкций с учетом эффектов разномодульности и нелинейности сопротивления // *Изв. вузов. Строительство*. 2007. №3. С. 4-12.
18. Квасников Е.Н. *Вопросы длительного сопротивления древесины*. Л.: Стройиздат, 1972. 96 с.
19. ГСССД 69-84. *Древесина. Показатели физико-механических свойств малых чистых образцов*. Издание Госстандарта СССР. 1984.
20. Немировский Ю.В. *Расчёт и рациональное проектирование деревянных стержневых элементов / Современные проблемы совершенствования и развития конструкций в строительстве и транспорте: сборник научных трудов III Международ. научно-технич. конференции*. Самара: Изд-во СамГАСУ, 2005. С.247-251.
21. Немировский Ю.В. *Метод расчёта композитных стержневых систем из разномодульных материалов / Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: материалы V Всероссийской научной конференции*. Томск: Изд-во ТГУ, 2006. С.288-290.
22. Дрейпер Н., Смит Г. *Прикладной регрессионный анализ. Кн.1*. М.: Финансы и статистика, 1986. 366 с.
23. Волынский В. Н. *Взаимосвязь и изменчивость физико-механических свойств древесины*. Архангельск: Издательство АГТУ, 2000. 196 с.
24. Боровиков А. М., Уголев Б.Н. *Справочник по древесине*. М.: Лесная промышленность, 1989. 296 с.
25. Филлин А.П. *Прикладная механика твердого деформируемого тела*. – М.: Наука, 1978. - 616 с.

26. Немировский Ю.В., Болтаев А.И. Особенности деформирования и разрушения деревянных клееных многопролётных балок. Сообщение 1 // Изв. вузов. Строительство. 2016. №6. С. 116-126.
27. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. - М.: Мир, 1975. - 558 с.
28. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. - М.: Мир, 1988. - 352.
29. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. - М.: Мир, 1985. - 509.