

## ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ МНОГОСЛОЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО ГРУНТА И ИХ РЕШЕНИЯ

<sup>1</sup>Алтынбеков Ш.А., <sup>1</sup>Ниязымбетов А.Д., <sup>2</sup>Такибаева Г.А., <sup>1</sup>Алимкулова Б.Т.

<sup>1</sup>Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, г. Шымкент;

<sup>2</sup>Южно-Казахстанский государственный университет, г. Шымкент.

**Введение.** Теория консолидации грунтов, начиная с 22-го года прошлого столетия, интенсивно развивается, охватывая все новые области исследований. Причем развитие идет фактически по всем направлениям, начиная с анализа физико-химических и механических свойств грунтов, кончая созданием универсальных различных физико-математических моделей, позволяющих с помощью мощных современных персональных компьютеров моделировать напряженно-деформированное состояние изучаемого объекта. Однако, несмотря на это, в этой области исследования достаточно много нерешенных вопросов. В существующих работах [1,2,3] модельно выделяется грунтовый массив от их естественного состояния, и изучаются осадки многослойных (двух- и трехслойных) грунтов. При этом считают, что уплотняющая нагрузка, приложенная к нижним слоям, равна сумме весов каждого слоя грунтового массива и внешней нагрузки. Такая постановка задачи противоречит законам сплошной среды. Так, например, недостаточно изучена консолидация многослойных грунтов.

В отличие от этих работ, в данной работе решены задачи теории фильтрационной консолидации  $k$ -слойных неоднородных грунтовых оснований в виде параллелепипеда и цилиндра. При этом величины уплотняющих нагрузок, приложенных к нижним слоям грунтовых массивов, определены в ходе решения задачи.

**Постановка задачи и ее решение.** Рассмотрим процесс уплотнения многослойных грунтов в виде параллелепипеда (рис. 1) и цилиндра (рис. 2) под действием распределенной нагрузки  $q_s$ , приложенной к части наружной площади. При этом предполагаем, что:

- грунт состоит из твердой и жидкой фаз;
- движение воды, заполняющего поры грунта, подчинено обобщающему закону Дарси-Герсеванова;
- функция, характеризующая упруго-мгновенную деформацию скелета каждого слоя грунта, представлена так [4]:

$$E_s(x_n) = E_{0s}(\alpha_{1s} + \alpha_{2s}e^{-\alpha_{3s}x_n})^{-1},$$

$$\alpha_s(x_n) = 1/E_s(x_n), \quad s = 1, 2, \dots, k,$$

где  $E_{0s}, \alpha_{1s}, \alpha_{2s}$  и  $\alpha_{3s}$  – опытные данные;

- НДС скелета каждого слоя грунта описывается линейным уравнением вида [4]:

$$\varepsilon_s(t) = \varepsilon_{0s} - \frac{\alpha_{0s}(\alpha_{1s} + \alpha_{2s}e^{-\alpha_{3s}x_n})}{1 + (n-1)\xi_{0s}} \theta_s(t).$$

Здесь:  $n = 1, 2, 3$  в зависимости от мерности задачи;  $\xi_{0s}$  – коэффициент бокового давления;  $\theta_s(t)$  – сумма нормальных напряжений, соответствующих моменту времени  $t$ ;

- грунты по водопроницаемости являются ортотропной средой;
- процесс уплотнения каждого слоя подчинен модели К.Терцаги-В.А.Флорина [5,6];
- на поверхности уплотняемого массива грунта происходит свободный водообмен со средой, а на поверхности соприкосновения выполняются условия сопряжения.

