УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ, ЧАСТИЧНО ОПЕРТОГО НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Поддубный А. А.

УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

Рассматривается изгиб трехслойного стержня ступенчато-переменного сечения, частично опертого на два участка упругого основания различной жесткости (рис. 1). На стержень действуют поперечные распределенные нагрузки. Принято, что наружные несущие слои являются упругопластическими, заполнитель – нелинейно упругий.

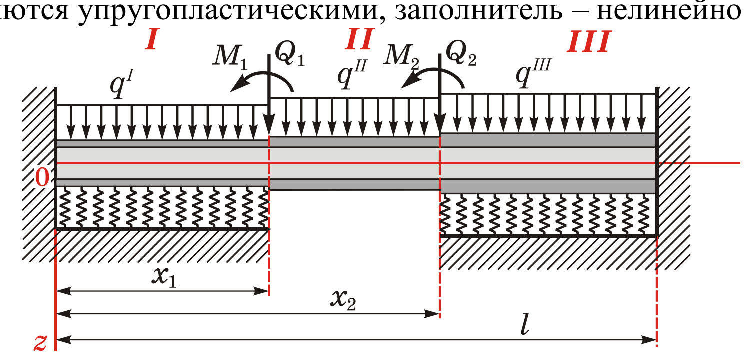

Рис. 1 – Расчетная схема трехслойного стержня ступенчато-переменного сечения, опертого на два участка основания

Для связи напряжений и деформаций в слоях используются уравнения теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [1] ($i, j = x, y, z$):

$$s_{ij}^{(k)n} = 2G_k f^{(k)n} э_{ij}^{(k)n} \; ; \; \sigma^{(k)n} = 3K_k 3\varepsilon^{(k)n} , \tag{1}$$

где $s_{ij}^{(k)n}, э_{ij}^{(k)n}$ – девиаторы тензоров напряжений и деформаций на n-м участке,

$\sigma^{(k)n}, \varepsilon^{(k)n}$ – их шаровые части;

G_k, K_k – модуль сдвига и объемный модуль материала k-го слоя;

$f^{(1)n}, f^{(2)n}$ – функции пластичности в несущих слоях;

$f^{(3)n}$ – функция нелинейности в заполнителе.

Функции пластичности и нелинейности в соотношениях (1) удобно представить в виде:

$$f^{(k)n} = 1 - \omega^{(k)n} \; ; \; \omega^{(k)n} < 1 . \tag{2}$$

Аналитический вид функций $\omega^{(k)n}$ взят из [2]:

$$\omega^{(k)n}(\varepsilon_u^{(k)}) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)} \le \varepsilon_s , \\ A_1(1 - \varepsilon_s / \varepsilon_u^{(k)})^{\alpha_1}, & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_s ; \end{cases}$$

где ε_s – деформационный предел текучести (для несущих слоев) или физической нелинейности (для заполнителя); A_1, α_1 – константы материалов, $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k-м слое

$$\varepsilon_u^{(k)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x^{(k)} - \varepsilon_y^{(k)})^2 + (\varepsilon_y^{(k)} - \varepsilon_z^{(k)})^2 + (\varepsilon_z^{(k)} + \varepsilon_x^{(k)})^2 + 6\left[(\varepsilon_{xy}^{(k)})^2 + (\varepsilon_{yz}^{(k)})^2 + (\varepsilon_{zx}^{(k)})^2\right]}$$

Если интенсивность деформаций не превышает в несущих слоях деформационного предела текучести, в заполнителе деформационного предела физической нелинейности, то $\omega^{(k)n} = 0$, а $f^{(k)n} = 1$.

Для рассматриваемого стержня интенсивность деформаций в k-м слое на n-м участке

$$\varepsilon_u^{(1)n} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x^{(1)n})^2}\,; \quad \varepsilon_u^{(2)n} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x^{(2)n})^2}\,;$$

$$\varepsilon_u^{(3)n} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x^{(3)n})^2 + 3(\varepsilon_{zx}^{(3)n})^2} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x^{(3)n})^2 + {}^3\!/_4(\psi^n)^2}\,.$$

Уравнения равновесия и их решения в рекуррентном виде. Получены системы уравнений равновесия в перемещениях для участков, опирающихся и не опирающихся на упругое основание, и их аналитические решения в итерациях [3].

