*УДК 532.516*

# ЛОКАЛИЗАЦИЯ НАИБОЛЕЕ ОПАСНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ СЛОЯ ЖИДКОСТИ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ И ИХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ

к.ф.-м.н. **Конон П.Н.,** к.ф.-м.н. **Докукова Н.А.,** маг. **Нестерович С.С.**

*Белорусский государственный университет, Минск*

Процессы, использующие движение жидкости на внешней поверхности вращающегося цилиндра, встречаются при производстве волокнистых материалов центробежно-валковым способом, при нанесении покрытия на вращающуюся цилиндрическую поверхность и в других технологических процессах. В первом из них необходимо проследить за неустойчивостью слоя, во втором – выбрать оптимальное вращение, обеспечивающее равномерное нанесение покрытия.

Исследования устойчивости течений на вращающемся цилиндре проведено в работах [1,2], экспериментальные результаты течений представлены в работах [5,6], нелинейное развитие возмущений в тонком и нетонком слоях исследовано в [3,4]. Общие вопросы математической теории устойчивости гидродинамических течений даны в книге [7]. В данном исследовании особое внимание обращено на определение интенсивности нарастания неустойчивых возмущений, выявлению и локализации наиболее опасных нарастающих волн, экспериментальной верификации результатов.

**Постановка задачи и исследование устойчивости движения.** Исследуем линейную устойчивость слоя на горизонтальном вращающемся с постоянной угловой скоростью $\omega_0$ цилиндре в невязкой постановке. Исследование устойчивости течения в указанном приближении состоит в том, что профиль основного течения удовлетворяет вязким стационарным уравнениям, а само исследование устойчивости проводится с использованием уравнений движения невязкой жидкости. Это позволяет не только упростить решение задачи, но и в итоге явно выделить наиболее опасные возмущения.

Для описания движения невязкой жидкости используются уравнения Эйлера, неразрывности и неизвестной свободной поверхности в безразмерном виде в цилиндрической системе координат $X, Y, \theta$, в которой ось $X$ направлена вдоль оси цилиндра, ось $Y$ – по его радиусу [7]. В качестве характерного размера используется радиус цилиндра $R_0$, а скорости – величина $\omega_0 R_0$. На свободной поверхности $y=h(x,\theta,t)$ выполняется условие Лапласа, выражающее скачок нормальных напряжений, вызванный действием сил поверхностного натяжения. Нормальная компонента скорости жидкости на поверхности цилиндра $y=1$ равна нулю.

Рассмотрим задачу линейной устойчивости слоя жидкости на внешней поверхности горизонтального вращающегося цилиндра. В случае слоя жидкости постоянной толщины, неподвижного относительно поверхности вращающегося цилиндра, при пренебрежении массовых сил стационарные решения имеют вид:

$$U=0,\quad V=0,\quad W=y,\quad p=p(y),\quad h=h_0=const>1. \tag{1}$$

Следуя линейной теории гидродинамической устойчивости, предположим, на стационарный слой (1) наложены бесконечно малые возмущения скорости $\vec{v}=(u,v,w)$, давления $p$ и свободной поверхности $y=h(x,\theta,t)$, периодические по углу $\theta$ :

$$\begin{gathered} u(x,y,\theta,t)=u'(x,y,\theta,t),\quad v(x,y,\theta,t)=v'(x,y,\theta,t), \\ w(x,y,\theta,t)=y+w'(x,y,\theta,t),\qquad p(x,y,\theta,t)=P(y)+p'(x,y,\theta,t), \end{gathered} \tag{2}$$

$$h(x,\theta,t)=h_0+h'(x,\theta,t).$$

Штрихом обозначены малые возмущения скорости, произведениями которых в дальнейшем будем пренебрегать.

Линеаризация уравнений (2) неустановившегося движения позволяет получить уравнения для возмущений:

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+\frac{\partial u'}{\partial \theta}=-\frac{\partial p'}{\partial x},\quad \frac{\partial v'}{\partial t}+\frac{\partial v'}{\partial \theta}-2w'=-\frac{\partial p'}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t}+2v'+\frac{\partial w'}{\partial \theta}=-\frac{1}{y}\frac{\partial p'}{\partial \theta},\quad y\frac{\partial u'}{\partial x}+v'+y\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial \theta}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t}+\frac{\partial h'}{\partial \theta}=v',\, y=h_0+h'.$$

