УДК 539.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРЫХЛЕНИЯ ПОЧВЫ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ОБРАБАТЫВАЮЩИХ УСТРОЙСТВ

[1]Чигарева Ю.А., [2]Чигарев Ю.В.

[1]Белорусский государственный аграрно технический университет, Минск
[2]Западно-Померанский Университет Технологий, Щетин

Разрыхление обрабатываемой почвы должно обеспечивать аэрогидрофильтрацию верхнего слоя, который под действием естественных (гравитация) и техногенных факторов (проезд техники) уплотняется, что ухудшает его свойства, необходимые для растениеводства [1]. Процесс обработки (рыхления) представляет собой разрушение связей между компонентам почвенного агрегата с целью создания слоя с необходимой фильтрацией. В теории перколяции (протекания) [2] разработаны различные модели на основе континуальных и дискретных подходов, которые позволяют получать численные оценки различных величин.

В работе рассмотрено применение методов узлов, связей, эффективной среды для процессов разрыхления почвенного слоя.

Рассмотрим поверхностный слой, в котором под воздействием обработки идут процессы разрыхления, характеризуемые изменением упругих свойств почвы с помощью индикаторной функции

$$\eta\left(\bar{x}\right)=\begin{cases}1\, npu\, \bar{x}\in V_{H}\\ 0\, npu\, \bar{x}\in V_{\Pi}\end{cases} \tag{1}$$

где V_{Π} - объем разрыхленной почвы, V_{H} - объем неразрыхленной почвы, $V=V_{\Pi}+V_{H}$, где V - полный объем слоя, прилегающего к свободной поверхности.

Разрыхление представляет собой процесс образования пористости за счет микротрещин в поверхностном слое.

С помощью функции $\eta\left(\bar{x}\right)$ согласно (1) упругие модули могут быть записаны в виде

$$\lambda_{ijke}^{(x)}=\lambda_{ijke}^{0}\eta\left(\bar{x}\right) \tag{2}$$

Функция разрыхленности почвы Ω определяется как относительный разрыхленный объем, который зависит от времени или числа циклов обработки в виде

$$\Omega={}^{V_{\Pi}}\!\!\diagup_{V},\ \ 0\le\omega\le1 \tag{3}$$

Кинетическое уравнение для Ω в общем виде записывается в виде

$$\frac{d\Omega}{dt}=f\left(\Omega,\sigma_{ij},t\right)\ или\ \frac{d\Omega}{dn}=\varphi\left(\Omega,\sigma_{ij},n\right) \tag{4}$$

где t – время, n – число рыхлений, σ_{ij} – напряжения при воздействии обрабатывающих устройств.

Процессы накопления поверхностных разрыхлений могут идти по разным схемам. Единичные разрыхления (трещины, поры) равномерно распределены по объему разрыхленной почвы и являются зародышами кластеров, которые могут образовать перколяционный кластер, что означает макроскопическую разрыхленность объема для свободного протекания жидкости и газа. Критическое значение Ω_c, при котором наступает перколяция, называется порогом перколяции (протекания). Нахождение Ω_c является основной задачей в теории перколяции и основными расчетными моделями, используемыми при этом являются решеточные модели, на основе которых решаются задачи разрушения узлов и связей.

При решении задачи на основе модели разрушения по связям находится доля (концентрация) связей, которую необходимо разрушить, чтобы решетка, моделирующая объем (агрегат) почвы, распалась на две части, что соответствует макротрещине, прорезающей обрабатываемый слой.

В модели узлов вычисляется доля узлов, которые необходимо разрушить, чтобы сетка распалась на части.

Вычисление уровня разрыхленности рабочего объема на основе континуальной модели, описываемой уравнением (4) дает завышенные значения для времени разрыхления или числа циклов. Действительно, если записать уравнение (4) для времени накопления трещин, пор

$$\frac{dt}{d\Omega} = f^{-1}\left(\Omega, \sigma_{ij}, t\right) \tag{5}$$

и проинтегрировать (5), то получим

$$t = \int_0^1 f^{-1}\left(\Omega, \sigma_{ij}, t\right) d\Omega \tag{6}$$

где верхний предел $\Omega = 1$ соответствует 100% разрыхлению рабочего объема. На самом деле разрыхление (перколяция) происходит при $\Omega_{кр} < 1$, т.е. (6) можно представить в виде

$$t = \int_0^{\omega_{кр}} f^{-1}\left(\Omega, \sigma_{ij}, t\right) d\Omega,\ t = t_{пр} + t_{доп} \tag{7}$$

