УДК 539.4

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ НАНОРАЗМЕРНОЙ БАЛКИ С ПОЗИЦИЙ ДВУХФАЗНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ЭРИНГЕНА

[1]Михасев Г.И., [1]Авдейчик Е.В., [2]Каплунов Ю.Д., [2]Приказчиков Д.А.

[1]Белорусский государственный университет, Минск
[2]Университет Кииле, Кииле, Великобритания

Введение. Первые идеи нелокальной теории упругости были предложены в работах Крёнера [1], Кунина [2], Крумханселя [3], Эделена и Лоуса [4, 5]. Впоследствии окончательная формулировка теории были сделана Эрингеном [6-8]. Именно после выхода упомянутых статей Эрингена, а также его монографии [9] появились многочисленные исследования в области деформирования наноразмерных балок, пластин и оболочек, а также дискретных наноструктур (нанотрубок, графена) с позиций континуальной механики.

В соответствии с нелокальной теорией упругости, напряжения σ_{ij} в точке континуума $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ зависят не только от деформаций e_{ij} в данной точке, но и от деформаций во всех точках среды, а в случае рассмотрения тела, - от его формы и объема V:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x})=\int_V K(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|,\varepsilon)\sigma_{ij}^{(c)}(\mathbf{x}')dV(\mathbf{x}') \qquad (1)$$

где $\sigma_{ij}^{(c)}$ - компоненты макроскопического (классического) тензора напряжений, $K(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|,\varepsilon)$ - ядро или функция влияния, которая положительна и быстро убывает при $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\to\infty$, а ε - безразмерный нелокальный параметр, учитывающий размерный эффект и определяемый по формуле $\varepsilon=e_0a/l_c$. Здесь, e_0 - материальная константа, которая находится экспериментально для каждого материала (например, для углеродных нанотрубок обычно e_0 =0.39 [6]), a - внутренний характерный размер (размер гранул, рассояние между атомами дискретной структуры), а l_c -внешний характерный размер. В пределе, когда $\varepsilon\to 0$, ядро $K(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|,\varepsilon)$ обращается в дельта-функцию Дирака.

Модель упругой среды, в основу которой положен закон (1), будем называть нелокальной однофазной интегральной (НОФИ) моделью континуума. Очевидно, что ее принятие приводит к сложным интегро-дифференциальным уравнениям, попытка решения которых, даже при рассмотрении одномерной задачи, наталкивается на значительные и чаще непредолимые математические трудности. В работе [6] Эрингеном была получена дифференциальная форма уравнений физического состояния

$$\left(1-\varepsilon^2 l_c^2\nabla^2\right)\sigma_{ij}(\mathbf{x})=\sigma_{ij}^{(c)}(\mathbf{x}) \qquad (2)$$

которая для некоторых задач (например, в задаче о расспространении плоских волн в неограниченной среде) может рассматриваться как модель эквивалентная интегральной форме (1). В дальнейшем, модель упругой среды, определяемую соотношениями (2), будем называть нелокальной «эквивалентной» дифференциальной (НЭД) моделью. Начиная с 2003г [10] и до сих пор данная модель широко применяется многими авторами при исследовании деформирования, устойчивости и колебаний наноразмерных балок, пластин и оболочек, а также углеродных нанотрубок (среди многих других работ см., например, статьи [12-17]). Ее принятие позволило получить ряд новых механических эффектов: учет параметра нелокальности ε в большинстве случаев приводит к увеличению прогибов и к снижению собственных частот и критических нагрузок. Исключением является случай консольной наноразмерной балки, поведение которой при действии сосредоточенной нагрузки указывает на отсутствии нелокального эффекта. Данный парадокс для консольной балки, отмеченный в статьях [10, 18, 19], обратил на себя внимание и привел к выводу о несостоятельности дифференциальной формы закона Эрингена при решении других задач. Так Бенвенути и Симон [20], исследуя наноразмерную балку на растяжение, обнаружили, что решения, полученные на основе НЭД-модели, противоречат уравнениям физического состояния (1) в интегральной форме. Причина данного несоответствия моделей состоит в том, что некоторые граничные условия (например, условия свободного края) в рамках НЭД-модели записываются в терминах макроскопических напряжений $\sigma_{ij}^{(c)}$ (см., например, в [12, 13]), что, очевидно, противоречит изначально принятому закону физического состояния (1). Ниже нами будет показано, что и в случае рассмотрения кинематических граничных условий (жесткого защемления краев), закон (2) не позволяет учесть наличие краевых эффектов, порождаемых нелокальным деформированием у границ наообъекта. Таким образом, НЭД модель является некоррректной, ибо не позволяет удовлетворить гарничным условиям в терминах напряжений и не отражает реальной картины деформирования наноразмерного объекта у его границ. Интересный вывод был также сделан авторами статьи [21], в которой рассмотрен статический изгиб балки под действием произвольной распределенной поперечной нагрузки. Оказалось, что решения одной и той же задачи, рассмотренной в рамках НЭД и НОФИ моделей, совпадают лишь в случае, когда функция распределения нагрузки удовлетворяет специальным условиям, сформулированным Поляниным и Манжировым в [22]. Другим случаем, когда, использование НЭД-модели оправдано, является случай сильной локализация деформаций вдали от границ наноразмерного тела. Так в работах [23, 24] были исследованы локализованые формы собственных колебаний углеродных нанотрубок (УНТ), внедренных в неоднородную упругую матрицу: с использованием НЭД- модели для длинных тонких наноразмерных оболочек, решения уравнений движения были построены в виде функций, быстро убвающих при удалении от некоторых «слабых» линий, расположенных вдали от краев длинной одностенной [23] и двухстенной УНТ [24].