Решение уравнений (3) ищем в виде бегущих в осевом и окружном направлении волн:

$$u'(x,y,\theta,t)=u_1(y)e^{i(\alpha x+n\theta-ct)},\quad v'(x,y,\theta,t)=v_1(y)e^{i(\alpha x+n\theta-ct)},$$

$$w'(x,y,\theta,t)=w_1(y)e^{i(\alpha x+n\theta-ct)},\quad p'(x,y,\theta,t)=p_1(y)e^{i(\alpha x+n\theta-ct)}, \tag{4}$$

$$h'(x,\theta,t)=h_1e^{i(\alpha x+n\theta-ct)}.$$

Здесь $u_1(y),\ \ v_1(y),\ \ w_1(y),\ \ p_1(y),\ \ h_1$ - комплексные амплитуды возмущений, $\alpha$ и $n$ - волновые числа в осевом и окружном направлениях, $c=c_r+ic_i$, $c_i$ - скорость нарастания возмущений. Из линейной невязкой теории гидродинамической устойчивости известно, что при $c_i\neq 0$ течение неустойчиво.

Подставляя (3.4) в уравнения (3.3), получим:

$$i(n-c)u_1=-i\alpha p_1,\quad i(n-c)v_1-2w_1=-\frac{dp_1}{dy},$$

$$i(n-c)w_1+2v_1=-\frac{in}{y}p_1,\qquad i\alpha y u_1+y\frac{dv_1}{dy}+v_1+inw_1=0, \tag{5}$$

$$i(n-c)h_1=v_1.$$

Рассмотрим устойчивость слоя по отношению к бесконечно малым азимутальным возмущениям, т. е. случай, когда $\alpha=0,\ \ u_1=0$. Это обусловлено тем, что наиболее опасными, быстрорастущими, как следует из результатов работ [3,4] являются именно плоские возмущения. Из (5) получим систему для определения амплитуд возмущений:

$$i(n-c)v_1-2w_1=-\frac{dp_1}{dy},\qquad i(n-c)w_1+2v_1=-\frac{in}{y}p_1,$$

$$v_1+y\frac{dv_1}{dy}+inw_1=0,\ \ i(n-c)h_1=v_1. \tag{6}$$

Выражая из первых двух уравнений системы (6) значения $v_1$ и $w_1$, и подставляя в третье уравнение этой системы, получим уравнение для $p_1(y)$, имеющее аналитическое решение при $y\geq 1$.

$$\frac{d^2p_1}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{dp_1}{dy}-n^2\frac{p_1}{y^2}=0,$$

$$p_1(y)=Ay^n+\frac{B}{y^n}. \tag{7}$$

Постоянные $A$ и $B$ связаны условием, что радиальная составляющая амплитуды скорости возмущений $v_1 = 0$ при $y = 1$, так что

$$B = A\frac{(c-n)-2}{(c-n)+2}. \tag{8}$$

Комплексные амплитуды возмущений, как решение системы (6) с учетом (8)) представим в виде:

$$\begin{aligned} v_1(y) &= \frac{-inA}{2+c-n}\left(y^{n-1} - \frac{1}{y^{n+1}}\right), \qquad w_1(y) = \frac{nA}{2+c-n}\left(y^{n-1} - \frac{1}{y^{n+1}}\right), \\ p_1(y) &= A\left(y^n - \frac{c-n-2}{c-n+2}\frac{1}{y^n}\right), \qquad h_1 = \frac{nA}{(c-n)(2+c-n)}\left(h_0^{\,n-1} - \frac{1}{h_0^{\,n+1}}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

На свободной поверхности слоя $h = h(\theta, t)$ выполнено уравнение Лапласа на нормальные напряжения

$$p - p_a = \frac{1}{We}\frac{2}{R_s} \tag{10}$$

где $p_a$ − внешнее давление, $We = \rho R_0^3 \omega_0^2 / \sigma$ − число Вебера, $\rho$ − плотность жидкости, $\sigma$ − коэффициент поверхностного натяжения, а выражение для кривизны поверхности в полярных координатах имеет вид:

$$\frac{2}{R_s} = \left(h^2 + 2\left(\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2 - h\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}\right)\left(\left(\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2 + h^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Линеаризация уравнения Лапласа и соотношение (4) позволяет получить уравнение для амплитуды возмущений давления:

$$p_1(h_0) = -\frac{1}{We}\frac{1}{h_0^2}\left(h_1(1-n^2)\right) - h_0 h_1. \tag{11}$$

