

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В МИКРОСЛОИСТОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ ХРУПКОМ И ПЛАСТИЧЕСКОМ РАЗРУШЕНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

¹Плескачевский Ю.М., ²Чигарева Ю.А.

¹Национальная академия наук Беларуси, Минск

²Белорусский государственный аграрнотехнический университет, Минск

Ключевые слова: пластичность, разрезы, разрушение, коэффициенты интенсивности напряжений, ортотропность.

Разрушение элементов конструкций из композитных материалов под воздействием резкого изменения температуры может происходить по хрупкой или пластической схемам в зависимости от физико-механических свойств материала. Знание типа разрушения позволяет прогнозировать поведение конструкции в предельном состоянии, что важно, например, в случае аварийных ситуаций при резкой смене температурных воздействий. В этом случае разрушение по пластической схеме может быть предпочтительнее с точки зрения живучести конструкции и сохранения экологии окружающей среды. При авариях на ядерных, химических реакторах при ликвидации аварии могут возникать резкие перепады температуры, при которых элементы реакторов могут разрушаться хрупко или пластически.

1. Схема пластического разрушения.

В случае, если предельное состояние возникает в пластическом материале, то в рассматриваемой задаче для достаточно широкой пластины в приближении эффективной среды может в среднем реализоваться схема линий скольжения, изображенная на рис. 1. Это следует из эквивалентности в определенных случаях температурного и силового нагружения [1]. В рассматриваемой задаче симметричное охлаждение пластины от границ $y = \pm H$ можно моделировать растяжением пластины симметричными нагрузками, нестационарность температурного поля можно учесть, считая, что кинематика пластины соответствует растяжению со скоростью V в направлениях $y \sim \pm \infty$. Пусть микронеоднородный материал пластины в среднем однородный, изотропный, тогда у кончиков разрезов возникают симметричные картины полос скольжения, которые строятся самоподобным образом до тех пор, пока пластические зоны не соединяются в центре пластины. Вводя коэффициент C -объемной концентрации пластического материала в виде отношения объема тела в пластическом состоянии V_p к общему

объему V_0 (площади) пластины - $C = \frac{V_p}{V_0}$ можем считать, что когда пластические зоны

смыкаются происходит макроскопическое необратимое формоизменение пластины, которое можно трактовать как перколяцию пластичности в широком смысле. Образование глобальной сети линий скольжения, трактуемое как развитое пластическое течение, находит объяснение в процессах, самоорганизующихся полей дислокаций и как следствие возникновения пластических кластеров фрактальной структуры. Пластическое макродеформирование рассматривается как потеря устойчивости дислокационной конфигурацией и переход ее в другое равновесное состояние, характеризуемой геометрически макроскопической сеткой линий скольжения.

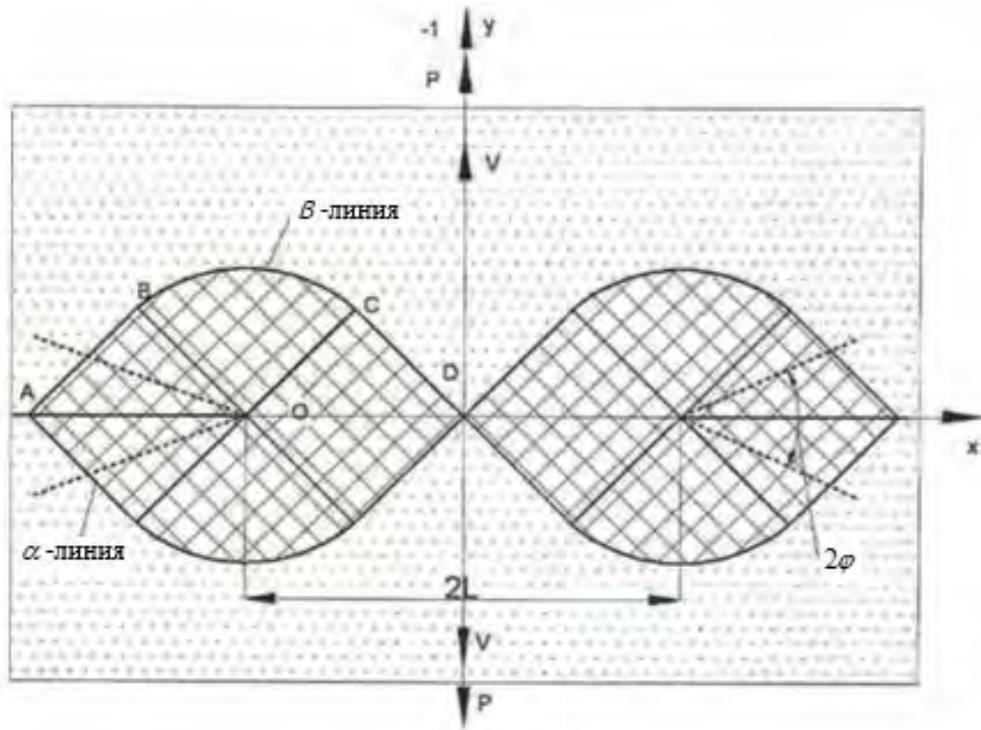


Рис. 1. Схема пластического состояния в пластине с разрезом

Охлаждение полосы инициирует развитие пластических зон в окрестности кончиков разрезов, причем рост пластической зоны происходит самоподобным образом. Используя термосиловую аналогию рассмотрим эквивалентную схему при кинематическом воздействии, эквивалентном термическому [1].