Прогиб, сдвиг в заполнителе и продольное перемещение n-го участка стержня на упругом основании малой или большой жесткости определяются в рекуррентном виде выражениями:

$$\begin{gathered}
w^{n(m)}(x) = C_1^{n(m)}\operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)}\operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)}\operatorname{sh}(\beta_1^n x)\sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)}\operatorname{sh}(\beta_1^n x)\cos(\beta_2^n x) + \\
+ C_5^{n(m)}\operatorname{sh}(\beta_1^n x)\sin(\beta_2^n x) + C_6^{n(m)}\operatorname{ch}(\beta_1^n x)\cos(\beta_2^n x) + w_p^{n(m)}(x)\,; \\
\psi^{n(m)}(x) = C_1^{n(m)} b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^{n(m)} x) + C_2^{n(m)} b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) - C_3^{n(m)} b_2^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x)\cos(\beta_2^n x) + \\
+ C_3^{n(m)} b_3^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x)\sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_2^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x)\sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x)\cos(\beta_2^n) + \\
+ C_5^{n(m)} b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x)\sin(\beta_2^n x) - C_5^{n(m)} b_2^n \operatorname{ch}(\beta_1^{n(m)} x)\cos(\beta_2^n x) + C_6^{n(m)} b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x)\cos(\beta_2^n x) + \\
+ C_6^{n(m)} b_2^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x)\sin(\beta_2^n x) + C_7^{n(m)} + f_1^n(x) - f_1^{\omega n(m-1)}(x)\,; \\
u^{n(m)}(x) = C_1^{n(m)} b_4^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} b_4^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) - C_3^{n(m)} b_5^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x)\cos(\beta_2^n x) + C_3^{n(m)} b_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x)\sin(\beta_2^n x) + \\
+ C_3^{n(m)} b_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x)\sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_5^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x)\sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x)\cos(\beta_2^n) + \\
+ C_5^{n(m)} b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x)\sin(\beta_2^n x) - C_5^{n(m)} b_5^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x)\cos(\beta_2^n x) + C_6^{n(m)} b_6^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x)\cos(\beta_2^n x) + \\
+ C_6^{n(m)} b_5^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x)\sin(\beta_2^n x) + C_7^{n(m)}\alpha_{12}^n + C_8^{n(m)} x + C_9^{n(m)} + f_2^n(x) - f_2^{\omega n(m-1)}(x)\,.
\end{gathered} \tag{3}$$

Прогиб, сдвиг в заполнителе и продольное перемещение n-го участка стержня на упругом основании средней жесткости определяются в рекуррентном виде следующими выражениями.

$$\begin{gathered}
w^{n(m)}(x) = C_1^{n(m)}\operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)}\operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)}\operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + C_4^{n(m)}\operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + \\
+ C_5^{n(m)}\operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_6^{n(m)}\operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + w_p^{n(m)}\,; \\
\psi^{n(m)}(x) = C_1^{n(m)} b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} b_7^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_4^{n(m)} b_7^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + \\
+ C_5^{n(m)} b_8^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^{n(m)} b_8^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^{n(m)} + f_1^n(x) - f_1^{\omega n(m-1)}(x)\,; \\
u^{n(m)}(x) = C_1^{n(m)} b_4^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} b_4^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} b_9^n \operatorname{ch}(\lambda_2^n x) + C_4^{n(m)} b_9^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + \\
+ C_5^{n(m)} b_{10}^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^{n(m)} b_{10}^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^{n(m)}\alpha_{12}^n + C_8^{n(m)} x + C_9^{n(m)} + f_1^n(x) - f_1^{\omega n(m-1)}(x)\,.
\end{gathered} \tag{4}$$

Входящие в (3), (4) функции определяются выражениями:

$$f_1^{\omega n(m-1)}(x) = \alpha_{10}^n \int q_\omega^{n(m-1)} dx + \alpha_{11}^n p_\omega^{n(m-1)} + \frac{h_\omega^{n(m-1)}}{a_5^n}\,;$$

$$f_2^{\omega n(m-1)}(x) = \alpha_{10}^n \alpha_{12}^n \int q_\omega^{n(m-1)} dx + \alpha_{11}^n \alpha_{12}^n p_\omega^{n(m-1)} + \alpha_{14}^n \iint p_\omega^{n(m-1)} dx dx + \frac{\alpha_{12}^n}{a_5^n} h_\omega^{n(m-1)}\,.$$

Для определения констант интегрирования необходимо учесть граничные условия и условия сопряжения решений на границах участков.

