

ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С УСИЛИВАЮЩЕЙ НАКЛАДКОЙ

Яровая А.В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

В строительстве, транспортном машиностроении широко используются трехслойные элементы конструкций. Эти конструкции изготавливают из различных материалов, среди которых в настоящее время широко распространено применение полимерных, композиционных, функционально-градиентных материалов и т.д. Для уменьшения веса и придания большей жесткости трехслойные элементы могут быть подкреплены ребрами и накладками.

Деформирование трехслойных элементов конструкций при статических и динамических воздействиях исследовалось А. Г. Горшковым, Э. И. Старовойтовым, Д. В. Леоненко, Ю. М. Плескачевским в монографиях и статьях [1–8].

В данной статье исследован цилиндрический изгиб трехслойной прямоугольной ортотропной пластины длиной l и шириной b_0 , усиленной по нижнему слою тонкой накладкой из более жесткого, чем несущие слои, материала (рисунок 1).

Пластина нагружена поперечной нагрузкой $q(x)$. Через $w(x)$ и $u(x)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя вдоль оси ox ; h_k – толщина k -го слоя ($h_3 = 2c$, $k = 1, 2, 3$). Суммарная толщина нижнего слоя

$$h_2^+ = h_2 + h_s H_0(x - x_0) \quad (1)$$

где h_2 – толщина 2-го слоя; h_s – толщина накладки; $H_0(x)$ – функция Хевисайда.

Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях и в накладке справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол, составляющий с координатной осью x величину $\psi(x)$. На торцах пластины предусмотрены жесткие диафрагмы, препятствующие сдвигу слоев. Деформации считаются малыми.

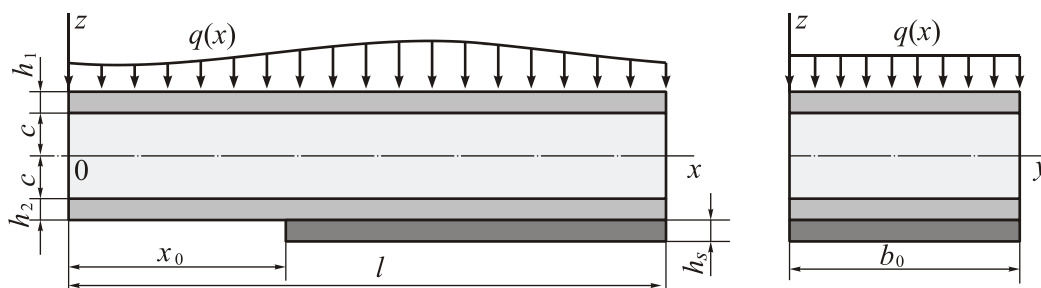


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины с накладкой

С учетом введенных геометрических гипотез продольные перемещения в слоях выражаются через пять искомых функции $w(x, y)$, $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$, $\psi_x(x, y)$, $\psi_y(x, y)$:

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &= u_x + c\psi_x - zw_{,x}; & u_y^{(1)} &= u_y + c\psi_y - zw_{,y} & (c \leq z \leq c + h_1); \\ u_x^{(3)} &= u_x + z\psi_x - zw_{,x}; & u_y^{(3)} &= u_y + z\psi_y - zw_{,y} & (-c \leq z \leq c); \\ u_x^{(2)} &= u_x - c\psi_x - zw_{,x}; & u_y^{(2)} &= u_y - c\psi_y - zw_{,y} & (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (2)$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; $(u_i + c\psi_i)$ – величина смещения внешнего несущего слоя l в направлении i -ой оси за

счет деформации заполнителя, для несущего слоя 2 это смещение равно $(u_i - c\psi_i)$, $i = x, y$; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Уравнения равновесия и силовые граничные условия следуют из принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta A + \delta W = 0 \quad (3)$$

