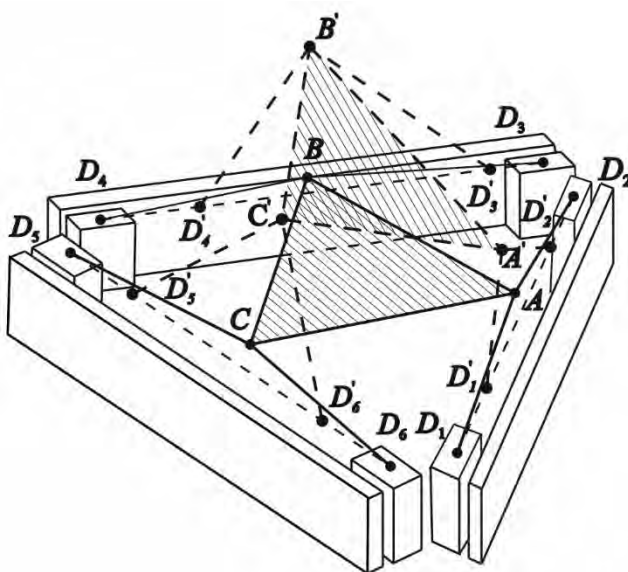


## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО МАНИПУЛЯТОРА С ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ\*

проф. Карпович С.Е., студ. Войтов А.Ю., маг. Нестеренко В.Н., маг. Манин А.С.

*УО «Белорусский государственный университет информатики  
и радиоэлектроники», Минск*

**Введение.** В настоящей статье рассматривается предложенный параллельный манипулятор с шестью степенями свободы на гибридном приводе прямого действия [1, 2], содержащем жёсткое треугольное основание с тремя магнитными направляющими для шести линейных подвижных координатных электромагнитных модулей. Структурно-кинематическая схема параллельного манипулятора приведена на рис. 1.



*Рис. 1. Схема параллельного манипулятора с шестью степенями свободы*

Особенностью схемы является предложенная конфигурация гибридного привода со спаренными координатными модулями на каждой из трёх направляющих, линейные перемещения которых  $s_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ , как задаваемые функции положения ведущих звеньев исполнительного механизма параллельной кинематики, преобразуются в шесть независимых между собой координатных функций положения подвижного исполнительного элемента, треугольной платформы  $ABC$ , включая три линейных  $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$  и три угловых  $\varphi, \theta, \psi$ .

**Расчётная схема.** Формальная постановка прямой задачи [3] состоит в том, что предполагаются заданными в системе координат  $S_0$  фиксированные положения точек  $M, N$  и  $P$  вершин треугольного гибридного привода, определяющих направляющие  $MN, NP$  и  $PM$  для подвижных управляемых модулей, положение которых задаётся управляющими функциями положения, соответственно точек  $D_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ . В результате решения прямой задачи необходимо определить функции положения и ориентации платформы  $ABC$  в зависимости от управляющих функций и конфигурации механизма параллельной кинематики. Расчётная схема с принятыми для формирования математической модели системами координат  $S_0$  и  $S_1$ , связанных со звеньями исполнительного механизма, представлена на рис. 2.