Что касается НОФИ-модели, то ее принятие в задаче о статическом изгибе балки [21] приводит к двум каноническим интегральным уравнениям Фредгольма первого рода, которые в общем случае (при произвольном распределении нагрузки) являются некорректно поставленными задачами [25]. Строгое доказательство некорректности многих задач об изгибе балки в рамках НОФИ-модели было дано в недавно опубликованной работе Романо и др. [26]. Чтобы устранить данный парадокс, сначала Чалламел и Вонг [19], а затем и другие авторы [29, 30] обратились к смешанной модели (ранее предложенной Эрингеном [27, 28]), которая учитывает как локальную, так и нелокальную составляющие в законе физического состояния:

$$\sigma_{ij}(x) = \xi_1 \sigma_{ij}^{(c)}(x) + \xi_2 \int_V K(|x - x'|, \tau) \sigma_{ij}^{(c)}(x') dV(x') \tag{3}$$

Здесь ξ_1 и ξ_2 - коэфициенты, определяющие объемные доли локальной и нелокальной фаз, соответственно, и удовлетворяющие условиям: $0 < \xi_1, \xi_2 < 1$, $\xi_1 + \xi_2 = 1$. Модель, определяемую соотношением (3) обычно называют смешанной или нелокальной двухфазной интегральной (НДФИ) моделью. Очевидно, что при $\xi_1 \to 0$ модель вырождается в НОФИ-модель, а при $\xi_1 = 1$ получаем уравнения физического состояния классической локальной теории упругости. В работе [26] было доказано, что задача о статическом изгибе балки в рамках НДФИ-модели корректна и имеет единственное решение лишь при $\xi_1 > 0$.

Следует отметить, что НДФИ-модель применялась и для решения других задач. Так в работах [20, 31] были рассмотрены задачи о растяжении наноразмерной балки, а в статье [32] с использованием метода дискретизации уравнений (3) впервые численно исследованы изгибные формы колебаний балки Эйлера-Бернулли. Вместе с тем отсутствуют исследования, в которых бы были предложены аналитические методы решения динамических задач для наноразмерных балок, пластин и оболочек с использованием НДФИ-модели. Заметим, что в рамках данной модели задачи о колебаниях нанообъектов сводятся к нестационарным интегро-дифференциальным уравнениям в частных производных. Очевидно, что подобные задачи существенно отличаются от ранее выполненных исследований о статическом деформировании нанобалок и требуют дополнительного изучения и анализа.

Целью данной работы является рассмотреть задачу о свободных продольных колебаниях наноразмерной балки с использованием НДФИ-модели. Поскольку данная модель позволяет в предельных случаях прейти к НОФИ-модели, а также к классической модели локальной теории упругости, будет выполнен сравнительный анализ собственных частот, найденных в рамках различных подходов, включая НЭД-модель.

