УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЦЕССА ФОРМОВАНИЯ КОМПОЗИТА НА ЭТАПЕ ПОЛИМЕРИЗАЦИИ СВЯЗУЮЩЕГО

[1]Василевич Ю.В., [2]Федотов Д.А.. [1]Сахоненко С.В., [2]Сахоненко В.М.

[1]УО «Белорусский национальный технический университет», Минск
[2]ОАО «Авангард» Сафоново

На протяжении всех технологических процессов формования композиционного материала происходит существенное изменение его физико-механических свойств. И если свойства в направлении армирования волокон остаются линейными и практически неизменными, то податливость в поперечном направлении существенно нелинейна на стадиях намотки, разогрева, отверждения, готового изделия и может меняться на три порядка. Применение к такому материалу единой реологической модели практически исключено. Инженерный метод решения заключался в том, что для каждого этапа механическое поведение описывается своим законом. При этом на стыках стадий имеет место скачкообразное изменение характеристик. В отношении этих стыков могут быть приняты различные упрощающие гипотезы, например, гипотеза о наследовании напряженного состояния. Точность гипотез должна подвергаться экспериментальной проверке.

Пусть армирующий материал направлен в одном направлении. Тогда любое круглое сечение, перпендикулярное к нему, представляет совокупность множества сечений нитей и твердого связующего между ними. Такой композит можно определить как детерминированную структуру двух материалов: связующего и круглых сечений нитей.

На рисунке 1 показана схема расположения составляющих композита.

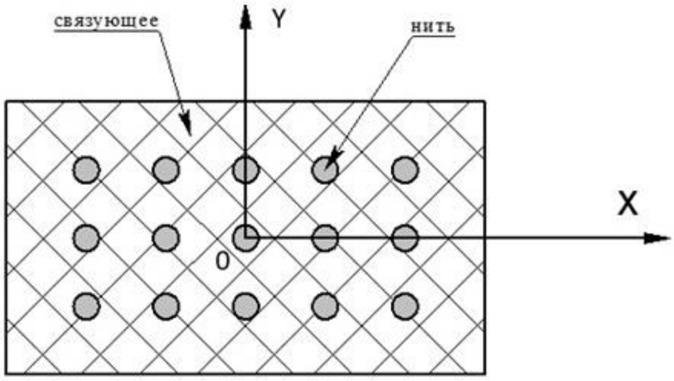

Рис. 1. Структурная схема композита

Для этого материала условия равновесия и совместности деформаций наполнителя и связующего приводят к следующим зависимостям [1-3]

$$\sigma_r = \sigma_{rH} = \sigma_{rc},\ \ \sigma_\theta = \sigma_{\theta H} = \sigma_{\theta c},$$
$$\varepsilon_r = m\varepsilon_{rc} + (1-m)\varepsilon_{rH}, \quad (1)$$
$$\varepsilon_\theta = m\varepsilon_{\theta c} + (1-m)\varepsilon_{\theta H}.$$

Здесь m – относительное содержание связующего в единице объема полимерной композиции; θ – индекс, означающий кольцевое направление; r – радиальное направление; σ_θ, σ_r, ε_θ, ε_r – «осредненные» напряжения и деформации; σ_{rH}, σ_{rc}, $\sigma_{\theta H}$, $\sigma_{\theta c}$, $\varepsilon_{\theta H}$, $\varepsilon_{\theta c}$, ε_{rH}, ε_{rc} – напряжения и деформации в связующем и наполнителе.

Предполагаем, что наполнитель и связующее являются изотропными и подчиняются закону Гука

$$\varepsilon_{rH} = \frac{1}{E_H}\left(\sigma_{rH} - \nu_H \sigma_{\theta H}\right), \ \varepsilon_{\theta H} = \frac{1}{E_H}\left(\sigma_{\theta H} - \nu_H \sigma_{rH}\right), \tag{2}$$

$$\varepsilon_{rc} = \frac{1}{E_c}\left(\sigma_{rc} - \nu_c \sigma_{\theta c}\right) + \varepsilon_c, \ \varepsilon_{\theta c} = \frac{1}{E_c}\left(\sigma_{\theta c} - \nu_c \sigma_{rc}\right) + \varepsilon_c, \tag{3}$$

где E_H, E_c, ν_H и ν_c – модули упругости и коэффициенты Пуассона связующего и наполнителя; индекс «H» относится к наполнителю, а индекс «c» к связующему; ε_c – линейная величина усадки связующего в результате полимеризации. Для осреднённых напряжений и деформаций имеет место связь

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu \sigma_\theta\right), \ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \nu \sigma_\theta\right). \tag{4}$$

где E и ν - модуль упругости и коэффициент Пуассона композита.