где $t_{кр} = \int_0^{\omega_{кр}} f^{-1}\left(\Omega, \sigma_{ij}, t\right) d\Omega, t_{доп} = \int_{\omega_{кр}}^1 f^{-1}\left(\Omega, \sigma_{ij}, t\right) d\Omega$

Задачи нахождения $\Omega_{кр}$ и $t_{кр}$ решаются различными способами. Наиболее точными из них являются подходы, основанные на теории перколяции в моделях узлов и связей [2]. Математическими моделями здесь служат модели случайного блуждания траектории трещины на решетках. Методы марковских цепей и процессов, а также теории потенциала составляют основу для получения численных результатов [3].

Пусть верхний слой представляет собой упругую среду, состояние которой описывается динамическими уравнениями в перемещениях

$$\left(\lambda + \mu\right)\left(u_{i,j}\right) + \mu \cdot u_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{8}$$

где λ, μ - упругие константы Ламе, ρ - плотность, u_i - перемещения.

Определяющими уравнениями являются закон Гука для однородной изотропной среды

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \qquad \theta = e_{ii} = div\bar{u},\ i, j = 1,2,3 \tag{9}$$

где σ_{ij} - напряжение, e_{ij} - деформации, связанные с перемещениями соотношениями Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{10}$$

Для продольной и сдвиговых волн, возбужденных в слое при обработке, имеют место уравнения

$$c_1^2 \cdot \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0, \qquad c_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho}} \tag{11}$$

$$c_2^2 \cdot \bar{\Omega} - \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial t^2} \le 0, \qquad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{12}$$

$$2\bar{\Omega} = rot\,\bar{\mathrm{u}}$$

Если процесс обработки представляет собой повторение некоторой операции такой, что можно считать $\bar{\mathrm{u}} = \bar{\mathrm{u}}_0\left(\bar{\mathrm{x}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}$, где ω - частота повторения нагружения рабочей поверхности слоя, тогда уравнения (11), (12) преобразуются к виду

$$c_1 \cdot \theta + \omega^2 \theta = 0 \tag{13}$$

$$c_2 \cdot \bar{Q} + \omega^2 \bar{\mathrm{Q}} = 0 \tag{14}$$

Уравнения (13), (14) при использовании методов узлов и связей дискретизируются на решетках подходящий конфигурации. Например, для квадратной решетки дискретный аналог уравнения (13) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{4} G_k\left(i,j\right)\left\{u_k\left(i,j\right) - u\left(i,j\right)\right\} = 0 \tag{15}$$

Применение метода расчета перколяции по узлам и связям для задачи обработки облегчается по сравнению с другими используемыми в различных физико-технических задачах [2].

Особенностью данной задачи является нахождение напряжений, деформаций внутри слоя под воздействием внешней нагрузки. Требуется описать разрыхление обрабатываемого слоя в результате его взаимодействия с обрабатывающим инструментом. В данном случае граничные условия на контуре, ограничивающим рабочую поверхность сохраняются постоянными, например $u_i * \left(\bar{x}^S\right) = 0\left(i = 1,2,3\right)$ где $\bar{x}^S$ - координаты точек контура. При каждом цикле за счет трения происходит смещение точек рабочей области, которое при известной кинематике режущего тела может быть определено. Это соответствует заданию перемещения $u\left(i,j\right)$ в (15), что позволяет решать систему алгебраических уравнений (15) обычным образом. Однако, в результате взаимодействия изменяется жесткость $G_k\left(i,j\right)$ случайным образом, что моделирует возникновение микротрещин за счет разрыва упругих связей. Вариант квадратной решетки для моделирования разрыхления изображен на рис.1