Разрешающиие уравнения. Рассмотрим наноразмерную балку длиной L, с модулем Юнга E и плотностью материала ρ. Пусть x_1 - координата, отсчитываемая в осевом направлении балки, а $\sigma = \sigma_{11}$ - напряжение на площадке, ортогональной направлению оси. Тогда дифференциальное уравнение, описывающее малые продольные колебания балки может быть записано в виде:

$$S\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} - \rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x_1, t) \tag{4}$$

где S - площадь поперечного сечения, t -время, а $f(x_1, t)$ - интенсивность продольной массовой силы. Для исследования свободных колебаний принимаем $f = 0$.

Введем безразмерные величины $x = x_1 / l_c$, $\tau = \sqrt{E/(\rho l_c^2)}\, t$. Для свободных колебаний перемещение сечения ищем в виде $u = l_c y(x) e^{i\omega\tau}$, где i - мнимая единица, а ω - искомая безразмерная собственная частота колебаний. Подставляя последнее соотношение в (4) и принимая (3) в качестве закона физического одномерного напряженного состояния, пориходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$\xi_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\xi_2}{2\varepsilon}\frac{d}{dx}\int_0^1 R(|x-s|, \varepsilon)\, y'(s) ds + \omega^2 y = 0 \tag{5}$$

где $R(|x-s|, \varepsilon) = K(l_c |x-s|, \varepsilon)$, а штрих означает дифференцирование по безразмерной координате.

Рассмотрим три возможных варианта граничных условий:

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{6}$$

$$y(0) = \sigma(1) = 0 \tag{7}$$

$$\sigma(0) = \sigma(1) = 0 \tag{8}$$

где условие (6) соответствует жесткому защемлению обоих краев, условие (8) – свободным краям, а условие (7) означает, что левый край жестко защемлен, а правый свободен. Заметим, что в рамках НДФИ-модели условие свободного края принимает вид

$$\xi_1 \frac{dy}{dx} + \frac{\xi_2}{2\varepsilon}\int_0^1 R(|x-s|, \varepsilon) y'(s) ds = 0 \tag{9}$$

Рассмотрим здесь би-экспоненциальное ядро

$$R(|x-s|, \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{|x-s|}{\varepsilon}} \tag{10}$$

которое наиболее часто используется для исследования деформирования наноразмерных балок [19, 20, 30-32]. Заметим, что для данного ядра

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{-\frac{|x-s|}{\varepsilon}} z(s) ds = \frac{1}{\varepsilon}\left[e^{\frac{x}{\varepsilon}} \int_0^1 e^{-\frac{s}{\varepsilon}} z(s) ds - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \int_0^1 e^{\frac{s}{\varepsilon}} z(s) ds \right] \tag{11}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^1 e^{-\frac{|x-s|}{\varepsilon}} z(s)ds = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 e^{-\frac{|x-s|}{\varepsilon}} z(s)ds - \frac{2}{\varepsilon} z(x) \tag{12}$$

Будем искать неизвестную функцию $y(x)$ на множестве $C^4[0,1]$. Продифференцируем уравнение (5) дважды по x и примем во внимание соотношения (11), (12). В результате получим следующее уравнение

$$\varepsilon^2 \xi_1 \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{\xi_2}{2\varepsilon}\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{-\frac{|x-s|}{\varepsilon}} y'(s)ds - \xi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \varepsilon^2\omega^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \tag{13}$$

Исключая в (5) и (13) второе слагаемое, содержащее интегрирование, приходим к дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\varepsilon^2 \xi_1 \frac{d^4 y}{dx^4} - \left(1 - \varepsilon^2\omega^2\right)\frac{d^2 y}{dx^2} - \omega^2 y = 0 \tag{14}$$

Используя (11), можем переписать граничные условя для свободного края. Они принимают вид

$$\varepsilon\xi_1 y'(0) + \frac{1-\xi_1}{2}\int_0^1 e^{-\frac{s}{\varepsilon}} y'(s)ds = 0 \tag{15}$$

и

$$\varepsilon\xi_1 y'(1) + \frac{(1-\xi_1)e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{2}\int_0^1 e^{\frac{s}{\varepsilon}} y'(s)ds = 0 \tag{16}$$

для левого ($x = 0$) и правого ($x = 1$) края, соответственно.