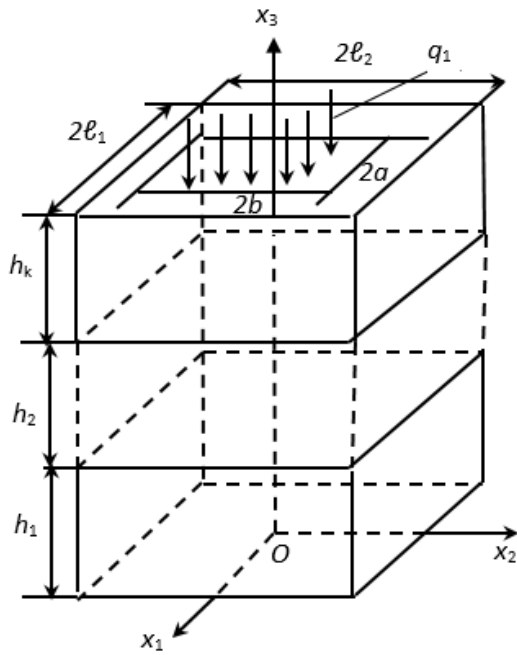


Рис. 1. Расчетная схема в виде параллелепипеда

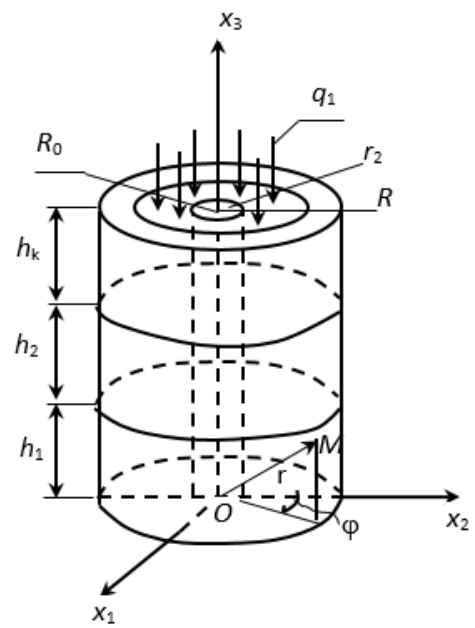


Рис. 2. Расчетная схема в виде цилиндра

Тогда решение задачи консолидации многослойных грунтов может быть сведено к решению краевых задач:

А.

$$\frac{\partial H_s}{\partial t} = C_{vs} e^{\alpha_{3s} x_3} \left( K_{1s} \frac{\partial^2 H_s}{\partial x_1^2} + K_{2s} \frac{\partial^2 H_s}{\partial x_2^2} + K_{3s} \frac{\partial^2 H_s}{\partial x_3^2} \right),$$

$$H_s(x_1, x_2, x_3, \tau_1) = H_{0s}(x_1, x_2, x_3),$$

$$\begin{cases} h_{1s}^{(1)} \frac{\partial H_s}{\partial x_1} - h_{1s}^{(2)} H_s \Big|_{x_1=-l_1} = 0, & h_{2s}^{(1)} \frac{\partial H_s}{\partial x_2} - h_{2s}^{(2)} H_s \Big|_{x_2=-l_2} = 0, \\ h_{1s}^{(3)} \frac{\partial H_s}{\partial x_1} - h_{1s}^{(4)} H_s \Big|_{x_1=+l_1} = 0, & h_{2s}^{(3)} \frac{\partial H_s}{\partial x_2} - h_{2s}^{(4)} H_s \Big|_{x_2=+l_2} = 0, \\ h_{31}^{(1)} \frac{\partial H_s}{\partial x_3} - h_{31}^{(2)} H_s \Big|_{x_3=0} = 0, & H_s \left( x_1, x_2, \sum_{s=1}^{k-i} h_s, t \right) = H_{s+1} \left( x_1, x_2, \sum_{s=1}^{k-i} h_s, t \right), \\ h_{3k}^{(3)} \frac{\partial H_k}{\partial x_3} - h_{3k}^{(4)} H_k \Big|_{x_3=\sum_{s=1}^k h_s} = 0, & K_{3s} \frac{\partial H_s}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h_{s-1}} = -K_{3s+1} \frac{\partial H_{s+1}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h_{s-1}}, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, k-1; \quad s = 1, 2, \dots, k-1.$$

В.