Подставляя в (11) значения амплитуды возмущения поверхности и давления из (9), получаем характеристическое уравнение для определения собственного значения $c$ :

$$\begin{gathered} (1+h_0^{2n})c^2 - 2c(nh_0^{2n} - h_0^{2n} + n + 1) + n(h_0^{2n} - 1)D_n + (n^2 - 2n)h_0^{2n} + n^2 + 2n = 0, \\ D_n = \frac{1}{We}\frac{1}{h_0^3}(1-n^2) + 1. \end{gathered} \tag{12}$$

Течение будет устойчивым, если $c_i = 0$, и дискриминант квадратного уравнения (12) неотрицателен. Тогда

$$(h_0^{2n} - 1) - n(h_0^{2n} + 1)D_n \geq 0.$$

Отсюда выводим условие устойчивости течения по отношению к бесконечно малым азимутальным возмущениям в невязкой постановке:

$$We \leq \frac{n^2 - 1}{h_0\left(1 - \frac{1}{n}A_n\right)}, \quad A_n = \frac{h_0^{2n} - 1}{h_0^{2n} + 1}. \tag{13}$$

Вычисление значений $c_i$ из (12) позволяют получить соотношение для определения максимальных растущих колебаний:

$$c_i^2 = A_n\left[n\left(\frac{(1-n^2)}{h_0^3 We}+1\right)-A_n\right] \qquad (13)$$

**Результаты исследования устойчивости, определение максимальных растущих возмущений.** Результаты исследований вычислений, основанные на анализе соотношений (13)- (14), сведены таблицы и представлены в графическом виде.

В таблице 1 представлены результаты исследования невязкой неустойчивости движения слоя глицерина на внешней поверхности цилиндра радиуса $R_0 = 2,5$ см, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 2\pi n_0$, в зависимости от толщины слоя $h_0$.

Таблица 1 – Результаты исследования устойчивости при $h_0 = 1,01$ и $h_0 = 1,1$

| $n_0(об/с)$ | $\omega_0(рад/с)$ | $We$ | $N, h_0 = 1,01$ | $N, h_0 = 1,1$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6,28 | 11,10 | 3 | 3 |
| 2 | 12,57 | 44,41 | 6 | 7 |
| 3 | 18,85 | 99,93 | 10 | 11 |
| 4 | 25,27 | 177,65 | 13 | 14 |
| 5 | 31,42 | 277,58 | 16 | 18 |

Из таблицы 1 следует, что невязкая неустойчивость проявляется при модах возмущений $n \le N$, а длинноволновые возмущения с $n > N$ - устойчивы. С ростом относительной толщины слоя $h_0$ области неустойчивых возмущений растут вследствие возрастающего влияния центробежных сил. Так, при изменении средней толщины слоя с 1,01 до 1,1 область неустойчивых возмущений при *We*=277,58 увеличивается с $n \le 16$ до $n \le 18$.

Анализ соотношения (13) позволяет разделить области устойчивых и неустойчивых возмущений при различных значениях волнового числа $n$. На рисунке 1 изображены графики функции $lg(We(h_0))$ в зависимости от различных значений моды возмущений $n$, изменяющейся от 2 (нижняя кривая) до 10 (верхняя кривая). Области неустойчивых возмущений для каждого случая располагается ниже соответствующего графика.

Исследуем наиболее опасные максимально растущие возмущения с помощью выражения (14). На рисунке 2а) изображены зависимости квадрата коэффициента нарастания неустойчивых возмущений слоя от дискретных значений мод $n$ азимутальных волн при трех различных значениях относительной толщины: $h_0 = 1,01$ (нижний график), $h_0 = 1,05$ и $h_0 = 1,1$ (верхний график) при *We*=277,58. Нарастание неустойчивых азимутальных волн и расширение областей неустойчивости с увеличением влияния инерционных возмущений и числа *We* отражено на рисунке 2б).