Тогда поле линий скольжения имеет вид, изображенный на рис. 1.

Условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2 = 4k^2 \quad (1.1)$$

удовлетворяется, если выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - k \sin 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma + k \sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

где в $\triangle OAB$ $\sigma = k, \theta = -\pi/4$, в $\triangle ODC$ $\sigma = k(1 + \pi), \theta = -3/4\pi$, тогда

$$\sigma_x = k\pi, \sigma_y = k(2 + \pi) \quad (1.3)$$

Предельному состоянию соответствует

$$P_{*np}^0 = 4kh \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = P_{*np}^0 \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.4)$$

Здесь P_{*np}^0 – предельная нагрузка для полосы без разрезов ширины $2h$.

Скорости пластического течения точек полосы выражаются через макроскопическую скорость V растяжения полосы. В силу симметрии точки на линии OD имеют нулевую скорость вдоль оси y . Так на границе CD нормальная составляющая скорости непрерывна, тогда вдоль CD она постоянна и равна $\frac{1}{\sqrt{2}}V$. Из условия того, что

$u = u(\beta), v = v(\alpha)$ (α, β – координаты вдоль линий скольжения), что в

$\Delta ODCu = -\frac{1}{\sqrt{2}}V, v = \frac{1}{\sqrt{2}}V$. Таким образом, в предельном состоянии ΔODC перемещается со скоростью V в направлении OD как твердое целое. В криволинейном треугольнике OBC и постоянно вдоль прямых линий $\alpha - u = V \sin \theta, v = V(\cos \theta + \sqrt{2})$. Треугольник OAB движется как твердое тело со скоростями $v_x = V, v_y = 2V$. Касательная составляющая скорости вдоль линий $ABCD$ терпит разрыв.

В результате того, что берега трещин расходятся, разрезы превращаются в вырезы, указанные на рис. 1 пунктиром, причем угол выреза равен 2α . Вследствие превращения разрезов в вырезы уменьшается концентрация напряжений и предельная нагрузка соответственно может быть оценена по формуле:

$$P_{np} = P_{np}^0 \left(1 + \frac{\pi}{2} - \frac{V \cdot t}{h - L} \right) \quad (1.5)$$

где t – время.

Таким образом, при пластическом разрушении процесс обладает свойством самоторможения за счет расхождения берегов трещин.

В первом приближении можно считать скорость V пропорциональной перепаду температуры ΔT [2]

$$V = \alpha \Delta T \quad (1.6)$$

где α – коэффициент, определяемый экспериментально.

Подставляя (1.6) в (1.5), получим оценку зависимости предельной нагрузки от скачка температуры ΔT , времени и геометрии задачи, что позволяет решать задачи проектирования пластически деформирующихся элементов. Информация о физико-механических свойствах материала содержится в коэффициенте α .

2. Схема хрупкого разрушения.

Рассмотрим пластину толщиной $H = H_1 + H_2$ ($-H_2 \leq y \leq H_1$), размеры которой по z и x – неограниченные. Пластина подвергается вдоль оси y сверху и снизу действию тепловых потоков так, что плоскости $y = h_1, y = -h_2$ перпендикулярны вектору градиента потока.

На рисунке 2 в плоскости Oxy изображена схема задачи.

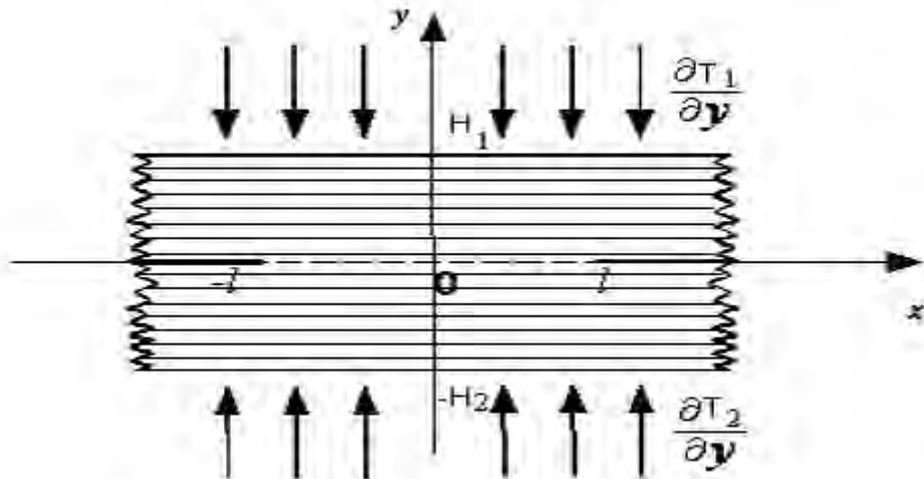


Рис. 2. Схема хрупкого состояния в слоистой пластине с разрезами

Материал пластины представляет собой микрослоистый, композит такой, что все материальные коэффициенты являются функциями только y , причем характер неоднородности меняется при переходе через плоскость $y=0$ таким образом, что градиент не-

однородности при $y=0$ имеет скачок. Верхний слой толщины H_1 жестко скреплен с нижним слоем толщины H_2 по плоскости $y=0$, $-\ell < x \leq \ell$. Поскольку микroneоднородность является концентратором напряжений, то в схеме хрупкого разрушения осреднение даст завышенную оценку предельного состояния, поэтому здесь учет микроструктуры проводится без осреднения.