Дифференциальное уравнение (14) имеет четвертый порядок, в то время как мы имеем лишь два граничных условия (по одному на каждом крае). Недостающие два условия могут быть получены непосредственно из уравнения (5):

$$\varepsilon^2 \xi_1 y''(0) + \frac{1-\xi_1}{2}\int_0^1 e^{-\frac{s}{\varepsilon}} y'(s)ds + \varepsilon^2\omega^2 y(0) = 0 \tag{17}$$

$$\varepsilon^2 \xi_1 y''(1) - \frac{(1-\xi_1)e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{2}\int_0^1 e^{\frac{s}{\varepsilon}} y'(s)ds + \varepsilon^2\omega^2 y(1) = 0 \tag{18}$$

Замечание 1. Условия (17), (18) не являются естественными в обычном понимании граничные условия. Как будет показано ниже, данные условия позволяют принять во внимание наличие краевых эффектов, порождаемых не граничными условиями (6)-(8), а нелокальным деформированием (учитывающим внутренний масштаб) наноразмерной балки вблизи краев.

Обратимся к уравнению (14). Данное уравнение является сингулярно возмущенным так как содержит малый параметр $\varepsilon << 1$ при старшей производной. Заметим, что при $\xi_1 = 0$ оно вырождается в дифференциальнеое уравнение второго порядка, которое соответствует НЭД и НОФИ- моделям одновременно. Граничные условия свободного края (15), (16) при $\xi_1 = 0$ принимают форму граничных условий в рамках НОФИ-модели. Если рассмотреть дополнительные условия (17), (18) при $\xi_1 = 0$, то они становятся несовместимыми с любым из вариантов естественных граничных условий (6)-(8) для НОФИ-модели. Таким образом, НОФИ-модель нельзя считать корректной, а НДФИ- модель следует рассматривать при $\xi_1 > 0$, что совпадает с выводом, сделанным в работе [26].

Точное и асимптотические решения краевой задачи. Рассмотрим уравнение (14). На множестве $y(x) \in C^4[0,1]$ оно эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению (5). Для любых $\xi_1, \varepsilon > 0$ оно имеет простое решение

$$y = c_1 \sin\alpha x + c_2 \cos\alpha x + c_3 e^{-\beta x} + c_4 e^{\beta(x-1)} \tag{19}$$

где

$$\alpha=\sqrt{\frac{\sqrt{\left(1-\varepsilon^2\omega^2\right)^2+4\varepsilon^2\xi_1\omega^2}-\left(1-\varepsilon^2\omega^2\right)}{2\varepsilon^2\xi_1}},\quad \beta=\sqrt{\frac{\sqrt{\left(1-\varepsilon^2\omega^2\right)^2+4\varepsilon^2\xi_1\omega^2}+\left(1-\varepsilon^2\omega^2\right)}{2\varepsilon^2\xi_1}} \tag{20}$$

а c_k - константы, определяемые из граничных условий. Подстановка (19) в граничные условия приводит к некоторому трансцендентному уравнению

$$F(\omega;\xi_1,\varepsilon)=0 \tag{21}$$

относительно безразмерной частоты ω. Попытка нахождения его корней при значениях ξ_1 близких к нулю, приводит к большим вычислительным трудностям, что объясняется тем, что при $\xi_1\to 0$ (предельный переход к НОФИ-модели) уравнение (21) претерпевает сингулярное вырождение.

Для того, чтобы построить решения при малых ξ_1 применим асимптотический метод. Однако в качестве малого параметра мы будем рассматривать не ξ_1, а $\varepsilon \ll 1$. Решение задачи ищем в виде:

$$y=y_m(x)+\varepsilon^\gamma y_e(x),\quad \omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots, \tag{22}$$

где y_m - перемещение, соотвествующее основному напряженно-деформированному состоянию, y_e - интегралы краевого эффекта, а γ -показатель интенсивности краевого эффекта.