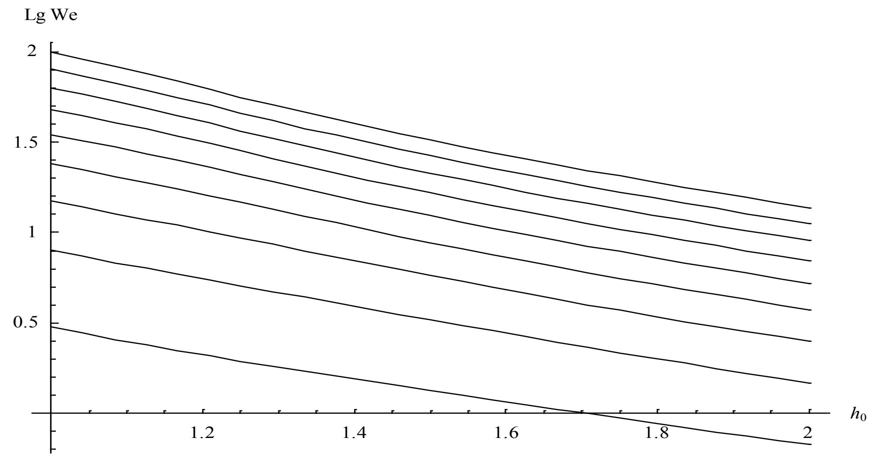
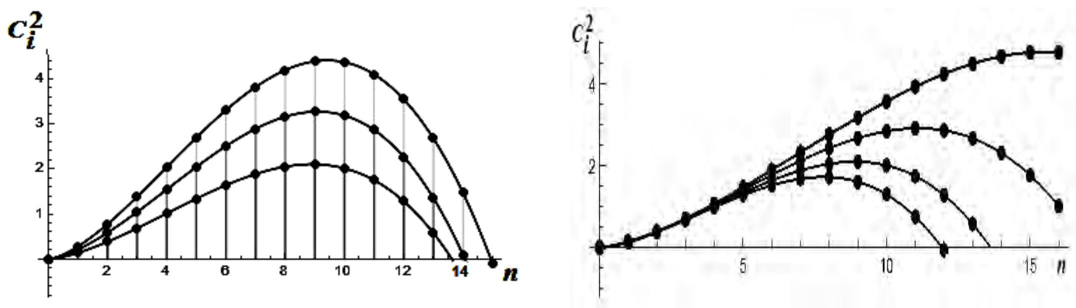



*Рис. 1. Зависимость $lg(We)$ от толщины слоя $h_0$ при значениях волнового числа n=2 (нижний график) до n=10 (верхний график)*




*а) б)*

*Рис. 2. Зависимость квадрата коэффициента нарастания неустойчивых возмущений $c_i^2$ от дискретных значений мод n а) при We=277,58 и $h_0 = 1{,}01$ — нижний график, выше графики соответственно при $h_0 = 1{,}05$, $h_0 = 1{,}1$; б) при $h_0 = 1{,}1$ и различных значениях числа We : We=11,10 — нижний график, выше графики соответственно при We=99,93, We=277,58, We=544,06*

Анализ двух последних рисунков позволяет определить области неустойчивости и выделить значения мод азимутальных возмущений с максимальным коэффициентом роста $c_i$.Так, при $We$=99,93 и $h_0 = 1{,}1$ неустойчивыми являются возмущения с модой $n \le 13$, а наиболее растущими - колебания с $n$=9.

**Экспериментальная верификация.** Исследование соотношения (14) позволяет сделать вывод, что если $We_N < We < We_{N+1}$, то азимутальные возмущения с $n \le N$ неустойчивы, а с $n > N$ — устойчивы. В результате решения линейной задачи гидродинамической устойчивости получено, что квадрат коэффициента нарастания неустойчивых возмущений в случае идеальной жидкости имеет вид (14). Правая часть (14) обращается в нуль при $n$=0 и меньше нуля при $n$=$N$+1, поэтому при некотором промежуточном значении $0 < n_* < N+1$ коэффициент нарастания $c_i$ имеет максимум. Так, например, при $We$=47, $h_0$=1,0945 максимальное значение $c_i^2(n)$ достигается при $n_*$=5 и $c_i^2(n) < 0$ при $n \ge 8$. Можно ожидать, что соответствующее этому $n_*$ возмущение будет наиболее неустойчивым и при прочих равных условиях реализуется в эксперименте.

На графике 3 представлено сравнение экспериментальных данных исследования плоских слоев глицерина на вращающемся цилиндре [5,6] при $\sigma$ =0,07 н/м , $T$=20°С с теоретическими по дискретным модам, величина которых растет с увеличением влияния инерционных сил и числа $We$. Сравнение дает удовлетворительное соответствие.

Экспериментальные результаты получены с фотографий, а наиболее нарастающие моды – с учетом формулы (14). Некоторое рассогласование результатов вычисленной и экспериментально наблюдаемой моды *n* объясняется неучетом вязкости и силы тяжести при выводе формулы (14).