$$\frac{\partial H_s}{\partial t} = C_{vs} e^{\alpha_{3s} x_3} \left( K_{3s} \frac{\partial^2 H_s}{\partial x_3^2} + K_{rs} \left( \frac{\partial^2 H_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_s}{\partial r} \right) \right),$$

$$H_s(x_3, r, \tau_1) = H_{0s}(x_3, r),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{1s}^{(1)} \frac{\partial H_s}{\partial r} - h_{1s}^{(2)} H_s \Big|_{r=r_0} = 0, \\ h_{1s}^{(3)} \frac{\partial H_s}{\partial x_1} - h_{1s}^{(4)} H_s \Big|_{r=R} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} h_{31}^{(1)} \frac{\partial H_s}{\partial x_3} - h_{31}^{(2)} H_s \Big|_{x_3=0} = 0, \\ h_{3k}^{(3)} \frac{\partial H_k}{\partial x_3} + h_{3k}^{(4)} H_k \Big|_{x_3=\sum_{s=1}^k h_s} = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_s \left( \sum_{s=1}^{k-i} h_s, r, t \right) = H_{s+1} \left( \sum_{s=1}^{k-i} h_s, r, t \right), \\ K_{3s} \frac{\partial H_s}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h_{s-1}} = -K_{3s+1} \frac{\partial H_{s+1}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h_{s-1}}, \end{array} \right.$$

$$i = 1, 2, \dots, k-1; \quad s = 1, 2, \dots, k-1$$

решениями которых являются:

$$H_s(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} \sum_{i_3=1}^{\infty} D_{s i_1 i_2 i_3} \left( \cos \frac{\mu_{s i_1}}{2\ell_1} x_1 + B_{s i_1} \sin \frac{\mu_{s i_1}}{2\ell_1} x_1 \right) \times$$

$$\times \left( \cos \frac{\eta_{s i_2}}{2\ell_2} x_2 + C_{s i_2} \sin \frac{\eta_{s i_2}}{2\ell_2} x_2 \right) \cdot V_{vs i_2} \left( \frac{2\lambda_{s i_1 i_2 i_3}}{\alpha_s \sqrt{K_{3s}}} \cdot e^{-\frac{\alpha_s}{2} x_3} \right) \cdot e^{-\lambda_{s i_1 i_2 i_3}^2 t};$$

$$H_s(x_3, r, t) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} A_{s i_1 i_2} V_0(\lambda_{s i_1} r) \cdot V_{vs i_1} \left( \frac{2\lambda_{s i_1 i_2}}{\alpha_s \sqrt{K_{3s}}} \cdot e^{-\frac{\alpha_s}{2} x_3} \right) \cdot e^{-\lambda_{s i_1 i_2}^2 t}.$$

Здесь:

$$H_{0s}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} \tilde{D}_{s i_1 i_2} \left( \cos \frac{\mu_{s i_1}}{2\ell_1} x_1 + B_{s i_1} \sin \frac{\mu_{s i_1}}{2\ell_1} x_1 \right) \times$$

$$\times \left( \cos \frac{\eta_{s i_2}}{2\ell_2} x_2 + C_{s i_2} \sin \frac{\eta_{s i_2}}{2\ell_2} x_2 \right) \cdot (\text{ch } B_{s i_1}^* x_3 + E_{s i_1} \text{sh } B_{s i_1}^* x_3);$$

$$H_{0s}(x_3, r) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \tilde{A}_{s i_1} V_0(\lambda_{s i_1} r) \cdot (\text{ch } B_{s i_1}^* x_3 + E_{s i_1} \text{sh } B_{s i_1}^* x_3),$$

соответственно решения граничных задач.