Прогиб, сдвиг в заполнителе и продольное перемещение n-го участка стержня, не связанного с упругим основанием, определяются в рекуррентном виде следующими выражениями

$$\psi^{n(m)}(x) = C_1^{n(m)} b_{11}^n + C_2^{n(m)} \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_3^{n(m)} \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + g_1^n(x) - g_1^{\omega n(m-1)}(x) ;$$
$$w^{n(m)}(x) = C_1^{n(m)} (\alpha_{17}^n b_{11}^n x + \alpha_{18}^n x^3 / 6) + C_2^{n(m)} b_{14}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + C_3^{n(m)} b_{14}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) +$$
$$+ C_4^{n(m)} x^2 / 2 + C_5^{n(m)} x + C_6^{n(m)} + g_2^n(x) - g_2^{\omega n(m-1)}(x) ; \qquad (5)$$
$$u^{n(m)}(x) = C_1^{n(m)} (b_{15}^n + b_{16}^n x^2) + C_2^{n(m)} b_{17}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_3^{n(m)} b_{17}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + C_4^{n(m)} \alpha_{13}^n x +$$
$$+ C_5^{n(m)} \alpha_{13}^n + C_7^{n(m)} x + C_8^{n(m)} x + g_3^n(x) - g_3^{\omega n(m-1)}(x) .$$

Входящие в (5) функции определяются выражениями:

$$g_1^{\omega n(m-1)}(x) = \operatorname{sh}(\beta_3^n x)\left[\int \operatorname{ch}(\beta_3^n x)\left(b_{12}^n \int q_\omega^{n(m-1)} dx + b_{13}^n p_\omega^{n(m-1)} - \frac{\beta_3^n}{a_5^n} h_\omega^{n(m-1)}\right) dx\right] -$$
$$- \operatorname{ch}(\beta_3^n x)\left[\int \operatorname{sh}(\beta_3^n x)\left(b_{12}^n \int q_\omega^{n(m-1)} dx + b_{13}^n p_\omega^{n(m-1)} - \frac{\beta_3^n}{a_5^n} h_\omega^{n(m-1)}\right) dx\right];$$
$$g_2^{\omega n(m-1)}(x) = \alpha_{17}^n \int g_1^{\omega n(m-1)} dx + \alpha_{18}^n \iint\iint q_\omega^{n(m-1)} dx dx dx dx + \alpha_{19}^n \iiint p_\omega^{n(m-1)} dx dx dx;$$
$$g_3^{\omega n(m-1)}(x) = b_{18}^n g_1^{\omega n(m-1)} + b_{19}^n g_2^{\omega n(m-1)} + \alpha_{13}^n \alpha_{18}^n \iiint q_\omega^{n(m-1)} dx dx dx + b_{20}^n \iint p_\omega^{n(m-1)} dx dx .$$

Для определения констант интегрирования $C_1^n, \ldots, C_8^n$ учтены граничные условия и условия сопряжения участков друг с другом.

Теоретическое определение перемещений стержня. Несущие слои с толщинами $h_1 = h_2 = 0{,}02$ м выполнены из алюминиевого сплава Д16Т ($E = 7{,}208 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu = 0{,}35$; $K = 8 \cdot 10^{10}$ Па; $G = 2{,}67 \cdot 10^{10}$ Па), заполнитель толщиной $h_3 = 2c = 0{,}2$ м – из фторопласта (политетрафторэтилена) ($E = 2{,}68 \cdot 10^8$ Па; $\nu = 0{,}49$; $K = 4{,}7 \cdot 10^9$ Па; $G = 9{,}0 \cdot 10^7$ Па). Константы для принятых материалов взяты из работы [2]: для Д16Т $A_1 = 0{,}96$; $\alpha_1 = 2{,}34$; $\varepsilon_s = 0{,}735$ %, для фторопласта $A_1 = 0{,}905$; $\alpha_1 = 1{,}48$; $\varepsilon_s = 3{,}3$ %.

Длина стержня $l = 2$ м, ширина $b_0 = 0{,}2$ м. Стержень опирается на упругое основание двумя крайними участками ($x_1 = 0{,}3\, l$; $x_2 = 0{,}7\, l$; $\kappa^I = 300$, $\kappa^{III} = 600$ МПа/м) и испытывает действие равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивностью $q = 500$ кПа.

Была составлена компьютерная программа в среде MathCad [4], учитывающая возможность применения различных материалов слоев, упругих оснований различной жесткости, распределенных и сосредоточенных нагрузок, нерегулярности границы.

Рис. 2 иллюстрирует изменение прогиба w (*а*), сдвига в заполнителе ψ (*б*) и нормальных напряжений на наружной поверхности 1-го слоя (*в*) по длине стержня при различной жесткости основания на участке I.

За искомое решение принято 9-е приближение, которое отличается от предыдущих двух менее чем на 1 % – как для прогибов w, так и для сдвигов ψ. Посередине ($x = 0{,}5\, l$) наблюдаются максимумы прогибов. Напряжения на торцах положительны, а посередине пролета ($x = 0{,}5\, l$) – отрицательны, сдвиг в заполнителе переходит из положительной области в отрицательную. С уменьшением κ^I участка I графики меняются по форме, максимальные прогибы увеличиваются и смещаются к левой заделке. Напряжения у левой заделки имеют небольшие значения, с увеличением прогиба напряжения растут. Сдвиг в заполнителе увеличивается как в положительной области, так и в отрицательной.