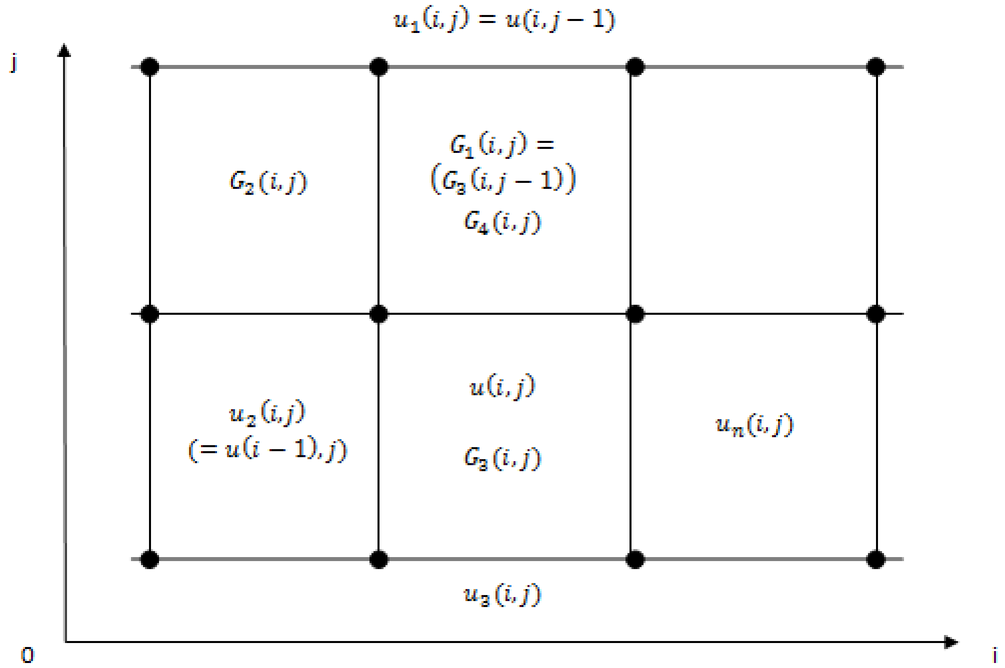

Рис. 1. Модель узлов и связей

Эволюцию процесса разрыхления представим как процесс достижения перемещением $u(i,j)$ некоторого критического значения, при котором происходит разрыв связи и жесткость G скачком изменяется до очень малого значения $\varepsilon G(0<\varepsilon \ll 1)$ Рис. 2, т.е. используем модель идеального разрушаемого тела.

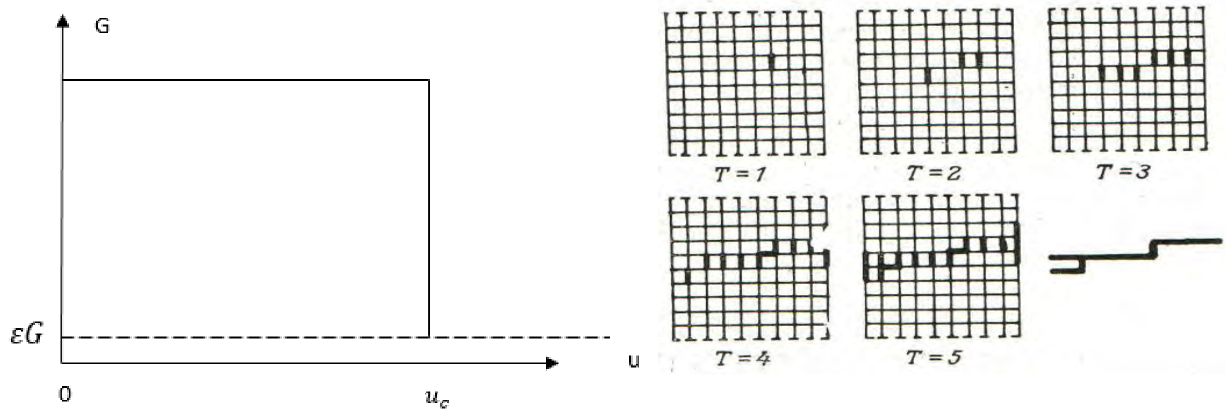

Рис. 2. Падение прочности слоя при образовании сквозного канала

Пусть после N циклов трещина прорезает рабочую поверхность в направлении перпендикулярном движению инструмента Рис. 3 [2].

В результате разрыхления изменяется фрактальная размерность почвенного пространства, причем уменьшается до величины

$$D = 1.65 \pm 0.05 \tag{16}$$

Среднее число разрушенных на N-том цикле связей подчиняется степенному закону [2]

$$N = N^{-\alpha},\ \alpha = 2.4 \pm 0.2 \tag{17}$$

где N – номер шага (цикла) во времени.

Математически эта задача описывается случайным блужданием трещины на двумерной решетке [2, 3]. Сплошность среды определяется ее эффективной прочностью, зависящей от эффективной жесткости. В рамках моделей эффективной среды выражение для макроскопических коэффициентов жесткости обрабатываемого слоя записывается в виде [1, 4]

$$\lambda^{*}_{ijke} = (1-\Omega)\lambda^{0}_{ijke} \tag{18}$$

где Ω имеет смысл концентрации пор, микротрещин.