Уравнения, описывающие стационарные температурные поля $T^{(\tau)}(x, y)$ в среде имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\Lambda_{11}^{(\tau)}(y) \frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y} \right] + \Lambda_{22}^{(\tau)}(y) \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial x^2} = 0, \quad \tau = 1, 2, \quad (2.1)$$

где $\tau = 1$ соответствует верхнему слою, $\tau = 2$ – нижнему.

В уравнении (2.1) $\Lambda_{11}^{(\tau)}(y)$, $\Lambda_{22}^{(\tau)}(y)$ переменные коэффициенты теплопроводности и для произвольных $\Lambda_{11}^{(\tau)}(y)$, $\Lambda_{22}^{(\tau)}(y)$ уравнение (2.1) не может быть решено в общем виде. Запишем $\Lambda_{ij}^{(\tau)}(y)$ в виде

$$\Lambda_{ij}^{(\tau)} = \Lambda_{ij}^{0(\tau)} f_{(\tau)}(y) \quad (2.2)$$

где $\Lambda_{ij}^{0(\tau)}$ - константы.

Тогда уравнение (2.1) представится следующим образом

$$\frac{d \ln f_{(\tau)}}{dy} \frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y} + \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial y^2} + \frac{\Lambda_{22}^{0(\tau)}}{\Lambda_{11}^{0(\tau)}} \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial x^2} = 0, (\tau = 1, 2). \quad (2.3)$$

Рассмотрим случай неоднородности такой, что уравнения (2.3) являются уравнениями с постоянным коэффициентом при $\frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y}$, тогда $f_{(\tau)}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d \ln f_{(\tau)}}{dy} = c_{(\tau)}. \quad (2.4)$$

Наиболее общий вид экспоненциальной зависимости можно представить в виде

$$\Lambda_{ij}^{(\tau)}(y) = \Lambda_{ij}^{0(\tau)} \exp(\delta^{(\tau)} y / l), \quad i, j = 1, 2 \quad (2.5)$$

где учтены микрослоистость, ортотропность и макроскопическая двухслойность. Разрезы моделируют трещины между двумя пластинами из композиционных микрослоистых материалов по границе разрыва градиента неоднородности.

Таким образом, на основании уравнения (2.4) можно рассмотреть класс микрослоистых сред, описываемых функциями экспоненциального типа, причем для всех этих типов функций уравнение (2.3) является уравнением с постоянными коэффициентами, которое можно записать в виде

$$\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y} + k_0^{(\tau)} \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial y^2} = 0; \quad (2.6)$$

$$k_0^{(\tau)} = \frac{\Lambda_{22}^{0(\tau)}}{\Lambda_{11}^{0(\tau)}}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad \tau = 1, 2,$$

где константа $c_{(\alpha)}^{(\tau)}$ меняется в зависимости от α -типа неоднородности в нижнем и верхнем слоях и в зависимости от $\tau = 1, 2$ при переходе от верхнего слоя к нижнему слою.

Решение уравнения теплопроводности (2.6) исходя из симметрии задачи будем искать в виде [2]

$$T^{(\tau)}(x, y) = T_{(0)}^{(\tau)}(y) + T_{(1)}^{(\tau)}(x, y), \quad \tau = 1, 2, \quad (2.7)$$

где $T_{(0)}^{(\tau)}(y)$ — решение задачи теплопроводности для пластины без разрезов и без расслоения с граничными условиями заданными на плоскостях $y = H_1$, $y = -H_2$, не зависящими от координаты x ;

$T_{(1)}^{(\tau)}(x, y)$ — решение задачи теплопроводности для пластины без разрезов с граничными условиями заданными на плоскостях $y = H_1$, $y = -H_2$, не зависящим от координаты x , $T_{(\tau)}^{(1)}(x, y)$ - решение задачи теплопроводности при нулевых граничных условиях при $y = H_1$, $y = -H_2$ и краевых условиях на разрезах, полученных из решения задачи для $T_{(0)}^{(\tau)}(y)$.

Подставляя (2.7) в (2.6) и разделяя уравнения для $T_{(0)}^{(\tau)}$, $T_{(1)}^{(\tau)}$, получим

$$\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \frac{dT_{(0)}^{(\tau)}}{dy} + k_0^{(\tau)} \frac{d^2 T_{(1)}^{(\tau)}}{\partial y^2} = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \frac{\partial T_{(1)}^{(\tau)}}{\partial y} + k_0^{(\tau)} \frac{\partial^2 T_{(1)}^{(\tau)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{(1)}^{(\tau)}}{\partial y^2} = 0. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) запишем в виде

$$T_{y(0)}^{(\tau)} = \theta^{(\tau)}(y), \quad \frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \theta^{(\tau)}(y) + \theta'^{(\tau)}(y) = 0. \quad (2.10)$$

Тогда имеем

$$\theta^{(\tau)}(y) = e^{-\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} y} + a^{(\tau)} = T_{(0)}^{(\tau)}(y), \quad T_{(0)}^{(\tau)}(y) = b^{(\tau)} - \frac{e^{a^{(\tau)}}}{c_{(\alpha)}^{(\tau)}} e^{-\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} y} \quad (2.11)$$

В (2.11) константы $a^{(\tau)}$, $b^{(\tau)}$ должны быть определены из граничных условий при $y = H_1$, $y = -H_2$.