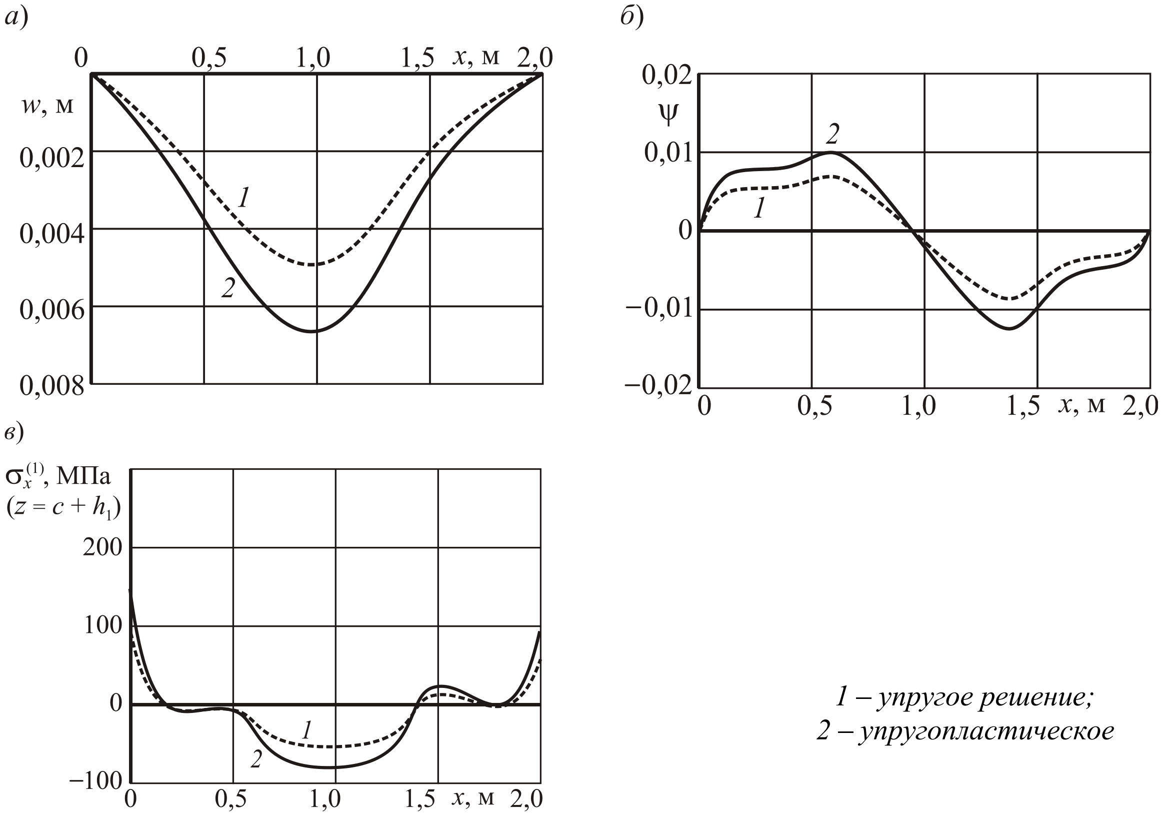

Рис. 2. Изменение прогиба w (а), сдвига в заполнителе ψ (б) и нормальных напряжений на наружной поверхности 1-го слоя (в) по длине стержня

Упругопластический прогиб и сдвиг в заполнителе стержня превосходят упругие перемещения на 46 % и 49 % соответственно.

Таким образом, исследованы прогиб, сдвиг в заполнителе, нормальные напряжения трехслойного стержня, частично опертого на упругое основание, под действием равномерно распределенной нагрузки с учетом пластичности несущих слоев и физической нелинейности заполнителя.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проект Т16Р-010).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск : Бел. Навука, 2004. – 342 с*
2. *Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – М : Физматлит, 2006. – 379 с.*
3. *Яровая, А. В. Механико-математическая модель деформирования неупругой трехслойной балки, частично опертой на упругой основание / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – № 30. – С. 256–262.*
4. *Напряженно-деформированное состояние трехслойной балки, частично опертой на упругое основание: регистрационное свидетельство № 5301403768 от 03 марта 2014 г. / А. В. Яровая, А. А. Поддубный; / Государственный регистр информационных ресурсов НИРУП ИППС. – 2014.*