$\tilde{A}$ .

$$K_{1s} \frac{\partial^2 H_{0s}}{\partial x_1^2} + K_{2s} \frac{\partial^2 H_{0s}}{\partial x_2^2} + K_{3s} \frac{\partial^2 H_{0s}}{\partial x_3^2} = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{1s}^{(1)} \frac{\partial H_{0s}}{\partial x_1} - h_{1s}^{(2)} H_{0s} \Big|_{x_1=-\ell_1} = 0, \\ h_{1s}^{(3)} \frac{\partial H_{0s}}{\partial x_1} - h_{1s}^{(4)} H_{0s} \Big|_{x_1=+\ell_1} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} h_{2s}^{(1)} \frac{\partial H_{0s}}{\partial x_2} - h_{2s}^{(2)} H_{0s} \Big|_{x_2=-\ell_2} = 0, \\ h_{2s}^{(3)} \frac{\partial H_{0s}}{\partial x_2} - h_{2s}^{(4)} H_{0s} \Big|_{x_2=+\ell_2} = 0, \end{array} \right.$$

$$h_{3k+1-i}^{(3)} \frac{\partial H_{0k+1-i}}{\partial x_3} + h_{3k+1-i}^{(4)} H_{0k+1-i} \Big|_{x_3=\sum_{s=1}^{k+1-i} h_s} = \frac{q_{k+1-i}}{\gamma},$$

$$|x_1| \leq a, \quad |x_2| \leq b, \quad i = 1, 2, \dots, k;$$

$$\begin{aligned}
& h_{3k+1-i}^{(3)} \frac{\partial H_{0k+1-i}}{\partial x_3} + h_{3k+1-i}^{(4)} H_{0k+1-i} \Big|_{x_3 = \sum_{s=1}^{k+1-i} h_s} = 0, \\
& -\ell_1 < x_1 < -a, \quad a < x_1 < \ell_1, \\
& -\ell_2 < x_2 < -b, \quad b < x_2 < \ell_2, \quad i = 1, 2, \dots, k; \\
& h_{31}^{(1)} \frac{\partial H_{01}}{\partial x_3} + h_{31}^{(2)} H_{01} \Big|_{x_3=0} = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{0s} \left( x_1, x_2, \sum_{s=1}^{k-i} h_s \right) = H_{0s+1} \left( x_1, x_2, \sum_{s=1}^{k-i} h_s \right), \\ K_{3s} \frac{\partial H_{0s}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h_s-1} = -K_{3s+1} \frac{\partial H_{0s+1}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h_s-1}, \end{array} \right. \\
& i = 1, 2, \dots, k-1; \quad s = 1, 2, \dots, k-1.
\end{aligned}$$

$\tilde{B}$ .

$$\begin{aligned}
& K_{3s} \frac{\partial^2 H_{0s}}{\partial x_3^2} + K_{\varepsilon s} \left( \frac{\partial^2 H_{0s}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{0s}}{\partial r} \right) = 0, \\
& \left\{ \begin{array}{l} h_{1s}^{(1)} \frac{\partial H_{0s}}{\partial r} - h_{1s}^{(2)} H_{0s} \Big|_{r=r_0} = 0, \\ h_{1s}^{(3)} \frac{\partial H_{0s}}{\partial x_1} + h_{1s}^{(4)} H_{0s} \Big|_{r=R} = 0, \end{array} \right. \\
& h_{3k+1-i}^{(3)} \frac{\partial H_{0k+1-i}}{\partial x_3} + h_{3k+1-i}^{(4)} H_{0k+1-i} \Big|_{x_3 = \sum_{s=1}^{k+1-i} h_s} = \frac{q_{k+1-i}}{\gamma}, \\
& |r_0| \leq r \leq R_0, \quad i = 1, 2, \dots, k; \\
& h_{3k+1-i}^{(3)} \frac{\partial H_{0k+1-i}}{\partial x_3} + h_{3k+1-i}^{(4)} H_{0k+1-i} \Big|_{x_3 = \sum_{s=1}^{k+1-i} h_s} = 0, \\
& R_0 < r < R, \quad i = 1, 2, \dots, k; \\
& h_{31}^{(1)} \frac{\partial H_{01}}{\partial x_3} + h_{31}^{(2)} H_{01} \Big|_{x_3=0} = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{0s} \left( \sum_{s=1}^{k-i} h_s, r \right) = H_{0s+1} \left( \sum_{s=1}^{k-i} h_s, r \right), \\ K_{3s} \frac{\partial H_{0s}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h_s-1} = -K_{3s+1} \frac{\partial H_{0s+1}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h_s-1}, \end{array} \right. \\
& i = 1, 2, \dots, k-1; \quad s = 1, 2, \dots, k-1.
\end{aligned}$$

