УДК 517.9

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ К-ОГО ПОРЯДКА, ИСПОЛЬЗУЕМОМ В ОПЕРАТОРНОМ МЕТОДЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

к.ф.-м.н. **Акимов В.А., Гончарова С.В.**

Белорусский национальный технический университет, Минск

В своих работах по решению граничных задач теории упругости авторы разрабатывали так называемый операторный метод разложения функций в ортогональные и не ортогональные ряды. Для этих целей использовался функциональный оператор от d_x вида:

$$D_n^l = T_l V_n^{-1} * f(x) = \frac{sh(ld_x)}{1 + d_x^2/\delta_n^2} * f(x) \tag{1}$$

где $T_l = sh(ld_x)$, $V_n = d_x^2 + \delta_n^2$, $\delta_n = \pi xn/l$; $d_x = d/dx$ - оператор производной по переменной x; l - длина интервала разложения функции в ряд; n - натуральное число; звездочкой обозначено операторное воздействие на функцию $f(x)$. Свойства этих операторов и алгоритм разложения функций в ряды описаны в [1]. В результате опыта работы с кратными операторами такого вида авторы приходят к следующим утверждениям.

Теорема 1. Частное решение дифференциального уравнения произвольного порядка $(d_x^2/\delta_n^2 + 1)^k * f(x) = \sin\delta_n x$ имеет вид: $f^*(x) = A_k x^k \sin\delta_n x$ если k - четное и $f^*(x) = A_k x^k \cos\delta_n x$, если k - нечетное натуральное число.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. Если $1 \le m \le k-1$, то $(d_x^2/\delta_n^2 + 1)^k * [x^m \cos\delta_n x] = 0$.

Рассмотрим предельный случай $m = k-1$. Непосредственно устанавливаем:

$$\left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+1\right)^k * [x^{k-1}\cos\delta_n x] = \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+1\right)^{k-1} * \left[\frac{(k-1)(k-2)x^{k-3}}{\delta_n^2}\cos\delta_n x - \right.$$

$$\left. - \frac{2(k-1)x^{k-2}}{\delta_n}\sin\delta_n x\right] = \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+1\right)^{k-2} * \left[\cdots - \frac{2^2(k-1)(k-2)x^{k-3}}{\delta_n^2}\cos\delta_n x\right] =$$

$$= \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+1\right)^{k-3} * \left[\cdots + \frac{2^3(k-1)(k-2)(k-3)x^{k-4}}{\delta_n^3}\sin\delta_n x\right] =$$

$$= \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+1\right)^{k-4} * \left[\cdots + \frac{2^4(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)x^{k-5}}{\delta_n^4}\cos\delta_n x = \right.$$

$$= \left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+1\right) * \left[\pm\frac{2^{k-1}(k-1)!}{\delta_n^{k-1}}\begin{Bmatrix}\cos\delta_n x\\ \sin\delta_n x\end{Bmatrix}\right] = 0$$

Что и требовалось доказать. Как легко заметить, смысл доказательства основан на том обстоятельстве, что после однократного применения оператора, стоящего в круглых скобках, степень полинома понижается на единицу.

Доказательство основной теоремы проведем по индукции, считая k нечетным. Если $k=1$, то получим $(d_x^2/\delta_n^2 + 1) * f(x) = \sin\delta_n x$, так как

$$(d_x^2/\delta_n^2 + 1) * [A_1 x \cos\delta_n x] = A_1[-(2/\delta_n)\sin\delta_n x - x\cos\delta_n x + x\cos\delta_n x] =$$
$$= -(2A_1/\delta_n)\sin\delta_n x$$

то получим: $-(2A_1/\delta_n)\sin\delta_n x = \sin\delta_n x$. Откуда определяем $A_1 = -\delta_n/2$.

Предположим теперь, что данное высказывание верно для произвольного натурального нечетного числа $k: (d_x^2/\delta_n^2+1)^k * [A_k x^k \cos\delta_n x] = \sin\delta_n x$. Покажем, что тогда оно верно для $k+2$, т.е. $(d_x^2/\delta_n^2+1)^{k+2} * [A_k x^{k+2}\cos\delta_n x] = \sin\delta_n x.$

$$(\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+1)^{k+2} * [A_k x^{k+2}\cos\delta_n x] = A_k (\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+1)^{k+1} * [\frac{(k+2)(k+1)x^k}{\delta_n^2}\cos\delta_n x -$$

$$-\frac{2(k+2)x^{k+1}}{\delta_n}\sin\delta_n x] = -\frac{2(k+2)A_k}{\delta_n}(\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+1)^{k+1} * [x^{k+1}\sin\delta_n x] =$$

$$= -\frac{2(k+2)A_k}{\delta_n}(\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+1)^k [\frac{(k+1)kx^{k-1}}{\delta_n^2} + \frac{2(k+1)x^k}{\delta_n}\cos\delta_n x] =$$

$$= -\frac{4(k+2)(k+1)A_k}{\delta_n^2}(\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+1)^k * [x^k\cos\delta_n x] = \sin\delta_n x$$

Причем $A_k = -\frac{\delta_n^k}{2^k k!}$, что и требовалось доказать. Здесь было учтено, что на основании леммы первое слагаемое в квадратных скобках обращалось в ноль после воздействия на него оператора, степень которого больше чем степень x.

На основании теоремы 1 можно сформулировать и теорему 2.

Теорема 2. Общее решение дифференциального уравнения $(d_x^2/\delta_n^2+1)^k * f(x) = \sin\delta_n x$ имеет вид:

$f(x) = \sum_{m=0}^{m=k-1} x^m (C_m \sin\delta_n x + D_m \cos\delta_m x) + A_k x^k \sin\delta_n x$, если k - четное и

$f(x) = \sum_{m=0}^{m=k-1} x^m (C_m \sin\delta_n x + D_m \cos\delta_m x) + A_k x^k \cos\delta_n x$ если k - нечетное натуральное число.

Причем $A_k = -\frac{\delta_n^k}{2^k k!}$, если k - нечетное и $A_k = \frac{\delta_n^k}{2^k k!}$, если k - четное.

Доказательство этой теоремы основано на решении однородного уравнения $(\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+1)^k * f(x) = 0$. Так как характеристическое уравнение имеет чисто комплексные корни $\pm i\delta_n$ кратности k, то в соответствии с [2], его решение имеет вид $\bar{f}(x) = \sum_{m=0}^{m=k-1} x^m (C_m \sin\delta_n x + D_m \cos\delta_n x)$, что и доказывает первую часть нашего утверждения. Доказательство второй части теоремы, т.е. нахождение частного решения полностью основано на теореме 1. Попутно заметим, что именно в этом и заключается роль первой теоремы, так как нахождение частного решения, например методом вариации произвольной постоянной [2], носит весьма проблематичный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. Мн.: УП «Технопринт», 2003.-101 с.*
2. *Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 2. 21 издание, 1974 г.*