Уравнение краевого эффекта имеет вид:

$$\xi_1\frac{d^4y_e}{d\zeta^4}-\left(1-\varepsilon^2\omega^2\right)\frac{d^2y_e}{d\zeta^2}-\varepsilon^2\omega^2y_e=0 \tag{23}$$

Общее решение данного уравнения можно представить в виде ряда

$$\begin{gathered}y_e=a_{01}e^{-\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}}+a_{02}e^{\frac{x-1}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}}+\\ \varepsilon\left[a_{11}e^{-\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}}+a_{12}e^{\frac{x-1}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}}+\frac{\omega_0^2(1-\xi_1)}{2\sqrt{\xi_1^3}}\left(a_{01}xe^{-\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}}-a_{02}(x-1)e^{\frac{x-1}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}}\right)\right]+O\left(\varepsilon^2\right)\end{gathered} \tag{24}$$

где a_{ij} -константы, определяемые из граничных условий.

Функцию y_m будем искать в виде ряда

$$y_m=y_{m0}+\varepsilon y_{m1}+\varepsilon^2y_{m2}+\ldots \tag{25}$$

Подставляя (25) в уравнение (14), приходим к последовательности дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}L_0y_{m0}=\frac{d^2y_{m0}}{dx^2}+\omega_0^2y_{m0}=0,\quad L_0y_{m1}=-2\omega_0\omega_1y_{m0},\\ L_0y_{m2}=-2\omega_0\omega_1y_{m1}+\xi_1\frac{d^4y_{m0}}{dx^4}+\omega_0^2\frac{d^2y_{m0}}{dx^2}-\left(2\omega_0\omega_2+\omega_1^2\right)y_{m0}\end{gathered} \tag{26}$$

Далее рассмотрим случай, соответствующий жесткому защемлению краев (6). Подставляя (22), (25) в (6) и дополнительные граничные условия (17), (18), находим $\gamma=1$ и приходим к последовательности краевых условий для уравнений (26):

$$y_{m0}(0)=y_{m0}(1)=0 \tag{27}$$

$$\begin{gathered}y_{m1}(0)=-y_{e0}(0)=-a_{01},\quad y_{m1}(1)=-y_{e0}(1)=-a_{02},\\ \left(1-\sqrt{\xi_1}\right)y'_{m0}(0)+a_{01}=0,\quad \left(1-\sqrt{\xi_1}\right)y'_{m0}(1)-a_{02}=0;\end{gathered} \tag{28}$$

$$\begin{gathered}y_{m2}(0)=-a_{11},\quad y_{m2}(1)=-a_{12},\\ \left(1-\sqrt{\xi_1}\right)\left[y'_{m1}(0)+y''_{m0}(0)\right]+a_{11}=0,\quad \left(1-\sqrt{\xi_1}\right)\left[y'_{m1}(1)+y''_{m0}(1)\right]-a_{12}=0\end{gathered} \tag{29}$$

Процедура отыскания решений последовательности краевых задач (26)-(29), основанная на требовании существования решения неоднородных краевых задач на «спектре», общеизвестна. Опускаяя ее детали, выпишем приближенное решение задачи, сохраняя лишь три члена в рядах (22), (25):

$$\omega=\pi n\left\{1-2\varepsilon\left(1-\sqrt{\xi_1}\right)+\varepsilon^2\left[4\pi n\left(1-\sqrt{\xi_1}\right)^2-\frac{1}{2}(\pi n)^3(1-\xi_1)\right]+O\left(\varepsilon^3\right)\right\},\quad n=1,2,3,\ldots,$$

$$y(x)=C\left\{\sin\pi nx+\varepsilon\pi n\left(1-\sqrt{\xi_1}\right)\left[(1-2x)\cos\pi nx-e^{-\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}}+(-1)^n e^{\frac{x-1}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}}\right]+O\left(\varepsilon^2\right)\right\} \tag{30}$$

Аналогичным образом, рассматривая оставшиеся варианты граничных условий, мы находим:

$$\omega=\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)\left[1-\varepsilon\left(1-\sqrt{\xi_1}\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\right],\quad n=0,1,2,\ldots$$

$$y(x)=C\left\{\sin\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)x+\varepsilon\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)\left(1-\sqrt{\xi_1}\right)\left[(1-x)\cos\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)x-e^{-\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}}\right]+O\left(\varepsilon^2\right)\right\} \tag{31}$$

для случая, когда левый край жестко защемлен (граничные условия (7)), и

$$\omega=\pi n\left[1-\frac{1}{2}\varepsilon^2(\pi n)^2(1-\xi_1)+O\left(\varepsilon^3\right)\right],\quad n=1,2,3,\ldots,$$

$$y(x)=C\left\{\cos\pi nx-\varepsilon^2(\pi n)^2\left(1-\sqrt{\xi_1}\right)\left[e^{-\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}}+(-1)^n e^{\frac{x-1}{\varepsilon\sqrt{\xi_1}}}\right]+O\left(\varepsilon^3\right)\right\}. \tag{32}$$

Во всех случаях C - произвольная константа. Заметим, что в последнем случае $\gamma=2$.