Здесь зависимость между нагрузками  $q_1$  и  $q_2, q_3, \dots, q_s$  определены формулами:

$$q_2 = M_{1i_1 i_2} q_1,$$

$$q_3 = (M_{2i_1 i_2} + M_{1i_1 i_2}) q_1,$$

$$q_4 = (M_{3i_1 i_2} + M_{1i_1 i_2} \cdot M_{3i_1 i_2} + M_{1i_1 i_2} M_{2i_1 i_2} M_{3i_1 i_2} + M_{2i_1 i_2} M_{3i_1 i_2}) q_1,$$

---


$$q_s = (M_{s-1i_1 i_2} + M_{1i_1 i_2} \cdot M_{s-1i_1 i_2} + \dots + M_{s-2i_1 i_2} M_{s-1i_1 i_2}) q_1 -$$

– для расчетной схемы 1;

$$\begin{aligned}
q_2 &= \tilde{M}_{1i_1} q_1, \\
q_3 &= (\tilde{M}_{2i_1} + \tilde{M}_{1i_1}) q_1, \\
q_4 &= (\tilde{M}_{3i_1} + \tilde{M}_{1i_1} \cdot \tilde{M}_{3i_1} + \tilde{M}_{1i_1} \tilde{M}_{2i_1} \tilde{M}_{3i_1} + \tilde{M}_{2i_1} \tilde{M}_{3i_1}) q_1, \\
&\dots \\
q_s &= (\tilde{M}_{s-1i_1} + \tilde{M}_{1i_1} \cdot \tilde{M}_{s-1i_1} + \dots + \tilde{M}_{s-2i_1} \tilde{M}_{s-1i_1}) q_1 -
\end{aligned}$$

– для расчетной схемы 2.

Здесь:  $M_{s\dot{h}i_2}, \tilde{M}_{s\dot{h}i_1}$  – известные коэффициенты, определенные в ходе решения задачи, и зависят от коэффициентов проницаемости грунтов и от пути фильтрации;  $H_s$  – избыточный напор поровой жидкости;  $K_{ns}, K_{rs}$  – коэффициенты фильтрации;  $h_{1s}^{(1)}, h_{1s}^{(2)}, \dots, h_{3s}^{(4)}$  – коэффициенты водоотдачи;  $\mu_{s\dot{h}i_1}$  и  $\eta_{s\dot{h}i_2}$  ( $B_{s\dot{h}i_2}^*$  и  $B_{s\dot{h}i_1}^*$ ) – положительные корни уравнения, составленного из комбинации тригонометрических функций;  $V_\nu(x_3)$  ( $V_\nu(r)$ ) – функция из комбинации Бесселя первого и второго рода индекса  $\nu$ ;  $\lambda_{s\dot{h}i_2i_3}$  ( $\lambda_{s\dot{h}i_2}, \lambda_{s\dot{h}i_1}$ ) – положительные корни системы уравнения, составленного из комбинации этих функций;  $A_{s\dot{h}i_2i_3}, A_{s\dot{h}i_2}, B_{s\dot{h}i_1}, B_{s\dot{h}i_2}, C_{s\dot{h}i_2}, E_{s\dot{h}i_2}, D_{s\dot{h}i_1}, E_{s\dot{h}i_1}, C_{vs}$  – известные коэффициенты, определяемые из начально-граничных условий;  $\alpha_s$  – опытные данные;  $\gamma$  – удельный вес воды.

Для решения дифференциального уравнения

$$Z''(x_3) + \frac{\lambda^2(\alpha_{1s} + \alpha_{2s}e^{-\alpha_{3s}x_3}) - (v^2 + \rho^2)}{K_{3s}} Z(x_3) = 0 \quad (1)$$

был применен метод аппроксимации [7].