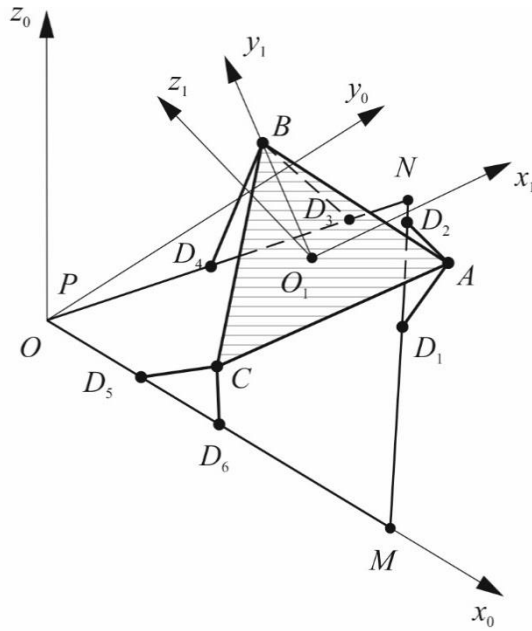


Рис. 2. Расчётная схема параллельного манипулятора

С учётом того, что плоскость треугольника  $MNP$  совмещена с координатной плоскостью  $x_0Oy_0$  (рис. 2) получим координатное представление точек  $M, N, P$  в виде:  $M(x_M, y_M, 0), N(x_N, y_N, 0), P(x_P, y_P, 0)$ . Не нарушая общности решения прямой задачи кинематики, примем линейные размеры сторон треугольника  $ABC$  равными между собой и равными  $a$ . Длины промежуточных звеньев (шатунов) механизма параллельной кинематики, примем тоже равными между собой и равными  $l$ . То есть  $D_1A = D_2A = D_3B = D_4B = D_5C = D_6C = l$ . По этим исходным данным будем решать прямую задачу кинематики, как позиционную параметрическую, заключающуюся, в нашем случае, в нахождении координат положения точек  $A, B$  и  $C$  подвижной треугольной платформы  $ABC$ , выраженных в неподвижной системе координат  $S_0(x_0, y_0, z_0)$  в зависимости от параметрического задания положения шести линейных подвижных модулей.

**Математическая модель.** Для решения поставленной задачи вначале необходимо получить аналитическое параметрическое задание положения шести подвижных линейных модулей, характеризуемых положением точек  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) в системе координат  $S_0$ . Для этого в системе координат  $S_0$  зададим направляющие векторы  $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$  возможных перемещений парных подвижных линейных модулей по направляющим  $MN, NP$  и  $PM$  в виде:

$$\begin{aligned} \vec{q}_1 &= \overrightarrow{MN} = (x_N - x_M, y_N - y_M, 0), \\ \vec{q}_2 &= \overrightarrow{NP} = (x_P - x_N, y_P - y_N, 0), \\ \vec{q}_3 &= \overrightarrow{PM} = (x_M - x_P, y_M - y_P, 0). \end{aligned} \quad (1)$$

На основании условия коллинеарности соответствующей направляющей и вектора перемещения, расположенного на ней линейного подвижного модуля окончательно получим параметрическое представление положения точек  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) в виде:

$$\begin{aligned}
x_{D_1} &= \lambda_1(x_N - x_M) + x_M, & y_{D_1} &= \lambda_1(y_N - y_M) + y_M, \\
x_{D_2} &= \lambda_2(x_N - x_M) + x_M, & y_{D_2} &= \lambda_2(y_N - y_M) + y_M, \\
x_{D_3} &= \lambda_3(x_P - x_N) + x_N, & y_{D_3} &= \lambda_3(y_P - y_N) + y_N, \\
x_{D_4} &= \lambda_4(x_P - x_N) + x_N, & y_{D_4} &= \lambda_4(y_P - y_N) + y_N, \\
x_{D_5} &= \lambda_5(x_M - x_P) + x_P, & y_{D_5} &= \lambda_5(y_M - y_P) + y_P, \\
x_{D_6} &= \lambda_6(x_M - x_P) + x_P, & y_{D_6} &= \lambda_6(y_M - y_P) + y_P,
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  - параметры, определяющие положения соответствующих точек  $D_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  на направляющих треугольного гибридного привода. При этом без учёта линейных размеров модулей теоретический диапазон изменения  $\lambda_i$  будет следующим:  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ . Из условия отсутствия геометрической интерференции парных подвижных модулей при их независимом движении между их параметрами  $\lambda_i$  должны выполняться условия:  $\lambda_{2k-1} < \lambda_{2k}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Это значит, что все модули, обозначаемые  $D_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  с нечётными индексами, будут иметь параметры  $\lambda$  меньшие, чем параметры  $\lambda$  с чётными индексами. Приняв начальные значения всех  $\lambda_i^0 = 0$  из выражений (2) получим текущие траекторные задания всех входных переменных  $s_i$ , показанных на рис. 2 в следующем виде:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \lambda_1 \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}, \\
s_2 &= \lambda_2 \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}, \\
s_3 &= \lambda_3 \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2}, \\
s_4 &= \lambda_4 \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2}, \\
s_5 &= \lambda_5 \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2}, \\
s_6 &= \lambda_6 \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