Вариации работ внешней нагрузки и внутренних усилий (напряжений) равны:

$$\begin{aligned} \delta A = \iint_S q \delta w dS; \quad \delta W = \sum_{k=1}^3 \iiint_V \sigma_{ij}^{(k)} \delta \varepsilon_{ij}^{(k)} dV = \sum_{k=1}^3 \iiint_S \left(\int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx}^{(k)} dz + \int_{h_k} \sigma_{yy}^{(k)} \delta \varepsilon_{yy}^{(k)} dz + \right. \\ \left. + 2 \int_{h_k} \sigma_{xy}^{(k)} \delta \varepsilon_{xy}^{(k)} dz + 2 \int_{h_k} \sigma_{xz}^{(k)} \delta \varepsilon_{xz}^{(k)} dz + 2 \int_{h_k} \sigma_{yz}^{(k)} \delta \varepsilon_{yz}^{(k)} dz \right) dS. \end{aligned} \quad (4)$$

В работе [9] с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа и закона Гука для анизотропного тела была получена общая система пяти дифференциальных уравнений равновесия в частных производных для трехслойной пластины с анизотропными слоями без накладки. При цилиндрическом изгибе трехслойной ортотропной пластины с накладкой в этой системе необходимо перемещения с индексом «у» положить равными нулю. В результате, с учетом (1) – (4) для нахождения трех оставшихся перемещений $w(x)$, $\psi(x)$ и $u(x)$ (индекс «x» опущен) получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} [a_3 + a_3^{(s)} H(x - x_0)] w_{,xx} + [a_6 + a_6^{(s)} H(x - x_0)] \psi_{,xx} - [a_7 + a_7^{(s)} H(x - x_0)] w_{,xxx} = 0; \\ [a_7 + a_7^{(s)} H(x - x_0)] w_{,xxx} + [a_3 + a_3^{(s)} H(x - x_0)] \psi_{,xxx} - [a_{21} + a_{21}^{(s)} H(x - x_0)] w_{,xxxx} = -q; \\ [a_6 + a_6^{(s)} H(x - x_0)] w_{,xx} + [a_{24} + a_{24}^{(s)} H(x - x_0)] \psi_{,xx} - \\ - [a_{17} + a_{17}^{(s)} H(x - x_0)] w_{,xxx} - a_5 \psi = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где a_k ($a_k^{(s)}$) – параметры, характеризующие геометрические и упругие свойства слоев (накладки):

$$a_3 = A_4^{(1)} h_1 + 2cA_4^{(3)} + A_4^{(2)} h_2; \quad a_5 = G_{xz}^{(3)} c; \quad a_6 = A_4^{(1)} c h_1 - A_4^{(2)} c h_2;$$

$$a_7 = A_4^{(1)} \left(\frac{1}{2} h_1^2 + c h_1 \right) - A_4^{(2)} \left(\frac{1}{2} h_2^2 + c h_2 \right);$$

$$a_{17} = cA_4^{(1)} \left(\frac{1}{2} h_1^2 + c h_1 \right) + cA_4^{(2)} \left(\frac{1}{2} h_2^2 + c h_2 \right) + \frac{2}{3} c^3 A_4^{(3)};$$

$$a_{21} = A_4^{(1)} \left(c h_1^2 + c^2 h_1 + \frac{1}{3} h_1^3 \right) - A_4^{(2)} \left(c h_2^2 + c^2 h_2 + \frac{1}{3} h_2^3 \right) + \frac{2}{3} c^3 A_4^{(3)};$$

$$a_{24} = A_4^{(1)} c^2 h_1 + A_4^{(2)} c^2 h_2; \quad A_4^{(k)} = \frac{E_x^{(k)}}{1 - \nu_{xy}^{(k)} \nu_{yx}^{(k)}};$$

$$a_3^{(s)} = A_4^{(s)} h_s; \quad a_6^{(s)} = -A_4^{(s)} c h_s; \quad a_7^{(s)} = -A_4^{(s)} \left(\frac{1}{2} h_s^2 + h_2 h_s + c h_s \right);$$

$$a_{17}^{(s)} = cA_4^{(s)} \left(\frac{1}{2} h_s^2 + h_2 h_s + c h_s \right); \quad a_{21}^{(s)} = A_4^{(s)} h_s \left(c(c + 2h_2 + h_s) + h_2 h_s + h_2^2 + \frac{1}{3} h_s^3 \right);$$

$$a_{24} = A_4^{(s)} c^2 h_s; \quad A_4^{(s)} = \frac{E_x^{(s)}}{1 - \nu_{xy}^{(s)} \nu_{yx}^{(s)}},$$