Рассмотрим теперь уравнения (2.9), которые могут быть решены различными способами, однако в данном случае необходимо учитывать, что граничные условия формулируются на разрезах. Кроме того в случае несвязной термоупругой задачи необходимо в дальнейшем получить также решение упругой краевой задачи для напряжений, поэтому используем для решения метод интегральных преобразований, который в данном случае позволяет применить по x преобразование Фурье. Преобразуя (2.9) по x , находим

$$\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \frac{d\tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y)}{dy} - k_0^{(\tau)} \lambda^2 \tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y) + \frac{d^2 \tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y)}{dy^2} = 0, \quad (2.12)$$

$$\tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} T^{(1)(\tau)}(x, y) e^{-i\lambda x} dx.$$

Решение уравнения (2.12) можно получить методом характеристического уравнения, которое в данном случае имеет вид

$$p^2 + \frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} p - k_0^{(\tau)} \lambda^2 = 0 \quad (2.13)$$

Решение (2.12) запишется в виде

$$\tilde{T}_{(\tau)}^{(1)}(\lambda, y) = A^{(\tau)}(\lambda) e^{\lambda_1 y} + B^{(\tau)}(\lambda) e^{\lambda_2 y};$$

где λ_i ($i = 1, 2$) находятся из уравнения (2.13) в виде

$$\lambda_{1,2(\alpha)}^{(\tau)} = -\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{2l} \pm \sqrt{\frac{c_{(\alpha)}^{2(\tau)}}{2l} + k_0^{(\tau)} \lambda^2}. \quad (2.14)$$

В (2.14) произвольные неизвестные $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ должны быть определены из граничных условий. Решение уравнения (2.9) с учетом (2.14) с помощью обратного преобразования Фурье запишется в виде

$$\begin{aligned} T_{(1)}^{(\tau)}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_{(1)}^{(\tau)}(\lambda, y) e^{i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(A^{(\tau)}(\lambda) e^{i\lambda_1^{(\alpha)} y} + B^{(\tau)}(\lambda) e^{i\lambda_2^{(\alpha)} y} \right) e^{i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Вычислим деформации и напряжения

$$\begin{aligned} e_x^{(\tau)} &= \frac{\partial U^{(\tau)}}{\partial x} = ip \left[U_{(0)}^{(\tau)}(x, y) + u_{(1)}^{(\tau)}(x, y) \right]; \\ e_y^{(\tau)} &= \frac{\partial v^{(\tau)}}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n \mu_k^{(\tau)} S_k^{(\tau)}(\lambda) \eta_k^{(\tau)}(\lambda) e^{\eta_k^{(\tau)} y} + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(0)}(\lambda, y)}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(1)}(\lambda, y)}{\partial y} \right] e^{i\lambda x} d\lambda; \\ e_{xy}^{(\tau)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n \eta_k^{(\tau)} S_k^{(\tau)}(\lambda) e^{\eta_k^{(\tau)} y} + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(0)}(\lambda, y)}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(1)}(\lambda, y)}{\partial y} \right] e^{i\lambda x} d\lambda + \\ &\quad + ip \left[V_{(0)}^{(\tau)}(x, y) + V_{(1)}^{(\tau)}(x, y) \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в соотношения для напряжений получим выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(\tau)} &= c_{11}^{(\tau)}(y) e_x^{(\tau)} + c_{12}^{(\tau)}(y) e_y^{(\tau)} + \alpha_1^{(\tau)}(y) T^{(\tau)}; \\ \sigma_y^{(\tau)} &= c_{12}^{(\tau)}(y) e_x^{(\tau)} + c_{22}^{(\tau)}(y) e_y^{(\tau)} + \alpha_2^{(\tau)}(y) T^{(\tau)}; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\tau_{xy}^{(\tau)} = c_{66}^{(\tau)}(y) e_{xy}^{(\tau)}.$$

Граничные условия в напряжениях рассмотрим для случая, когда границы $y = H_1$, $y = -H_2$ свободны от силовых нагрузок и подвергаются только действию потоков тепла

$$\sigma_y^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} \Big|_{|x| < \infty} = \sigma_y^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_2}^{\tau=2} \Big|_{|x| < \infty} = \quad (2.18)$$

$$= \tau_{xy}^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} \Big|_{|x| < \infty} = \tau_{xy}^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_2}^{\tau=2} \Big|_{|x| < \infty} = 0.$$

Граничные условия на разрезах имеют вид

$$\tau_{xy}^+(x, y) \Big|_{y=0^+}^{\tau=1} \Big|_{-\infty < |x| < -l, \infty < |x| < \infty} = \tau_{xy}^-(x, y) \Big|_{y=0^-} = \Gamma_1(x); \quad (2.19)$$

$$\sigma_{yy}^+(x, y) \Big|_{y=0^+}^{\tau=1} \Big|_{-\infty < |x| < -l, \infty < |x| < \infty} = \sigma_{yy}^-(x, y) \Big|_{y=0^-} = \Gamma_2(x).$$

В области перемычки $y=0$, $-l \leq x \leq l$ для производных полевых величин u , v имеем соотношения

$$\frac{\partial u^+(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u^-(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial v^+(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v^-(x, y)}{\partial x} \quad (2.20)$$