Подставив выражения (2) и (3) в два последних уравнения из (1), получим

$$\begin{aligned} d_{11}\sigma_r + d_{12}\sigma_\theta = d_1, \\ d_{12}\sigma_r + d_{11}\sigma_\theta = d_1, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$d_{11} = \frac{1}{E} - \frac{m}{E_c} - \frac{1-m}{E_H},$$

$$d_{12} = \frac{m\nu_c}{E_c} + \frac{(1-m)\nu_H}{E_H} - \frac{\nu}{E},$$

$$d_1 = m\varepsilon_c.$$

Из (5) путем вычитания правых и левых частей равенств найдем

$$\left(d_{11} - d_{12}\right)\left(\sigma_r - \sigma_\theta\right) = 0.$$

Пусть вначале $\sigma_r = \sigma_\theta$.. В таком случае из первого уравнения системы (5) найдём

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{d_1}{d_{11} + d_{12}}. \tag{6}$$

Зависимости (6) определяют напряжения в композите, возникшие по причине усадки связующего при его полимеризации в отсутствии нагрузки на внешней границе круглого сечения композиционного материала.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $d_{11} = d_{12}$. На этом основании из (5) получим

$$\sigma_\theta = -\sigma_r + \frac{d_1}{d_{11}}.$$

Подставим найденное значение для σ_θ в уравнение равновесия [3]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_r - \sigma_\theta\right) = 0. \tag{7}$$

В результате, для нахождения напряжения σ_r, имеем зависимость

$$\sigma_r^{'} + \frac{2\sigma_r}{r} = \frac{d_1}{d_{11} r}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\sigma_r = \frac{c}{r^2} + \frac{d_1}{2d_{11}}, \ \sigma_\theta = -\frac{c}{r^2} + \frac{d_1}{2d_{11}}. \tag{8}$$

Здесь c – произвольная постоянная.

В (8) следует положить $c=0$, так как в обратном случае напряжения σ_r и σ_θ обращаются в бесконечность при $r=0$, что противоречит здравому смыслу.

В условиях симметричной деформации зависимости между радиальными перемещениями u и компонентами деформации ε_θ и ε_r имеют вид [3, с. 215-225]

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr},\ \ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}\ . \tag{9}$$

Полученные решения (6) и (8) должны быть согласованы с зависимостями (9). В этом случае, на основании этих равенств, вытекает условие

$$\varepsilon_r = \left(\varepsilon_\theta r\right)'.$$

Для осредненных напряжений и деформаций связь между ними запишем в виде [3, стр. 216]

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \nu_{\theta r}\frac{\sigma_r}{E_r},\ \ \varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} - \nu_{r\theta}\frac{\sigma_\theta}{E_\theta}\ . \tag{10}$$

Подставим сюда значения (10) для $\varepsilon_r\, u\, \varepsilon_\theta$. При этом воспользуемся зависимостями (8). После проведения указанных операций убеждаемся, что равенство удовлетворяется для любых значений переменной *r*.

Процесс полимеризации связующего, находящегося в твердом состоянии, происходит при постоянной температуре, которая равна ≈160ºC. На этом основании в рассматриваемых формулах отсутствует зависимость от температурного градиента.