$E_x^{(k)}$, $E_x^{(s)}$ – модуль Юнга материала k -го слоя ($k = 1, 2, 3$) и накладки в направлении оси Ox ; $\nu_{ij}^{(k)}$, $\nu_{ij}^{(s)}$ – коэффициенты Пуассона k -го слоя и накладки в соответствующих направлениях (нумерация параметров принята по работам [17, 18]); запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Система дифференциальных уравнений (5) содержит разрывные коэффициенты за счет функции Хевисайда, входящей в суммарную толщину 2-го слоя (1). Ее решение проводится отдельно во всех областях непрерывности коэффициентов.

В области I ($x < x_0$) функция Хевисайда обращается в ноль, $h_2^+ = h_2$. Система (5) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} a_3 u_{1,xx} + a_6 \psi_{1,xx} - a_7 w_{1,xxx} &= 0; \\ a_7 u_{1,xxx} + a_3 \psi_{1,xxx} - a_{21} w_{1,xxxx} &= -q; \\ a_6 u_{1,xx} + a_{24} \psi_{1,xx} - a_{17} w_{1,xxx} - a_5 \psi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение системы (6):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= C_{21} \operatorname{sh}(\beta_1 x) + C_{31} \operatorname{ch}(\beta_1 x) + \frac{1}{\beta_1} \left(\operatorname{sh}(\beta_1 x) \int g_1 \operatorname{ch}(\beta_1 x) dx - \operatorname{ch}(\beta_1 x) \int g_1 \operatorname{sh}(\beta_1 x) dx \right); \\ w_1 &= \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\alpha_{11} \int \psi_1 dx + a_3 L_4^{-1}(q) + \frac{a_3 C_{11}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{41}}{2} x^2 + C_{51} x + C_{61}; \\ u_1 &= \gamma_{31} \psi_1 + \frac{1}{\alpha_{21}} \left[a_7 L_3^{-1}(q) + \frac{a_7 C_{11}}{2} x^2 \right] + C_{71} x + C_{81}, \end{aligned} \quad (7)$$

где C_{11}, \dots, C_{81} – константы интегрирования;

$$\begin{aligned} g_1 &= \gamma_{21} p + \gamma_{11} \int_0^x q dx + \gamma_{11} C_{11}; \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{a_3 a_5 \alpha_{21}}{\alpha_{21} \alpha_{31} - \alpha_{11}^2}} > 0; \quad \gamma_{11} = \frac{a_3 \alpha_{11}}{\alpha_{21} \alpha_{31} - \alpha_{11}^2}; \\ \gamma_{21} &= \frac{a_6 \alpha_{21} - a_7 \alpha_{11}}{\alpha_{21} \alpha_{31} - \alpha_{11}^2}; \quad \gamma_{31} = \frac{a_{17} a_7 - a_{21} a_6}{\alpha_{21}}; \quad \alpha_{21} \alpha_{31} - \alpha_{11}^2 \neq 0; \\ \alpha_{11} &= a_3 a_{17} - a_6 a_7; \quad \alpha_{21} = a_3 a_{21} - a_7^2; \quad \alpha_{31} = a_3 a_{24} - a_6^2. \end{aligned}$$

$L_3^{-1}(q)$, $L_4^{-1}(q)$ – линейные интегральные операторы:

$$L_3^{-1}(q) = \iint \int q dx dx dx; \quad L_4^{-1}(q) = \iiint \int q dx dx dx dx.$$