Пороговое значение концентрации $\Omega_{кр}$, при котором происходит перколяция (протекание), находится различными методами, в частности, методами узлов и связей, коррелированных связей [2, 3]. Установлено, что в окрестности $\sigma_{кр}$ статистические характеристики кластеров поврежденных связей, узлов описываются показательной функцией с различными критическими показателями

$$\xi(\sigma) \sim (\sigma_{кр} - \sigma)^{-V} \tag{19}$$

где $\xi(\sigma)^2 = \left(2\sum_s R_S^2 i^2 n_i\right)\left(\sum_s s^2 n_s\right)$ – длина (радиус) корреляции, $R_S^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}(\overline{r_i} - \overline{r})^2, r = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\overline{r_i}$ – радиус – вектор центра масс кластера разрыхленной почвы.

Распределение кластеров повреждений по размерам в объеме определяется формулой

$$n_s(\sigma) = N_s N_p^{-1}, \sum n_s(\sigma) \sim |\sigma - \sigma_{пр}|^{\alpha} \tag{20}$$

где N_s - среднее число кластеров размера s, N_p – полное число связей или узлов.

Полное число поврежденных (разрушенных) элементов (комков) почвы

$$\sum_s s n_s(\Omega) \sim h^{\sigma^{-1}} \tag{21}$$

Средний размер кластеров вычисляется по формуле

$$S = \sum_s s\Omega_s |\sigma - \sigma_{пр}|^{\gamma} \tag{22}$$

где $\Omega_s = sn_s(\sigma)\left(\sum n_s(\sigma)\right)^{-1}$ - вероятность, что случайно выбранный узел принадлежит кластеру размера s.

По формуле

$$P_{\infty(\sigma)} = \frac{N_{\infty}}{N_{занятых}} \sim |\sigma - \sigma_{пр}|^{\beta} \tag{23}$$

вычисляется вероятность того, что случайным образом выбранный узел принадлежит данному кластеру. Важно, что эти показатели являются универсальными, не зависящими от типа решетки, типа перколяции, а зависят только от размерности пространства задач в соответствии с таблицей 1 [2].

Таблица 1.1 – Значения критических показателей

	Размерность пространства	
	$d=2$	$d=3$
β	$5/36$	0.417 ± 0.003
ν	$4/3$	0.875 ± 0.008
γ	$43/18$	1.795 ± 0.005

Экспериментальные данные показывают, что разрыхление многих материалов происходит по схеме ветвящихся процессов [3]. В этом случае используют модели графов, имеющих геометрию деревьев, в частности дерево Кэли [2].

Дерево Кэли с $z=3$ изображено на рис. 3

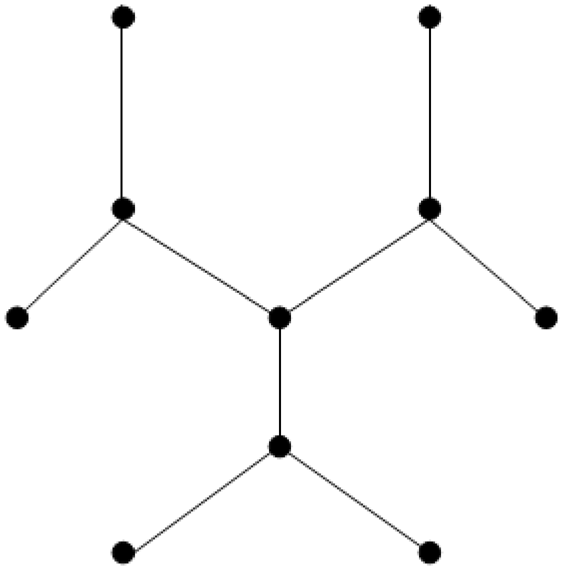

Рис. 3. Дерево Кэли

Обозначим через z – количество ветвей единичной длины выходящих из центрального узла. Из каждого узла выходит z – 1 ветвей. Узлы, лежащие на одинаковом расстоянии от центрального узла, образуют оболочки (кусты). На первой оболочке (окружности) радиуса ℓ расположено z узлов, z (z – 1) – на второй и т.д.

Обозначим через ℓ расстояние от центрального узла до произвольного узла, принадлежащего ℓ-той оболочке, содержащей $z\left(z-1\right)^{\ell-1}$ узлов.