Выражения (8) при $c=0$ и выражения (6) представляют решение одной и той же задачи. На этом основании, чтобы избежать противоречия как в том, так и в другом случаях, должно быть $d_{11}=d_{12}$. Это выражается зависимостью

$$\frac{1+\nu}{E} = \frac{m\left(1+\nu_c\right)}{E_c} + \left(1-m\right)\frac{1+\nu_H}{E_H}. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь сечение этого однонаправленного композита параллельно волокнам. Из условий совместности деформаций и равновесия нитей для связующего в твёрдом состоянии можно получить следующие зависимости [1-3]

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 = \varepsilon_{1H} = \varepsilon_{1c}\ ,\ \ \varepsilon_2 = m\left(\varepsilon_{2c}+\varepsilon_c\right) + \left(1-m\right)\varepsilon_{2H} \\ \sigma_1 = m\sigma_{1c} + \left(1-m\right)\sigma_{1H}\ ,\ \ \sigma_2 = \sigma_{2H} = \sigma_{2c}\ .\end{gathered} \tag{12}$$

Здесь индекс «1» означает направление армирования, а индекс «2» обозначает направление, перпендикулярное направлению армирования. Принятые обозначения такие же, как и в зависимостях (1). Только вместо индекса «θ» следует принять индекс «1», а вместо индекса «*r*» принять индекс «2».

Изотропные материалы нитей и связующего подчиняются законам Гука (2) и (3). Связь между осреднёнными напряжениями и деформациями выражается равенствами [4, 5]

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_1\frac{\sigma_2}{E_2},\ \ \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_2\frac{\sigma_1}{E_1}\ .$$

Из (2) и (3) с учётом (12) получим зависимости

$$\begin{gathered}\varepsilon_{1H} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E_H}\left(\sigma_{1H} - \nu_H\sigma_2\right), \\ \varepsilon_{1c} = \varepsilon_1 - \varepsilon_c = \frac{1}{E_c}\left(\sigma_{1c} - \nu_c\sigma_2\right), \\ \sigma_{1H} = \varepsilon_1 E_H + \nu_H\sigma_2, \\ \sigma_{1c} = \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_c\right)E_c + \nu_c\sigma_2.\end{gathered} \tag{13}$$

Произведём теперь подстановку во второе и четвёртое уравнения (12), соответствующих величин из (13). В результате получим

$$\begin{aligned} b_{11}\sigma_1 + b_{12}\sigma_2 &= b_1, \\ b_{21}\sigma_1 + b_{22}\sigma_2 &= b_2, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$b_{11} = \frac{E_1^0}{E_1} - 1,\ b_{12} = \nu_2^0 - \frac{E_1^0}{E_2}\nu_1,\ b_{21} = \frac{\nu_2^0 - \nu_2}{E_1},$$

$$b_{22} = \frac{1-\nu_2^0\nu_1}{E_2} - \frac{m\left(1-\nu_c^2\right)}{E_c} - \frac{\left(1-m\right)\left(1-\nu_H^2\right)}{E_H},$$

$$b_1 = mE_c\varepsilon_c,\quad b_2 = m\left(1+\nu_c\right)\varepsilon_c,$$

$$E_1^0 = \left(1-m\right)E_H + mE_c,$$

$$\nu_2^0 = \left(1-m\right)\nu_H + m\nu_c .$$

К представленным уравнениям следует добавить ещё и уравнения равновесия [3]

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{12}}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial\tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_2}{\partial y} = 0. \tag{15}$$

Здесь координатные оси Ох и Оу совпадают с направлениями «1» и «2» соответственно; касательные напряжения $\tau_{12} = G\gamma_{12}$, $G-$модуль сдвига; $\gamma_{12} -$относительный сдвиг угла между направлениями «1» и «2».

Предполагаем деформации малыми, поэтому имеют место формулы Коши [3]

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x};\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y};\ \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} . \tag{16}$$

Система (14) имеет единственное решение при отличном от 0 определителе системы. Тогда, учитывая, что коэффициенты системы и свободные члены - постоянные числа, решение системы тоже будет постоянным. В результате из (10) получим, что $\varepsilon_1\, u\, \varepsilon_2$ – тоже постоянные числа. На этом основании из (16) определим

$$u = \varepsilon_1 x + f_1\left(y\right),\ v = \varepsilon_2 y + f_2\left(x\right). \tag{17}$$

Уравнения равновесия (15) с учётом того, что $\sigma_1\, u\, \sigma_2$ – постоянные, превращаются в

$$\frac{\partial\tau_{12}}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial\tau_{12}}{\partial x} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = const.$$

Подставим (17) в это уравнение. В результате получим, что

$$f_1\left(y\right) = const,\ f_2\left(x\right) = const.$$

Постоянные в предыдущем равенстве можно взять равными нулю, так как они не влияют на наряженное состояние композита, определяют только одинаковое перемещение его точек.