В области II ($x \geq x_0$) функция Хевисайда равна единице, $h_2^+ = h_2 + h_3$. Система уравнений равновесия преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} a_3^+ u_{1,xx} + a_6^+ \psi_{1,xx} - a_7^+ w_{1,xxx} &= 0; \\ a_7^+ u_{1,xxx} + a_{17}^+ \psi_{1,xxx} - a_{21}^+ w_{1,xxxx} &= -q; \\ a_6^+ u_{1,xx} + a_{24}^+ \psi_{1,xx} - a_{17}^+ w_{1,xxx} - a_5 \psi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} a_3^+ &= a_3 + a_3^{(s)}; \quad a_6^+ = a_6 + a_6^{(s)}; \quad a_7^+ = a_7 + a_7^{(s)}; \\ a_{17}^+ &= a_{17} + a_{17}^{(s)}; \quad a_{21}^+ = a_{21} + a_{21}^{(s)}; \quad a_{24}^+ = a_{24} + a_{24}^{(s)}. \end{aligned}$$

Решение системы (8) следующее:

$$\begin{aligned} \psi_2 &= C_{22} \operatorname{sh}(\beta_2 x) + C_{32} \operatorname{ch}(\beta_2 x) + \frac{1}{\beta_2} \left(\operatorname{sh}(\beta_2 x) \int g_2 \operatorname{ch}(\beta_2 x) dx - \operatorname{ch}(\beta_2 x) \int g_2 \operatorname{sh}(\beta_2 x) dx \right); \\ w_2 &= \frac{1}{\alpha_{22}} \left[\alpha_{12} \int \psi_2 dx + a_3^+ L_4^{-1}(q) + \frac{a_3^+ C_{12}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{42}}{2} x^2 + C_{52} x + C_{62}; \\ u_2 &= \gamma_{32} \psi_2 + \frac{1}{\alpha_{22}} \left[a_7^+ L_3^{-1}(q) + \frac{a_7^+ C_{12}}{2} x^2 \right] + C_{72} x + C_{82}, \end{aligned} \quad (9)$$

где C_{12}, \dots, C_{82} – константы интегрирования;

$$\begin{aligned} g_2 &= \gamma_{22} p + \gamma_{12} \int_0^x q dx + \gamma_{12} C_{12}; \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{a_3^+ a_5 \alpha_{22}}{\alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2}} > 0; \quad \gamma_{12} = \frac{a_3^+ \alpha_{12}}{\alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2}; \\ \gamma_{22} &= \frac{a_6^+ \alpha_{22} - a_7^+ \alpha_{12}}{\alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2}; \quad \gamma_{32} = \frac{a_{17}^+ a_7^+ - a_{21}^+ a_6^+}{\alpha_{22}}; \quad \alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2 \neq 0; \\ \alpha_{12} &= a_3^+ a_{17}^+ - a_6^+ a_7^+; \quad \alpha_{22} = a_3^+ a_{21}^+ - (a_7^+)^2; \quad \alpha_{32} = a_3^+ a_{24}^+ - (a_6^+)^2. \end{aligned}$$

Решение исходной системы (5) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi_1(x) + [\psi_2(x) - \psi_1(x)]H(x - x_0); \\ w(x) &= w_1(x) + [w_2(x) - w_1(x)]H(x - x_0); \\ u(x) &= u_1(x) + [u_2(x) - u_1(x)]H(x - x_0),\end{aligned}\tag{10}$$

где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ – перемещения, определяемые решениями (7), (9).

Константы интегрирования $C_{11}, \dots, C_{81}, C_{12}, \dots, C_{82}$ определяются из 8 граничных условий на торцах пластины и дополнительных 8 условий равенства перемещений и их производных в сечении $x = x_0$, где изменяется толщина:

$$\begin{aligned}\psi_2(x_0) - \psi_1(x_0) &= 0; \quad \psi_{2,x}(x_0) - \psi_{1,x}(x_0) = 0; \quad \psi_{2,xx}(x_0) - \psi_{1,xx}(x_0) = 0; \\ w_2(x_0) - w_1(x_0) &= 0; \quad w_{2,x}(x_0) - w_{1,x}(x_0) = 0; \quad w_{2,xx}(x_0) - w_{1,xx}(x_0) = 0; \\ u_2(x_0) - u_1(x_0) &= 0; \quad u_{2,x}(x_0) - u_{1,x}(x_0) = 0.\end{aligned}\tag{11}$$