В соотношениях (2.46), (2.47) знак «+» соответствует $\tau=1$, знак «-» соответствует $\tau=2$. Для дальнейшего рассмотрения целесообразно перейти к безразмерным величинам, по формулам

$$T^{(\tau)} = \hat{T}^{(\tau)} / (-Q_0 l / \Lambda_{22}^0), \quad \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x^{(\tau)} \\ \hat{\sigma}_y^{(\tau)} \\ \hat{\tau}_{xy}^{(\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^{(\tau)} \\ \sigma_y^{(\tau)} \\ \tau_{xy}^{(\tau)} \end{pmatrix} (-E_0 Q_0 \alpha_0 l / \Lambda_{22}^0)^{-1}; \quad (2.21)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u}^{(\tau)} \\ \hat{v}^{(\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(\tau)} \\ v^{(\tau)} \end{pmatrix} (-Q_0 \alpha_0 l^2 / \Lambda_{22})^{-1}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\delta}^{(\tau)} \\ \hat{\beta}^{(\tau)} \\ \hat{\gamma}^{(\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^{(\tau)} \\ \beta^{(\tau)} \\ \gamma^{(\tau)} \end{pmatrix} l, \quad \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} l^{-1}.$$

Здесь верхний символ «^» сверху, которым обозначены безразмерные величины в дальнейших рассмотрениях опускаем имея в виду, что все величины являются безразмерными. В безразмерных величинах перемычка в пластине будет расположена в плоскости $y=0$ для $-1 < x < 1$, а разрезы простираются в плоскости $y=0$ для $-\infty < x \leq -1$, $1 \leq x < \infty$. В дальнейшем будем рассматривать случай микрослоистой среды, в которой теплофизические и упругие коэффициенты в зависимости от y изменяются непрерывно, а их градиенты (производные) терпят скачок при $y=0$. Это означает, что $\Lambda_{ij}^{(1)} = \Lambda_{ij}^{(2)}$, $\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(2)}$, $c_{ij}^{(1)} = c_{ij}^{(2)}$, $\delta^{(2)} - \delta^{(1)} \neq 0$, $\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)} \neq 0$, $\beta^{(2)} - \beta^{(1)} \neq 0$, $k_0^{(1)} = k_0^{(2)}$.

Выпишем выражения для $\sigma_y^{(\tau)}$ в явном виде для $\tau=1$ в верхнем слое и для $\tau=2$ в нижнем слое соответственно

$$\sigma_y^{(1)}(x, y) = \frac{e^{-\beta_1 y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^4 S_{1k}(\lambda) M_{3k}(\lambda) e^{\eta_k^{(1)} y} + T_{3\zeta_1}(\lambda, y) \right) e^{i\lambda x} d\lambda - \beta_{20} \frac{1}{\delta_1} e^{(\gamma_1 - \beta_1)y} + \frac{1}{\delta_1} \beta_{20} e^{(\gamma_1 - \beta_1 - \beta_1)y} \quad (2.22)$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, y) = \frac{e^{-\beta_1 y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^4 S_{1k}(\lambda) M_{4k}(\lambda) e^{\eta_k^{(1)} y} + T_{3\zeta_2}(\lambda, y) \right) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (2.23)$$

$$\sigma_y^{(2)}(x, y) = \frac{e^{-\beta_2 y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^4 S_{2k}(\lambda) M_{5k}(\lambda) e^{\eta_k^{(2)} y} + T_{3\zeta_3}(\lambda, y) \right) e^{i\lambda x} d\lambda - \beta_{20} \frac{1}{\delta_2} e^{(\gamma_2 - \beta_2)y} + \frac{\beta_{20}}{\delta_1} e^{(\gamma_2 - \delta_2 - \beta_2)y} \quad (2.24)$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, y) = \frac{e^{-\beta_2 y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^4 S_{2k}(\lambda) M_{6k}(\lambda) e^{\eta_k^{(2)} y} + T_{3\zeta_4}(\lambda, y) \right) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (2.25)$$

Выражения для $S_{\alpha k}(\lambda), T_{\alpha \beta}(\lambda)$ здесь не приводятся ввиду громоздкости.

3. Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений в пластине с разрезами.

Рассмотрим влияние характера микroneоднородности коэффициентов теплопроводности, упругости, теплоемкости на коэффициенты интенсивности напряжений.

Коэффициенты интенсивности напряжений вычисляются по формулам [2]

$$K_I^{\pm} - iK_{II}^{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm 1} \left[\sqrt{1-x^2} \left(\sigma_y^{\pm}(x) - i\tau_{xy}^{\pm}(x) \right) \right] \quad (3.1)$$

где для данного раздела знак «+» принято относить к правой трещине ($x > 0$), знак «-» относится к левой ($x < 0$).

Коэффициенты K_I^{\pm} и K_{II}^{\pm} выражаются непосредственно через функции G_i ($i = 1, 2$), вычисляемые в точках $x = \pm 1$

$$K_I^{\pm} \leftarrow (\pm 1) = G_1(\pm 1); \quad K_{II}^{\pm} \leftarrow (\pm 1) = G_2(\pm 1) \quad (3.2)$$

Подставляя $G_i(\pm 1)$ в (3.2), получим выражения для коэффициентов интенсивности напряжений. Предельные случаи изотропной однородной неограниченной пластины с двумя разрезами находим, полагая в полученных формулах параметры $\delta^{(r)} = \beta^{(r)} = \gamma^{(r)} = 1$, $\Lambda_{11} = \Lambda_{22}$, $c_{11} = c_{66}$, $\alpha_1 = \alpha_2$.