При заданных входных переменных  $s_i$  по формулам (3) могут быть рассчитаны соответствующие параметры  $\lambda_i$ , а затем по ним однозначно рассчитываются координаты всех точек  $D_i$ , характеризующих положения подвижных модулей гибридного привода. Положения искоемых точек  $A, B$  и  $C$  зависят одновременно от положения точек  $D_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  и текущей конфигурации реконфигурируемого механизма параллельной кинематики (рис. 1). В рассматриваемом случае механизм параллельной кинематики содержит треугольное звено  $ABC$  и шесть связанных с ним подвижных шатунов  $AD_1, AD_2, BD_3, BD_4, CD_5, CD_6$ . Полное условие замкнутости такой кинематической цепи с замыканием в точках  $D_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  подвижных управляемых модулей будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_{D_1} - x_A)^2 + (y_{D_1} - y_A)^2 + (z_{D_1} - z_A)^2 = l^2 \\ (x_{D_2} - x_A)^2 + (y_{D_2} - y_A)^2 + (z_{D_2} - z_A)^2 = l^2 \\ (x_{D_3} - x_B)^2 + (y_{D_3} - y_B)^2 + (z_{D_3} - z_B)^2 = l^2 \\ (x_{D_4} - x_B)^2 + (y_{D_4} - y_B)^2 + (z_{D_4} - z_B)^2 = l^2 \\ (x_{D_5} - x_C)^2 + (y_{D_5} - y_C)^2 + (z_{D_5} - z_C)^2 = l^2 \\ (x_{D_6} - x_C)^2 + (y_{D_6} - y_C)^2 + (z_{D_6} - z_C)^2 = l^2 \\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = l^2 \\ (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = l^2 \\ (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = l^2 \end{array} \right. \quad (4)$$

Система нелинейных уравнений (4) содержит 9 уравнений с 9-ю неизвестными. В качестве неизвестных выступают искомые координаты трёх точек  $A, B, C$ , положение которых полностью определяется положением задаваемых точек  $D_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  на управляемых модулях привода. Решая систему нелинейных уравнений (4) численными методами, например, используя вычислительные инструменты среды MATLAB, окончательно получим искомые координаты  $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$ . При решении систем такого размера как (4) возникают сложности, связанные с проблемой сходимости и объёмом вычислений используемых вычислительных алгоритмов, а также многоэкстремальностью целевой функции в области поиска решения. Также надо учитывать, что при разработке алгоритмов решения задач кинематики, предназначенных для встраивания в программное обеспечение реальных систем управления необходимо стремиться к высокой адекватности алгоритмов, абсолютной их сходимости и минимальной вычислительной процедуре. В связи с вышесказанным в настоящей работе были проведены аналитические исследования разработанного алгоритма решения прямой задачи кинематики, основанного на системе из девяти нелинейных уравнений (4) с целью сокращения и оптимизации вычислительной процедуры. Для формирования уравнений замкнутости было предложено воспользоваться методом условного размыкания [1], на основании которого были получены расчётные уравнения прямой задачи кинематики с минимальным числом уравнений и неизвестных. Это стало возможным так же благодаря предложенному формализованному математическому описанию отдельных разомкнутых параллельных кинематических цепей, аналитические условия замкнутости которых на сферические шарниры управляемых модулей движения нами формировались через введённые в рассмотрение обобщённые углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , определяющие текущее угловое положение треугольного контура каждой из трёх параллельных кинематических цепей. Расчётная схема задания углов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  представлена на рис. 3, на примере отдельного конкретного фрагмента параллельной кинематической цепи  $D_1AD_2$ .