В равенствах (17) следует принять

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_1\frac{\sigma_2}{E_2},\ \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_2\frac{\sigma_1}{E_1}, \tag{18}$$

$$\sigma_1 = \frac{b_1 b_{22} - b_{12} b_2}{\Delta},\ \sigma_2 = \frac{b_{11} b_2 - b_{21} b_1}{\Delta}, \tag{19}$$

где

$$\Delta = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}.$$

Решение (19) удовлетворяет системе (14), уравнениям равновесия (15) и формулам Каши (16). Таким образом, (19) является решением задачи при отсутствии внешней нагрузки на границе. Для других граничных условий оно не подходит. Например, если граница $x = \pm 0,5a$ свободна от внешней нагрузки, а на границе $y = \pm 0,5b$ отсутствуют перемещения вдоль оси Oy, то такую задачу следует решать другим способом. Для такой постановки задачи решение может быть получено при условии существования линейной зависимости коэффициентов системы (14), т.е.

$$\frac{b_{11}}{b_{21}} = \frac{b_{12}}{b_{22}} = \frac{b_1}{b_2}\ . \tag{20}$$

В результате, если $b_{12} \neq 0$ из (14) найдём

$$\sigma_2 = \frac{b_1}{b_{12}} - \frac{b_{11}}{b_{12}}\sigma_1\ .$$

При таком условии уравнения равновесия (15) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} - \frac{b_{11}}{b_{12}}\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial y^2} = 0. \tag{21}$$

В рассматриваемой постановке решение задачи не должно зависеть от переменной *x*. В таком случае уравнение (20) превращается в зависимость

$$\frac{d^2\sigma_1}{dy^2} = 0.$$

Следовательно

$$\sigma_1 = c_1 y + c_2\,,\ \sigma_2 = \frac{b_1}{b_{12}} - \frac{b_{11}}{b_{12}}\left(c_1 y + c_2\right). \tag{22}$$

Воспользуемся полученным решением для нахождения перемещений u и v. Для этого используем формулы Каши (16) и зависимости (18). В результате найдём

$$u = \left\lfloor \left(c_1 y + c_2\right)\left(\frac{1}{E_1} + \frac{\nu_1}{E_2}\frac{b_{11}}{b_{12}}\right) - \frac{\nu_1}{E_1}\frac{b_1}{b_{12}} \right\rfloor x + f\left(y\right),$$

$$\vartheta = \frac{1}{E_2}\frac{b_1}{b_{12}}y - \left(c_1\frac{y^2}{2} + c_2 y\right)\left(\frac{\nu_2}{E_1} + \frac{b_{11}}{b_{12}}\frac{1}{E_2}\right) + g\left(x\right),$$

$$\gamma_{12} = \left(\frac{1}{E_1} + \frac{\nu_1}{E_2}\frac{b_{11}}{b_{12}}\right)c_1 x + f'\left(y\right) + g'\left(x\right).$$

В этих зависимостях функции f(y) и g(x) появились в результате интегрирования. Однако, так как существует предположение, что решение не должно зависеть от переменной *x*, следует принять функцию g(x) равную постоянной. Найденные зависимости должны удовлетворять уравнениям равновесия (15). После подстановки убеждаемся, что такое условие будет выполнено, если

$$\frac{b_{11}}{b_{12}} = G\left(\frac{1}{E_1} + \frac{\nu_1}{E_2}\frac{b_{11}}{b_{12}}\right), \quad f''\left(y\right) = 0. \tag{23}$$