Зависимости безразмерных коэффициентов интенсивности напряжений $K_i^{\pm} = K_i^{\pm} / K_0$, $i = I, II$, ($K_0 = -E_0 \alpha_0 l q_H / \Lambda_{22}^0$) от безразмерной величины H_1 / l , характеризующей толщину слоя (H_1), и расстояние между трещинами (l) изображены на рисунках 2.2–2.7. Здесь учитывается влияние безразмерных параметров $\delta_2 \delta_1^{-1}$, $\gamma_2 \gamma_1^{-1}$, $\beta_2 \beta_1^{-1}$, характеризующих изменение теплопроводных, теплоемкостных, упругих свойств при переходе от одного слоя к другому.

В случае равенства этих параметров единице неоднородность от слоя к слою, имеет один и тот же тип. Меняя распределение неоднородных свойств по слою, а также от макрослоя к макрослою получаем возможность влиять на величину коэффициентов концентрации напряжений. Изменение неоднородности от макрослоя к макрослою учитывается на уровне изменения градиента неоднородности при $y = 0$. Как следует из (2.19) и (2.49) сами коэффициенты при переходе через $y = 0$ непрерывны, а скачок, равный разностям $|\beta_2 - \beta_1| l^{-1}$, $|\gamma_2 - \gamma_1| l^{-1}$, $|\delta_2 - \delta_1| l^{-1}$, испытывают их производные. Таким образом, микрослоистость имеет кусочно гладкий характер (слабо разрывная), когда на разрыве не требуется ставить граничные условия.

На рисунках 3.1 и 3.2 изображены зависимости K_I , K_{II} от $l_* = H_1 / l$ для случая, когда при переходе через $y = 0$ скачок испытывает только градиент упругих свойств, а градиенты теплопроводности и теплоемкости непрерывны.

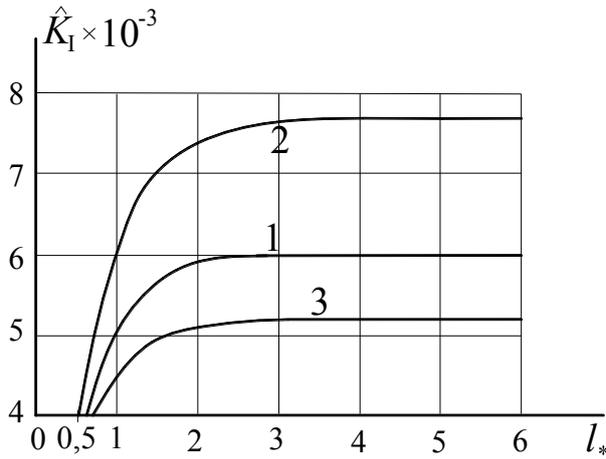


Рис. 3.1. Зависимость \hat{K}_I от l_*
 при $\gamma_2/\gamma_1 = \delta_2/\delta_1 = 1$ $1 - \beta_2/\beta_1 = 1$; ...;
 $3 - \beta_2/\beta_1 = 2$

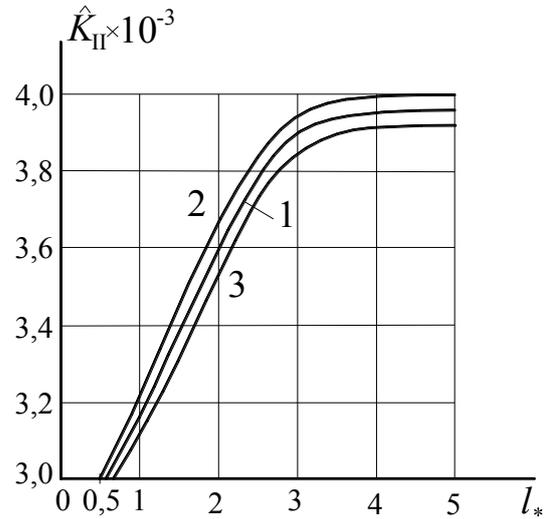


Рис. 3.2. Зависимость \hat{K}_{II} от l_*
 при $\gamma_2/\gamma_1 = \delta_2/\delta_1 = 1$ $1 - \beta_2/\beta_1 = 1$;
 $2 - \beta_2/\beta_1 = 0,5$; $3 - \beta_2/\beta_1 = 2$

На рисунках 3.3 и 3.4 изображены зависимости \hat{K}_I, \hat{K}_{II} от $l_* = H_1/l$ для случая, когда при переходе через $y=0$ скачок испытывает только градиент теплопроводных свойств, а градиенты упругости и теплоемкости непрерывны.