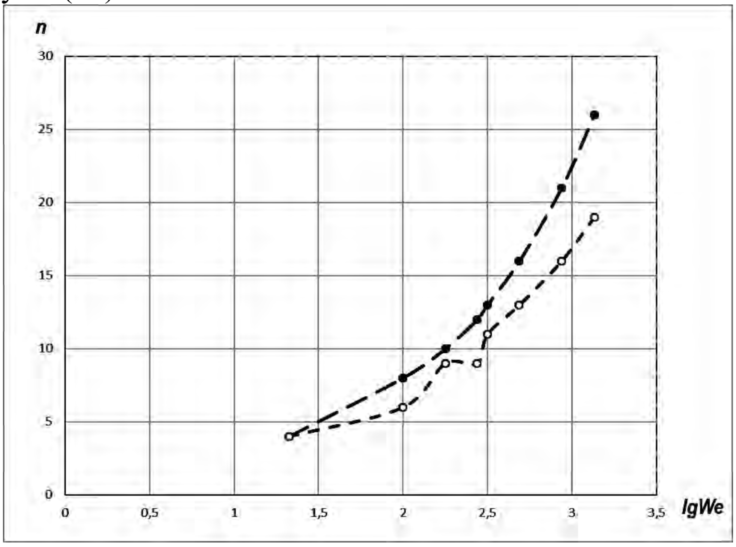



*Рис. 3. Определение моды максимально растущих возмущений n в зависимости от числа We: жирные точки – теоретический расчет, светлые точки – экспериментальная кривая*

На рисунке 4 представлено фото слоя глицерина на цилиндре радиуса 2,5 см, вращающемся с угловой скоростью $n_0 = 3$ об/сек. Сравнение по модам азимутальных возмущений с аналитическими результатами дает удовлетворительное согласование, что следует из рисунка 3.

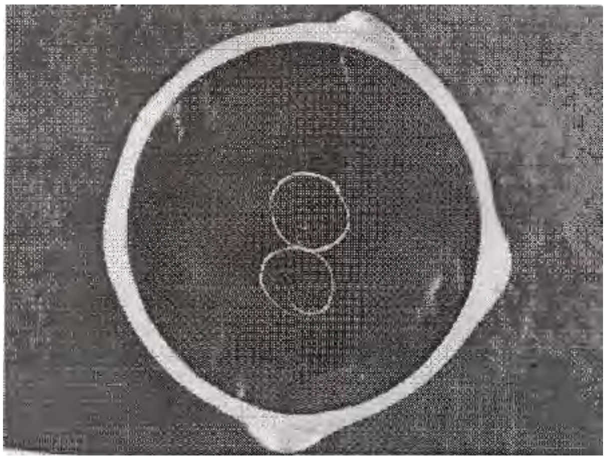


*Рис. 4. Возмущения слоя глицерина на цилиндре радиуса 2,5 см, вращающемся с угловой скоростью $n_0 = 3$ об/сек*

Таким образом, в экспериментах наблюдаются оптимальные возмущения, соответствующие неустойчивым модам, максимально нарастающие во времени согласно теории гидродинамической устойчивости.

*Работа выполнена в рамках задания 2.48 ГПНИ Беларуси «Энергетические системы, процессы и технологии».*

**ЛИТЕРАТУРА**

1. *Chia-Shun Yih Instability of a rotating liquid film with a free surface //Proc. Roy. Soc., Vol. A 258, 1960, p. 1149-1155.*
2. *Pedley T.I. The stability of rotating flows with a cylindrical free surface // J. of Fluid Mech. Vol. 30, Part I, 1967, p.127-147.*
3. *Епихин В.Е., Конон П.Н., Шкадов В.Я. О возмущенном движении слоя вязкой жидкости на поверхности вращающегося цилиндра // ИФЖ-1994.- Т.66, N 6.-С. 689-694.*
4. *Evans P.L., Schwartz L.W., Roy R.V. Three-dimensional solutions for coating flow on a rotating horizontal cylinder: Theory and experiment// Physics of fluids, 17, 2005.*
5. *Кулаго А.Е. и др. Экспериментальное и теоретическое исследование слоя жидкости на вращающемся цилиндре // Сб. трудов ВНИПИ Теплопроект. М., 1981. - С. 76-81.*
6. *Конон П.Н., Кулаго А.Е., Докукова Н.А. Экспериментальные и теоретические исследования механизма образования металлических и минеральных волокон/ VI Международный симпозиум по трибофатике. Минск, 2010 г., С. 333-335.*
7. *Шкадов В.Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости // Ин-т механики МГУ. Научн. тр.- М., 1973. Вып. 25.- 192 с.*