Пусть теперь рассматривается задача, постановка которой приводит к независимости решения от переменной y. Алгоритм решения такой задачи аналогичен рассмотренному выше. В таком случае можно получить

$$\sigma_1 = c_3 x + c_4,\ \ \sigma_2 = \frac{b_1}{b_{12}} - \frac{b_{11}}{b_{12}}\left(c_3 x + c_{4,}\right),$$

$$u=\left(\frac{c_3}{2}x^2+c_4x\right)\left(\frac{1}{E_1}+\frac{\nu_1}{E_2}\frac{b_{11}}{b_{12}}\right)-\frac{\nu_1}{E_2}\frac{b_1}{b_{12}}x+f_1(y),$$

$$\vartheta=\left[\frac{b_1}{b_{12}E_2}-(c_3x+c_4)\left(\frac{b_{11}}{b_{12}E_2}+\frac{\nu_2}{E_1}\right)\right]y+g_1(x),$$

$$\gamma_{12}=-c_3y\left(\frac{b_{11}}{b_{12}}\frac{1}{E_2}+\frac{\nu_2}{E_1}\right)+f_1{}'(y)+g_1{}'(x).$$

Здесь условия независимости решения от переменной y позволяет считать функцию $f_1(y)$ равной постоянной. Удовлетворение найденного решения уравнениям равновесия (15) приводит к необходимости выполнения следующих зависимостей

$$\frac{b_{11}}{b_{12}}\frac{1}{E_2}+\frac{\nu_2}{E_1}=\frac{1}{G},\quad g_1{}''(x)=0. \tag{24}$$

Если предположить, что формулы (11), (20), (23) и (24) получены для одного и того же материала, то они в совокупности позволяют определить постоянные $E_1, E_2, \nu_1,\ \nu_2\, u\, G,$ которые позволяют описать напряжённое состояние в композиционном материале в момент полимеризации связующего.

В таком случае в зависимости (11) необходимо положить $E=E_2,\ \nu=\nu_2$. В результате система уравнений для нахождения параметров $E_1, E_2, \nu_1,\ \nu_2\, u\, G$ предстанет в виде

$$\begin{gathered}\frac{1+\nu_2}{E_2}=\frac{m(1+\nu_c)}{E_c}+\frac{(1-m)(1+\nu_H)}{E_H},\\ \frac{b_{11}}{b_{21}}=\frac{E_c}{1+\nu_c}=E_c^0=\frac{E_1^0-E_1}{\nu_2^0-\nu_2},\\ \frac{b_{12}}{b_{22}}=E_c^0=E_c\frac{E_2\nu_2^0-E_1^0\nu_1}{E_c\left(1-\nu_2^0\nu_1\right)-m\left(1-\nu_c^2\right)E_2},\\ \frac{b_{11}}{b_{12}}=G\cdot\left(\frac{1}{E_1}+\frac{\nu_1}{E_2}\frac{b_{11}}{b_{12}}\right),\quad \frac{b_{11}}{b_{12}}\frac{1}{E_2}+\frac{\nu_2}{E_1}=\frac{1}{G}.\end{gathered} \tag{25}$$

Здесь все приведенные параметры в уравнениях (25) имеют тот же смысл, что и в зависимостях (14). Кроме того, для упрощения исследований в выражении для b_{22} взяты только два первых слагаемых, так как

$$E_H \gg E_c \tag{26}$$

и поэтому третьим слагаемым можно пренебречь. Также примем гипотезу, что $E_2 \gg E_c$.

Решение системы (25) проведём следующим образом.

С учетом (26) и принятой гипотезы из первых трёх уравнений находим

$$\begin{gathered}\nu_1=\frac{\nu_2^0+m(1-\nu_c)}{E_1^0}E_2-\frac{E_c}{(1+\nu_c)E_1^0}\approx\left[\nu_2^0+m(1-\nu_c)\right]\frac{E_2}{E_1^0},\\ \nu_2=\frac{m(1+\nu_c)}{E_c}E_2-1\approx\frac{m}{E_c}E_2,\\ E_1=E_2m(1+\nu_c)+E_1^0\approx E_1^0.\end{gathered} \tag{27}$$