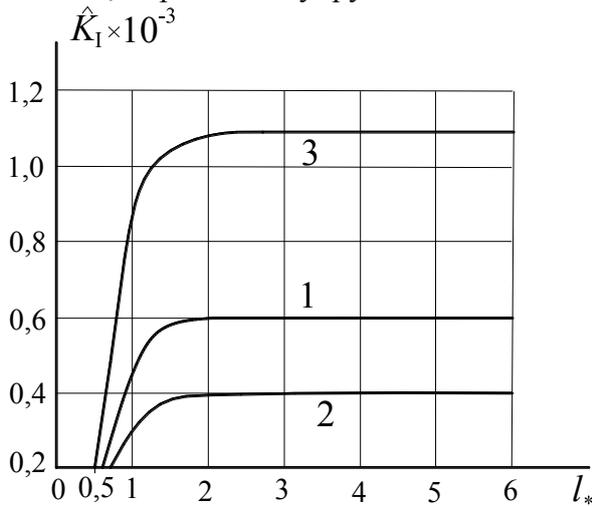


Рис. 3.3. Зависимость \hat{K}_I от l_* при
 $\beta_2/\beta_1 = \gamma_2/\gamma_1 = 1$ $1 - \delta_2/\delta_1 = 1$;
 $2 - \delta_2/\delta_1 = 0,5$; $3 - \delta_2/\delta_1 = 2$

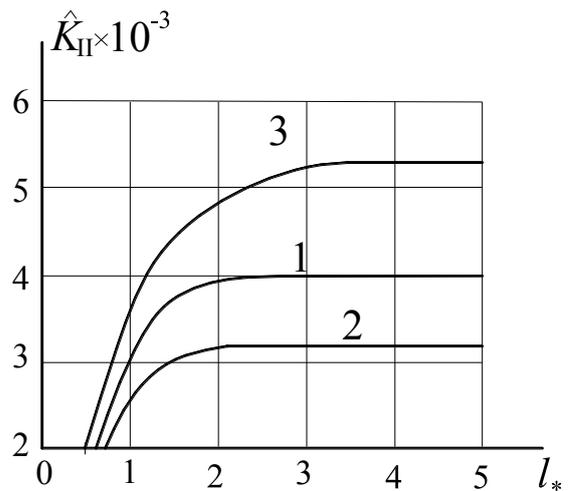


Рис. 3.4. Зависимость \hat{K}_{II} от l_* при
 $\beta_2/\beta_1 = \gamma_2/\gamma_1 = 1$ $1 - \delta_2/\delta_1 = 1$;
 $2 - \delta_2/\delta_1 = 0,5$; $3 - \delta_2/\delta_1 = 2$

На рисунках 3.5 и 3.6 изображены зависимости \hat{K}_I, \hat{K}_{II} от $l_* = H_1/l$ для случая, когда при переходе через $y=0$ скачок испытывает только градиент теплоемкости, а градиенты упругих и теплопроводных свойств непрерывны.

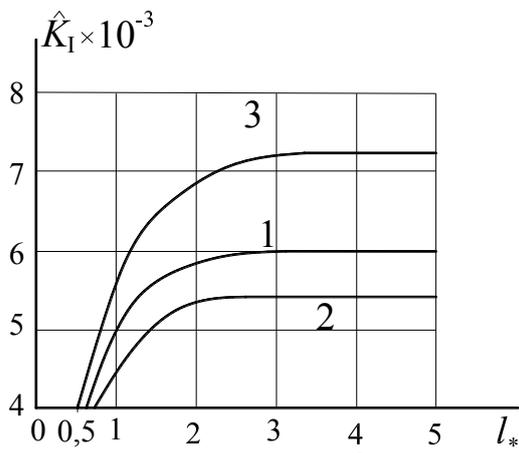


Рис. 3.5. Зависимость \hat{K}_I от l_* ,
 при $\beta_2/\beta_1 = \delta_2/\delta_1 = 1$ $1 - \gamma_2/\gamma_1 = 1$;
 $2 - \gamma_2/\gamma_1 = 0,5$; $3 - \gamma_2/\gamma_1 = 2$

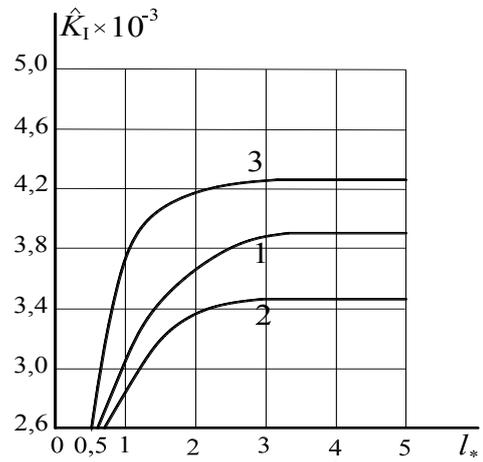


Рис. 3.6. Зависимость \hat{K}_{II} от l_* ,
 при $\beta_2/\beta_1 = \delta_2/\delta_1 = 1$ $1 - \gamma_2/\gamma_1 = 1$;
 $2 - \gamma_2/\gamma_1 = 0,5$; $3 - \gamma_2/\gamma_1 = 2$

Из рисунков 3.1–3.6 следует, что зависимости \hat{K}_I и \hat{K}_{II} от отношения толщины верхнего макрослоя к расстоянию между трещинами качественно выглядят одинаково, однако есть различия. Если жесткость верхнего слоя больше, чем нижнего, то коэффициенты \hat{K}_I и \hat{K}_{II} больше по сравнению со средой, в которой градиент упругости непрерывен (см. рисунки 3.1 и 3.2).

Если теплопроводность верхнего слоя выше теплопроводности нижнего, то это ведет к снижению величин \hat{K}_I, \hat{K}_{II} по сравнению с гладким изменением градиента теплопроводности при переходе через границу $y = 0$.