Анализ построенных решений. При $\xi_1=1$ соотношения (30)-(32) переходят в простые известные формулы для собственных частот и форм колебаний макроразмерной балки. Если $\xi_1=0$, то получаем соотношения для НОФИ-модели. В частности, для жестко защемленной с обоих краев балки имеем

$$\omega=\pi n\left\{1-2\varepsilon+\varepsilon^2\pi n\left[4-\frac{1}{2}(\pi n)^2\right]+O\left(\varepsilon^3\right)\right\},\quad n=1,2,3,\ldots. \tag{33}$$

Заметим, что НЭД-модель с уравнением (14) при $\xi_1=0$ дает формулу

$$\omega=\pi n-\frac{1}{2}\varepsilon^2(\pi n)^3+O(\varepsilon^3),\quad n=1,2,3,\ldots. \tag{34}$$

Как видно, часто используемая в литературе НЭД-модель дает к классической частоте поправку порядка $O(\varepsilon^2)$, в то время как НОФИ- и НДФИ-модели – поправку порядка $O(\varepsilon)$. Таким образом, НЭД-модель имеет большую погрешность, что объясняется тем, что она не учитывает наличие нелокальных краевых эффектов.

На рисунке 1 приведены точные значения наименьшей безразмерной частоты ω жестко защемленной с обеих сторон наноразмерной балки как функции параметра ξ_1 при различных значениях малого параметра ε. Как видно уменьшение параметра

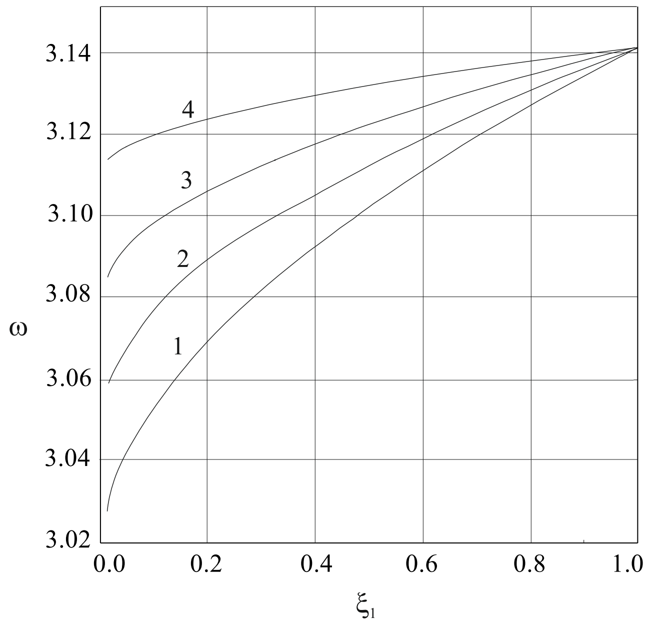

Рис. 1. Зависимость наименьшей безразмерной собственной частоты ω от параметра ξ_1 при различных значениях малого параметра ε : 1 – $\varepsilon = 0.02$; 2 – $\varepsilon = 0.015$; 3 – $\varepsilon = 0.01$; 4 – $\varepsilon = 0.005$;

ξ_1 влечет уменьшение собственной частоты. При этом частота тем меньше, чем больше параметр ε . Поскольку определение ω при малых значениях ξ_1 связано со значительными вычислительными трудностями, мы выполнили расчеты частоты в окрестности $\xi_1 = 0$ с использованием асимптотической формулы (30). На рисунке 2, для сравнения, показаны значеня частоты, найденные точно (сплошная линия) и асимптотически (пунктирная линия) в случае, когда $\varepsilon = 0.02$; . Как видно, погрешность аисмптотичекой формулы (30) очень мала: анализ расчетов показал, что на всем промежутке изменения ξ_1 относительная погрешность не превышает 0.022%.