Обозначим среднее число узлов кластера $g\left(\ell\right)$, находящихся на расстоянии ℓ от произвольно выбранного занятого узла. Считая, что узлы точки поворота (траектории трещины) случайным образом занимают узлы с вероятностью Ω, а каждая ℓ-тая оболочка содержит $z\left(z-1\right)^{\ell-1}$ узлов, тогда $g\left(\ell\right)$ вычисляется по формуле

$$g\left(\ell\right)=z\left(z-1\right)^{\ell-1}\Omega^{\ell}=\frac{z}{z-1}\left(\left(z-1\right)\Omega\right)^{\ell} \tag{24}$$

Пример модели разрыхления изображен на рис. 4.1, 4.2

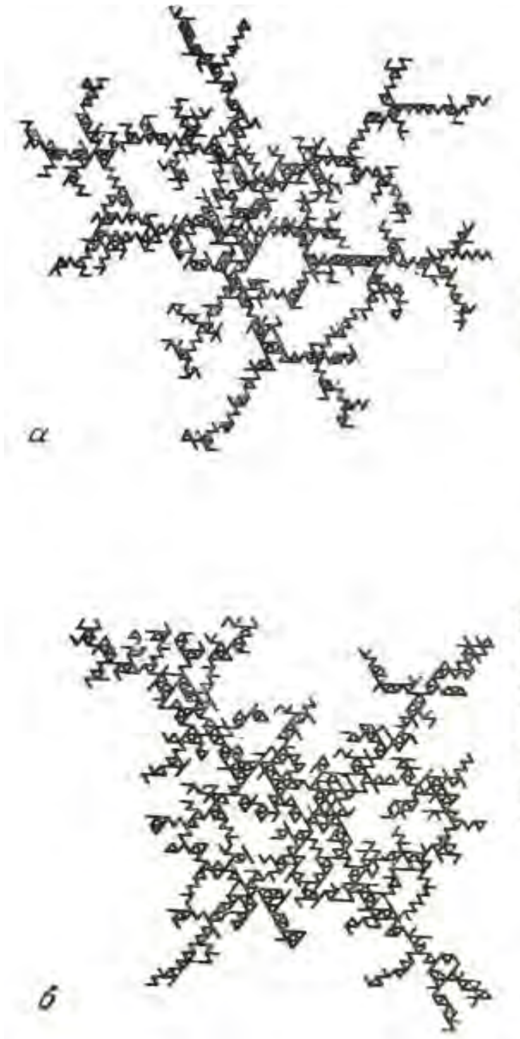

Рис. 4.1. Разрушенные связи:
а – при растяжении; б – при сдвиге слоя почвы

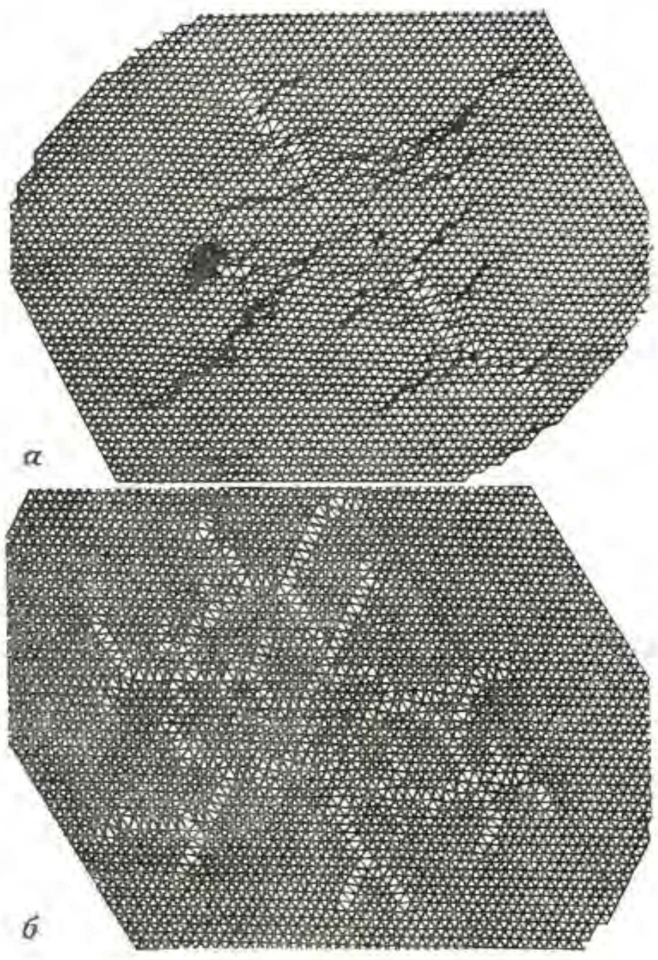

Рис. 4.2. Перемещение частиц:
а – при растяжении;
б – при сдвиге слоя почвы

На основе (24) могут быть вычислены статистические характеристики разрыхляемого объема. Функция $g(\ell)$ имеет смысл корреляционной функции так, что $g(\ell)$ при $\ell \to \infty$ стремится к нулю экспоненциально при $\Omega(z-1)<1$. Перколяция (бесконечный кластер) возникает при $\Omega \geq (z-1)^{-1}$, тогда $\Omega_{кр}$ вычисляется по формуле