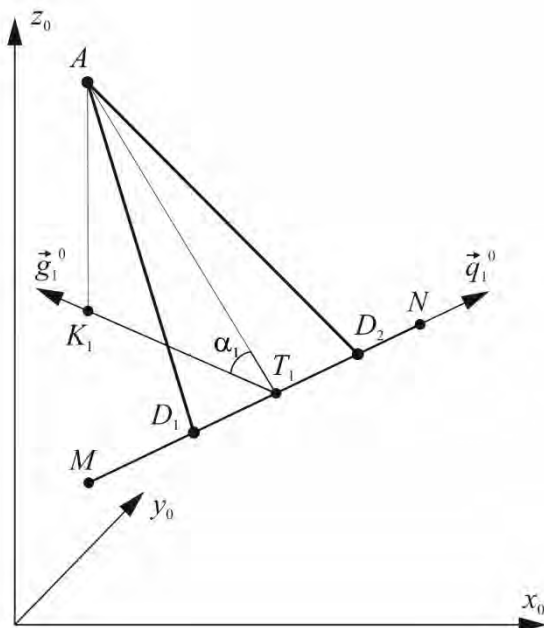


Рис. 3. Векторное представление одного параллельного фрагмента манипулятора

В результате этого стало возможным использование математического описания условия размыкания не всего исполнительного механизма общим условием в виде (4), а выделением параллельных кинематических цепей и формированием отдельно для каждой из них аналитических условий замкнутости, через соответствующие обобщённые углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Для вывода, не нарушая общности решения, рассмотрим конкретный фрагмент параллельной кинематической цепи исполнительного механизма, например  $D_1AD_2$ , представленный на рис. 3, из которого следует, что два условия кинематических связей, налагаемых звеньями  $D_1A$  и  $D_2A$ , вошедшие в виде двух уравнений в систему (4) можно заменить одним аналитическим условием через переменный угол  $\alpha_1$ , тем самым сократив в системе уравнений (4) два уравнения и два неизвестных. Аналогичная ситуация и с математическим описанием параллельных кинематических цепей  $D_3BD_4$  и  $D_5CD_6$ . Аналитические выражения кинематических связей в этих цепях через соответствующие углы  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  приводят к сокращению ещё четырёх уравнений и четырёх неизвестных в системе (4).

**Алгоритмизация прямой задачи кинематики.** Таким образом, полное решение прямой задачи кинематики будет сведено к решению системы из трёх вместо девяти нелинейных уравнений с тремя вместо девяти неизвестными  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . При этом алгебраическая структура уравнений в системе из трёх уравнений и в системе из девяти уравнений практически одинакова. Рассмотрим подробно вывод базовой системы из трёх уравнений на основе алгоритмизации параллельного фрагмента  $D_1AD_2$ . Для этого по уже найденному из (1) направляющему вектору  $\vec{q}_1$  найдём его орт  $\vec{q}_1^{-0}$  по выражению:

$$\vec{q}_1^{-0} = (m_1, n_1) = \left( \frac{x_N - x_M}{MN}, \frac{y_N - y_M}{MN}, 0 \right) \quad (5)$$

где  $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$ .

Аналогично для двух других направляющих из выражения (1) найдём:

$$\vec{q}_2^{-0} = (m_2, n_2) = \left( \frac{x_P - x_N}{PN}, \frac{y_P - y_N}{PN}, 0 \right) \quad (6)$$

где  $PN = \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2}$ .

А также получим:

$$\vec{q}_3^0 = (m_3, n_3) = \left( \frac{x_M - x_P}{MP}, \frac{y_M - y_P}{MP}, 0 \right) \quad (7)$$

где  $MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}$ .

Для представления расчётной модели решения прямой задачи кинематики через обобщённый переменный угол  $\alpha_1$ , согласно рис. 3, необходимо задать в середине переменного отрезка  $D_1D_2$  в точке  $T_1$  вектор  $\vec{g}_1^0$ , а лучше орт этого вектора  $\vec{g}_1^0$ , перпендикулярный орту  $\vec{q}_1^0$ . Из условия ортогональности этих ортов ( $\vec{q}_1^0 \perp \vec{g}_1^0$ ) получим:  $\vec{g}_1^0 = (-n_1, m_1)$ . Аналогично этому получим, что орты  $\vec{g}_2^0$  и  $\vec{g}_3^0$  будут равны:  $\vec{g}_2^0 = (-n_2, m_2)$  и  $\vec{g}_3^0 = (-n_3, m_3)$ . С учётом найденных ортов по расчётной модели, представленной на рис. 2 и рис. 3 окончательно получим искомые координаты точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  через им соответствующие обобщённые углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Так для точки  $A$  будет справедливо следующее векторное её представление:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_M + \overrightarrow{MT_1} + \overrightarrow{T_1A}, \quad (8)$$