При защемлении правого торца пластины и свободном левом торце граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}\psi_1(0) &= 0; \quad N_1(0) = 0; \quad M_1(0) = 0; \quad M_{1,x}(0) = 0; \\ \psi_2(l) &= 0; \quad w_2(l) = 0; \quad w_{2,x}(l) = 0; \quad u_2(l) = 0.\end{aligned}\tag{12}$$

Таким образом, соотношения (2.5) с учетом условий сопряжения (11) и граничных условий (12) позволяют вычислять перемещения в трехслойной пластине со ступенчато-переменной толщиной при цилиндрическом изгибе.

Числовые результаты получены для трехслойной пластины $l = 1$ м, несущие слои которой – высокопрочные углеродные волокна на эпоксидном связующем ($E_x^{(1,2)} = 1,256 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu_{xy}^{(1,2)} = 0,27$; $\nu_{yx}^{(1,2)} = 0,02$), материал накладки – борные волокна на эпоксидном связующем ($E_x^{(s)} = 2,105 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu_{xy}^{(s)} = 0,21$), наполнитель – фторопласт ($E_x^{(3)} = 2,683 \cdot 10^8$ Па; $G_{xz}^{(3)} = 9 \cdot 10^7$ Па; $\nu_{xy}^{(3)} = \nu_{yx}^{(3)} = 0,49$). Толщины слоев $c = 0,09$ м; $h_1 = 0,03$ м; $h_2 = 0,01$ м; $h_s = 0,01$ м; координата начала накладки $x_0 = 0,5$; интенсивность нагрузки $q = 1$ МПа.

На рис. 2 показано изменение величины и формы прогиба w вдоль оси x в пластине в зависимости от толщины накладки: 1 – $h_s = 0$; 2 – $h_s = 0,01$ м; 3 – $h_s = 0,02$ м. Наличие накладки приводит к значительному уменьшению прогибов, на 11 и 18 % соответственно. Нормальные напряжения в слоях можно уменьшить на 30%.

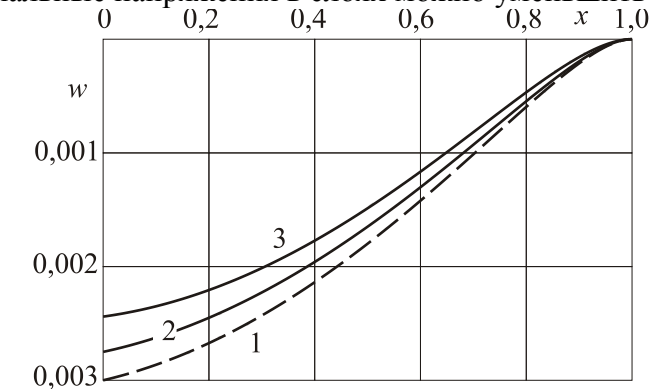


Рис. 2. Прогибы трехслойной пластины с накладкой

Следовательно, применяя в конструкциях усиливающую накладку незначительной толщины, но имеющую большую жесткость по отношению к материалам несущих слоев, можно добиться значительного уменьшения прогибов, а также внутренних усилий и напряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект T16P-010).

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А. Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.
2. Плескачевский, Ю. М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
3. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
4. Горшков, А.Г. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 91–98.
5. Gorshkov, A.G. Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux. / A.G. Gorshkov, E.I. Starovoitov, A.V. Yarovaia // Mechanics of Solids. – 2001. – Vol.36, No.1. – P. 64–69.
6. Горшков, А.Г. Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – № 1. – С. 16–22.
7. Starovoitov, E.I. Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. - 2008. -Vol. 44, № 9. – P. 1032-1040.
8. Leonenko, D.V. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2009. – Vol. 44, № 5. – P. 744–755.
9. Kuznetsova, E.L. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium / E.L. Kuznetsova, D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol. 5, №3. – P. 359–366.