Третье и четвёртое уравнения легко превращаются в зависимости

$$G^2(1-\nu_1\nu_2)+(\nu_1E_1+\nu_2E_2)G=E_1E_2, \tag{28}$$

$$\left(\frac{b_{11}}{b_{12}}\right)^2+\left(\nu_2\frac{E_2}{E_1}-\nu_1\right)\left(\frac{b_{11}}{b_{12}}\right)=\frac{E_2}{E_1}\ .$$

Рассмотрим теперь отношение b_{11}/b_{12}. Подставим в него значения параметров из (14). В результате найдём

$$\frac{b_{11}}{b_{12}}=\frac{E_1^0-E_1}{\nu_2^0E_2-E_1^0\nu_1}\ \frac{E_2}{E_1}\approx\frac{(1+\nu_c)}{(1-\nu_c)}\frac{E_2}{E_1}\ .$$

Подставим теперь значения параметров (27) и предыдущее равенство во второе уравнение из (28). В результате получим следующее уравнение для E_2

$$E_2{}^2+\left[\frac{1}{m(1-\nu_c)}-\frac{\nu_2^0+m(1-\nu_c)}{1+\nu_c}\right]E_cE_2=E_1^0E_c\,\frac{(1-\nu_c)}{m(1+\nu_c)^2}\ . \qquad (29)$$

С учётом замечания (26) вторым слагаемым в левой части предыдущего уравнения можно пренебречь. В таком случае имеем

$$E_2{}^2=E_1^0E_c\frac{1-\nu_c}{m(1+\nu_c)^2}\ .$$

Следовательно,

$$E_2=\sqrt{E_1^0E_c\frac{1-\nu_c}{m(1+\nu_c)^2}}\ . \qquad (30)$$

Остальные искомые величины найдём из (27) и (28) путём подстановки в них величины E_2, определяемой соотношением (30).

Система (14) решена при $\varepsilon_c\neq 0$. Предположим теперь, что полимеризация связующего осуществлена. После чего к композиционному материалу приложена внешняя нагрузка. В этом случае необходимо считать, что $\varepsilon_c=0$. И тогда напряжения σ_1 и σ_2 будут удовлетворять системе (14), если все коэффициенты b_{ij} равны нулю. Это позволяет определить величины жесткостных характеристик композиционного материала в момент после отверждения связующего. Приравнивая коэффициенты b_{ij} нулю, найдём

$$E_1=E_1^0,\ \nu_2=\nu_2^0.$$

$$\nu_1=\frac{\nu_2^0E_c}{m(1-\nu_c^2)E_1^0+(\nu_2^0)^2E_c}\ ,$$

$$E_2=\frac{E_cE_1^0}{m(1-\nu_c^2)E_1^0+(\nu_2^0)^2E_c}\ , \qquad (31)$$

Процесс усадки связующего влияет на величину жесткостных характеристик композита. Они подчиняются законам, установленным зависимостями (27) и (30). Жесткостные характеристики готового материала отличаются от промежуточных и находятся по формулам (31). Такое поведение обусловлено некоторыми свойствами нелинейности, происходящими в процессе формования материала конструкции.

Выводы:

На этапе полимеризации связующего механическое поведение композиционного материала описывается своим законом. Такой закон устанавливается посредством системы (5). В случае, когда правая часть упомянутой системы отлична от нуля на композиционный материал накладываются свойства, связанные с усадкой связующего. Равенство нулю правой части системы (5) означает переход на следящий этап формования композиционного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В.В. Плоская задача теории упругости для деталей из армированных материалов. Сб. «Расчеты на прочность», Вып. 12. М., 1966. 428 с.*
2. *Лапин А.А. Плоская деформация резинокордовой ткани. Сб. «Расчеты на прочность в машиностроении». МВТУ 46. М., Машгиз, 1955. С. 87-99.*
3. *Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 2. Под ред. И.А. Биргера. М., «Машиностроение», 1968. 464 с.*
4. *Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М., 1950. С. 483.*
5. *Лехницкий С.Г. Обобщение задачи о плоской деформации на случай упругого тела с произвольной анизотропией // Уч. зап. Саратовск. гос. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. Том1. Вып. 2. 1938. С.154-157.*