или в координатном представлении в системе координат  $S_0$  из (8) окончательно получим:

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{1}{2}(x_{D_1} + x_{D_2}) - n_1 AT_1 \cos \alpha_1, \\ y_A &= \frac{1}{2}(y_{D_1} + y_{D_2}) + m_1 AT_1 \cos \alpha_1, \\ z_A &= AT_1 \sin \alpha_1, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $AT_1 = \sqrt{AD_1^2 - \frac{1}{4}((x_{D_1} - x_{D_2})^2 + (y_{D_1} - y_{D_2})^2)}$ .

Аналогично для точки  $B$  окончательно получим её координаты:

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{2}(x_{D_3} + x_{D_4}) - n_2 BT_2 \cos \alpha_2, \\ y_B &= \frac{1}{2}(y_{D_3} + y_{D_4}) + m_2 BT_2 \cos \alpha_2, \\ z_B &= BT_2 \sin \alpha_2, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $BT_2 = \sqrt{AD_3^2 - \frac{1}{4}((x_{D_3} - x_{D_4})^2 + (y_{D_3} - y_{D_4})^2)}$ .

Координата точки  $C$  окончательно найдём из следующих выражений:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{2}(x_{D_5} + x_{D_6}) - n_3 CT_3 \cos \alpha_3, \\ y_C &= \frac{1}{2}(y_{D_5} + y_{D_6}) + m_3 CT_3 \cos \alpha_3, \\ z_C &= CT_3 \sin \alpha_3, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $CT_3 = \sqrt{CD_5^2 - \frac{1}{4}((x_{D_5} - x_{D_6})^2 + (y_{D_5} - y_{D_6})^2)}$ .

Из трёх выражений (9)-(11) видно, что координаты всех трёх точек зависят только от переменных  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , которые, в свою очередь, определяются замыканием соответствующих трёх параллельных кинематических цепей на вершины треугольника  $ABC$ . С учётом этого условия кинематического замыкания будут выражаться тремя уравнениями вида:

$$\begin{cases} (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = a^2 \\ (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = a^2 \\ (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = a^2, \end{cases} \quad (12)$$

где  $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$  - координаты соответствующих точек  $A, B, C$  получаемые по выражениям (9)-(11) через искомые обобщённые углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Так как система (12) представляет собой систему из трёх нелинейных трансцендентных уравнений с тремя неизвестными углами  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , которая не имеет аналитического точного решения, то решать её необходимо численными методами. Проведенный анализ и тестовый и расчёт показали, что численные методы, реализованные в среде MATLAB, вполне обеспечивают решение системы (12) с высокой сходимостью результатов и значительно меньшим объемом вычислений чем при решении системы (4). Далее получаемые в результате численного решения углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  необходимо подставить в выражения (9)-(11) и получить текущие координаты точек  $A(x_A, y_A, z_A)$ ,  $B(x_B, y_B, z_B)$  и  $C(x_C, y_C, z_C)$ , однозначно определяющие положение платформы  $ABC$  в системе координат  $S_0$ .

*Работа выполнялась в рамках гранта БРФФИ № T16-M108 «Мехатронные системы параллельной кинематики на кольцевом приводе прямого действия».*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович, С.Е. Системы перемещений на основе привода прямого действия : моногр. / С.Е. Карпович, В.В. Жарский, И.В. Дайняк. – Минск : БГУИР, 2008. – 239 с.
2. Математическая модель кинематики для системы перемещений на кольцевом приводе прямого действия / С.Е. Карпович, А.Ю. Войтов, В.В. Кузнецов, В.В. Поляковский // Теоретическая и прикладная механика. – 2016. – №31. – С. 156–161.
3. Heimann, B. Mechatronika. Komponenty, metody, przyklady / B. Heimann, W. Gerth, K. Popp. – Warszawa : PWN, 2001. – 351 s.