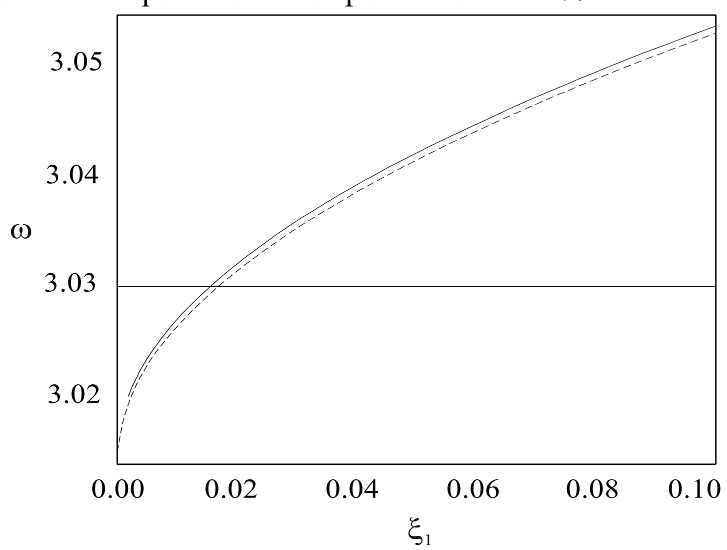

Рис. 2. Значения безразмерной частоты ω, вычисленные с использованием решения уравнения (21) (сплошная линия), а также асимптотической формулы (30) при значении параметра $\varepsilon = 0.02$.

Выводы. С использованием нелокальной двухфазной модели Эрингена исследованы свободные продольные колебания наноразмерной балки для различных граничных условий. Выполнен сравнительный анализ собственных частот, найденных в рамках нелокальных двухфазной, однофазной и «эквивалентной» дифференциальной моделей, показано, что однофазная модель, а также так называемая «эквивалентная» ей дифференциальная модели некорректны, ибо не позволяют удовлетворить граничным условиям и учесть возникающие нелокальные краевые эффекты. Найдены простые асимптотические формулы для собственных частот и форм колебаний для всех вариантов граничных условий. Сравнительный аналих расчетов показал высокую точность найденных асимптотических формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kröner, E. Elasticity theory of materials with long range cohesive forces / E. Kröner // Int. J. Solids Struct. – 1967. –V.3. – P. 731-742.*
2. *Kunin, I.A. The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocation / I.A. Kunin // In: Mechanics of Generalized Continua (Ed. by Kröner). Proceedings of IUTAM Symposium. - New York: Springer, 1968.*
3. *Krumhansl, J.A. Some considerations on the relations between solid state physics and generalized continuum mechanics / J.A. Krumhansl // In: Mechanics of Generalized Continua (Ed. by Kröner). – Berlin: Springer-Verlag. – 1968. - P. 298-331.*
4. *Edelen, D.G.B. Protoelastic bodies with large deformations / D.G.B. Edelen // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1969. – V. 34. – P. 283-300.*
5. *Edelen, D.G.B. On the thermodynamics of systems with nonlocality / D.G.B. Edelen, N. Laws // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1971. – V. 43. – P. 24-35.*
6. *Eringen, A.C. Nonlocal polar elastic continua / A.C. Eringen // Int. J. Eng. Sci. – 1972. –V. 10. - P.1–16.*
7. *Eringen, A.C. On nonlocal elasticity / A.C. Eringen, D.G.B. Edelen // Int. J. Eng. Sci. – 1972. - V.10. –P. 233–248.*
8. *Eringen, A.C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves / A.C. Eringen // J. Appl. Phys. – 1983. – V. 54. – P. 4703–4710.*
9. *Eringen, A.C. Nonlocal Continuum Field Theories / A.C. Eringen. - New York: Springer, 2002.*
10. *Peddieson, J. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology / J. Peddieson, R. Buchanan, R.P. McNitt // International Journal of Engineering Science. – 2003. –V. 41. – P. 305-312.*
11. *Sudak, L.J. Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics / L.J. Sudak // J. Appl. Phys. – 2003. – V. 94 (11). – P. 7281-7287.*
12. *Reddy, J.N. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams / J.N. Reddy // International Journal of Engineering Science. – 2007. – V. 45. – P. 288–307.*
13. *Lu, P. Non-local elastic plate theories / P. Lu, P.Q. Zhang, H.P. Lee, C.M. Wang, J.N. Reddy // Proc. R. Soc. A. -2007. – V. 463. – P. 3225-3240.*
14. *Usuki, T. Beam equations for multi-walled carbon nanotubes derived from Flügge shell theory / T. Usuki, K. Yogo // Proc. R. Soc. Lond. A. – 2009. – P. 1199-1226.*
15. *Wang, C.Y. Free vibrations of multi-walled carbon nanotube / C.Y. Wang, C.Q. Ru, A. Mioduchowski // J. Appl. Phys. – 2005. –V. 97. –P. 114323-114333.*