Представляет интерес оценить влияние отношения H_2/H_1 на зависимость \hat{K}_I, \hat{K}_{II} от l_* , т.е. от глубины, на которой происходит расслоение полосы. На рисунках 3.7 и 3.8 изображены зависимости \hat{K}_I, \hat{K}_{II} от l_* для случаев $H_1 \geq H_2$. Неоднородность физико-механических параметров гладкая.

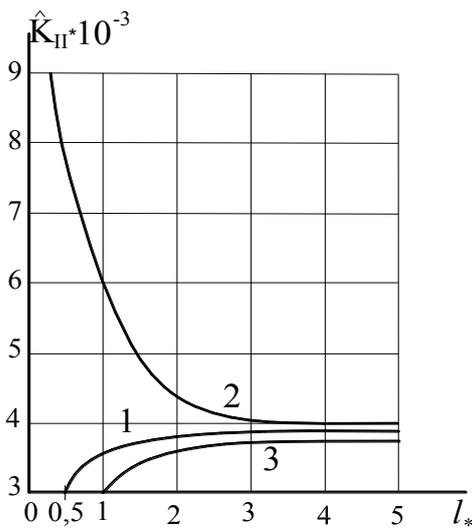


Рис. 3.7. Зависимость \hat{K}_{II} от l_* ,
 при $\gamma_1/\gamma_2 = \delta_2/\delta_1 = \beta_2/\beta_1 = 1$ $1 - H_2/H_1 = 1$
 $; 2 - H_2/H_1 = 0,5$; $3 - H_2/H_1 = 2$

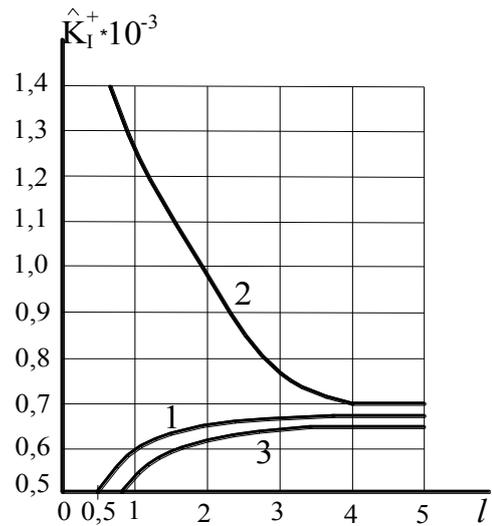


Рис. 3.8. Зависимость \hat{K}_I от l_* ,
 при $\gamma_1/\gamma_2 = \delta_2/\delta_1 = \beta_2/\beta_1 = 1$ $1 - H_2/H_1 = 1$;
 $2 - H_2/H_1 = 0,5$; $3 - H_2/H_1 = 2$

Из рисунков 3.7 и 3.8 следует, что если верхний слой толще нижнего, то величина концентрации напряжений возрастает по сравнению с полосой, для которой $H_1 = H_2$.

Как известно, в общем случае сложного трехмерного напряженно-деформированного состояния твердого тела с трещинами условия предельного равновесия могут быть записаны в виде

$$f(K_1, K_2, K_3) = 0. \quad (3.3)$$

В рассматриваемом случае неоднородной ортотропной полосы воздействие несимметричных тепловых потоков эквивалентно силовым нагрузкам, создающим сложное двумерное состояние, следствием чего является непрямолинейное распространение трещины между разрезами. Из кончиков разрезов трещины будут расти не вдоль оси y (симметричный случай), как это было бы в случае, если бы линия $y = 0$ была линией разрыва материальных коэффициентов. В этом случае разрез является трещиной расслоения. В случае, когда на линии $y = 0$ материальные коэффициенты непрерывны, а их первые производные терпят разрыв (слабый разрыв), направление распространения трещины зависит от градиентов неоднородности и тепловых потоков.

Заключение. Учет анизотропии оказывает существенное влияние на распределение напряжений в пластинах с разрезами. Учет неоднородности на макроуровне обычно проводится на основе моделей кусочно-однородных пластин и оболочек, а на микроуровне с помощью функциональных зависимостей физико-механических параметров среды от пространственных координат. В работе рассмотрена неоднородная среда градиентного типа, что стимулируется проблемами, возникающими в практике использования различных композитных материалов в машинах, реакторах, технологических процессах, связанных с температурным воздействием на них. Получены оценки, обусловленные учетом анизотропии, неоднородности, что сильно усложняет задачу, но позволяет ставить задачи управления процессами деформирования и разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. М., Наука, 1968, 420 с.
2. Плескачевский Ю.М., Чigareва Ю.А. *Концентрация термических напряжений в ортотропной пластине с двухмасштабной градиентной неоднородностью и разрезами // Материалы. Технологии. Инструменты*. – 2013. – №2. – с. 5–16.
3. Прусов И.А. *Термоупругие анизотропные пластины*. Минск, Изд-во БГУ 1978, 200 с.
4. Куликов И.С., Нестеренко В.Б., Тверкович Б.Е. *Прочность элементов конструкций при облучении*. Минск, Навука і тэхніка, 1990, 144с.
5. Черепанов Г.П. *Механика хрупкого разрушения*. М., Наука, 1974, 640 с.
6. Atkinson C. *The propagation of a brittle crack in anisotropic material*. *Inbern. J.Engng Sci.*, 1965. Vol. 3, № 6.
7. Черепанов Г.П., Ершов Л.В. *Механика разрушения*. Москва, Машиностроение, 1977, 224 с.