$$\Omega_{кр} = \frac{1}{z-1} \tag{25}$$

Радиус корреляции вычисляется по формуле

$$\xi_\ell^2 = \frac{\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^2 g(\ell)}{\sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell)} = \Omega_{кр} \frac{\Omega_{кр}+\Omega}{\left(\Omega_{кр}-\Omega\right)^2} \quad при\,\Omega < \Omega_{кр} \tag{26}$$

Выражение для S имеет вид

$$S = 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) = \Omega_{кр} \frac{\Omega_{кр}+\Omega}{\Omega_{пр}-\Omega} \quad при\,\Omega < \Omega_{кр} \tag{27}$$

Из (27) следует, что критический показатель $\gamma = 1$.

Для n_s на решетке Кэли имеет место выражение

$$n_s = \sum_t q_{s,t} \Omega^s \left(1-\omega\right)^t \tag{28}$$

где $q_{s,t}$ - число конфигураций кластера из s узлов с периметром t, причем

$$t\left(s\right) = z + \left(s-1\right)\left(z-2\right) \tag{29}$$

Для модели разрыхления по схеме дерева Кэли вычисляются критические показатели

$$\gamma = 1,\ \ \beta = 1,\ \ \alpha = -1 \tag{30}$$

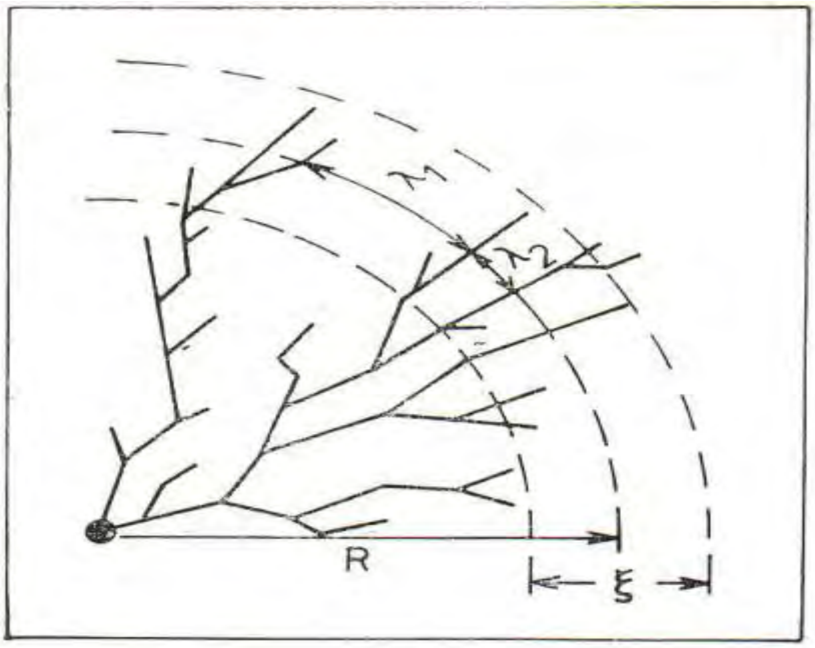

Рис. 5. Схема прорастания (ветвления) трещин из начальной поры

На рис. 5 приведен пример схемы разрыхления и оболочек, на которых находятся (в среднем располагаются) точки ветвления трещин (разрывов).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чигарев Ю.В., Сенкевич В.Т. Математические модели механики почв, Минск, 2007, 208 с.*
2. *Fractals in physics, Proc. of VI Int. Symp. on Fractals in Physics IC TP, Trieste, Italy, July 9-12, 1985.*
3. *Кемени Дж., Снell Дж. Конечные цепи Маркова, М., Наука, 1970, 271 с.*
4. *Островский Т.М. Прикладная механика неоднородных сред, Санкт-Петербург, Наука, 2000, 359 с.*