16. *Zhang, Y.Q. Free transverse vibrations of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity / Y.Q. Zhang, G.R. Liu, X.Y. Xie // Phys. Rev. B. - 2005. – 2005. – V. 71. - P. 195404-1–19540410.*
17. *Xu, M. Free transverse vibrations of nano-to-micron scale beams / M. Xu // Proc. R. Soc. Lond. A. -2006. –V. 426. –P. 2977-2995.*
18. *Wang, Q. Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro- and nano-structures / Q. Wang, K.M. Liew // Physics Letters A. – 2007. -V. 363 (3). – P. 236-242.*
19. *Challamel, N. The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved / N. Challamel, C.M. Wang // Nanotechnology. – 2008. –V. 19. –P. 345703-345710.*
20. *Benvenuti, E. One-dimensional nonlocal and gradient elasticity: Closed-form solution and size effect / E. Benvenuti, A. Simone // Mechanics Research Communications. – 2013.- V. 48. –P. 46-51.*
21. *Fernández-Sáez, J. Bending of Euler-Bernoulli beams using Eringen's integral formulation: A paradox resolved / J. Fernández-Sáez, R. Zaera, J.A. Loya, J.N. Reddy // Int. J. Eng. Sci. –2016. - V.99. –P. 107–116.*
22. *Polyanin, A. Handbook of integral equations / A. Polyanin, A. Manzhirov. – New York: CRC Press. - 2008.*
23. *Mikhasev, G.I. On localized modes of free vibrations of single-walled carbon nanotubes embedded in nonhomogeneous elastic medium / G.I. Mikhasev // ZAMM. -2014. – V. 94 (1-2). – P. 130-141.*
24. *Михасев, Г.И. Свободные локализованные колебания длинной двухстенной углеродной нанотрубки, внедренной в неоднородную упругую среду / Г.И. Михасев, М.Г. Ботогова // Вестник СпбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2016. Вып. 1. – Т. 3 (61). – С. 155-163.*
25. *Васильев, А.Б. Интегральные уравнения / А.Б. Васильев, Н.А. Тихонов. – Москва: Изд-во Московского ун-та. – 1989.- 156 с.*
26. *Romano, G. Constitutive boundary conditions and paradoxes in nonlocal elastic nanobeams / G. Romano, R. Barretta, M. Diaco, F. Marotti de Sciarra // International Journal of Mechanical Sciencies. – 2017.-V. 121. - P. 151-156.*
27. *Eringen, A.C. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves / A.C. Eringen // Int J. Eng. Sci. – 1972. –V.10(5). -P. 425–35.*
28. *Eringen, A.C. Theory of nonlocal elasticity and some applications / A.C. Eringen // Res Mech. – 1987. – V.21. – P.313–342.*
29. *Khodabakhshi, P. A unified integro-differential nonlocal model / P. Khodabakhshi, J.N. Reddy // Int. J. Eng. Sci. - 2015. –V. 95. –P. 60–75.*
30. *Wang, Y.B. Exact solutions for the static bending of Euler-Bernoulli beams using Eringen's two-phase local/nonlocal model / Y.B. Wang, X.W. Zu, H.H. Dai // AIP Adv. - 2016. – V. 6 – P. 085114/22.*
31. *Pisano AA, Fuschi P. Closed form solution for a nonlocal elastic bar in tension. Int. J. Solids. Struct. - 2003. –V. 40. – P. 13–23.*
32. *Eptaimeros, K. G. Nonlocal integral approach to the dynamical response of nanobeams / K.G. Eptaimeros, C.Chr. Koutsoumaris, G.J. Tsamasphyros // International Journal of Mechanical Sciences. – 2016. –V. 115-116. – P. 68-80.*