Согласно этому методу функция  $(\alpha_{1s} + \alpha_{2s} \exp(-\alpha_{3s}x_3))$  в (1) приближенно заменена функцией  $\tilde{a}(x_3)$ :

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(x_3) &= (\alpha_{1s} + \alpha_{2s}) \cdot \exp\left[\left(\ln \frac{\alpha_{1s} + \alpha_{2s} \exp(-\alpha_{3s}x_3)}{\alpha_{1s} + \alpha_{2s}}\right) \cdot \frac{x_3}{h_s}\right], \text{ т.е.} \\
\alpha_{1s} + \alpha_{2s} \exp(-\alpha_{3s}x_3) &\approx (\alpha_{1s} + \alpha_{2s}) \cdot \exp\left[\left(\ln \frac{\alpha_{1s} + \alpha_{2s} \exp(-\alpha_{3s}x_3)}{\alpha_{1s} + \alpha_{2s}}\right) \cdot \frac{x_3}{h_s}\right] \quad (2)
\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что при  $x_3 = 0$  и  $x_3 = h_s$  аппроксимация вида (2) абсолютно точная и при  $\alpha_{3s} \rightarrow 0$  погрешность аппроксимации стремится к нулю. Следовательно, она для малых значений  $\alpha_{3s}$  вполне приемлема в практических расчетах.

Далее, имея в виду (2), последовательным введением новых переменных

$$z = -\frac{\alpha_3}{2h_s} x_3 + \frac{1}{2} \ln \frac{4h_s^2 \lambda^2}{\alpha_s^2 K_{3s}} \quad \text{и} \quad y = e^z$$

дифференциальное уравнение (1) приведено к уравнению Бесселя [8], общее решение которого известно. Здесь

$$\alpha_3 = \ln \frac{\alpha_{1s} + \alpha_{2s}}{\alpha_{1s} + \alpha_{2s} \exp(-\alpha_{3s}h_s)} / h_s.$$

Расчетный осадок произведен по методу В.А.Флорина [9].

#### Выводы:

- Полученные результаты показывают, что величины уплотняющих нагрузок, приложенных к нижним слоям грунтовых массивов, зависят от нагрузки, приложенной к верхнему слою и от коэффициентов проницаемости грунтов, а также от пути фильтрации.

- Если земляная масса каждого слоя является нессыпучей связной средой, то осадки в нижних слоях незначительные.

- Результаты исследований могут быть использованы при расчете осадка грунтовых оснований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Асибеков А.Ж. Консолидация многослойных грунтовых оснований //Тр. межд. научно-техн. и учебно-метод. конф. «Актуальные проблемы науки. Технологии производств и образование», посв. 50-летию КазХТИ.– Шымкент, 1993.- Т.2.- 344 с.
2. Асибеков А.Ж. Об уплотнении многослойных грунтовых оснований //Наука и образование Южного Казахстана. Серия: Механика и машиностроение.- 1996.– С. 171-179. Серия: Механика и машиностроение.- 1996.– С. 171-179.
3. Асибеков А.Ж. Одномерное уплотнение кусочно-однородного трехслойного упругого основания //Вестник МКТУ Х.А. Яссави.– 1998, №2.- С. 48-52.
4. Алтынбеков Ш.А., Дасибеков А. О консолидации неоднородных грунтов //Проблемы механики.- 1995, №3-4.- С. 7-9.
5. Терцаги К., Пек Р. Механика грунтов в инженерной практике //Литература по строительству, архитектуре и строительным материалам.- М., 1958.- 607 с.
6. Флорин В.А. Основное уравнение консолидации земляной сребды /ДАН СССР.- 1948.- Т.59.- С.21-24.
7. Алтынбеков Ш.А. Об одном методе аппроксимации //Проблемы механики.- 1995, №3-4.- С.7-9.
8. Кузнецов Д.С. Специальные функции.– М.: Высшая школа, 1965.- 423 с.
9. Флорин В.А. Основы механики грунтов.– М.: Стройиздат, 1961.– Т.2.- 543 с.